Sitzungsber. Abt. II (2006) 215: 37–44

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Pythagoräische Tripel höherer Ordnung

Von

Edmund Hlawka

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 27. April 2006
durch das w. M. Edmund Hlawka)

§1.

Wir wollen das Paar (A, B) (A, B ganze Zahlen, o.B.d.A. $A > B > 0$) als Glied einer Folge

$$(A(g), B(g))$$

auffassen, wobei g alle ganzen Zahlen durchläuft.

Wir setzen zunächst

$$A(0) = A, \qquad B(0) = B, \tag{1}$$

dann definieren wir für $g \geq 0$

$$\begin{aligned} A(g+1) &= (A^2(g) + B^2(g))^{1/2} = \sqrt{S(g)}, \\ B(g+1) &= (2A(g)B(g))^{1/2} = \sqrt{P(g)} \end{aligned} \tag{2}$$

und für $g \leq 0$

$$\begin{aligned} A(g-1) &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{S(g)} + \sqrt{D(g)}\right), \\ B(g-1) &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{S(g)} - \sqrt{D(g)}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Dabei haben wir

$$S(g) = A^2(g) + B^2(g) \tag{4}$$

und

$$D(g) = A^2(g) - B^2(g) \tag{4'}$$

gesetzt.

Ist g nichtnegativ, so erhalten wir die Rekursionsformel

$$S(g+1) = (A(g) + B(g))^2 \tag{5}$$

und für nicht positives g

$$S(g-1) = (A(g))^2. \tag{5'}$$

Analog erhalten wir für $g>0$

$$D(g+1) = (A(g) - B(g))^2 \tag{6}$$

und für negatives g

$$D(g-1) = (A^4(g) + B^4(g))^{1/2} = \sqrt{S(g)D(g)}. \tag{6'}$$

Weiters ist für $g>0$

$$P(g+1) = 2\sqrt{P(g)S(g)} \tag{7}$$

und für negatives g

$$P(g-1) = (B(g))^2. \tag{7'}$$

§2.

Wir definieren nun den Winkel $\vartheta(g)$ mit $\vartheta(0) = \vartheta$. Diesen Winkel habe ich in der Arbeit [3] definiert durch

$$e^{i\pi\vartheta} = \frac{A + iB}{A - iB}.$$

Er ist nach SCHERRER und HADWIGER irrational. Beschränken wir uns auf den Fall $g \geq 0$, so definieren wir

$$e^{i\pi\vartheta(g+1)} = \frac{A(g+1) + iB(g+1)}{A(g+1) - iB(g+1)} \tag{1}$$

$$= \frac{(A(g+1) - iB(g+1))^2}{A^2(g+1) + B^2(g+1)}$$

$$= \frac{A^2(g+1) - B^2(g+1) - 2iA(g+1)B(g+1)}{A^2(g+1) + B^2(g+1)}$$

$$= \frac{D(g+1) + iP(g+1)}{S(g+1)}. \tag{2}$$

Weiters definieren wir (h ganze Zahl)

$$e^{i\pi h\vartheta} = \frac{A_h(g+1) + iB_h(g+1)}{A_h(g+1) - iB_h(g+1)},$$

und es ist

$$A_h(g+1) + iB_h(g+1) = (A(g+1) + iB(g+1))^4.$$

Es ist

$$D(g+1) = (A(g) - B(g))^2$$

und

$$P(g+1) = 2\sqrt{P(g)S(g)}.$$

Es ist ($g \geq 0$)

$$\cos\pi\vartheta(g+1) = \frac{(A(g) - B(g))^2}{(A(g) + B(g))^2} = \frac{D(g)}{(A(g) + B(g))^2}$$

und

$$\sin\pi\vartheta(g+1) = \frac{2\sqrt{P(g)S(g)}}{(A(g) + B(g))^2} = \frac{2\sqrt{2AB(A^2(g) + B^2(g))}}{A^2(g) + B^2(g) + 2A(g)B(g)},$$

also ist

$$\sin\pi\vartheta(g+1) = \frac{2\sqrt{\frac{2AB}{A^2+B^2}}}{1 + \frac{2AB}{A^2+B^2}} = \frac{2\sqrt{\sin\vartheta(g)}}{1 + \sin\vartheta(g)} \geq \sqrt{\sin\vartheta(g)}. \tag{3}$$

Daraus folgt mit $A = A(g)$, $B = B(g)$ und $\vartheta = \vartheta(g)$

$$\sin\pi\vartheta(g+1) = \frac{2}{1 + \frac{2AB}{A^2+B^2}} = \frac{2\sqrt{\sin\vartheta}}{1 + \sin\vartheta} \geq \sqrt{\sin\vartheta}.$$

Setzen wir $\sqrt{\sin\vartheta} = y$, so ist

$$\sin\pi\vartheta(g+1) = \frac{2y}{1+y^2}, \qquad \cos\pi\vartheta(g+1) = \frac{1-y^2}{1+y^2},$$

also ist

$$e^{i\pi\vartheta} = \frac{(1-iy)^2}{(1+y)^2} = \frac{1-iy}{1+iy}.$$

Es ist nun nach (3)

$$\sin\vartheta(g+1)\geq 2\sqrt{\sin\vartheta(g)},$$

daraus folgt durch vollständige Induktion

$$\sin\vartheta(g+1)\geq(\sin\vartheta(g))^{w(g)}$$

mit $g\geq 0$, wo $w(g)=1/2^{g+1}$ und allgemein

$$\sin\pi h\vartheta(g+1)\geq(\sin\pi h\vartheta(g))^{w(g)}.$$

Nun ist $\vartheta(0)=\vartheta_0$ irrational und $\sin\pi h\vartheta_0$ von der Gestalt

$$\frac{Z}{(A^2+B^2)^h},$$

wo Z eine ganze Zahl $\neq 0$ ist.

Es wird also

$$\sin\pi h\vartheta(g+1)\geq\left(\frac{2A_nB_n}{A^2+B^2}\right)^{hw(g)}\geq\frac{1}{(A^2+B^2)^{hw(g)}}.$$

Wir betrachten nun die Weylsche Summe

$$W_h=\frac{1}{N}\sum_{h=1}^{N}e^{2\pi ih\vartheta(g+1)}.$$

Es ist nun

$$|W_h(g)|\leq\frac{1}{N}\frac{2}{|\sin h\vartheta(g+1)|}\leq\frac{1}{N}(A^2+B^2)^{hw(g)}.$$

Wir betrachten nun die Folge $(h\vartheta(g+1))$ modulo 1. Nach dem Satz von ERDÖS-TURAN-KOKSMA ist die Diskrepanz dieser Folge

$$D_N\leq C\left(\frac{1}{M}+\sum_{h=1}^{M}\frac{W_N(h)}{h}\right),$$

wo M noch zu wählen und C eine absolute Konstante ist. Wir erhalten zunächst

$$D_N\leq C\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{N}(A^2+B^2)^{Mw(g)}\log M\right).$$

Wir wählen nun M so, dass

$$Mw(g)\lg(A^2+B^2)-\log N=-\log\lg N$$

ist, also

$$M = \frac{\log N - \log \lg N}{w(g)\lg(A^2 + B^2)}$$

wird. Wir erhalten somit

$$D_N(g) \leq \frac{20C\lg(A^2 + B^2)}{w(g)} \frac{\log \lg N}{\log N}.$$

Setzen wir alles ein, so erhalten wir

$$D_N(g) \leq C_1 2^{g+1} \lg(A^2 + B^2)\left(\frac{\log \lg N}{\log N}\right).$$

Beispiel 1.

$$\begin{aligned} &A(0) = 2, && B(0) = 1,\\ &A(1) = \sqrt{5}, && B(1) = \sqrt{4} = 2,\\ &A(2) = 3, && \ldots\\ &\ldots && B(3) = 2\sqrt{20},\\ &A(4) = 49, && B(4) = 2\sqrt{60}. \end{aligned}$$

Allgemein: Wir nehmen eine Primzahl von der Form $p = 4k + 1$ und definieren

$$T(s) = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x^2 + s}{p}\right),$$

wo $T(s)$ eine gerade Zahl ist. Es sei nun $s = r$, wenn r quadratischer Rest modulo p, also $(r/p) = 1$, ist. Wir schreiben $s = n$, wenn n Nichtrest modulo p, also $(n/p) = -1$, ist. p besitzt dann die Darstellung

$$p = \left(\tfrac{1}{2}T(r)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}T(n)\right)^2$$

und lässt sich – wie schon von FERMAT her bekannt – als Summe zweier Quadrate darstellen. Die Darstellung ist abgesehen von Vorzeichen und Vertauschungen eindeutig. Die obige Darstellung stammt von JABOBSTHAL. Man kann also für A die Darstellung $\frac{1}{2}T(r)$ und für B die Darstellung $\frac{1}{2}T(n)$ nehmen.

§3.

Wir setzen jetzt (wieder $g \geq 0$)

$$k'(g+1) = \left(\frac{B(g+1)}{A(g+1)}\right)^2 = \frac{P(g)}{S(g)}. \tag{1}$$

Es ist

$$\sqrt{k'(g+1)} = \left(\frac{B(g+1)}{A(g+1)}\right)^2 = \sqrt{\frac{P(g)}{S(g)}} \tag{2}$$

(wir nehmen also das positive Vorzeichen der Quadratwurzel).

Wir definieren weiters, wobei wir $A(g+1)$ bzw. $B(g+1)$ kurz mit A bzw. B bezeichnen,

$$k(g+1) = \frac{1-k'(g+1)}{1+k'(g+1)} = \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2} = \frac{D(g+1)}{S(g+1)}. \tag{3}$$

Wir erhalten also

$$k^2(g+1) + k'^2(g+1) = 1. \tag{4}$$

Es wird

$$k'(g+1) = \frac{2\frac{B(g)}{A(g)}}{1+\frac{B^2(g)}{A^2(g)}} = \frac{2\sqrt{k'(g)}}{1+k(g)}, \tag{5}$$

und es wird

$$1+k(g+1) = \frac{2A^2(g)}{S(g)} = 1 + \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{2}{1+k'(g+1)}. \tag{6}$$

Wir definieren nun die Größen $a(g)$ und $b(g)$, wobei

$$a(g) = S + P, \qquad b(g) = S - P, \tag{7}$$

die wieder positiv sind, und wenden den so genannten arithmetisch-geometrischen Algorithmus (kurz AG) an. Wir setzen

$$a_1(g) = \tfrac{1}{2}(a(g)+b(g)), \qquad b_1(g) = \sqrt{a(g)b(g)}.$$

Im Fall (6) ist

$$a_1(g) = S(g), \qquad b_1(g) = \sqrt{S^2-P^2} = D.$$

Wir setzen den Prozess weiter fort,

$$a_2(g) = \frac{a_1(g)+b_1(g)}{2}, \qquad b_2(g) = \sqrt{a_1(g)b_1(g)}$$

und so weiter.

Im zweiten Fall wenden wir AG auf das Paar

$$a'(g) = S(g) + D(g), \qquad b'(g) = S(g) - D(g) \tag{6'}$$

an. Es wird

$$a_1'(g) = S(g), \qquad b_1'(g) = \sqrt{S^2(g) - D^2(g)} = P.$$

GAUSS hat nun Folgendes gezeigt: Besteht das Ausgangspaar (a, b) aus positiven Zahlen kleiner als Eins und konstruieren wir die zugehörige AG-Folge (a_j, b_j), so sind die beiden Folgen (a_j) und (b_j) beide *konvergent* und konvergieren zum *gleichen Grenzwert* $M(a, b)$, den GAUSS den arithmetisch-geometrischen Grenzwert nennt. Es gilt weiter

$$|a_j - b_j| \leq \frac{|a - b|}{2^j}.$$

Der Grenzwert konvergiert also sehr rasch. Die Folge a_j ist monoton wachsend, die Folge b_j monoton abnehmend.

Bei der Folge (6) gilt

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{M(a,b)} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}},$$

wo $a = S$ und $b = D$ ist.

Im Fall $(6')$ gilt

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{M(a',b')} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a'^2\cos^2\varphi + b'^2\sin^2\varphi}}$$

mit $a' = S$ und $b' = P$.

Heben wir jetzt s in k bzw. k' heraus, ersetzen also die Folge $(a(g), b(g))$ durch die Folge $(1, k(g))$ bzw. $(1, k'(g))$, so erhalten wir

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{M(1,k)} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = K$$

und

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{M(1,k')} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi}} = K'.$$

K und K' sind die so genannten vollständigen Integrale erster Gattung in der Legendreschen Normalform, also Funktionen von k bzw. k'.

Wir setzen weiter $q = e^{\pi i\tau}$, $\tau = iK'/K$ und führen die ϑ-Funktion ein,

$$\vartheta_3(v) = \sum q^{n^2} e^{2\pi i v},$$

wo $\vartheta_2(v) = \vartheta_1$ und $\vartheta_1(v) = \vartheta_1$ und die Nullwerte $\vartheta_j(0)$ sind. Weiters setzen wir $u = \pi\vartheta_3^2(v)$,

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)},$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}.$$

Es ist

$$k = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2, \qquad k' = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\right)^2$$

(vgl. [4], S. 53).

Literatur

[1] HLAWKA, E. (1999) Über einige geometrische Anwendungen im Zusammenhang mit Pythagoräischen Tripeln und Gleichverteilung. Aequationes Math. **58**: 163–175

[2] HLAWKA, E. (1999) Pythagorean Tripels. In: BAMBAH, R. P., DUMIR, V. C., HANS-GILL, R. J. (eds.) Number Theory, pp. 141–155. Hindustan Book Agency, New Delhi

[3] HLAWKA, E. (Preprint) Über einige geometrische Anwendungen der Pythagoräischen Tripel, Teil III

[4] KRAUSE, M. (1912) Theorie der elliptischen Funktionen (Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende, 13). B. G. Teubner, Stuttgart

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Dr. h.c. Edmund Hlawka, Margarethenstraße 27/II/9, 1040 Wien, Austria.