Sitzungsber. Abt. II (2002) 211: 83–115

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften



# Gleichungen $a{u_h}^k + b{u_n}^l + c{u_q}^m = 0$ in linearen rekurrenten Folgen $\langle u_n \rangle$, Teil 3

Von

**Susanne Grünes**

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 21. März 2002
durch das w. M. Edmund Hlawka)

## 5. Die Beweise der Theoreme 3.1. und 3.2.

Im vorigen Abschnitt haben wir ausschließlich solche Partitionen untersucht, die kein Singleton enthalten. Für diese haben wir unter der Bedingung

$$g > 1$$

die Aussage $H(\mathcal{P}) = \{(0, 0, 0)\}$ abgeleitet. Nach dem Satz von Laurent ist $S(\mathcal{P})$ endlich.

Bei Proposition 4.1 haben wir gefordert, daß der Rang $g$ der von den Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ erzeugten Gruppe $G$ ungleich Eins ist. In Satz 5.2 spielt der Rang $g$ von $G$ keine Rolle. Wir setzen lediglich

$$r > 1$$

voraus und zeigen, daß $S(\mathcal{P})$ für jede Partition $\mathcal{P}$, die einelementige Blöcke besitzt, endlich ist.

Wir benötigen für den Beweis dieses Resultats eine Aussage über die Lösungsmenge der Gleichung

$$u_n = c. \tag{5.1}$$

Satz 5.1 garantiert, daß es für eine nichtdegenerierte und nichtperiodische Rekurrenzfolge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ mit beliebigem Rang $r \geq 1$ höchstens endlich viele $n \in \mathbb{Z}$ gibt, die der Gleichung (5.1) genügen.

Wir leiten ihn aus dem Satz von SKOLEM-MAHLER-LECH und anderen, im 1. Kapitel erwähnten Ergebnissen ab.

In der Literatur, siehe etwa [8], wird Satz 5.1 auch als Theorem von SKOLEM-MAHLER-LECH bezeichnet.

**Satz 5.1.** *Sei* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *nichtdegeneriert und nichtperiodisch und sei*

$$r \geq 1.$$

*Dann besitzt die Gleichung* (5.1)

$$u_n = c$$

*höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen n.*

**Beweis.** Laut Satz 1.1 und Bemerkung 1.2 läßt sich $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ in der Form

$$u_n = \sum_{j=1}^{r} f_j(n)\alpha_j{}^n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

schreiben, wobei die Funktionen $f_j \not\equiv 0$ komplexe Polynome sind.

Wir nehmen zunächst an, daß sich unter den Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ eine Einheitswurzel befindet. Diese werde mit $\alpha_{j_0}$ bezeichnet. Aus (5.1) folgt

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{r} f_j(n)\alpha_j{}^n + f_{j_0}(n)\alpha_{j_0}{}^n - c = 0 \tag{5.2}$$

$\alpha_{j_0}$ habe die Ordnung $w$. Daher gilt

$$\alpha_{j_0}{}^w = 1,$$
$$\alpha_{j_0}{}^i \neq 1 \qquad \text{für } 1 \leq i < w.$$

Wir unterteilen die ganzen Zahlen nach Restklassen $\bmod w$. (5.2) läßt sich durch eine Gruppe von $w$ Gleichungen der Gestalt

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{r} f_j(n)\alpha_j{}^n + \left(f_{j_0}(n) - \frac{c}{\alpha_{j_0}{}^n}\right) \cdot \alpha_{j_0}{}^n = 0 \tag{5.3}$$

darstellen, wobei $\alpha_{j_0}{}^n = \alpha_{j_0}{}^x$ für jede Restklasse $x \pmod w$ eine nichttriviale Konstante ist. Für $r = 1$ haben wir die Identitäten

$$\left(f_{j_0}(n) - \frac{c}{\alpha_{j_0}{}^x}\right) \cdot \alpha_{j_0}{}^x = 0,$$

also

$$f_{j_0}(n) - \frac{c}{\alpha_{j_0}{}^x} = 0 \quad n \equiv x (\operatorname{mod} w). \tag{5.4}$$

Da $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nichtdegeneriert und nichtperiodisch ist, muß nach Korollar 1.2 $f_{j_0}$ ein nichtkonstantes Polynom sein. Demnach ist

$$f_{j_0}(n) - \frac{c}{\alpha_{j_0}{}^x}$$

nichtkonstant für jede Restklasse $x \ (\operatorname{mod} w)$, und die Gleichungen (5.4) besitzen höchstens endlich viele Lösungen.

Für $r > 1$ kann es nach Korollar 1.1 für die Gleichungen (5.3) höchstens endlich viele Lösungen geben.

Wenn sich unter den Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ keine Einheitswurzel befindet, so haben wir die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{r} f_j(n)\alpha_j{}^n - c \cdot 1 = 0. \tag{5.5}$$

Nach Satz 1.1 wird durch

$$\sum_{j=1}^{r} f_j(n)\alpha_j{}^n - c \cdot 1^n$$

eine Rekurrenzfolge definiert, nämlich $u_n - c$, die offensichtlich nichtdegeneriert ist. Korollar 1.1 sichert uns die Endlichkeit der Lösungsmenge von Gleichung (5.5). □

**Folgerung 5.1.** Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nichtdegeneriert mit Rang $r > 1$. Dann hat die Gleichung

$$u_n = c$$

eine endliche Lösungsmenge.

**Beweis.** Laut Korollar 1.2 hat jede nichtdegenerierte periodische Folge den Rang 1. Da nach Voraussetzung $r > 1$ ist, sind die Bedingungen von Satz 5.1 erfüllt, und die Gleichung (5.1) besitzt höchstens endlich viele Lösungen $n \in \mathbb{Z}$. □

Wir erwähnen noch das folgende Ergebnis, welches eine quantitative Version von Satz 5.1 darstellt (siehe auch §1). Es beweist die Verallgemeinerung einer Vermutung von Ward aus den 30er Jahren.

**Theorem 5.1** (SCHLICKEWEI). *Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine nichtdegenerierte und nichtperiodische rekurrente Folge der Ordnung $t$ mit einem charakteristischen Polynom, dessen Nullstellen $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ in einem algebraischen Zahlkörper vom Grad $d$ liegen. Dann gilt für die Vielfachheit $U$ die Abschätzung*

$$U \leq d^{6(t+1)^2} 2^{2^{28(t+1)!}}.$$

Der Beweis ist kompliziert und beruht wieder auf einer der zahlreichen Varianten des Teilraumsatzes. Näheres findet sich in [7].

**Satz 5.2.** *Sei $\mathcal{P}$ eine Partition mit mindestens einem Singleton und*

$$r > 1.$$

*Dann ist $S(\mathcal{P})$ endlich.*

**Beweis.** Sei etwa $\{\mu\} \in \mathcal{P}$. Es folgt aus der Darstellung (3.8)

$$H_\mu(q) \cdot {\varphi_\mu}^q = 0. \tag{5.6}$$

$H_\mu(q)$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von $c \cdot f_{i_1}(q) \ldots f_{i_m}(q)$ mit $\mu = (i_1,\ldots,i_m) \in A_m$. $\varphi_\mu$ bezeichnet das Produkt $\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_m}$. $w_0$ ist der konstante Term im charakteristischen Polynom der Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Also gilt $w_0 = \alpha_1\ldots\alpha_r$. Da $w_0 \neq 0$ ist, müssen die Zahlen $\alpha_i$ für $1 \leq i \leq r$ ungleich Null sein. Daher gilt

$$H_\mu(q) = 0.$$

$H_\mu$ ist nicht das Nullpolynom, weil die in der Relation (3.3) auftretenden Polynome $f_i \neq 0$ sind. Höchstens endlich viele $q \in \mathbb{Z}$ erfüllen die Gleichung (5.6). Für ein festes $q_0$ nimmt (3.1) die Form

$$a \cdot {u_h}^k + b \cdot {u_n}^l + c \cdot {u_{q_0}}^m = 0 \tag{5.7}$$

an. Mit Hilfe von Satz 1.1 läßt sich (5.7) folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{\kappa\in A_k} F_\kappa(h) \cdot {\varphi_\kappa}^h + \sum_{\lambda\in A_l} G_\lambda(n) \cdot {\varphi_\lambda}^n + c \cdot {u_{q_0}}^m = 0. \tag{5.8}$$

(5.8) ist wieder eine Gleichung vom Typ (2.1) mit $N = 2$, $I = A_k \cup A_l \cup \{\omega^*\}$, $\boldsymbol{x} = (h,n)$,

$$\begin{aligned}
\alpha_\kappa &= (\varphi_\kappa, 1),\ f_\kappa(\boldsymbol{x}) = F_\kappa(h) \quad \text{für } \kappa \in A_k,\\
\alpha_\lambda &= (1, \varphi_\lambda),\ f_\lambda(\boldsymbol{x}) = G_\lambda(n) \quad \text{für } \lambda \in A_l,\\
\alpha_{\omega^*} &= (1,1),\ f_{\omega^*}(\boldsymbol{x}) = c \cdot {u_{q_0}}^m.
\end{aligned}$$

$c \cdot {u_{q_0}}^m$ ist konstant. Der Fall $f_{\omega^*}(\boldsymbol{x}) = 0$ wird in der Arbeit von SCHLICKEWEI und SCHMIDT [8] behandelt. Sei $\mathcal{Q}$ eine Partition von

$B \cup \{\omega^*\}$, wobei $A_k \cup A_l = B$ gesetzt wird. Im zweiten Paragraphen haben wir $H(\mathcal{P})$ als Menge jener $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^N$ definiert, welche

$$\alpha_i^{\boldsymbol{x}} = \alpha_j^{\boldsymbol{x}} \quad \forall i, j \,\text{mit}\; i \sim j$$

erfüllen. In unserem Fall ist $H(\mathcal{Q})$ gegeben als Menge aller $(K, L) \in \mathbb{Z}^2$, die den Gleichungen

$$\begin{aligned}
{\varphi_{\kappa_1}}^K &= {\varphi_{\kappa_2}}^K \quad \text{für } \kappa_1 \sim \kappa_2, \\
{\varphi_{\lambda_1}}^L &= {\varphi_{\lambda_2}}^L \quad \text{für } \lambda_1 \sim \lambda_2, \\
{\varphi_\kappa}^K &= {\varphi_\lambda}^L \quad \text{für } \kappa \sim \lambda, \\
{\varphi_\kappa}^K &= 1 \quad \text{für } \kappa \sim \omega^*, \\
{\varphi_\lambda}^L &= 1 \quad \text{für } \lambda \sim \omega^*
\end{aligned}$$

genügen. Jeder Partition $\mathcal{Q}$ von $B \cup \{\omega^*\}$ kann eine Partition $\tilde{\mathcal{P}}$ von $A$ zugeordnet werden, indem man das Urbild der Klassen unter der Abbildung $\pi$: $A \to B \cup \{\omega^*\}$,

$$\begin{aligned}
\pi(\omega) &= \omega \quad \text{für } \omega \in B, \\
\pi(\mu) &= \omega^* \quad \text{für } \mu \in A_m
\end{aligned}$$

betrachtet.

$$(K, L) \in H(\mathcal{Q}) \text{ ist dann gleichbedeutend mit } (K, L, 0) \in H(\tilde{\mathcal{P}}). \tag{5.9}$$

Enthält $\mathcal{Q}$ höchstens $\{\omega^*\}$ als Singleton, dann besitzt $\tilde{\mathcal{P}}$ kein Singleton. Wir haben in den Propositionen 4.2 und 4.3 ohne Verwendung der Voraussetzung $g > 1$ gezeigt, daß für $K, L \neq 0$ das Tripel $(K, L, 0)$ nicht in $H(\tilde{\mathcal{P}})$ liegt, außer die Partition $\tilde{\mathcal{P}}$ wird durch (4.27) oder (4.46) beschrieben. In diesen beiden Fällen ist $r = 2$ und es gilt, wie wir im 6. Kapitel zeigen werden, in der Darstellung (3.3)

$$f_1(n) \equiv A_1 \in \mathbb{C}^*, \qquad f_2(n) \equiv A_2 \in \mathbb{C}^* \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Die Gleichung

$$H_\mu(q) = 0$$

und damit auch die Gleichung (5.6), besitzt keine ganzzahlige Lösung $q$. Wird die Partition $\tilde{\mathcal{P}}$ durch (4.27) oder (4.46) definiert, dann ist $S(\mathcal{P})$ die leere Menge. In den anderen Fällen ist wegen $H(\tilde{\mathcal{P}}) = \{(0,0,0)\}$ auch $H(\mathcal{Q}) = \{(0,0)\}$. Aus Korollar 2.1 folgt, daß $S(\mathcal{Q})$ endlich ist.

Es bleiben nur noch jene Partitionen $\mathcal{Q}$ zu betrachten, die ein Singleton besitzen, das zu $B$ gehört. Sei o.B.d.A.

$$\{\kappa\} \in \mathcal{Q}.$$

Wir erhalten die Gleichung

$$F_\kappa(h) \cdot {\varphi_\kappa}^h = 0.$$

Analog zu oben ergibt sich

$$F_\kappa(h) = 0, \tag{5.10}$$

wobei $F_\kappa$ ungleich dem Nullpolynom ist. (5.10) hat höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen $h$. Jede dieser Lösungen führt (5.7) in eine Gleichung der Form

$$b \cdot {u_n}^l = \overline{A} \quad (\overline{A} \text{ eine Konstante}) \tag{5.11}$$

über. Aus (5.11) erhalten wir wieder endlich viele Gleichungen der Gestalt

$$u_n = \overline{B} \quad (\overline{B} \text{ eine Konstante}). \tag{5.12}$$

Da $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nichtdegeneriert ist, gibt es wegen der Folgerung 5.1 höchstens endlich viele Lösungen der Gleichung (5.12).

Wir haben gezeigt, daß $S(\mathcal{Q})$ für jede Partition $\mathcal{Q}$ von $A_k \cup A_l \cup \{\omega^*\}$ endlich ist. Daher ist auch $S(\mathcal{P})$ endlich, falls $\mathcal{P}$ Singletons mit Elementen der Länge $m$ enthält.

Analog gehen wir in den Fällen $\{\lambda\} \in \mathcal{P}$ oder $\{\kappa\} \in \mathcal{P}$ vor. □

**Bemerkung 5.1.** Wenn $\mathcal{P}$ eine Partition ist, welche einelementige Blöcke mit Tupeln von unterschiedlicher Länge besitzt, etwa

$$\{\lambda\}, \{\kappa\} \in \mathcal{P},$$

dann geht der Beweis einfacher.

Wir erhalten

$$F_\kappa(h){\varphi_\kappa}^h = 0, \qquad G_\lambda(n){\varphi_\lambda}^n = 0.$$

Wie oben schließen wir $\varphi_\kappa \cdot \varphi_\lambda \neq 0$ und

$$F_\kappa(h) = 0, \qquad G_\lambda(n) = 0,$$

$$F_\kappa \not\equiv 0, \qquad G_\lambda \not\equiv 0. \tag{5.13}$$

Es existieren höchstens endlich viele Lösungen $(h, n)$ des Gleichungssystems (5.13). Die Gleichung (3.1) hat für eine spezielle Lösung $(h_0, n_0)$ von (5.13) die Form

$$a \cdot {u_{h_0}}^k + b \cdot {u_{n_0}}^l + c \cdot {u_q}^m = 0. \tag{5.14}$$

Unter Benutzung des Satzes von Skolem-Mahler-Lech (siehe Folgerung 5.1) erhalten wir, daß (5.14) von höchstens endlich vielen ganzen Zahlen $q$ erfüllt wird. Daher ist $S(\mathcal{P})$ eine endliche Menge.

**Beweis von Theorem 3.1.** Aus der Voraussetzung $g > 1$ folgt wegen Proposition 4.1 für jede Partition $\mathcal{P}$ ohne Singletons, daß $S(\mathcal{P})$ endlich ist. Da $g > 1$ impliziert $r > 1$, muß nach Satz 5.2 für jede Partition $\mathcal{P}$ mit Singleton die Menge $S(\mathcal{P})$ endlich sein. Daher besitzt die Gleichung (3.1) höchstens endlich viele Lösungen. □

**Lemma 5.1.** *Die Anzahl $Z$ der Partitionen einer $n$-elementigen Menge $M$ ist durch*

$$2^{n^2}$$

*nach oben beschränkt.*

**Beweis.** Wir ordnen jeder Partition $\{A_1, \ldots, A_s\}$ eine Permutation von $M$ auf folgende Weise zu: Ist $A_i = \{a_1, \ldots, a_t\}$, so wird $A_i$ der Zyklus $(a_1, \ldots, a_t)$ zugeordnet, wobei $a_1 < \cdots < a_t$ sein soll. Der Partition $\mathcal{P}$ wird dann das Produkt dieser elementfremden Zyklen zugeordnet. Diese Zuordnung ist injektiv. Es gibt $n!$ Permutationen von $M$. Daher ist

$$Z \leq n!.$$

Wegen $n < 2^n$ gilt

$$n! < 2^{n^2},$$

also

$$Z < 2^{n^2}.$$

**Satz 5.3.** *Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine nichtdegenerierte Folge mit Ordnung $t$ und Rang $r$. Die Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des charakteristischen Polynoms und die Koeffizienten der Polynome $f_i$, $1 \leq i \leq r$ in der Darstellung* (3.3)

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} f_i(n)\alpha_i{}^n$$

*liegen in einem algebraischen Zahlkörper $K$ vom Grad $d$. Der Rang $g$ der von $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ erzeugten Gruppe sei größer Eins. Seien $a, b, c \in K^*$. Wir definieren $\mathcal{M} = \max\{k, l, m\}$. $M(K)$ bezeichne die Menge aller Absolutbeträge auf $K$, welche eine Fortsetzung des gewöhnlichen oder eines $p$-adischen Absolutbetrages auf $\mathbb{Q}$ bilden. Es sei $S \subset M(K)$ die Menge der archimedischen Absolutbeträge $|\ |_v$ auf $K$ zusammen mit den nichtarchimedischen Absolutbeträgen, welche*

$$|\alpha_i|_v \neq 1 \quad \textit{für ein } i, \ 1 \leq i \leq r$$

*erfüllen. $S$ ist eine endliche Menge, und wir schreiben $s$ für die Kardinalität von $S$. $\mathcal{P}$ sei eine Partition mit mindestens einem Singleton. Dann gilt*

$$|S(\mathcal{P})| < 2^{s^7 2^{44d!(4^{t+\mathcal{M}})!}}.$$

**Beweis.** Sei etwa $\{\mu\} \in \mathcal{P}$. Die Gleichung (5.6)

$$H_\mu(q) \cdot {\varphi_\mu}^q = 0$$

besitzt höchstens $m \cdot t$ Lösungen, da

$$\text{Grad } f_i = \sigma_i - 1 < t \quad \text{für } 1 \leq i \leq r.$$

Für eine feste Lösung $q_0$ von (5.6) gilt die Gleichung (5.7)

$$a \cdot {u_h}^k + b \cdot {u_n}^l + c \cdot {u_{q_0}}^m = 0.$$

Falls die im Beweis von Satz 5.2 definierte Partition $\mathcal{Q}$ ein Singleton $\{\kappa\}$ hat, besitzt die Gleichung (5.10) höchstens $k \cdot t$ Lösungen. (5.7) nimmt dann die Form

$$b \cdot {u_n}^l = \overline{A}$$

an. Daraus entstehen höchstens $l$ Gleichungen der Gestalt

$$u_n = \overline{B}.$$

Nach Theorem 5.1 gilt für die Lösungen dieser Identität die obere Schranke

$$d^{6(t+1)^2} \cdot 2^{2^{28(t+1)!}}.$$

Zu festem $q_0$ und $\{\kappa\}$ erfüllen höchstens

$$l \cdot k \cdot t \cdot d^{6(t+1)^2} \cdot 2^{2^{28(t+1)!}}$$

$(h, n) \in \mathbb{Z}^2$ die Gleichung (5.7). Im Fall $\{\lambda\} \in \mathcal{Q}$ erhalten wir dieselbe obere Schranke.

Besitzt $\mathcal{Q}$ höchstens $\{\omega^*\}$ als Singleton, dann ist nach dem Beweis von Satz 5.2 – bis auf zwei Ausnahmen, für die aber $S(\mathcal{P}) = \emptyset$ ist – die Gruppe $H(\mathcal{Q}) = \{\mathbf{0}\}$. Für $\{\omega^*\} \in \mathcal{Q}$ erhalten wir $c \cdot {u_{q_0}}^m = 0$, das entspricht der Situation in [8]. Tritt in $\mathcal{Q}$ kein Singleton auf, so können wir Korollar 2.1 anwenden. Wir schätzen die Kardinalität von $A_l \cup A_k \cup \{\omega^*\}$ nach oben ab.

$$\binom{r+l-1}{l} + \binom{r+k-1}{k} + 1 < 2^{r+l-1} + 2^{r+k-1} < 2^{t+\max\{k,l\}}.$$

Es gilt

$$|S(\mathcal{Q})| < 2^{320+2s^7 2^{43d!(4^{t+\max\{k,l\}})!}}.$$

Hier sind die Parameter von Theorem 2.2

$$N = 2, \qquad \delta < t \cdot \max\{k, l\}, \qquad D = \binom{2+\delta}{2},$$

$$|A_k \cup A_l \cup \{\omega^*\}| < 2^{t+\max\{k,l\}}.$$

Für $\{\omega^*\} \in \mathcal{Q}$ erhalten wir nach [8] dieselbe Abschätzung. Es ist zu sehen, daß obige Schranke größer ist als jene im Fall $\{\kappa\} \in \mathcal{Q}$ oder $\{\lambda\} \in \mathcal{Q}$.

Die Anzahl der Partitionen $\mathcal{Q}$ der Menge $A_k \cup A_l \cup \{\omega^*\}$ ist kleiner als

$$2^{2^{2(t+\max\{k,l\})}}.$$

In der Gleichung (5.7) können maximal

$$2^{2^{2(t+\max\{k,l\})}} \cdot 2^{320+2s^7 2^{43d!(4^{t+\max\{k,l\}})!}}$$

Lösungen auftreten. Daher besitzt (3.1) für $\{\mu\} \in \mathcal{P}$ höchstens

$$m \cdot t \cdot 2^{2^{2(t+\max\{k,l\})}} \cdot 2^{320+2s^7 2^{43d!(4^{t+\max\{k,l\}})!}} \tag{5.15}$$

Lösungen. Wegen

$$(5.15) \le \mathcal{M} \cdot t \cdot 2^{2^{2(t+\mathcal{M})}} \cdot 2^{320+2s^7 2^{43d!(4^{t+\mathcal{M}})!}} < 2^{s^7 2^{44d!(4^{t+\mathcal{M}})!}}$$

ist Satz 5.3 für alle Partitionen $\mathcal{P}$ mit $\{\mu\} \in \mathcal{P}$ bewiesen. Wir erhalten durch analoge Rechnungen dieselbe Schranke in den Fällen $\{\kappa\} \in \mathcal{P}$, $\{\lambda\} \in \mathcal{P}$. □

**Beweis von Theorem 3.2.** Sei $\mathcal{P}$ eine Partition ohne Singleton (die Situation einer Partition mit Singleton wird in Satz 5.3 untersucht). Nach Proposition 4.1 führt die Voraussetzung $g > 1$ zu $H(\mathcal{P}) = \{\mathbf{0}\}$. Wir verwenden ein Resultat von Schlickewei und Schmidt über die Kardinalität von $S(\mathcal{P})$, nämlich

$$|S(\mathcal{P})| < 2^{20N^4 + Ns^7 2^{43d!(D\cdot|I|)!}}$$

(siehe Kapitel 2). Im Folgenden benötigen wir eine Abschätzung für $D \cdot |I|$ mit den Parametern

$$N = 3, \qquad I = |A|.$$

Wir werden

$$D \cdot |A| < 6^{t+\mathcal{M}}$$

zeigen.

Für $x \in \mathbb{Z}$, $x > 0$ gilt

$$x^{\frac{3}{\ln 3}} \leq e^x.$$

Daraus folgt für $\mathcal{M} \geq 3$, $t \geq 1$

$$\mathcal{M}^{\frac{3}{\ln 3}} t^{\frac{3}{\ln 3}} = (\mathcal{M}t)^{\frac{3}{\ln 3}} \leq e^{\mathcal{M}+t}.$$

Daher ist

$$\frac{1}{\ln 3} \ln(\mathcal{M}t)^3 \leq \mathcal{M} + t,$$

also ist

$$\ln(\mathcal{M}t)^3 \leq (\mathcal{M} + t) \ln 3.$$

Das führt zu der Aussage

$$(\mathcal{M}t)^3 \leq 3^{t+\mathcal{M}}. \tag{5.16}$$

Jetzt schätzen wir die Kardinalität der Menge $A = A_k \cup A_l \cup A_m$ nach oben ab. Es gilt

$$\begin{aligned}
|A| = &\binom{r+k-1}{k} + \binom{r+l-1}{l} + \binom{r+m-1}{m} < \\
&< 2^{r+\mathcal{M}-1} + 2^{r+\mathcal{M}-2} + 2^{r+\mathcal{M}-3} = \\
&= 4 \cdot 2^{r+\mathcal{M}-3} + 2 \cdot 2^{r+\mathcal{M}-3} + 2^{r+\mathcal{M}-3} = \\
&= 7 \cdot 2^{r+\mathcal{M}-3} < 2^{r+\mathcal{M}} < 2^{t+\mathcal{M}},
\end{aligned}$$

also ist

$$|A| < 2^{t+\mathcal{M}}. \tag{5.17}$$

Aus $g > 1$ folgt $r > 1$ und damit

$$\text{Grad } f_i = \sigma_i - 1 < t - 1 \quad \forall i,\ 1 \leq i \leq r.$$

Wir schließen

$$\text{Grad } F_\kappa < (t-1)k \leq (t-1)\mathcal{M} \quad \forall \kappa \in A_k.$$

Analog haben wir

$$\text{Grad } G_\lambda < (t-1)\mathcal{M} \quad \forall \lambda \in A_l, \qquad \text{Grad } H_\mu < (t-1)\mathcal{M} \quad \forall \mu \in A_m.$$

Wegen $\mathcal{M} \geq 3$ erhalten wir

$$\delta < t\mathcal{M} - \mathcal{M} \leq t\mathcal{M} - 3.$$

Also ist

$$\delta + 1, \quad \delta + 2, \quad \delta + 3 < t\mathcal{M}.$$

Mittels (5.16), (5.17) ergibt das

$$D \cdot |A| = \binom{3+\delta}{3}|A| = \frac{(\delta+1)(\delta+2)(\delta+3)}{6}|A| <$$
$$< \frac{(\mathcal{M}t)^3}{6}2^{t+\mathcal{M}} \leq \frac{3^{t+\mathcal{M}}}{3\cdot 2}2^{t+\mathcal{M}} = 6^{t+\mathcal{M}-1}.$$

Theorem 2.2 liefert mit den Parametern

$$N = 3, \qquad \delta < (t-1)\mathcal{M}, \qquad |A| < 2^{t+\mathcal{M}}$$

und der Ungleichung

$$D \cdot |A| < 6^{t+\mathcal{M}}$$

die Abschätzung

$$|S(\mathcal{P})| < 2^{20\cdot N^4 + N\cdot s^7 \cdot 2^{43d!(D|A|)!}} < 2^{20\cdot 3^4 + 3\cdot s^7\cdot 2^{43d!(6^{t+\mathcal{M}})!}}.$$

Die Schranke in Satz 5.3 ist kleiner als diese Zahl. Wegen Lemma 5.1 und (5.17) gilt, daß die Anzahl der Partitionen durch

$$2^{2^{2(t+\mathcal{M})}}$$

nach oben beschränkt ist. Daher kann die Lösungsmenge von (3.1) durch

$$2^{2^{2(t+\mathcal{M})}} \cdot 2^{20\cdot 3^4 + 3\cdot s^7 \cdot 2^{43d!(6^{t+\mathcal{M}})!}} \tag{5.18}$$

nach oben abgeschätzt werden. Aus

$$20\cdot 3^4 + 2^{2(t+\mathcal{M})} < s^7 \cdot 2^{43d!(6^{t+\mathcal{M}})!}$$

folgt

$$(5.18) < 2^{4s^7\cdot 2^{43d!(6^{t+\mathcal{M}})!}} < 2^{s^7\cdot 2^{44d!(6^{t+\mathcal{M}})!}}$$

Damit ist Theorem 3.2 bewiesen. □

## 6. Ergänzungen und Beispiele zum Fall $g = 1$

Die folgenden beiden Beispiele zeigen, daß in Proposition 4.1 auf die Voraussetzung

$$g > 1$$

nicht verzichtet werden kann. Im zweiten Beispiel liegen die Zahlen $v_i$ nicht symmetrisch bezüglich des Nullpunkts, das heißt

$$v_i + v_j \neq 0 \quad \forall i \neq j.$$

Im Falle einer Gruppe $G = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_r \rangle$ vom Rang $g = 1$ gilt $\alpha_i = \varepsilon_i \beta^{n_i}$ für $n_i \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_i$ Einheitswurzel ($1 \leq i \leq r$), wobei $\beta$ keine Einheitswurzel ist.

**Beispiel 1.** Sei $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\alpha$ keine Einheitswurzel, $r = 3$. Wir setzen

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 \cdot \alpha, \qquad \alpha_2 = \varepsilon_2 \cdot 1, \qquad \alpha_3 = \varepsilon_3 \cdot \frac{1}{\alpha}.$$

Dann ist $g = 1$ und

$$\boldsymbol{x}_1 = 1, \qquad \boldsymbol{x}_2 = 0, \qquad \boldsymbol{x}_3 = -1.$$

Wir wählen $\boldsymbol{x} = -1$ und erhalten

$$v_1 = -1, \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = 1,$$

wobei $v_i = \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x} \rangle$. Für beliebige natürliche Zahlen

$$m > 1, \qquad L \geq 1$$

setzen wir

$$k = 2m - 1, \qquad l = 2m.$$

Also ist

$$k = l - 1.$$

Die Partition $\mathcal{P}$ sei definiert durch die Äquivalenzen

$$\begin{gathered}
(1, \ldots, 1)_l \sim (1, \ldots, 1)_m, \quad (1, \ldots, 1)_k \sim (1, \ldots, 1, 2)_l, \\
(3, \ldots, 3)_l \sim (3, \ldots, 3)_m, \quad (3, \ldots, 3)_k \sim (2, 3, \ldots, 3)_l, \\
(1, \ldots, 1, 3)_s \sim (1, \ldots, 1, 2, 2)_s, \quad \text{für } s = k, l, m, \\
(1, \ldots, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{t})_m \sim (1, \ldots, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{2t})_l \quad \text{für } 1 \leq t \leq m, \\
(1, \ldots, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{t})_k \sim (1, \ldots, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{t+1})_l \quad \text{für } 1 \leq t \leq k.
\end{gathered}$$

Da $k = 2m - 1$, $l = 2m$ ist, gilt $m < k < l$.

Sei $t \geq 2$. Dann ist

$$(1, \ldots, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{t}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{u})_s \sim (1, \ldots, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{t-2}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{u+1})_s.$$

Sei $t < 2$. Aus $s = 2$ folgt $m = 2$. Es gilt

$$(1, 2)_m \sim (1, 2, 2, 2)_l, \qquad (1, 3)_m \sim (2, 2)_m, \qquad (2, 3)_m \sim (2, 2, 2, 3)_l.$$

Für $s > 2$ haben wir

$$(\ldots,1,\underbrace{2}_{t=1},\underbrace{3,\ldots}_{u})_s \sim (\ldots,\underbrace{2,2,2}_{t+2},\underbrace{3,\ldots}_{u})_s,$$

$$(\ldots,1,\underbrace{3,\ldots}_{t=0\ \ u})_s \sim (\ldots,\underbrace{2,2}_{t+2=2},\underbrace{3,\ldots}_{u-1})_s,$$

Aus $(1,\ldots,1)_k \sim (1,\ldots,1,2)_l$ folgt die Gleichung

$$Kkv_1 = L((l-1)v_1 + v_2).$$

Wir erhalten

$$Kk = L(l-1).$$

Wegen $k = l - 1$ gilt

$$K = L.$$

$\mathcal{P}$ besitzt kein Singleton. Der Vektor $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 1)$ muß eine spezielle Lösung des Systems (4.11) sein, welches durch $\mathcal{P}$ bestimmt wird. Dann ist $H(\mathcal{P}) = \{(L, L, 2L)\colon L \in \mathbb{Z}\}$.

**Beispiel 2.** Seien

$$r = 10, \quad g = 1,$$

$$k = 151, \quad l = 84, \quad m = 54,$$

$$K = 5, \quad L = 9, \quad M = 14,$$

$$v_1 = -36, \quad v_2 = -32, \quad v_3 = -28, \quad v_4 = -27, \quad v_5 = -23,$$

$$v_6 = -18, \quad v_7 = 0, \quad v_8 = 7, \quad v_9 = 8, \quad v_{10} = 9.$$

Die Zahlen $v_i$ besitzen die Eigenschaft

$$v_i + v_j \neq 0 \quad \forall i \neq j.$$

Es gelten die Relationen

$$\begin{aligned} 2v_2 &= v_1 + v_3, & 5v_3 &= 3v_1 + v_2 + v_7,\\ 3v_6 &= 2v_4 + v_7, & 3v_7 &= v_6 + 2v_{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4v_4 &= 3v_1 + v_7, & 2v_5 &= v_3 + v_6,\\ 2v_9 &= v_8 + v_{10}, & 5v_8 &= v_9 + 3v_{10} + v_7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &v_1 + v_5 = v_2 + v_4, && v_1 + v_6 = 2v_4, && 3v_1 + v_8 = 2v_3 + v_4 + v_6,\\ &v_1 + v_9 = v_3 + v_7, && v_1 + v_{10} = v_4 + v_7, && v_2 + v_{10} = v_5 + v_7,\\ &v_3 + v_{10} = v_4 + v_9, && v_4 + v_{10} = v_3 + v_9, && v_5 + 3v_{10} = v_6 + 2v_8 + v_9,\\ &v_6 + 2v_{10} = 3v_7, && v_7 + 4v_{10} = 4v_8 + v_9, && v_8 + v_{10} = 2v_9, \end{aligned}$$

$$Ll = Mm,$$

$$\begin{aligned}
\bar{s}((1,\ldots,1,2)_l) &= \bar{s}((1,\ldots,1)_k),\\
\bar{s}((1,\ldots,1,4)_l) &= \bar{s}((1,\ldots,1,4)_k),\\
\bar{s}((9,10,\ldots,10)_l) &= \bar{s}((10,\ldots,10)_k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{s}((1,\ldots,1,2)_m) &= \bar{s}((1,\ldots,1,2)_k),\\
\bar{s}((1,\ldots,1,4)_m) &= \bar{s}((1,\ldots,1,4,4)_k),\\
\bar{s}((9,10,\ldots,10)_m) &= \bar{s}((9,10,\ldots,10)_k).
\end{aligned}$$

Wegen $k, l, m \geq 54$ und $r = 10$ muß in jedem $\tau \in A$ eine natürliche Zahl $t(\tau)$, $1 \leq t(\tau) \leq 10$, mindestens 6-mal auftreten. Daher gibt es eine Partition $\mathcal{P}$, welche die obigen Gleichungen induziert und die keinen einelementigen Block enthält. Sei $v = (v_1, \ldots, v_{10})$. Wir definieren $\mathcal{P}$ durch

$$\tau \sim \lambda \Leftrightarrow \bar{s}_v(\tau) = \bar{s}_v(\lambda).$$

Das Tripel (5, 9, 14) liegt in der Gruppe $H(\mathcal{P})$.

Die nächsten Beispiele zeigen, daß es in $H(\mathcal{P})$ nichttriviale Elemente geben kann, bei denen eine Komponente Null ist. Dabei können in $\mathcal{P}$ einelementige Blöcke auftreten.

**Beispiel 3.** (Ausnahmefall in Prop. 4.2, vgl. (4.27).) Sei $r = 2$, $l = 2$, $m = 1$, $v_2 = -v_1$. In $\mathcal{P}$ gelten die Äquivalenzen

$$\lambda_{\mathrm{Mi}} \sim \mu_{\mathrm{Mi}}, \qquad \lambda_{\mathrm{Ma}} \sim \mu_{\mathrm{Ma}}, \qquad \lambda_{\mathrm{mi}} \sim \kappa_{\mathrm{Mi}}$$

(es genügt $\lambda_{\mathrm{mi}} \sim \kappa$ für ein $\kappa \in A_k$). In $A_k$ kann die Partition beliebig festgelegt werden. Dann gehört für jede ganze Zahl $L$ das Tripel $(0, L, 2L)$ zur Gruppe $H(\mathcal{P})$.

**Beispiel 4.** (entspricht bei geeigneter Umordnung dem Ausnahmefall in Prop. 4.3, vgl. (4.46).) Sei $r = 2$, $l = 2$, $m = 1$, $v_2 = -v_1$. Die Partition $\mathcal{P}$ ist definiert durch

$$\mu_{\mathrm{Mi}} \sim \lambda_{\mathrm{Ma}}, \qquad \mu_{\mathrm{Ma}} \sim \lambda_{\mathrm{Mi}}, \qquad \lambda_{\mathrm{mi}} \sim \kappa_{\mathrm{Mi}}$$

(oder $\lambda_{\mathrm{mi}} \sim \kappa$ für ein $\kappa \in A_k$), die Äquivalenzen innerhalb von $A_k$ seien beliebig gegeben. Für jede ganze Zahl $L$ liegt $(0, L, -2L)$ in $H(\mathcal{P})$.

Die Partitionen in den Beispielen 3 und 4 sind „im wesentlichen" die einzigen, für die $H(\mathcal{P})$ nichttriviale Elemente $(K, L, M)$ mit

$$K \cdot L \cdot M = 0$$

besitzt. Der folgende Satz ist auch für $g = 1$ richtig.

**Proposition 6.1.** (*a*) *Für eine beliebige Partition $\mathcal{P}$ (mit oder ohne Singletons) und für jeden zulässigen Vektor gilt*

$$\overline{v}_1 < 0 \leq \overline{v}_r.$$

(*b*) *Sei $\mathcal{P}$ eine beliebige Partition, welche nicht eine Gestalt, wie sie in* (4.27) *oder* (4.46) *auftritt* (*bei geeigneter Vertauschung von* $K$, $L$, $M$), *besitzt. Dann gilt für jedes Element* $(K, L, M) \in H(\mathcal{P})$

$$K \cdot L \cdot M \neq 0.$$

(*c*) *Sei $\mathcal{P}$ eine Partition mit Singletons, die nicht von der Form* (4.27) *oder* (4.46) *ist. Dann ist* $H(\mathcal{P}) = \{(0, 0, 0)\}$.

Der Beweis beruht auf den Propositionen 4.1–4.3 und dem Satz 5.2.

**Folgerung 6.1.** Gibt es in $\Gamma$ (für die Definition von $\Gamma$ siehe §4) einen Vektor $(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r)$ mit $0 < \overline{v}_1 < \ldots < \overline{v}_r$, dann ist für jede Partition $\mathcal{P}$ die Gruppe $H(\mathcal{P}) = \{(0, 0, 0)\}$.

Zu den Beispielen 3, 4 lassen sich rekurrente Folgen $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ angeben, für die Gleichung (3.1) unendlich viele Lösungen $(h, n, q) \in \mathbb{Z}^3$ besitzt. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ hat dann die Form

$$u_n = A_1\left(\frac{1}{\alpha^n} + \rho(\varepsilon\alpha)^n\right),$$

wobei $\alpha \in \mathbb{C}^*$ keine Einheitswurzel ist. Umgekehrt kann man zu jeder solchen Folge Zahlen $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ wählen, sodaß die Gleichung (3.1) unendlich viele Lösungen hat.

Wir werden zunächst aus den Beispielen 3 und 4 notwendige Bedingungen für $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ herleiten, damit unendlich viele $(h, n, q) \in \mathbb{Z}^3$ der Identität (3.1) genügen. Dazu untersuchen wir die von den Äquivalenzen

$$\lambda_{\text{Mi}} \sim \mu_{\text{Mi}}, \quad \lambda_{\text{Ma}} \sim \mu_{\text{Ma}} \text{ (Beispiel 3)}$$
$$\mu_{\text{Mi}} \sim \lambda_{\text{Ma}}, \quad \mu_{\text{Ma}} \sim \lambda_{\text{Mi}} \text{ (Beispiel 4)}$$

induzierten Gleichungen. Diese sind von der Gestalt

$$f(m)\alpha^m = g(n)\beta^n, \quad f, g \in \mathbb{C}[x]. \tag{6.1}$$

Laurent behandelt in seiner Arbeit [2] solche Gleichungen.

**Satz 6.1** (Laurent [2]). *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ keine Einheitswurzeln. Weiter seien $f, g$ nichttriviale Polynome, deren Koeffizienten in $\mathbb{C}$ liegen. $S$ bezeichne die Menge aller Paare $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ mit*

$$f(m)\alpha^m = g(n)\beta^n.$$

*Wir setzen*

$$|S| = \infty$$

*voraus. Dann existieren zwei ganze Zahlen* $r \neq 0$, $s \neq 0$, *welche die Relation*

$$\alpha^r = \beta^s \tag{6.2}$$

*erfüllen. Sei* $\Pi$ *die Linearform*

$$\Pi(m,n) = rn - sm$$

*zu einem festen Paar* $(r,s)$ *mit der Beziehung* (6.2).

(i) *Ist* $\Pi(S)$ *endlich, dann gibt es eine ganze Zahl* $t$, *sodaß* $S$ *aus der Vereinigung einer endlichen Menge und einer affinen Untergruppe* $A$ *der Dimension* 1 *besteht, wobei* $A$ *in* $\Pi^{-1}(t)$ *enthalten ist.*
(ii) *Wenn* $\Pi(S)$ *eine unendliche Menge bildet, dann ist eines der beiden Polynome konstant, während das andere genau eine (eventuell mehrfache) Nullstelle besitzt.*

Im Beweis von Theorem 6.1 tritt (mit anderen Bezeichnungen) die Gleichung

$$\sigma\delta^w = (t-\gamma)^e \tag{6.3}$$

in den Variablen $t, w \in \mathbb{Z}$ auf. Dabei sind $\sigma \neq 0$, $\delta \neq 0$ und $\gamma$ komplexe Zahlen, $e$ ist natürlich. Ferner sei $\delta$ keine Einheitswurzel. (6.3) wird in den Arbeiten [9, 11] untersucht. Wir zitieren Lemma 2 in [9].

**Satz 6.2** (Schlickewei, Schmidt). *Die Gleichung* (6.3) *besitzt höchstens dann unendlich viele Lösungen* $t, w \in \mathbb{Z}$, *wenn* $\gamma \in \mathbb{Q}$ *und* $\delta^u \in \mathbb{Z}$ *für ein* $u \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. *Im Fall unendlich vieler Lösungen bestehen diese aus einer endlichen Menge und ein oder zwei Einparameterfamilien* $t(s)$, $w(s)$ *vom Typ*

$$t(s) = cR^s + \gamma, \qquad w(s) = as + b \quad (s \in \mathbb{N}).$$

*Eine zweite Lösungsfamilie kann höchstens dann auftreten, wenn* $e$ *gerade ist. Diese hat die Gestalt*

$$t(s) = c'R^s + \gamma, \qquad w(s) = as + b' \quad (s \in \mathbb{N}).$$

$R$ *ist eine rationale Potenz von* $\delta$ *mit* $R > 1$, $R \in \mathbb{Z}$. $a, b, b'$ *sind ganze Zahlen mit* $au > 0$ *und* $c, c' \in \mathbb{Q}$.

Im Folgenden seien

$$h_1, n_1 \in \mathbb{Z},\ A_1 \in \mathbb{C}^*,\ \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ keine Einheitswurzel,}$$

$$\varepsilon, \zeta \text{ Einheitswurzeln mit } \zeta^3 = 1.$$

Korollar 6.1 und Theorem 6.1 zeigen, daß im Fall $g = 1$ Gleichungen vom Typ (3.1) angegeben werden können, die unendlich viele Lösungen $(h,n,q) \in \mathbb{Z}^3$ zulassen.

**Theorem 6.1.** *Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine nichtdegenerierte rekurrente Folge, die einer Gleichung* (3.1) *genügt. Weiters sei $\mathcal{P}$ eine Partition, welche durch einen der Ausnahmefälle* (4.27), (4.46) *definiert ist. Wir setzen voraus, daß die Kardinalität*

$$|S(\mathcal{P})| = \infty$$

*ist. Dann ist die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ von der Form*

$$u_n = A_1\left(\frac{1}{\alpha^n} + \rho(\varepsilon\alpha)^n\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{6.4}$$

*wobei $A_1 \in \mathbb{C}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ keine Einheitswurzel, $\varepsilon$ eine Einheitswurzel ist. Sei $o$ die Ordnung von $\varepsilon$.*

*Im Fall* (4.27) *ist*

$$\rho = \varepsilon^{q_1}\alpha^{2q_1},$$

*wobei $(0, q_1)$ eine Lösung des Systems* (6.8), (6.9) *ist. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ läßt sich in der Gestalt*

$$u_{n-q_1} = A\left(\frac{1}{\alpha^n} + (\varepsilon\alpha)^n\right) \quad A \in \mathbb{C}^*$$

*darstellen. Die Gleichung* (3.1) *lautet dann*

$$\frac{-2A^2}{a_0}\varepsilon^w u_h{}^k + u_n{}^2 - Au_q = 0 \quad h_0,\ w \in \mathbb{Z},\ A = A_1\alpha^{q_1},\ a_0 = u_{h_0}{}^k, \tag{6.5}$$

*wobei $h_0$ eine der endlich vielen Lösungen von* (6.19) *ist. Für alle $w \in \mathbb{Z}$ liegen die Tripel*

$$(h_0, n, 2n + q_1) \quad \forall n \equiv w - q_1 \ (mod\, o),$$

$$\forall \textit{ Lösungen } h_0 \textit{ von } (6.19)$$

*in $S(\mathcal{P})$. Diese Tripel sind, bis auf endlich viele, alle Elemente von $S(\mathcal{P})$.*

*Tritt der Fall* (4.46) *ein, so ist*

$$\rho = \zeta\varepsilon^{\frac{-e}{3}}\alpha^{\frac{-2e}{3}} = \zeta\varepsilon^f\alpha^{2f}, \quad e = 2n_1 + q_1,\ \zeta^3 = 1,\ f = -\frac{e}{3} \in \frac{1}{3}\mathbb{Z},$$

*wobei $(q_1, n_1)$ eine Lösung des Systems* (6.21), (6.22) *ist. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ läßt sich in der Form*

$$u_{n-f} = A\left(\frac{1}{\alpha^n} + (\varepsilon\alpha)^n\right) \quad A \in \mathbb{C}^*$$

*darstellen. Gleichung* (3.1) *besitzt die Gestalt*

$$-\frac{2A^2}{a_0}\varepsilon^w \zeta {u_h}^k + {u_n}^2 - A\varepsilon^{2w}\zeta^2 u_q = 0 \tag{6.6}$$

*mit* $h_0 \in \mathbb{Z}, w = n_1 + f, a_0 = {u_{h_0}}^k, A = A_1\alpha^f \in \mathbb{C}^*$, *wobei* $h_0$ *eine der endlich vielen Lösungen der Gleichung* (6.36) *ist.*

*Die Tripel*

$$(h_0, n, -2n-3f) \quad \forall n \equiv w - f \ (mod\, o),$$

$$\forall h_0 \in \mathbb{Z},\ \textit{die}\ (6.36)\ \textit{erfüllen},$$

*gehören zu* $S(\mathcal{P})$ *und liefern daher Lösungen der Gleichung* (6.6). *Diese Tripel sind* (*bis auf endlich viele Ausnahmen*) *alle Elemente der Menge* $S(\mathcal{P})$.

*Ist umgekehrt eine Folge* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *vom Typ* (6.4) *mit*

$$\rho = \varepsilon^{q_1}\alpha^{2q_1} \quad (q_1 \in \mathbb{Z}),$$

*dann genügt* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *einer Gleichung der Form* (6.5) *mit unendlich vielen Lösungen. Die Tripel*

$$(h_0, n, 2n+q_1) \quad \forall n \equiv w - q_1 \ (mod\, o),\ \ o \textit{ Ordnung von } \varepsilon, h_0, w \in \mathbb{Z}$$

*sind Elemente der Lösungsmenge von* (6.5).

*Ist* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *von der Gestalt* (6.4) *mit*

$$\rho = \zeta\varepsilon^f\alpha^{2f} \quad f \in \frac{1}{3}\mathbb{Z},\ \zeta^3 = 1,$$

*dann hat die Gleichung* (6.6) *unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge enthält die Tripel*

$$(h_0, n, -2n-3f) \quad \forall n \equiv w - f \ (mod\, o),\ h_0, w \in \mathbb{Z}.$$

**Beweis.** Wir gehen von der Annahme aus, daß es zu den Fällen (4.27) und (4.46) Folgen gibt, welche für eine Gleichung der Form (3.1) unendlich viele Lösungen $(h, n, q) \in \mathbb{Z}^3$ zulassen. Daraus leiten wir mit Hilfe der Sätze 6.1 und 6.2 das Aussehen einer solchen Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ab. Dann wird gezeigt, daß zu jeder Folge der Gestalt (6.15) bzw. (6.33) eine Gleichung (3.1) mit unendlich vielen Lösungen angegeben werden kann.

Die Bedingungen

$$r = 2, \qquad v_2 = -v_1$$

in den Beispielen 3 und 4 werden erfüllt, indem wir ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\alpha$ keine Einheitswurzel, wählen und

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha}, \qquad \alpha_2 = \varepsilon\alpha$$

setzen. Da $r = 2$ und die Lösungsmenge des Systems (4.11) ein nichttriviales Element enthält, muß $g = 1$ sein. Die Relation (3.3) nimmt die Form

$$u_n = f_1(n)\frac{1}{\alpha^n} + f_2(n)(\varepsilon\alpha)^n$$

an.

**α**) Für

$$l = 2, \quad m = 1, k \text{ beliebig (siehe Beispiel 3 und (4.27))}$$

wird die Gleichung (3.1) zu

$$a \cdot \left[f_1(h)\frac{1}{\alpha^h} + f_2(h)(\varepsilon\alpha)^h\right]^k + b \cdot \left[\frac{1}{\alpha^n}f_1(n) + f_2(n)(\varepsilon\alpha)^n\right]^2 + \\ + c \cdot \left[\frac{1}{\alpha^q}f_1(q) + (\varepsilon\alpha)^q f_2(q)\right] = 0.$$

Also ist

$$a \cdot \left[\frac{1}{\alpha^h}f_1(h) + (\varepsilon\alpha)^h f_2(h)\right]^k + b\frac{1}{\alpha^{2n}}f_1{}^2(n) + 2bf_1(n)f_2(n)\varepsilon^n + \\ + b(\varepsilon\alpha)^{2n}f_2{}^2(n) + c\frac{1}{\alpha^q}f_1(q) + c(\varepsilon\alpha)^q f_2(q) = 0. \tag{6.7}$$

Die Äquivalenzen $\lambda_{\mathrm{Mi}} \sim \mu_{\mathrm{Mi}}$, $\lambda_{\mathrm{Ma}} \sim \mu_{\mathrm{Ma}}$ führen zu den Gleichungen

$$b\frac{1}{\alpha^{2n}}f_1{}^2(n) = -c\frac{1}{\alpha^q}f_1(q), \tag{6.8}$$

$$b(\alpha\varepsilon)^{2n}f_2{}^2(n) = -c(\alpha\varepsilon)^q f_2(q). \tag{6.9}$$

Wir setzen

$$\overline{u}_n = f_1(n)\frac{1}{\alpha^n}.$$

Die Gleichung (6.8) wird zu

$$b \cdot \overline{u}_n{}^2 = -c\overline{u}_q.$$

Das ist der Spezialfall einer Gleichung, die in [8] untersucht wird. $\alpha$ ist keine Einheitswurzel. Wenn wir unendlich viele Lösungen in (6.8) haben wollen, dann ist nach [8]

$$f_1(n) \equiv A_1 \in \mathbb{C}^* \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

notwendig. Analog setzen wir in der Gleichung (6.9)

$$\tilde{u}_n = f_2(n)(\varepsilon\alpha)^n$$

und erhalten

$$b \cdot \tilde{u}_n{}^2 = -c\tilde{u}_q.$$

Diese Gleichung kann nur dann unendlich viele Lösungen besitzen, wenn wir

$$f_2(n) \equiv A_2 \in \mathbb{C}^* \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

fordern. Aus (6.8) und (6.9) folgen die Gleichungen

$$bA_1 \frac{1}{\alpha^{2n}} = -c\frac{1}{\alpha^q}, \tag{6.10}$$

$$bA_2(\varepsilon\alpha)^{2n} = -c(\varepsilon\alpha)^q. \tag{6.11}$$

Diese sind vom Typ (6.1) mit Grad $f(x) =$ Grad $g(x) = 0$. Die Lösungen von (6.1) bilden wegen Satz 6.1 bis auf endlich viele Ausnahmen eine Einparameterfamilie $\mathcal{F}$. Mehr über Gleichungen der Gestalt (6.1) steht in den Artikeln [9] und [11]. $\mathcal{F}$ besteht aus Paaren $(n,q)$

$$\begin{array}{ll} n = n_0 t + n_1 \quad 0 \le n_1 < n_0 & \\ q = q_0 t + q_1 & \end{array} \quad n_0, n_1, q_0, q_1 \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

wobei $n_0$, $q_0$ die Relation (6.2) erfüllen und $(n_1, q_1)$ eine Lösung von (6.1) darstellt. Im Fall (6.10) lautet (6.2)

$$\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^1 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2,$$

d.h. $n_0 = 1$, $q_0 = 2$. Daher ist $n_1 = 0$ und $\mathcal{F} = \{(t, 2t + q_1) | t \in \mathbb{Z}\}$. Für $t \in \mathbb{Z}$ erhalten wir aus (6.10) und (6.11)

$$bA_1 \frac{1}{\alpha^{2t}} = -c\frac{1}{\alpha^{2t+q_1}},$$
$$bA_2(\varepsilon\alpha)^{2t} = -c(\varepsilon\alpha)^{2t+q_1}.$$

Es folgt

$$bA_1 = -c\frac{1}{\alpha^{q_1}}, \tag{6.12}$$

$$bA_2 = -c(\varepsilon\alpha)^{q_1}. \tag{6.13}$$

Durch Divison ergibt sich aus den obigen beiden Gleichungen die Identität

$$\frac{A_2}{A_1} = \varepsilon^{q_1}\alpha^{2q_1},$$

also

$$A_2 = \varepsilon^{q_1}\alpha^{2q_1}A_1. \tag{6.14}$$

Wegen (6.14) besitzt die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ die Gestalt

$$u_n = A_1\left(\frac{1}{\alpha^n} + \varepsilon^{q_1}\alpha^{2q_1}(\varepsilon\alpha)^n\right) = A_1\alpha^{q_1}\left(\frac{1}{\alpha^{n+q_1}} + (\varepsilon\alpha)^{n+q_1}\right). \tag{6.15}$$

Wir erhalten die Darstellung

$$u_{n-q_1} = A\left(\frac{1}{\alpha^n} + (\varepsilon\alpha)^n\right) \quad \text{für ein } q_1 \in \mathbb{Z}, \quad A \in \mathbb{C}^*, \tag{6.16}$$

wobei $A$ und $A_1$ durch die Relation

$$A = A_1\alpha^{q_1}$$

verbunden sind. Die Gleichungen (6.7), (6.8), (6.9) führen zu der Gleichung

$$a{A_1}^k\left[\frac{1}{\alpha^h} + \varepsilon^{q_1}\alpha^{2q_1}(\varepsilon\alpha)^h\right]^k + b\cdot 2{A_1}^2\varepsilon^{n+q_1}\alpha^{2q_1} = 0. \tag{6.17}$$

Weil $\varepsilon$ eine Einheitswurzel ist, zerfällt (6.17) in endlich viele Gleichungen der Gestalt

$$u_h = K \quad K \text{ Konstante.}$$

$\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ hat einen Rang $r > 1$. Wir schließen mit Hilfe der Folgerung 5.1, daß $u_h = K$ höchstens endlich viele Lösungen besitzt. Also erfüllen endlich viele $h \in \mathbb{Z}$ die Gleichung (6.17). Aus (6.17) leiten wir für $a$ den Ausdruck

$$a = \frac{-2b\varepsilon^{n+q_1}\alpha^{2q_1}}{{A_1}^{k-2}\left(\frac{1}{\alpha^h} + \varepsilon^{q_1}\alpha^{2q_1}(\varepsilon\alpha)^h\right)^k} = \frac{-2bA^2\varepsilon^{n+q_1}}{{A_1}^k\left(\frac{1}{\alpha^h} + \varepsilon^{q_1}\alpha^{2q_1}(\varepsilon\alpha)^h\right)^k} \tag{6.18}$$

ab, wobei $(h, n, q) \in S(\mathcal{P})$ ist.

Sei $w$ eine Restklasse $(\operatorname{mod} o)$. Wir betrachten die Gleichung

$$aA_1{}^k\left(\frac{1}{\alpha^h}+\varepsilon^{q_1}\alpha^{2q_1}(\varepsilon\alpha)^h\right)^k+2bA^2\varepsilon^w=0. \tag{6.19}$$

Ist $h_0$ eine Lösung von (6.19), dann sind $(h_0,n)\ \forall n\equiv w-q_1 \pmod o$ Lösungen von (6.17). Offensichtlich liegen die Tripel

$$(h_0,n,2n+q_1)\quad \forall n\equiv w-q_1 \pmod o$$

in $S(\mathcal{P})$. Die Lösungsmenge des Systems (6.8), (6.9) besitzt die Form $\mathcal{F}\cup M$, wobei $M$ eine endliche Menge ist. Daher enthält $S(\mathcal{P})$, außer den Tripeln

$$(h_0,n,2n+q_1)\quad \forall w \text{ mit } 0\le w<o,\quad \forall n\equiv w-q_1 \pmod o,$$
$$\forall \text{ Lösungen } h_0 \text{ von (6.19)},$$

höchstens noch endlich viele Elemente.

Seien umgekehrt

$A_1\in\mathbb{C}^*,\ \ q_1\in\mathbb{Z},\ \ \alpha\in\mathbb{C}^*$ keine Einheitswurzel, $\varepsilon$ eine Einheitswurzel

gegeben. Zu jeder Folge der Form (6.15) können wir eine Gleichung (3.1) finden, welche unendlich viele Lösungen $(h,n,q)\in\mathbb{Z}^3$ besitzt. Wir setzen o.B.d.A. $b=1$ und berechnen $c$ nach der Formel (6.12). Dadurch enthalten die Gleichungen (6.10) und (6.11) die Lösungen $(n,2n+q_1)\ \forall n\in\mathbb{Z}$. Sei $o$ die Ordnung von $\varepsilon$. Wir wählen $h_0$, $w\in\mathbb{Z}$ und setzen

$$a=\frac{-2\alpha^{2q_1}\varepsilon^w}{A_1{}^{k-2}\left(\frac{1}{\alpha^{h_0}}+\varepsilon^{q_1}\alpha^{2q_1}(\varepsilon\alpha)^{h_0}\right)^k}.$$

Dann erfüllen die Paare $(h_0,n)\ \forall n+q_1\equiv w \pmod o$ die Gleichung (6.17).

Fassen wir die obigen Überlegungen zusammen, so ergibt sich, daß in der Gleichung

$$\frac{-2A^2}{a_0}\varepsilon^w\cdot u_h{}^k+u_n{}^2-Au_q=0,\quad h_0,w,q_1\in\mathbb{Z},\ A\in\mathbb{C}^*,\ a_0=u_{h_0}{}^k$$

unendlich viele Lösungen auftreten. Dabei wird $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ durch (6.16) beschrieben. Die Lösungsmenge enthält die Tripel

$$(h_0,n,2n+q_1)\quad \forall n+q_1\equiv w \pmod o.$$

Äquivalent dazu ist die Formulierung: Die Gleichung

$$\frac{-2A^2}{a_0}\varepsilon^w \cdot {u_h}^k + {u_{n-q_1}}^2 - Au_q = 0, \quad h_0, w, q_1 \in \mathbb{Z},\ a_0 = {u_{h_0}}^k,\ A = A_1\alpha^{q_1}$$

mit $u_n = A_1\alpha^{q_1}\left(\frac{1}{\alpha^{n+q_1}} + (\varepsilon\alpha)^{n+q_1}\right)$ besitzt unendlich viele Lösungen, wobei die Tripel $(h_0, n-q_1, 2n-q_1)$, $n \equiv w \bmod(o)$ der Lösungsmenge angehören.

***β***) Für

$$m = 1, l = 2, k \text{ beliebig (siehe Beispiel 4 und (4.46))}$$

wird die Gleichung (3.1) zu

$$a \cdot \left(f_1(h)\frac{1}{\alpha^h} + f_2(h)(\varepsilon\alpha)^h\right)^k + b \cdot \left(f_1(n)\frac{1}{\alpha^n} + f_2(n)(\varepsilon\alpha)^n\right)^2 + \\ + c \cdot \left(f_1(q)\frac{1}{\alpha^q} + f_2(q)(\varepsilon\alpha)^q\right) = 0.$$

Also ist

$$a \cdot \left(f_1(h)\frac{1}{\alpha^h} + f_2(h)(\varepsilon\alpha)^h\right)^k + b{f_1}^2(n)\frac{1}{\alpha^{2n}} + 2b \cdot f_1(n) \cdot f_2(n) \cdot \varepsilon^n + \\ + b{f_2}^2(n)(\varepsilon\alpha)^{2n} + cf_1(q)\frac{1}{\alpha^q} + cf_2(q)(\varepsilon\alpha)^q = 0 \tag{6.20}$$

Die Äquivalenzen

$$\mu_{\mathrm{Mi}} \sim \lambda_{\mathrm{Ma}}, \quad \mu_{\mathrm{Ma}} \sim \lambda_{\mathrm{Mi}}$$

entsprechen den Gleichungen

$$cf_1(q)\frac{1}{\alpha^q} = -b \cdot {f_2}^2(n) \cdot (\varepsilon\alpha)^{2n}, \tag{6.21}$$

$$cf_2(q)(\varepsilon\alpha)^q = -b \cdot {f_1}^2(n) \cdot \frac{1}{\alpha^{2n}}. \tag{6.22}$$

Da $\varepsilon$ eine Einheitswurzel ist, führt (6.21) zu endlich vielen Gleichungen der Gestalt

$$c' \cdot f_1(q)\frac{1}{\alpha^q} = -b' \cdot {f_2}^2(n)\alpha^{2n}.$$

Eine dieser Gleichungen besitzt unendlich viele Lösungen $(q,n) \in \mathbb{Z}^2$. Sie ist von der Form (6.1). Die Beziehung (6.2) ist wegen

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-2} = (\alpha^2)^1$$

erfüllt.

Wir gehen zunächst von der Annahme Grad $f_1 \geq 1$, Grad $f_2 \geq 1$ aus. Nach Satz 6.1 existiert eine ganze Zahl $e$ mit

$$-2n - q = -ln - mq = e.$$

Daher gilt für unendlich viele $n$

$$c' \cdot f_1(-2n - e) = -b' \cdot f_2{}^2(n)\alpha^{2n}\alpha^{-2n-e}.$$

Es folgt für

$$\overline{f}_1(n) = f_1(-2n - e)$$

die Gleichung

$$c' \cdot \overline{f}_1(n) = -b' \cdot f_2{}^2(n)\alpha^{-e},$$

wobei Grad $\overline{f}_1 =$ Grad $f_1$. Aus der Polynomidentität

$$c' \cdot \overline{f}_1 = -b' \cdot f_2{}^2\alpha^{-e}$$

schließen wir

$$\text{Grad}\, f_2 < \text{Grad}\, f_1.$$

Durch analoges Vorgehen erhalten wir aus (6.22) den Widerspruch

$$\text{Grad}\, f_1 < \text{Grad}\, f_2.$$

Daher ist mindestens eines der Polynome $f_1$, $f_2$ konstant. Wir nehmen jetzt an, daß der Grad $f_1 \cdot f_2 \geq 1$ ist. Sei o.B.d.A.

$$f_1(q) \equiv A_1 \in \mathbb{C}^* \quad \forall q \in \mathbb{Z}, \qquad \text{Grad}\, f_2 \geq 1.$$

Nach Satz 6.1 läßt sich $f_2$ in der Form

$$f_2(x) = A_2(x - \gamma)^u,$$

$u$ natürlich, $\gamma$ komplex, $A_2 \in \mathbb{C}^*$ darstellen. Die Gleichungen (6.21), (6.22) werden zu

$$cA_1 \frac{1}{\alpha^q} = -bA_2{}^2(n - \gamma)^{2u}(\varepsilon\alpha)^{2n}, \tag{6.23}$$

$$cA_2(q - \gamma)^u(\varepsilon\alpha)^q = -bA_1{}^2 \frac{1}{\alpha^{2n}}. \tag{6.24}$$

Durch einfaches Umformen erhalten wir

$$-\frac{c}{b}\frac{A_1}{A_2{}^2}\frac{1}{\alpha^{q+2n}}\frac{1}{\varepsilon^{2n}} = (n - \gamma)^{2u},$$

$$-\frac{b}{c}\frac{A_1{}^2}{A_2}\frac{1}{\alpha^{q+2n}}\frac{1}{\varepsilon^q} = (q - \gamma)^u.$$

Wir setzen

$$e = q + 2n.$$

Da $\varepsilon$ eine Einheitswurzel ist, genügt es, das Gleichungssystem

$$\sigma \frac{1}{\alpha^e} = (n - \gamma)^{2u}, \tag{6.25}$$

$$\overline{\sigma} \frac{1}{\alpha^e} = (q - \gamma)^u \tag{6.26}$$

zu betrachten (wegen Satz 6.1 nimmt $e$ unendlich viele Werte an). Wir wenden jetzt Satz 6.2 auf die beiden Gleichungen (6.25), (6.26) an. Danach existieren unendlich viele natürliche Zahlen $s$ mit

$$e(s) = \overline{c}R^s + \gamma, \quad n(s) = a's + b', \quad q(s) = \overline{a}s + \overline{b}.$$

Wegen $e(s) = q(s) + 2n(s)$ gilt

$$e(s) = (2a' + \overline{a})s + (2b' + \overline{b}).$$

Wir wählen $s_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß

$$|\overline{c} \cdot R^{s_0}(R - 1)| > |2a' + \overline{a}|.$$

Daraus folgt

$$e(s_0 + i) \neq 2 \cdot n(s_0 + i) + q(s_0 + i) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Also besitzt das System der Gleichungen (6.25), (6.26) höchstens endlich viele Lösungen im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es bleibt nur mehr der Fall

$$f_1 \equiv A_1 \in \mathbb{C}^*, \qquad f_2 \equiv A_2 \in \mathbb{C}^*$$

übrig. (6.21), (6.22) nehmen die Form

$$cA_1 \frac{1}{\alpha^q} = -bA_2{}^2 (\varepsilon\alpha)^{2n}, \tag{6.27}$$

$$cA_2 (\varepsilon\alpha)^q = -bA_1{}^2 \frac{1}{\alpha^{2n}}. \tag{6.28}$$

an. Wir bezeichnen die Ordnung von $\varepsilon$ mit $o$. (6.27) und (6.28) sind Gleichungen vom Typ (6.1). Sie erfüllen die Relation (6.2), denn

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2o} = (\varepsilon\alpha^2)^{-o},$$

$$(\varepsilon\alpha)^{2o} = \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^{-o}.$$

Abgesehen von endlich vielen Elementen, besteht die Lösungsmenge von (6.27) aus den Paaren $(q,n)$ mit

$$q = 2oi + q_1, \qquad n = -oi + n_1 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{6.29}$$

Dabei ist $(q_1, n_1)$ eine Lösung von (6.27). Die Menge der Paare $(q,n)$ mit (6.29) werde mit $\mathcal{F}$ bezeichnet. Sei o.B.d.A.

$$b = 1.$$

Nach Voraussetzung besitzen (6.27) und (6.28) unendlich viele gemeinsame Lösungen. Daher gilt für unendlich viele $i \in \mathbb{Z}$

$$cA_2(\varepsilon\alpha)^{2oi+q_1} = -{A_1}^2 \frac{1}{\alpha^{2(-oi+n_1)}}.$$

Das ergibt

$$cA_2\alpha^{q_1+2n_1}\varepsilon^{q_1} = -{A_1}^2. \tag{6.30}$$

Multiplikation von (6.27) und (6.28) ergibt

$$-bc{A_1}^3 \frac{1}{\alpha^{2n+q}} = -bc{A_2}^3(\varepsilon\alpha)^{2n+q}.$$

Wegen

$$q + 2n = 2oi + q_1 + 2(-oi + n_1) = q_1 + 2n_1 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

gilt für fast alle Lösungen $(q,n)$ des Systems (4.22), (4.23), daß $q + 2n$ konstant ist. Wir definieren $e$ durch

$$e = q_1 + 2n_1$$

und $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ durch

$$\zeta^3 = 1.$$

Es folgt

$${A_2}^3 = \varepsilon^{-2n-q}\alpha^{-4n-2q}{A_1}^3 = \varepsilon^{-2n_1-q_1}\alpha^{-4n_1-2q_1}{A_1}^3,$$

das heißt

$${A_2}^3 = \varepsilon^{-e}\alpha^{-2e}{A_1}^3.$$

Zwischen $A_2$ und $A_1$ besteht eine der Beziehungen

$$A_2 = \zeta^j\varepsilon^{\frac{-2n_1-q_1}{3}}\alpha^{\frac{-4n_1-2q_1}{3}}A_1 = \zeta^j\varepsilon^{-\frac{e}{3}}\alpha^{-\frac{2e}{3}} \quad j = 0,1,2. \tag{6.31}$$

Wir setzen diese Zahlen in (6.30) ein und erhalten für $c$ die möglichen Werte

$$c = -\zeta^{2j}A_1\varepsilon^{\frac{2n_1+q_1}{3}}\alpha^{\frac{-2n_1-q_1}{3}}\varepsilon^{-q_1} = -\zeta^{2j}A_1\alpha^{\frac{-e}{3}}\varepsilon^{\frac{2n_1-2q_1}{3}} \quad j = 0,1,2. \tag{6.32}$$

Für $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ existieren ebenfalls drei Darstellungen, nämlich

$$u_n = A_1\left(\frac{1}{\alpha^n} + \zeta^j \varepsilon^{\frac{-2n_1-q_1}{3}} \alpha^{\frac{-4n_1-2q_1}{3}} (\varepsilon\alpha)^n\right) \quad j = 0,1,2. \tag{6.33}$$

Daher ist

$$u_n = A_1\left(\frac{1}{\alpha^n} + \zeta^j \varepsilon^{\frac{-e}{3}} \alpha^{\frac{-2e}{3}} (\varepsilon\alpha)^n\right) \quad j = 0,1,2.$$

Die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ läßt sich auch durch

$$u_n = A_1 \alpha^{\frac{-e}{3}}\left(\alpha^{-(n-\frac{e}{3})} + \zeta(\varepsilon\alpha)^{n-\frac{e}{3}}\right),$$

$$u_n = A\left(\alpha^{-(n+f)} + \zeta(\varepsilon\alpha)^{n+f}\right) \quad \text{für ein} f \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}, A \in \mathbb{C}^*, \zeta \in \mathbb{C} \text{ mit } \zeta^3 = 1 \tag{6.34}$$

beschreiben. Zwischen $A$ und $A_1$ besteht die Beziehung

$$A = A_1 \alpha^{-\frac{e}{3}} = A_1 \alpha^f.$$

Aus (6.20), (6.21) und (6.22) schließen wir

$$2bf_1(n)f_2(n)\varepsilon^n + a\left(f_1(h)\frac{1}{\alpha^h} + f_2(h)(\varepsilon\alpha)^h\right)^k = 0.$$

Wegen

$$f_1 \equiv A_1, \qquad f_2 \equiv A_2$$

und der Relation $A_2 = \rho A_1$ gilt

$$2bA_1\rho A_1\varepsilon^n + aA_1{}^k\left(\frac{1}{\alpha^h} + \rho(\varepsilon\alpha)^h\right)^k = 0. \tag{6.35}$$

Da $\varepsilon$ eine Einheitswurzel ist, zerfällt (6.35) in endlich viele Gleichungen der Form

$$u_h = K, \quad K \text{ Konstante.}$$

Wegen $r > 1$ schließen wir mit Hilfe der Folgerung 5.1, daß höchstens endlich viele $h \in \mathbb{Z}$ (6.35) erfüllen. Für alle $(q,n) \in \mathcal{F}$ gilt

$$\varepsilon^n = \varepsilon^{n_1}.$$

Daher folgt aus (6.35) und $b = 1$ für fast alle Lösungen $(q,n)$ des Systems (6.21), (6.22) die Gleichung

$$2A_1\rho A_1\varepsilon^{n_1} + aA_1{}^k\left(\frac{1}{\alpha^h} + \rho(\varepsilon\alpha)^h\right)^k = 0. \tag{6.36}$$

Es sei $h_0$ eine ganzzahlige Lösung der Gleichung (6.36). Dann liegen für alle $i \in \mathbb{Z}$ die Tripel

$$(h_0, n, q) = (h_0, -oi + n_1, 2oi + q_1)$$

in der Menge $S(\mathcal{P})$. Dies sind, bis auf endlich viele Ausnahmen, alle Elemente von $S(\mathcal{P})$. Aus (6.36) ergibt sich

$$a = -\frac{2\varepsilon^{n_1}\rho {A_1}^2}{{A_1}^k\left(\frac{1}{\alpha^{h_0}} + \rho(\varepsilon\alpha)^{h_0}\right)^k}, \quad \rho = \zeta\varepsilon^{\frac{-2n_1-q_1}{3}}\alpha^{\frac{-4n_1-2q_1}{3}} = \zeta\varepsilon^{\frac{-e}{3}}\alpha^{\frac{-2e}{3}}. \tag{6.37}$$

Wir setzen

$$a_0 = {A_1}^k\left(\frac{1}{\alpha^{h_0}} + \rho(\varepsilon\alpha)^{h_0}\right)^k.$$

$a_0$ ist ein Element der Menge $\{{u_h}^k\colon h \in \mathbb{Z}\}$. Aus (6.37) erhalten wir

$$a = -\frac{2\varepsilon^{n_1}\zeta\varepsilon^{-\frac{e}{3}}\alpha^{-\frac{2e}{3}}{A_1}^2}{a_0} = -\frac{2\varepsilon^{n_1+f}\zeta A^2}{a_0}.$$

Bezeichnen wir $n_1 + f$ mit $w$, so ergibt sich

$$a = -\frac{2\varepsilon^{w}\zeta A^2}{a_0}, \quad w \in f + \mathbb{Z}. \tag{6.38}$$

Ist eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ durch die Angabe von $A_1$, $\alpha$, $\zeta$, $\varepsilon$, $n_1$, $q_1$ (statt $n_1$, $q_1$ genügt es, für die Festlegung von $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ die Zahl $e$ anzugeben) und die Beziehung (6.33) definiert, so setzen wir o.B.d.A. $b = 1$ und bestimmen $c$ aus (6.32). $c$ ist von den Elementen aus $\mathcal{F}$ unabhängig ($\mathcal{F}$ ist die Menge aller $(q,n)$ mit $q = 2oi + q_1$, $n = -oi + n_1$, $i \in \mathbb{Z}$). Dadurch besitzt das Gleichungssystem (6.27), (6.28) (damit auch das System (6.21), (6.22)) unendlich viele Lösungen $(q,n)$, wobei $q = 2oi + q_1$, $n = -oi + n_1$ $\forall i \in \mathbb{Z}$. Wir wählen $h_0 \in \mathbb{Z}$ und bestimmen $a$ durch die Formel (6.37). Dann erfüllt $h_0$ die Beziehung (6.36). Daher sind

$$(h_0, -oi + n_1) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Lösungen von (6.35). Die Lösungsmenge der Gleichung

$$\begin{aligned} &{u_n}^2 - \zeta^2 A_1\varepsilon^{\frac{2n_1-2q_1}{3}}\alpha^{\frac{-2n_1-q_1}{3}}u_q - \\ &\quad - \frac{2\varepsilon^n\zeta\varepsilon^{\frac{-2n_1-q_1}{3}}\alpha^{\frac{-4n_1-2q_1}{3}}}{{A_1}^{k-2}\left(\frac{1}{\alpha^{h_0}} + \zeta^j\varepsilon^{\frac{-2n_1-q_1}{3}}\alpha^{\frac{-4n_1-2q_1}{3}}(\varepsilon\alpha)^{h_0}\right)^k} \cdot {u_h}^k = 0 \end{aligned}$$

enthält die Tripel $(h_0, -oi + n_1, 2oi + q_1)$ $\forall i \in \mathbb{Z}$.

Wir können dies einfacher darstellen. Die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ kann durch die Angabe von

$$\varepsilon, \alpha, f \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}, \quad A \in \mathbb{C}^*, \quad \zeta \text{ mit } \zeta^3 = 1$$

und die Beziehung (6.34) festgelegt werden. Wir wählen die Restklasse $w \pmod o$, $h_0 \in \mathbb{Z}$ und berechnen $a, c$ aus den Formeln (6.32) und (6.38). Dann liefern die Tripel

$$(h_0, n, -2n - 3f) \quad \forall n \equiv w - f \pmod o$$

Lösungen der Gleichung

$$u_n{}^2 - A\varepsilon^{2w}\zeta^2 u_q - \frac{2A^2}{a_0}\varepsilon^w \zeta u_h{}^k = 0.$$

□

**Korollar 6.1.** *Jede* (*nichtdegenerierte rekurrente*) *Folge* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, *welche durch die Formel*

$$u_n = A_1\left(\frac{1}{\alpha^n} + \rho(\varepsilon\alpha)^n\right)$$

*mit* $\alpha, A_1 \in \mathbb{C}^*$, $\alpha$ *keine Einheitswurzel*, $\varepsilon$ *eine Einheitswurzel und*

$$\rho = \zeta\varepsilon^f\alpha^{2f} \quad f \in \frac{1}{3}\mathbb{Z};\ \zeta^3 = 1$$

*definiert ist*, *induziert eine Gleichung* (3.1) *mit unendlich vielen Lösungen* $(h, n, q) \in \mathbb{Z}^3$.

Der Beweis folgt aus Theorem 6.1.

**Beispiel 5.** Die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$u_n = A_1\left(\frac{1}{\alpha^n} + \alpha^n\right)$$

$\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\alpha$ keine Einheitswurzel, erfüllt die Gleichungen

$$2A_1 - \frac{1}{A_1}u_n{}^2 + u_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

und

$$2A_1 - \frac{1}{A_1}u_n{}^2 + u_{-2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

**Beweis.** Die untere Gleichung folgt aus der oberen mit Hilfe der Beziehung

$$u_n = u_{-n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Wir haben $A = A_1$, $\varepsilon = 1$. Da $\rho = 1$ ist, können wir $\rho$ sowohl in der Form

$\alpha$) $\rho = \varepsilon^{q_1}\alpha^{2q_1}$ (hier ist $q_1 = 0$)
als auch
$\beta$) $\rho = \zeta\varepsilon^f\alpha^{2f}$ (hier ist $\zeta = 1$ und $f = 0$)
darstellen.

Im Fall $\alpha$) wählen wir $w = 0$, $h_0 \in \mathbb{Z}$ beliebig und erhalten nach Theorem 6.1 die Gleichung

$$-\frac{2{A_1}^2}{a_0}{u_h}^k + {u_n}^2 - A_1 u_q = 0. \tag{6.39}$$

Die Tripel

$$(h_0, n, 2n + q_1) = (h_0, n, 2n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

sind Lösungen. Wegen $a_0 = {u_{h_0}}^k$ folgt daraus

$$-2{A_1}^2 + {u_n}^2 - A_1 u_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Den Fall $\beta$) behandeln wir analog mit Hilfe von Theorem 6.1. Die Tripel

$$(h_0, n, -2n - 3f) = (h_0, n, -2n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

liefern Lösungen der Gleichung (6.39). Also gilt

$$-2{A_1}^2 + {u_n}^2 - A_1 u_{-2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

□

Beispiel 5 zeigt, daß es Gleichungen (3.1) gibt, die sowohl für Partitionen $\mathcal{P}$, welche durch (4.27) definiert sind, als auch für Partitionen $\tilde{\mathcal{P}}$, welche durch (4.46) gegeben sind,

$$|S(\mathcal{P})| = \infty, \quad |S(\tilde{\mathcal{P}})| = \infty$$

erfüllen.

**Satz 6.3.** *Sei $r > 1$ und $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine nichtdegenerierte Folge. Die Gleichung*

$$b{u_n}^l + c{u_q}^m = K, \quad K \in \mathbb{C}^* \tag{6.40}$$

*habe unendlich viele Lösungen $(n, q) \in \mathbb{Z}^2$. Dann gibt es bis auf Umbenennung nur die Möglichkeit*

$$l = 2, \qquad m = 1$$

*und die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ hat die Form*

$$u_n = A_1\left(\frac{1}{\alpha^n} + \rho(\varepsilon\alpha)^n\right) \quad n \in \mathbb{Z},$$

*$\varepsilon$ eine Einheitswurzel, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ keine Einheitswurzel. Dabei ist*

$$\rho = \zeta\varepsilon^f\alpha^{2f} \quad f \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}, \quad \zeta^3 = 1.$$

*Wir bezeichnen die Ordnung von $\varepsilon$ mit $o$. Dann erfüllt die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine der Gleichungen*

$$u_n{}^2 - Au_q = 2A^2\varepsilon^w, \quad u_n{}^2 - A\varepsilon^{2w}\zeta^2u_q = 2A^2\varepsilon^w\zeta \text{ für ein } w \in f + \mathbb{Z}.$$

*Für $\zeta = 1$, $2w \equiv 0 \pmod{o}$ lautet die Gleichung* (6.40)

$$u_n{}^2 - Au_q = 2A^2\varepsilon^w.$$

*Ist $\zeta^3 = 1$, $\zeta \neq 1$, so besitzt* (6.40) *die Gestalt*

$$u_n{}^2 - A\varepsilon^{2w}\zeta^2u_q = 2A^2\varepsilon^w\zeta.$$

**Beweis.** Der Fall $K = 0$ wird in [8] behandelt. Wegen $r > 1$ besitzt (6.40) höchstens endlich viele Lösungen.

Sei $K \neq 0$. Wir wählen eine natürliche Zahl $k \notin \{l, m, 1, 2\}$, und ein $h_0 \in \mathbb{Z}$ mit $u_{h_0} \neq 0$. Dann treten in der Gleichung

$$au_h{}^k + bu_n{}^l + cu_q{}^m = 0 \quad a = -\frac{K}{u_{h_0}{}^k} \tag{6.41}$$

unendlich viele Lösungen auf. Für $h = h_0$ bekommen wir (6.40). Wir formen (6.40) mit Hilfe von Satz 1.1 um und erhalten

$$\sum_{\lambda\in A_l} G_\lambda(n)\varphi_\lambda{}^n + \sum_{\mu\in A_m} H_\mu(q)\varphi_\mu{}^q - K = 0.$$

Dies ist eine Gleichung vom Typ (2.1) mit

$$\begin{aligned} N = 2, I = A_l \cup A_m \cup \{\omega^*\}, \boldsymbol{x} = (n, q), \\ \alpha_\lambda = (\varphi_\lambda, 1), f_\lambda(\boldsymbol{x}) = G_\lambda(n) \quad \text{für } \lambda \in A_l, \\ \alpha_\mu = (1, \varphi_\mu), f_\mu(\boldsymbol{x}) = H_\mu(q) \quad \text{für } \mu \in A_m, \\ \alpha_{\omega^*} = (1, 1),\ f_{\omega^*}(\boldsymbol{x}) = -K. \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{Q}$ eine Partition von $I$. Ist $\{\omega^*\}$ ein Singleton, dann ist $K = 0$. Der Fall $\{\lambda\} \in \mathcal{Q}$ ($\{\kappa\} \in \mathcal{Q}$ verläuft analog) führt zu endlich vielen Gleichungen der Gestalt

$$u_q = C, \quad C \text{ Konstante.}$$

Nach Folgerung 5.1 hat $u_q = C$ eine endliche Lösungsmenge. Daher besitzt für $\{\lambda\} \in \mathcal{Q}$ die Gleichung (6.40) nur endlich viele Lösungen. Enthält die Partition $\mathcal{Q}$ kein Singleton, so ordnen wir $\mathcal{Q}$ eine Partition

$\tilde{\mathcal{P}}$ von $A$ zu, welche das Urbild von $\mathcal{Q}$ unter der Abbildung $\pi: A \to I$,

$$\pi(\omega) = \omega \quad \omega \in A_l \cup A_m,$$
$$\pi(\kappa) = \omega^* \quad \kappa \in A_k$$

ist. Analog zu Satz 5.2 haben wir

$$(L, M) \in H(\mathcal{Q}) \Leftrightarrow (0, L, M) \in H(\tilde{\mathcal{P}}).$$

Wenn wir von den Situationen (4.27), (4.46) absehen, dann gilt für die Partition $\tilde{\mathcal{P}}$, daß $H(\tilde{\mathcal{P}})$ nur aus der Null besteht. Daraus folgt $H(\mathcal{Q}) = \{\mathbf{0}\}$, wegen Korollar 2.1 ist daher $S(\mathcal{Q})$ endlich. Erfüllt $\tilde{\mathcal{P}}$ (4.27) oder (4.46), dann können, wie in Theorem 6.1 gezeigt wurde, unendlich viele Lösungen existieren, wobei $\{l, m\} = \{1, 2\}$ ist.

Sei o.B.d.A $b = 1$.

Im Fall (4.27) lautet die Gleichung (6.41)

$$-\frac{2A^2}{a_0}\varepsilon^w {u_h}^k + {u_n}^2 - Au_q = 0.$$

Wegen $a_0 = u_{h_0}^k$ ergibt sich

$$K = 2A^2\varepsilon^w.$$

Die Gleichung (6.40) hat in der Situation (4.27) die Form

$${u_n}^2 - Au_q = 2A^2\varepsilon^w.$$

Für (4.46) lautet die Gleichung (6.41)

$$-\frac{2A^2}{a_0}\varepsilon^w \zeta {u_h}^k + {u_n}^2 - A\varepsilon^{2w}\zeta^2 u_q = 0.$$

Unter Berücksichtigung von $a_0 = {u_{h_0}}^k$ erhalten wir

$$K = 2A^2\varepsilon^w\zeta.$$

Daher besitzt (6.40) die Darstellung

$${u_n}^2 - A\varepsilon^{2w}\zeta^2 u_q = 2A^2\varepsilon^w\zeta.$$

□

## Literatur

[1] Evertse, J. H., Győry, K., Stewart, C. L., Tijdeman, R. (1988) *S*-unit equations and their applications. New Advances in Transcendence Theory (Baker, A. ed.), Cambridge Univ. Press

[2] Laurent, M. (1989) Équations exponentielles-polynômes et suites récurrentes linéaires, II. – J. Number Theory **31**: 24–53

[3] Lech, C. (1953) A note on recurring series. – Ark. Mat. **2**: 417–421
[4] Mahler, K. (1935) Eine arithmetische Eigenschaft der Taylorkoeffizienten rationaler Funktionen. – Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **38**: 50–60
[5] Van der Poorten, A. J., Schlickewei, H. P. (1991) Zeros of recurrence sequences. – Bull. Austral. Math. Soc. **44**: 215–223
[6] Schlickewei, H. P. (1993) Multiplicities of algebraic linear recurrences. – Acta. Math. **170**: 151–180
[7] Schlickewei, H. P. (1996) Multiplicities of recurrence sequences. – Acta. Math. **176**: 171–243
[8] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M. (1993) Equations $au_n{}^l = bu_m{}^k$ satisfied by members of recurrence sequences. – Proc. Amer. Math. Soc. **118**: 1043–1051
[9] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M. (1993) Linear equations in members of recurrence sequences. – Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **20**: 219–246
[10] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M. (1993) On polynomial-exponential equations. – Math. Ann. **296**: 339–361
[11] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M. (1995) The intersection of recurrence sequences. – Acta. Arith. **72**: 1–44
[12] Shorey, T. N., Tijdeman, R. (1986) Exponential diophantine equations. Cambridge University Press
[13] Skolem, Th. (1933) Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf diophantische Gleichungen. – Oslo Vid. akad. Skrifter I, Nr 6
[14] Skolem, T. (1934) Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentieller Gleichungen und diophantischer Gleichungen. – C. r. 8 congr. scand. à Stockholm, 163–188

**Anschrift des Verfassers:** Dr. Susanne Grünes, Salzgries 3/45, A-1010 Wien.