

III TEILÜBERSETZUNG UND KOMMENTAR

Die Methode und Behandlung der Arithmetik hat zwei umfassende Regeln und nicht mehr: Wenn das Kleinere multipliziert wird, wird das Ergebnis größer, als es vorher war, die größeren Teile aber werden nach Durchschneidung und Teilung in jedem Fall kleiner als die erste Größe und deren Wert. Da sich dies nun so verhält, versuchten viele häufig, besonders bequeme und zuverlässige Methoden herauszufinden und sich auszudenken, und so forschten sie zuverlässig und zugleich bequem in den von ihnen aufgesuchten Ländern, gleichviel ob sie den Blick auf das Größere richteten oder auf das Kleinere. Aber die Erfahrung mit den Dingen und die lange Zeit, die alles herausfinden und das noch nicht Bestehende sichtbar machen, aber auch das Bestehende wiederum der Vergessenheit übergeben und das Gewordene verbergen kann, als ob es nicht existiere – wie auch ein Weiser sagt:

Die ganze lange und unermessliche Zeit lässt das Verborgene wachsen und verbirgt das, was ans Licht gekommen ist –, lehrte uns eine sehr bequeme und zuverlässige Methode, die von den Persern gefunden wurde, die alles bestens wissen und überaus weise sind. Bei uns aber wurde diese Methode nicht früher bekannt, sondern blieb unseren westlichen Ländern weithin verborgen, bis sie bei manchen von den in Italien lebenden Lateinern bekannt wurde; bei jenen aber, die dank des Geschäftsverkehrs und Handels und durch den Verkehr und durch häufige Zusammenkunft mit diesen dort darauf stießen, wurde sie bekannt. Ich glaube aber, dass vor nicht mehr als 100 Jahren diese Methode gefunden und bei manchen bekannt wurde, die in Italien leben; uns aber, die wir die griechische Sprache verstehen, blieb das Unternehmen hier wiederum verborgen. Nun aber hat auch uns die Zeit dieses offenbart. Damit sich aber nicht, wie wir schon früher sagten, die Zeit, die alles vermag, dazu anschickt, dass wir diese Methode wiederum der Vergessenheit übergeben, weil sie bei uns noch nicht gut gefestigt und verbreitet, vielmehr den meisten auch noch unbekannt ist, schien es uns recht und ganz besonders notwendig zu sein, diese aufzuzeichnen, damit sie auch den noch Unwissenden und denen, die sie lernen wollen, bekannt wird.

Die Byzantiner verwendeten noch überwiegend das seit dem 5. Jahrhundert v. Chr. in Griechenland nachgewiesene "milesische" Zahlensystem, ein auf dem Alphabet beruhendes nichtpositionelles additives System mit Zehnerbündelung. Dementsprechend war auch die Null als positionelles Leerzeichen unbekannt:

$\alpha', \beta', \gamma', \delta', \epsilon', \varsigma', \zeta', \eta', \theta'$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$\iota', \kappa', \lambda', \mu', \nu', \xi', \omicron', \pi', \varsigma'$: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90

$\rho', \sigma', \tau', \upsilon', \phi', \chi', \psi', \omega', \wp'$: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900

$\alpha', \beta', \dots, \theta'$: 1000, 2000, ... , 9000

$\overset{\alpha}{M}, \overset{\beta}{M}, \dots$ oder $\iota', \kappa' \dots : 10000, 20000, \dots$

M steht für Μύριοι (Zehntausender), darüber steht der Faktor.

Der Zahlenstrich zur Unterscheidung einer Zahl von einem Buchstaben ist auch als oberer Querstrich zu finden. Zur Zahlendarstellung wurde das griechische Alphabet durch drei Sonderzeichen semitischen Ursprungs ergänzt: Ϛ' (Stigma), ϛ' (Koppa) und Ϝ' (Sampi).

Zahlenbeispiele: $\iota\alpha', \rho\delta', \sigma, \zeta' \beta'$: 11, 104, 207002

Mit diesem Zahlensystem waren die Multiplikation und vor allem die Division nur mühsam durchzuführen. In der griechischen Logistik galt das Dividieren von und durch größere Zahlen als besondere Kunst, die z. B. dem sagenhaften Palamedes nachgerühmt wurde – vgl. VOGEL (1936, S. 380 f.) und DESCHAUER (1990, S. 6). Mit der obigen Bemerkung, dass die Suche nach bequemeren Methoden auf das *Größere* oder das *Kleinere* ausgerichtet gewesen wäre, dürfte, nachdem von den merkwürdigen *umfassenden Regeln* der Arithmetik die Rede war, das Bemühen um vereinfachte Verfahren der Multiplikation und der Division gemeint sein, das aber erst mit der "persischen Erfindung" zum erfolgreichen Abschluss gekommen sei. Hierbei denkt man vor allem an al-Hwārizmī (um 780–850), der aus dem damaligen persischen Raum (Choresmien) stammte: Seine "Algorismus"-Schrift hatte entscheidenden Anteil an der Verbreitung des indischen Zahlensystems im islamischen Raum, und lateinische Überarbeitungen kursierten seit dem 12. Jahrhundert in westlichen Gelehrtenkreisen (siehe VOGEL 1963, ALLARD 1992 und FOLKERTS 1994, 1997). Bezeichnenderweise ist im Einleitungstext dieser Handschriften ebenfalls von großen und kleinen Zahlen sowie von der Multiplikation und der Division die Rede:

... wir haben uns entschlossen, die Rechenweise der Inder mit Hilfe von IX. Buchstaben (Ziffern) darzustellen und zu zeigen, durch die sie der Leichtigkeit und der Kürze halber ihre sämtlichen Zahlen darstellen, um dieses Unterfangen dem die Arithmetik Erlernenden zu erleichtern, d. h. sowohl große als auch kleine Zahlen und alles, was bei diesen auftritt, von der Multiplikation und der Division, aber auch vom Zusammenzählen und Abziehen usw. (JUSCHKE-WITSCH, S. 189)

Die Auffassung, dass das "neue" Zahlensystem persischen Ursprungs sei, findet sich auch im Scholion des Neophytos (um 1200) – vgl. TANNERY (1885, S. 101) und HEIBERG (1899, S. 165 f.). Auch waren dem Verfasser offenbar weder die früheste byzantinische Algorismusschrift von 1252 (ed. ALLARD 1977) noch deren Überarbeitung durch Maximos Planudes aus dem späten 13. Jahrhundert (ed. ALLARD 1981) bekannt, die beide bereits im Titel auf die indische Herkunft des neuen Zahlensystems hinweisen: Ψηφηφορία κατ' Ἰνδοῦς ἢ λεγομένη μεγάλη (Sogenannte große indische Rechenkunst). Er kannte wohl auch nicht die Schriften von Nikolaos Artabasdos Rhabdas, etwa dessen Neuausgabe des Rechenbuchs von Planudes oder den Brief an Georgios Chatzyke (um 1341, ed. TANNERY IV, 4–1886, Band 4, S. 86–117): In diesem Brief verwendet Rhabdas zwar noch das traditionelle System, verweist aber wie unser Schreiber auf die besonderen Vorzüge des neuen, indischen Systems bei der Multiplikation und der Division (S. 114 f.).

Der anonyme Autor vermutet, dass die neue Methode erst im 14. Jahrhundert (*vor nicht mehr als 100 Jahren*) nach Italien gelangt sei und dort Verbreitung fand, bei den Byzantinern zunächst aber unbekannt blieb. Man ist geneigt, an Leonardo von Pisa zu denken, dessen *Liber abbaci* von 1202 (vgl. BONCOMPAGNI 1857) den entscheidenden Anstoß dazu gab, dass sich das neue System – wenn auch anfangs noch zögerlich und teilweise bekämpft – in den folgenden Jahrhunderten allmählich in italienischen Kaufmannskreisen durchsetzte.

Außerdem verweist der Schreiber zu Recht auf die maßgebliche Bedeutung enger Handelsbeziehungen für die Ausbreitung dieser neuen Arithmetik. Hier wenigstens war Byzanz, das als Mittler zwischen Ost und West für die Wissenschaft unschätzbare Dienste geleistet hatte (vgl. VOGEL 1978), einmal in der Lage, selbst zu empfangen.

Der Schreiber möchte wohl seine literarische Bildung unter Beweis stellen, indem er zweimal (etwas ungenau) Sophokles zitiert (Aias 646–647, Fragm. 954) – vgl. PADUANO 1982: Den Topos der Zeit, die alles Verborgene ans Licht bringen, aber auch alles Bestehende wieder in Vergessenheit geraten lassen kann, bezieht er auf die neue Methode, die er nun ein für allemal schriftlich festhalten will, zumal sie den meisten Byzantinern auch jetzt noch unbekannt sei.

2 **Über die zehn Ziffern, durch die jede Zahl entsteht**

Zuerst muss man wissen, dass diese Methode und Behandlung nur zehn Zahlzeichen benutzt und nicht mehr. Mit diesen zehn Zeichen aber können wir, wenn es möglich ist, dass unsere Vorstellungskraft die aufgezeigte Menge erfasst, sozusagen selbst den Sand auszählen; so weit voranschreiten können diese zehn Ziffern. Es sind aber diese zehn Ziffern die ähnlichen, ja vielmehr dieselben, die sich uns beim Bürgerlichen Rechnen bis zu den (ersten) neun Ziffern zeigen. Die zehnte Ziffer aber hat ein Zeichen, das wir gewöhnlich schreiben, wenn wir Nichts bezeichnen wollen; es ist dies hier: φ' . Damit euch aber das Gesagte klarer wird, schreibe ich dir (!) dies auf und lege es dar, wie du siehst:

$\alpha' \beta' \gamma' \delta' \epsilon' \varsigma' \zeta' \eta' \theta' \varphi'$

Die erste Ziffer, nämlich das Alpha, bezeichnet Eins, so wie es auch beim Bürgerlichen Rechnen genommen wird, das Beta aber bezeichnet Zwei und so der Reihe nach bis zum Theta, das Neun bezeichnet. Die kleinste und letzte Ziffer von allen aber, die das vorliegende φ' ist, kann nur ein Nichts bezeichnen, aber sie hat auch eine eigenständige Bedeutung für die ihr vorangesetzten Ziffern. Selbst aber für sich ist das φ' nicht imstande, etwas zu bezeichnen, denn das Nichts bezeichnet nichts. Deshalb wird es auch als Nichts geschrieben; an der Stelle nämlich, an der sich das φ' befindet, ist es eine Bezeichnung für nichts, wie wir entsprechend klarer erläutern werden.

Für jeden, der bisher ausschließlich ein nichtpositionelles System verwendet hatte, mussten beim dekadischen Positionssystem zwei Besonderheiten auffallen, die der Verfasser auch treffend beschreibt:

- Es genügen 10 Ziffern, um jede noch so große Zahl darzustellen.
- Die Null spielt eine besondere Rolle: Sie ist zwar einerseits ein "Nichts", hat

aber andererseits als Leerzeichen für eine unbesetzte Stelle *auch eine eigenständige Bedeutung für die ihr vorangesetzten Ziffern*.

Zur Verdeutlichung der ersten Besonderheit dient dem Autor die Auszählung des Sandes, ein unmissverständlicher Hinweis auf den $\psiαμμίτης$, die "Sandrechnung" des Archimedes – vgl. CZWALINA (1963, S. 347–364). Hier wurden die Zahlen (ohne symbolische Darstellung) in 10^8 Oktaden eingeteilt: die 1. Oktade geht bis $10^8 - 1$, 10^8 ist Einheit der 2. Oktade, die bis $10^{16} - 1$ reicht usw. bis zur 10^8 . Oktade, die von $10^{(10^8-1)8}$ bis $10^{10^8 \cdot 8} - 1$ reicht. Die letztere Zahl besteht in unserer Schreibweise aus 800 Millionen Neunern. Archimedes wie auch unser Autor waren sich der Schwierigkeit wohl bewusst, sehr große Zahlen im milesischen System darzustellen. Hier wie auch in jedem anderen nichtpositionellen Bündelungssystem erfordert nämlich jede neue Stufe der Bündelung im Prinzip ein neues Zahlensymbol.

Während in der byzantinischen Algorismusschrift von 1252 und auch im Rechenbuch des Planudes (ed. ALLARD 1977 bzw. 1981) $\tauζίφρα$ (~ "Ziffer", von arab. *al-ṣifr* = die Leere, das Leersein) als Fachbegriff für die Null auftritt, treffen wir im vorliegenden Rechenbuch nur auf die Umschreibung $(\tau\delta\omicron)$ οὐδέν. Bemerkenswert ist, dass es in Italien eine entsprechende Veränderung der Bezeichnung gegeben hat: Gegenüber früherem *zevero*, *cevero*, *cefiro*, *zero* (vgl. TROPFKE 1980, S. 17 f.) traten allmählich auch *nula* und *nulla* auf. Einen Beleg hierfür finden wir z. B. in der Arithmetik eines anonymen lombardischen Autors, die wahrscheinlich zu Beginn des 15. Jahrhunderts verfasst wurde, also vor unserer Handschrift:

Verbigratia levaremo queste 9 figure, zoè 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · e queste dese figure, le nove sono significative, la decima non significa nula, zoè 0, ma fa le altre significare com ipsa posta ... (ed. RIVOLO 1983, S. 2)

Diese Formulierung liegt sehr nahe bei der unseres Autors. Ganz ähnlich drücken sich auch noch die deutschsprachigen Rechenbuchautoren des 16. Jahrhunderts aus, z. B. Ries 1522 (ed. DESCHAUER 1991, A ij^v):

Numerirn Heyst zeln lernt wie man itzliche zal schreybē vñ aussprechen sol / dar zu gehörrn zehē figurn. also beschribē 1.2.3.4.5.6.7.8.9.0 Die erstē neun seindt bedeutlich Die zehent gildt allein nichts / sonder so sie andernn furgesetzt wirt / macht sie die selbigen mher bedeuten ...

Es sei noch angemerkt, dass unser Wort "Ziffer", das Ries hier nicht verwendet, ursprünglich natürlich nur für die Null reserviert war – die übrigen Zahlzeichen hießen wie bei Ries "Figuren".

Im vorliegenden Kapitel des Rechenbuchs werden nun aber nicht etwa die westarabischen oder die ostarabischen Ziffernformen eingeführt, wie sie schon in der byzantinischen Algorismusschrift von 1252 bzw. im Rechenbuch des Planudes (ed. ALLARD 1977 bzw. 1981) zu finden sind. Der Verfasser erläutert vielmehr das dekadische Positionssystem unter Verwendung der griechischen Zahlbuchstaben α' bis θ' , die dem Leser zur Bezeichnung der Einer vertraut waren. HUNGER/VOGEL (1963, S. 107) haben zu Recht darauf hingewiesen, dass die Wahl der griechischen Ziffernformen wohl didaktische Gründe hat: Der

Verfasser "... wollte vermeiden, daß die Schwierigkeiten für den Schüler, die schon durch die Einführung neuer Methoden erheblich sind, nicht noch dadurch sich vermehren, daß neue Symbole gelernt werden müssen." Entsprechend verfährt auch der Autor der von HUNGER/VOGEL edierten Aufgabensammlung, aber auch schon in Handschriften der Athener Parlamentsbibliothek aus dem 14. Jahrhundert finden sich positionelle Zahldarstellungen mit griechischen Ziffernformen (vgl. SARTON 1947, Band III, S. 120 f.). Nur an das Symbol φ' für die neue Ziffer Null musste sich also der Leser gewöhnen. (In der Aufgabensammlung findet sich stattdessen ein Punkt.) Für dieses Zeichen φ , das bestimmten traditionellen Formen der ostarabischen 6 oder der westarabischen 5 ähnelt und auch in den erwähnten Athener Handschriften vorkommt, glaubt GARDTHAUSEN (1913, Band 2, S. 378 f.) eine Erklärung gefunden zu haben: Es gehe auf einen senkrechten Strich zurück, der ursprünglich das Fehlen einer Zahl (eine Leerstelle) angezeigt habe; da aber ein einfacher Strich leicht übersehen werden konnte, sei er mit einem Häkchen "differenziert" worden, also φ' statt φ .

Insgesamt muss man aber einräumen, dass dem dekadischen Positionssystem – unabhängig von den jeweiligen Ziffernformen – in spätbyzantinischer Zeit nur mäßiger Erfolg beschieden war. Weder die Algorismusschrift von 1252 noch das Rechenbuch des Planudes (ed. ALLARD 1977 bzw. 1981) oder die Neuauflage dieses Buchs von Rhabdas haben zur Popularisierung des neuen Systems wesentlich beitragen können. Viele byzantinische Autoren dieser Zeit (vgl. VOGEL 1960, S. 663 f.) bevorzugten das traditionelle System, so z. B. Georgios Pachymeres (vgl. TANNERY 1940) im 13. Jahrhundert sowie Manuel Moschopoulos (vgl. TANNERY 3–1886 u. FOLKERTS 1981), Pediasimus (ed. FRIEDLEIN 1866), Bernardo Barlaam (ed. CHAMBER 1600), Isaak Argyros (vgl. ALLARD 1978) und der anonyme Schreiber eines Rechenbuchs (ed. VOGEL 1968) im 14. Jahrhundert – ja sogar Rhabdas zieht sich in seinen Briefen auf die alte Zahlbezeichnung zurück und begnügt sich, wie erwähnt, mit einem empfehlenden Hinweis auf die $\Psi\eta\phi\eta\phi\omicron\rho\iota\alpha\ \kappa\alpha\tau'\ \text{'}\iota\nu\delta\omicron\upsilon\varsigma$ für die schriftliche Multiplikation und Division. Erneute Anstöße im 15. Jahrhundert, die von unserem Rechenbuch, von der Aufgabensammlung oder von den bis zuletzt intensiven Handelskontakten mit Italien hätten ausgehen können – vgl. etwa das von 1436–1440 in Konstantinopel entstandene *Libro dei Conti* des Venezianers Giacomo Badoer (ed. DORINI/BERTELE 1956), das ausschließlich mit arabischen Ziffern geführt ist –, kamen zu spät. Schließlich haben die türkischen Eroberer das Positionssystem wieder mitgebracht und darüber hinaus auch die Dezimalbrüche eingeführt, die der persische Astronom al-Kāšī um 1427 wiederentdeckt hatte (vgl. LUCKEY 1951 und HUNGER/VOGEL 1963, S. 9, Nr. 36, S. 104).

3

Über die Einer-, Zehner-, Hunderter- und Tausenderstellen

und welches andere der Reihe nach Größere entsteht und wie es genannt wird

Die erste Stelle, die die Endziffer ist, bezeichnet die Einer, d. h. Eins und Zwei und Drei bis zu den Neun. Die zweite Stelle aber bezeichnet die Zehner, d. h. ι' und κ' und λ' bis zu den ς' . Die dritte Stelle aber bezeichnet die Hunderter, d. h. ρ' und σ' und τ' bis zu den $\wp'$. Die vierte Stelle aber bezeichnet die

Tausender, d. h. α' und β' und γ' bis zu den θ' ; denn die ι' sind eine Myriade und haben die fünfte Stelle inne – leicht verständlich gesagt: Die Stellen sind jene, die uns die Einer, Zehner, Hunderter und Tausender anzeigen und welche anderen größeren Teile auch immer entstehen und wie auch immer sie genannt werden.

Bei der Übersetzung habe ich natürlich die im Text stehenden griechischen Symbole für die Ziffern und Zahlen beibehalten.

Der auch uns vertraute Aufbau der Stellen einer Zahl von rechts nach links geht auf die arabische Schriftrichtung zurück. Demgegenüber werden die Ziffern – ebenfalls wie bei uns – von links nach rechts gezählt, denn die erste Stelle wird ausdrücklich als Endziffer bezeichnet. (Korrekt wäre folgende Formulierung gewesen: An der ersten Stelle oder Einerstelle steht die Endziffer.)

4 **Wie man Zahlen ausdehnen kann, bis sie einen Zehner von Tausendern und von Myriaden bezeichnen**

Damit euch das, was gesagt wird, klarer wird, wollen wir dies auch durch ein Beispiel sagen. – Angenommen, du willst dir $\alpha\phi\lambda\beta'$ aufschreiben. Setze nun diese Ziffern $\alpha \varepsilon \gamma \beta'$, und siehe: diese bezeichnen, was du suchst. Das β' , das sich an der letzten Stelle befindet entsprechend, wie wir lesen, aber gerade an der ersten Stelle, wie wir bei der Behandlung hier gewöhnlich zählen, bezeichnet Zwei. Wenn aber dieselbe erste Stelle, die das β' hat, γ' hätte, würde sie Drei bezeichnen und so der Reihe nach bis zum Theta, das Neun bezeichnet. Das γ' aber, das dem Beta vorangestellt ist – weil es sich an der zweiten Stelle befindet, welche die Zehnerstelle ist, bezeichnet es Dreißig; denn Drei bezeichnet das γ' , wenn es sich an der ersten Stelle des Einers befindet. Da es aber an zweiter Stelle steht, die die Zehnerstelle ist, bezeichnet es drei Zehner, d. h. λ' ; denn es bewahrt die eigene Gestalt und bezeichnet Drei – nicht vom Einer, sondern vom Zehner –, d. h. λ' . Wenn aber dieselbe zweite Stelle, die das γ' hat, ς' hätte, würde sie sechs Zehner bezeichnen, d. h. ξ' , und so der Reihe nach bis zum Theta, d. h. bis zu den Neun – dann würde sie ζ' bezeichnen. Das ε' aber bezeichnet Fünf, aber weil es an dritter Stelle steht, bewahrt es die eigene Gestalt und bezeichnet fünf Hunderter, d. h. ϕ' . Wenn aber dieselbe dritte Stelle δ' hätte, würde sie vier Hunderter bezeichnen, d. h. υ' . Wenn sie aber ς' hätte, würde sie χ' bezeichnen, und so der Reihe nach bis zu den Neun – dann würde sie $\wp'$ bezeichnen. Denn so wie die Ziffern, die sich an der ersten Stelle befinden, die die Einerstelle ist, Einer bezeichnen, d. h. $\alpha' \beta' \gamma' \delta' \varepsilon' \varsigma'$ bis zu den θ' , so würden auch dieselben Ziffern, wenn sie sich an zweiter Stelle befänden, die die Zehnerstelle ist, $\iota' \kappa' \lambda' \mu' \nu' \xi'$ bezeichnen. Dieselben Ziffern aber, d. h. das $\alpha' \beta' \gamma' \delta' \varepsilon' \varsigma'$, würden, wenn sie sich an dritter Stelle befänden, die die Hunderterstelle ist, $\rho' \sigma' \tau' \upsilon' \phi' \chi'$ bezeichnen. Die vierte Stelle aber, die das α' hat, d. h. die vorliegenden Ziffern $\alpha \varepsilon \gamma \beta'$, was $\alpha\phi\lambda\beta'$ bezeichnet: Das α' bezeichnet Eins, wenn es sich an der Einerstelle befindet. Wenn es sich aber wiederum an der zweiten Stelle befindet, die die Zehnerstelle ist, bezeichnet das $\alpha' \iota'$, wenn es sich aber an der

dritten Stelle befindet, die die Hunderterstelle ist, bezeichnet es ρ' . Nun aber, da es sich an vierter Stelle befindet, die die Tausenderstelle ist, bezeichnet es α' . Wenn aber an derselben vierten Stelle, wo das α' ist, β' wäre, würde es, da es die Tausenderstelle ist, β' bezeichnen; was immer aber an derselben vierten Stelle des Tausenders gefunden wird, d. h. γ' oder δ' oder ε' bis zu den ϑ' , hat die Bedeutung γ' und δ' und ε' und so der Reihe nach bis zu den ϑ' .

Die ι' aber ist eine Myriade und hat ein Verhältnis zu den α' , welches die ι' zum α' haben. Denn so, wie wir das α' an die erste Stelle setzen, die die Einerstelle ist und wo es Eins bezeichnet, setzen wir, wenn wir ι' bezeichnen wollen, das α' an die zweite Stelle — so gesetzt: $\alpha \psi'$ — mit der Bedeutung ι' . Ebenso bezeichnet das α' , wenn es sich an vierter Stelle befindet, α' . Wenn wir aber zehn Tausender bezeichnen wollen, setzen wir das α' an die fünfte Stelle, und es bezeichnet zehn Tausender bzw. eine Myriade. Denn es ist dasselbe, wenn man zehn Tausender oder eine Myriade sagt. Das α' nämlich bewahrt die eigene Gestalt und bezeichnet α' oder ι' oder ρ' oder α' oder Zehntausend, wenn es sich an erster, zweiter, dritter, vierter bzw. fünfter Stelle befindet. Wenn aber an fünfter Stelle Drei wäre — so gesetzt: $\gamma \psi \psi \psi \psi'$ —: die γ' bezeichnen $\langle \gamma' \rangle$ wie auch λ' , τ' , γ' oder dreimal Zehntausend, wenn sie sich an erster, zweiter, dritter, vierter bzw. fünfter Stelle befinden; denn sie bewahren die eigene Gestalt überall, wo sie sich befinden. Denn wenn sie sich bei der Zehnerstelle befinden, bezeichnen die γ' λ' , wenn sie sich aber bei der Hunderterstelle befinden, welche die dritte Stelle ist, bezeichnen die γ' drei Hunderter, d. h. τ' , wie auch drei Zehner λ' sind. Wenn sie sich aber bei der vierten Stelle befinden, welche die Tausenderstelle ist, bezeichnen die γ' drei Tausender. Wenn sie sich aber bei der fünften Stelle befinden, welche der Zehner eines Tausenders ist — dasselbe ist die Myriadenstelle —, bezeichnen die γ' λ' Tausender — es ist dasselbe, wenn man drei Myriaden oder λ' Tausender sagt. — Diese λ' Tausender — so gesetzt: $\gamma \psi \psi \psi \psi'$ — sind fünf Zahlzeichen. Da nun die erste Stelle eine Ziffer ψ' hat, bezeichnet sie nichts; denn das Nichts bezeichnet nichts, wie wir sagten. Da ebenso auch die zweite Stelle ψ' hat, bezeichnet sie nichts; ebenso auch die dritte und die vierte Stelle — da sie ψ' haben, bezeichnen sie nichts. Dies allein zeigen uns die vier "Nichts" an, dass die γ' , die vor den vier "Nichts" stehen und sich an fünfter Stelle befinden, drei Myriaden bezeichnen, das sind λ' Tausender. Streiche nun ein ψ' und schreibe vier Ziffern $\gamma \psi \psi \psi'$. Nun aber, da es vier Ziffern sind, bezeichnen die γ' γ' . Streiche wiederum ein ψ' und schreibe drei Ziffern $\gamma \psi \psi'$. Nun aber, da es drei Ziffern sind, bezeichnen die γ' τ' . Streiche wiederum ein ψ' und schreibe zwei Ziffern $\gamma \psi'$. Nun aber, da es zwei Ziffern sind, bezeichnen die γ' λ' . Streiche erneut auch noch das eine ψ' und schreibe allein die γ' . Nun aber bezeichnet die eine übrig gebliebene Ziffer Drei, da sie sich an der Einerstelle befindet. — Wenn du dir aber τ' Tausender aufschreiben willst, was λ' Myriaden sind, schreibe sechs Ziffern $\gamma \psi \psi \psi \psi \psi'$, kennzeichne dir aber die vierte Stelle des Tausenders mit einem Pünktchen. Da du vor dem Tausender, der die vierte Stelle ist, die du dir auch mit einem Pünktchen gekennzeichnet hast, zwei Ziffern hast, sind es von dem Pünktchen bis zum γ'

dreißig Ziffern und drei Stellen. Die dritte Stelle aber, die das γ' hat, ist die Hunderterstelle, wie auch die vierte, die das Pünktchen hat, die Tausenderstelle ist. Das γ' aber, da es vom Pünktchen aus an der dritten Stelle ist, bezeichnet τ' Tausender, d. h. λ' Myriaden. Und siehe, das ψ' – wenn es auch selbst keine Zahl bezeichnet, wird es gleichwohl für uns bedeutsam und ursächlich für Zehner, Hunderter, Tausender, Myriaden und was sonst noch Größeres entsteht. Wenn aber dieselbe sechste Stelle, die nun γ' hat, δ' hätte, würde sie vierhundert Tausender bezeichnen; wenn sie aber ε' hätte, würde sie fünfhundert Tausender bezeichnen, und so der Reihe nach bis zu den ϑ' – dann würde sie ϑ' Tausender bezeichnen.

Ich glaube, dass wir die Ziffern und die Stellen der Tausender und Myriaden, die sie bezeichnen, damit hinreichend aufgezeigt haben für denjenigen, der sich gründlich mit der Sache beschäftigen kann; in gleicher Weise war es notwendig, auch die Tausender- und Myriadenstellen – und was sonst noch Größeres entsteht und wie es genannt wird – klarer durch Beispiele darzulegen, damit sie auch denjenigen bekannt werden, die sich nicht gründlich damit beschäftigen können.

Eine sehr ausführliche und dadurch auch teilweise etwas verwirrende Erläuterung der Stellenwertschreibweise:

Der Verfasser geht vom Beispiel 1532 aus. An späterer Stelle illustriert er die Stellenwerte an der Zahl 30 000, bei der er nacheinander die Nullen wegstreicht. Schließlich führt er am Beispiel 300 000 die Schreibweise mit Pünktchen ein, die der optischen Gliederung und damit der besseren Lesbarkeit der Zahl dient; das Pünktchen steht dabei auf der Tausenderstelle und entspricht dem kleinen Abstand, den wir bei unserer Zahlnotation nach dieser Stelle lassen. (Die vorher erörterte Zahl 30 000 wurde noch ohne Pünktchen geschrieben.) Der Autor spricht einerseits von zwei Ziffern, die vor der mit einem Pünktchen gekennzeichneten Tausenderstelle stehen, andererseits verweist er darauf, dass die Anfangsziffer 3 vom Pünktchen aus an der dritten Stelle steht: Hier wird die Tausenderstelle, die ja die Einerstelle für die Tausender ist, zu Recht mitgezählt.

Die Darstellung großer Zahlen mit Pünktchen war auch in deutschen Rechenbüchern bis weit in die Neuzeit hinein sehr verbreitet.

5 **Wie man Zahlen ausdehnen kann, bis sie Tausender von Tausendern bezeichnen, was bei den Lateinern Millionen, bei uns aber ρ' Myriaden genannt wird**

Eine sehr große Zahl findet man bei den Lateinern, die bei ihnen Million, bei uns aber ρ' Myriaden genannt wird, das sind tausend Tausender. – Angenommen, du willst dir ε' Millionen und $\nu\lambda\beta'$ Tausender und $\omega\xi\xi'$ aufzeichnen. Setze nun diese Ziffern α ε δ γ β η ς ζ' . Diese acht Ziffern nun bezeichnen, was du dir aufzuzeichnen suchst. Die vierte Stelle des Tausenders aber kennzeichne dir durch ein Pünktchen. Beginne aber mit der vierten Stelle des Tausenders, bei der du auch das Pünktchen oben gesetzt hast, und prüfe, wo wohl die

Tausenderstelle ist, vom Pünktchen aus anfangen, d. h. von der vorliegenden Ziffer β' aus. Du wirst aber finden, dass das ε' vom β' aus die vierte Stelle innehat, d. h. die Tausenderstelle, und kennzeichne dir das ε' , wie du siehst, mit zwei Pünktchen. Es bezeichnet aber die siebte Stelle, die das ε' hat, fünf Tausender von Tausendern, d. h. fünf Millionen. Wenn aber auch eine dritte Tausenderstelle vorhanden wäre, d. h. mehr als zehn Ziffern, würdest du dir auch die dritte Stelle des Tausenders – vom ε' aus anfangen –, die die zehnte Stelle ist, durch drei Pünktchen kennzeichnen, und die Stelle, die die drei Pünktchen hat, d. h. die zehnte, würde tausend Tausender von Tausendern bezeichnen, d. h. α' Millionen. Denn die Pünktchen, die die Tausender der Tausender kenntlich machen, zeigen uns klarer die gesuchte Größe der aufgezählten Zahlen an, die wir zu wissen suchen.

Diese acht Ziffern $\alpha \ \varepsilon \ \delta \ \gamma \ \beta \ \eta \ \varsigma \ \zeta'$ aber, die du oben aufgeschrieben hast – die ζ' bezeichnen sieben, da sie an der ersten Stelle des Einers stehen, die ς' aber bezeichnen ξ' , da sie an der zweiten Stelle des Zehners stehen: Und siehe, diese zwei Ziffern $\varsigma \ \zeta'$ bezeichnen $\xi\zeta'$. Die η' aber bezeichnen ω' , da sie an dritter Stelle stehen, die die Hunderterstelle ist. Mit diesen drei $\eta \ \varsigma \ \zeta'$ nun hast du $\omega\xi\zeta'$. Die β' aber bezeichnen β' , da sie sich an vierter Stelle befinden, die die Tausenderstelle ist. Mit diesen $\delta' - \beta' \ \eta \ \varsigma \ \zeta' -$ hast du $\beta\omega\xi\zeta'$. Die γ' aber, da sie sich an fünfter Stelle befinden, die die Myriadenstelle ist, bezeichnen drei Myriaden, d. h. λ' . Mit diesen $\varepsilon' - \gamma \ \beta \ \eta \ \varsigma \ \zeta' -$ hast du $\lambda, \beta\omega\xi\zeta'$. Die δ' aber, da sie von den β' aus die dritte Stelle innehaben, d. h. die Hunderterstelle, bezeichnen ν' oder – dasselbe gesagt – μ' Myriaden. Mit diesen sechs – $\delta \ \gamma \ \beta \ \eta \ \varsigma \ \zeta' -$ hast du $\nu, \lambda, \beta\omega\xi\zeta'$. Die ε' aber haben vom β' aus die vierte Stelle inne, die Tausender von Tausendern bezeichnet, d. h. fünf Millionen. Mit diesen sieben – $\varepsilon \ \delta \ \gamma \ \beta \ \eta \ \varsigma \ \zeta' -$ hast du ε' Millionen und $\nu, \lambda, \beta\omega\xi\zeta'$. Das α' aber vor dem ε' , was fünf Millionen angibt, hat die zweite Stelle inne, die die Zehnerstelle ist, und bezeichnet zehn Millionen. Das α' aber mit dem ε' – so gesetzt: $\alpha \ \varepsilon' -$ bezeichnet $\iota\varepsilon'$ Millionen. Mit diesen $\eta' - \alpha \ \varepsilon \ \delta \ \gamma \ \beta \ \eta \ \varsigma \ \zeta' -$ hast du $\iota\varepsilon'$ Millionen und ν, λ, β' und $\omega\xi\zeta'$. Und siehe, du hast gefunden, dass diese acht Ziffern die Zahl bezeichnen, die du am Anfang darzustellen gesucht hast.

Es gibt aber auch noch eine weitere größere Zahl, die Legion genannt wird, das sind tausend Tausender von Tausendern, was α' Millionen sind. Denn angenommen, du suchst dir $\iota\beta'$ Legionen und $\rho\nu'$ Millionen und φ, μ, γ' und $\psi\xi\eta'$ aufzuzeichnen. Setze nun diese Ziffern: $\alpha \ \beta' \ \alpha \ \varepsilon \ \dot{\iota} \ \varepsilon \ \delta \ \dot{\gamma} \ \zeta \ \varsigma \ \eta'$. Diese $\iota\alpha'$ Ziffern bezeichnen, was du dir aufzuzeichnen suchst: das sind $\iota\beta'$ Legionen $\rho\nu'$ Millionen und φ, μ, γ' und $\psi\xi\eta'$.

Insgesamt wird der Zahlenraum bis zu 10 Milliarden erweitert.

Zunächst führt der Verfasser die italienische Zahlbezeichnung Million ("Großtausend") für 100 Myriaden ein und erläutert diese neue Bezeichnung und die Stellenwertschreibweise am Beispiel der Zahl 15 432 867, wobei er von den Einern ausgeht. Über die Tausenderstelle setzt er ein und über die Millionenstelle zwei Pünktchen und sagt:

Wenn aber auch eine dritte Tausenderstelle vorhanden wäre, d. h. mehr als

zehn Ziffern (korrekt müsste es heißen: "zehn oder mehr Ziffern"), *würdest du dir auch die dritte Stelle des Tausenders ..., die die zehnte Stelle ist, durch drei Pünktchen kennzeichnen, und die Stelle, die die drei Pünktchen hat, d. h. die zehnte, würde tausend Tausender von Tausendern bezeichnen ...*

Auf jede Tausenderpotenz sind also Pünktchen zu setzen, wobei die jeweils gesetzte Anzahl der Pünktchen – modern gesprochen – dem Exponenten der Tausenderpotenz entspricht. Die dritte Tausenderstelle ist natürlich die Stelle mit dem Wert 10^9 . Dagegen ist mit der anfangs genannten "vierten Stelle des Tausenders" die vierte Stelle der Zahl, d. h. die des Tausenders, gemeint.

Der Abstand zwischen den Tausenderpotenzen beträgt nach den Angaben des Autors vier Stellen, wobei jeweils die Stelle der kleineren Tausenderpotenz wieder mitgezählt wird.

Während das Wort *milione* schon um 1250 in Italien gebräuchlich war (TROPFKE 1980, S. 14), scheint die Bezeichnung "Legion" (λεγεών) sonst nur für "eine große Zahl" (DEMETRAKOS), nicht aber wie hier in der speziellen Bedeutung für "Milliarde" belegt zu sein. Das hier untersuchte Zahlenbeispiel ist 12 150 543 768.

Im Übrigen ist die Bezeichnung "Million" im deutschen Sprachraum erst bei Christoff Rudolff (1526) nachweisbar, während sich "Milliarde" erst im Zusammenhang mit den Reparationszahlungen nach dem deutsch-französischen Krieg von 1870/71 durchgesetzt hat (TROPFKE 1980, S. 16).

6 **Wie man einen Zehner mit einem Einer multiplizieren kann, und zwar ε' mit den ς'**

$$(15 \cdot 6 = 90)$$

Es ist schon an der Zeit, weiter voranzuschreiten und sich mit der Grundlage für die Multiplikation zu befassen. Angenommen, du suchst danach, wie viel ς' mal ε' ergibt. Zuerst muss man wissen, dass es ein Schema gibt, das wir gewöhnlich "zweiseitig" nennen, mit dem jede Multiplikation geschieht. Es ist das hier: Setze oben die ε' , seitlich aber die ς' ; denn so muss man es bei der vorliegenden Methode machen, dass nach oben das Größere, seitlich aber das Kleinere gesetzt wird. Multipliziere aber die ς' auf der Seite mit den ε' oben: ς' mal ε' gibt nun λ' , was drei Zehner sind. Und da nun von den λ' nichts übrig bleibt wie etwa bei $\lambda\beta'$ oder $\lambda\gamma'$, sondern die λ' nur Zehner angeben, behalte γ' anstelle der λ' bei dir und setze an die Einerstelle "Nichts", was dieses Zeichen hier ist: φ' . Multipliziere aber wiederum die ς' auf der Seite mit dem α' oben, das Zehn bezeichnet: ς' mal α' gibt nun ς' , dies sind ς' Zehner, d. h. ξ' . Addiere diese ς' Zehner zu den γ' Zehnern, die du anstelle der λ' bei dir behältst, und es ergeben sich zusammen ϑ' Zehner. Setze nun an die Zehnerstelle, die die zweite ist, die ϑ' Zehner, und siehe: Dieses Theta, was Neun bezeichnet, wenn es sich an der Einerstelle befindet, – nun aber, da es an zweiter Stelle steht, die die Zehnerstelle ist, bezeichnet es ϑ' Zehner, d. h. ς' . Die ϑ' aber mit dem φ' – so gesetzt: $\vartheta \varphi'$ – bezeichnen ς' . Und siehe, du hast mit der vorliegenden Methode gefunden, dass die ε' mit den ς' multipliziert ς' ergeben.

$$\begin{array}{r} \alpha \varepsilon \\ \vartheta \varphi | \varsigma \end{array} \begin{array}{c} \alpha \\ \textcircled{\varsigma} \\ \textcircled{\varsigma} \end{array}$$

Wie es bereits in der Vorrede angeklungen war, beginnt der Autor nun tatsächlich gleich mit der schriftlichen Multiplikation. Die schriftliche Addition, die eigentlich als Voraussetzung unerlässlich ist, wird erst im Kapitel 101 thematisiert. Dieses Defizit wird sich bei der Erklärung des Beispiels in Kapitel 12 und der allgemeinen Verfahrensbeschreibung in Kapitel 14 bemerkbar machen.

Mit dieser eigenwilligen Stoffanordnung steht der Schreiber aber nicht allein: Der spanisch-jüdische Philosoph und Astrologe Abraham ben Ezra (geb. um 1090, gest. um 1167) (SILBERBERG 1895) und Leonardo von Pisa (geb. um 1170, gest. nach 1240) (BONCOMPAGNI 1857) behandeln die Addition und Subtraktion erst nach der Multiplikation, Abraham bar Hiyya (Savasorda), ein spanisch-jüdischer Mathematiker und Astronom (gest. 1136) (CURTZE 1902) sogar erst – wie unser Autor – nach der Division. In anderen arithmetischen Werken fehlen Addition und Subtraktion sogar ganz – vgl. TROPFKE (1980, S. 159 f.).

Die vorliegende Multiplikationsmethode ist als Methode der "Trennung der Plätze" bereits in indischen Quellen vielfach belegt (TROPFKE 1980, S. 213 f.) und entspricht grundsätzlich auch unserem heutigen Verfahren, wobei die Anordnung der Faktoren allerdings variiert.

Hier wird der größere Faktor nach oben, der kleinere in umgekehrter Reihenfolge der Ziffern (vgl. Kapitel 10, 12 und 14) seitlich geschrieben, wodurch man erreicht, dass man mit den Einern beginnen kann. Die Teilprodukte mit den Ziffern der höheren Stellenwerte des 2. Faktors werden jeweils entsprechend nach links eingerückt.

Dasselbe Verfahren – mit gleicher Anordnung der Faktoren – findet sich auch im byzantinischen Cod. Parisinus suppl. Gr. 652, ebenfalls aus dem 15. Jahrhundert (ALLARD 1973, S. 134–139).

Bei unserer heutigen Anordnung der Faktoren wird dagegen das erste Teilprodukt aus der Einerziffer des ersten und der stellenwerthöchsten Ziffer des zweiten Faktors gebildet.

Die Vorschrift des Autors, den größeren Faktor zuerst (nach oben) zu schreiben, ist nicht zwingend, dient aber dazu, den Schreibaufwand zu verkleinern:

$$\begin{array}{r} 1\ 5 \\ 9\ 0 \end{array} \Big|_6 \quad \text{vgl. mit} \quad \begin{array}{r} 6 \\ 3\ 0 \end{array} \Big|_5 \begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ 9\ 0 \end{array} \begin{array}{r} 5 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

Auffällig ist, dass der Verfasser im Text dieses Kapitels weiterhin die traditionellen griechischen Zahlen benutzt, obwohl er ja nun das neue System vollständig eingeführt hat. Auch in allen weiteren Kapiteln hält er im Text ganz überwiegend am milesischen System fest – die Kapitelnummerierung ist stets "milesisch", dagegen sind in den Rechendiagrammen fast ausnahmslos die positionellen Zahlen zu finden.

**Über die Probe davon und den Beweis,
ob sich das Gesuchte richtig oder nicht richtig ergeben hat**

Der Beweis und die Probe davon, ob sich das Gesuchte richtig ergeben hat, ist diese.

Suche zuerst, welche Zahl auch immer du oberhalb des geraden Strichs multiplizierst, die nun $\alpha \varepsilon'$ ist. Dividiere das $\alpha \varepsilon'$, so oft es möglich ist, durch die ζ' : zwei mal ζ' nun gibt $\vartheta\delta'$, als Rest bleibt α' bis zu den ε' . Teile auch das auf der Seite, was ς' ist, durch die ζ' . Da aber die ς' kleiner sind als die ζ' , können sie nicht als kleinere durch die ζ' geteilt werden; es bleiben wiederum ς' . Multipliziere aber diese ς' , die auf der Seite sind, mit dem α' , das von den ε' übrig geblieben ist: sechs mal α' gibt nun ς' . Setze dies in einen Kreis, wie du siehst: $\textcircled{\varsigma}$. Teile auch die herauskommende Ergebniszahl, das ist das vorliegende $\vartheta \psi'$, was ζ' bezeichnet, durch die ζ' . Subtrahiere nun von der ersten Ziffer, dem Theta natürlich, ζ' , und es bleiben β' übrig. Diese β' bezeichnen mit der nächstfolgenden Ziffer, die ψ' ist — so gesetzt: $\beta \psi' - \kappa'$. Teile auch diese durch die ζ' : zwei mal ζ' nun gibt $\vartheta\delta'$, und es bleiben als Rest ς' bis zu den κ' . Setze auch diese in einen Kreis: $\textcircled{\varsigma}$. Da aber die zwei Proben davon gleich befunden wurden, weil jede als Ziffer die ς' hat, kam das herausgekommene Produkt, d. h. die $\vartheta \psi'$, richtig und wahrheitsgemäß heraus. Wenn aber die beiden Proben davon ungleich befunden worden wären, etwa wenn eine ς' , die andere aber irgendeine andere ungleiche Ziffer gewesen wäre, wäre auch bei den herauskommenden $\vartheta \psi'$ nicht richtig multipliziert worden.

In diesem Kapitel führt der Schreiber zur Kontrolle der Multiplikation $15 \cdot 6 = 90$ die Siebenerprobe durch: Er vergleicht das Produkt aus dem Siebenerrest von 15 (1) und dem Siebenerrest von 6 (6), also 6, mit dem Siebenerrest von 90 (6). Die beiden Probezahlen, 6 und 6, setzt er jeweils in einen Kreis ans Ende des Multiplikationsdiagramms; über der ersten Probezahl steht außerdem noch der Siebenerrest des ersten Faktors 15 — siehe das Diagramm in Kapitel 6.

Allgemein gilt bei einer Multiplikation $a \cdot b = c$ (a, b, c natürliche Zahlen), dass der Siebenerrest des Produkts aus den Siebenerresten von a und b (1. Probezahl) mit dem Siebenerrest von c (2. Probezahl) übereinstimmt. (Da in unserem Beispiel das Produkt aus den Siebenerresten von a (=15) und b (=6) kleiner als 7 ist, erübrigt sich die Bestimmung des Siebenerrestes dieses Produkts.)

Der zahlentheoretische Hintergrund hierzu ist die Multiplikativität der Kongruenzrelation. Mit der Schreibweise $n \equiv n' \pmod{m}$ für die Bedingung, dass sich bei der Division der natürlichen Zahlen n und n' durch die natürliche Zahl m jeweils derselbe Rest (0 eingeschlossen) ergibt oder — anders formuliert — dass $n - n'$ durch m teilbar ist (Erweiterung des Teilbarkeitsbegriffs auf ganze Zahlen, da $n - n'$ auch negativ sein kann), erhält man folgende Aussage:

Aus $a \equiv a' \pmod{m}$ und $b \equiv b' \pmod{m}$ folgt $a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{m}$.

Das sieht man leicht ein, wenn man den Term $a \cdot b - a' \cdot b'$ in $a \cdot (b - b') + (a - a') \cdot b'$ umformt. Nach Voraussetzung sind beide Summanden durch m teilbar und daher auch die Summe.

Wählt man nun a', b' so, dass $0 \leq a', b' < m$ gilt, so sind a' und b' die Reste von a bzw. b nach Division durch m . Der Rest von $a \cdot b$ nach Division durch m lässt

sich also über das Produkt der Reste von a und b berechnen. Falls dieses Produkt größer oder gleich m ist, stimmt erst sein Rest nach Division durch m mit dem Rest von $a \cdot b$ überein.

Die Siebenerprobe ($m=7$) ist also offenbar nur eine spezielle Rechenprobe für die Multiplikation. (In unserem Beispiel ist $a=15$, $b=6$, $a \cdot b=90$, $a' = 1$, $b' = 6$, $a' \cdot b' = 6$.) So erwähnt Leonardo von Pisa zum Beispiel ausdrücklich, dass auch Restproben mit ($m=$) 11, 13 usw. möglich sind (BONCOMPAGNI 1857, S. 34).

Insbesondere bietet sich aber die Wahl $m=9$ an: Bei der Neunerprobe brauchen die Neunerreste nicht durch Division bestimmt zu werden, da sie sich viel einfacher mit Hilfe der Quersummen ergeben.

Zum mathematischen Hintergrund:

Wenn eine natürliche Dezimalzahl a die Positionsdarstellung ("Zifferndarstellung") $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ hat, so gilt $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ mit der Quersumme $Q(a) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$. Die Summanden der Differenz $a - Q(a)$ enthalten daher der Reihe nach die Faktoren $10^n - 1$, $10^{n-1} - 1$, ..., $10 - 1$, die stets durch 9 teilbar sind, was man mithilfe der vollständigen Induktion beweisen kann. Also ist $a - Q(a)$ durch 9 teilbar, sodass a und $Q(a)$ denselben Neunerrest haben.

So verwendet unser Autor zur Kontrolle der schriftlichen Addition und Subtraktion in den Kapiteln 101 und 102 im Text zwar die Siebenerprobe, aber in den Marginalien auch die vorteilhaftere Neunerprobe. Wesentlich ausführlicher behandelt er diese jedoch im "Vortext" zum Rechenbuch, und zwar auf fol. 7^r/7^v:

Über eine andere klare und handliche Methode eines Beweises und einer Probe, von der wir noch nicht sprachen

Bei der Untersuchung der Multiplikation wirst du verschiedene Beweise und Proben finden, die durch die Zahl Sieben entstanden sind, wie du dort klarer erfahren kannst. Es wurde uns aber auch ein anderer Beweis und eine andere Probe bekannt, welche durch die Zahl Neun handlicher und leicht genommen wird; nachdem wir diese dort nicht gezeigt haben, weil sie uns unbekannt war, schien es uns nötig, diese nun zu zeigen, weil sie klarer und handlich ist.

Die Schritte zur Bildung der Quersumme einer Zahl – hier am Beispiel 368 ($368 \rightarrow 17 \rightarrow 8$) – formuliert der Schreiber so: $\epsilon\upsilon\omega\sigma\sigma\upsilon\upsilon \dots \tau\omicron\nu\ \gamma\varsigma\eta'$... ἀριθμὸν καὶ γίνετῃ ὁμοῦ αζζ'. $\epsilon\upsilon\omega\sigma\sigma\upsilon\upsilon \tau\omicron\ \alpha'$ καὶ ζζ' καὶ γίνονται ὁμοῦ η'η'.

Allerdings erkennt unser Autor – wie viele andere seiner Zeit auch –, dass derartige Rechenproben nicht als hinreichendes, sondern nur als notwendiges Kriterium für die Richtigkeit einer Rechnung verwendet werden können: Die beiden letzten Sätze von Kapitel 7 enthalten zwei mathematische Aussagen, von denen nur die zweite richtig ist; z. B. deckt die Siebenerprobe die fehlerhafte Multiplikation $8 \cdot 6 = 90$ nicht auf.

Eine korrekte Bewertung der Rechenproben findet sich bei den Muslimen, z. B. bei al-Uqlidisi (SAIDAN 1966, S. 381 u. SAIDAN 1978, S. 196) und al-Kāšī (LUCKEY 1951, S. 26 f.), im Westen wohl erst in der *Triparty* (1484) von Chuquet (ed. MARRE 1880, S. 603). Dieser verwendet wie unser Schreiber vorwiegend die Siebenerprobe, während im Rechenbuch des Planudes (ed. ALLARD 1981) nur die Neunerprobe behandelt wird. Die Siebenerprobe scheint in anderen

byzantinischen Texten nicht belegt zu sein.

Bei der Darstellung der Siebenerproben in diesem und den folgenden Kapiteln 9, 11, 13 und 15 wirkt sich nachteilig aus, dass die schriftliche Division nicht zuvor eingeführt worden ist.

8 **Wie man $\rho\nu\gamma'$ mit den ζ' multiplizieren kann**

$$(150 \cdot 7 = 1050)$$

9 **Über die Probe davon und den Beweis**

Die Siebenerreste von 150 und 7 sind 3 bzw. 0: $3 \cdot 0 = 0$. Dies ist die 1. Probezahl, die im Diagramm von Kapitel 8 obere eingekreiste Zahl mit dem Faktor 3 darüber. Bei der Bestimmung des Siebenerrestes von 1050 argumentiert der Autor sinngemäß so: $10 \Rightarrow$ Rest 3, $35 \Rightarrow$ Rest 0, 00 ist wieder nichts und kann nicht durch 7 geteilt werden. Daher ist als 2. Probezahl (untere eingekreiste Zahl) 0 zu setzen.

10 **Wie man $\rho\nu\gamma'$ mit den $\iota\beta'$ multiplizieren kann**

$$(153 \cdot 12 = 1836)$$

Setze oben die $\rho\nu\gamma'$, weil sie größer sind, seitlich aber die $\iota\beta'$. Multipliziere aber die β' auf der Seite mit den γ' oben: zwei mal γ' gibt nun ς' . Setze nun unterhalb der γ' in die Einerstelle ς' . Multipliziere aber wiederum die β' auf der Seite mit den obigen ε' , die ν' bezeichnen: zwei mal ε' gibt nun $\alpha\psi'$. Setze nun in die Zehnerstelle ψ' , behalte aber α' bei dir anstelle der Zehn. Multipliziere aber wiederum die β' auf der Seite mit dem obigen α' , das ρ' bezeichnet: zwei mal α' gibt nun β' . Addiere diese β' zum α' , das du gesondert anstelle der Zehn behältst, und es gibt zusammen γ' . Aber diese γ' sind drei Hunderter, d. h. τ' . Setze nun die γ' , die τ' bezeichnen, unterhalb von α' , d. h. an die dritte Stelle, die die Hunderterstelle ist: Und siehe — du hast die Multiplikation der seitlich zweiten Ziffer, welche β' bezeichnet, mit den obigen $\rho\nu\gamma'$ vollendet. Multipliziere aber wiederum auch die seitlich erste Ziffer, d. h. das α' , das Zehn bezeichnet, mit den γ' oben, die sich an der Einerstelle finden: einmal γ' ist nun wiederum γ' . Diese γ' aber, da du einen Zehner mit einem Einer multiplizierst, sind drei Zehner, d. h. λ' . Rücke nun die Einerstelle vor und setze γ' unten an die zweite Stelle, welche die Zehnerstelle ist. Multipliziere aber wiederum das seitliche α' , das Zehn bezeichnet, mit den ε' oben, die ν' bezeichnen: einmal ε' ist nun wiederum ε' , d. h. fünf Hunderter, was ϕ' ist. Setze nun ε' an die dritte Stelle der obigen Ziffern, aber an die zweite bezüglich der γ' , die du vorangesetzt hast. Multipliziere aber wiederum das seitliche α' , das Zehn bezeichnet, mit dem α' oben, das ρ' bezeichnet: einmal α' ist nun wiederum α' . Dieses α' aber ist , α' . Setze nun α' an die vierte Stelle bezüglich der obigen Ziffern, aber an die dritte bezüglich der beiden unteren. Und siehe — du hast

$$\begin{array}{r} \alpha \ \varepsilon \ \gamma \\ \gamma \ \psi \ \varsigma \\ \alpha \ \varepsilon \ \gamma \\ \hline \alpha \ \eta \ \gamma \ \varsigma \end{array} \left. \begin{array}{l} \beta \\ \varepsilon \end{array} \right\} \gamma \ \psi \quad \begin{array}{c} \textcircled{\beta} \\ \textcircled{\beta} \end{array}$$

auch die Multiplikation der seitlich ersten Ziffer, welche Zehn bezeichnet, mit den obigen $\rho\nu\gamma'$ vollendet. Addiere aber die zwei Zahlen, die du zustande gebracht hast, und setze unterhalb des anderen geraden Strichs an die erste Stelle, die die Einerstelle ist, ς' . Setze aber wiederum an die Zehnerstelle, die die zweite ist, γ' . An die dritte Stelle aber, die die Hunderterstelle ist, setze η' . An die vierte Stelle aber, die die Tausenderstelle ist, setze α' . Und siehe – du hast gefunden, dass die $\rho\nu\gamma'$ mit den $\iota\beta'$ multipliziert, $\alpha\omega\lambda\varsigma'$ ergeben.

Erstmals multipliziert der Autor hier mit einer mehrstelligen Zahl. Da die Methode darauf beruht, dass zuerst die Einer mit den Einern multipliziert werden, muss der Multiplikator rechts von oben nach unten betrachtet nach seinen Stellen aufgebaut, d. h. in umgekehrter Reihenfolge der Ziffern geschrieben werden. Auf diese eigentümliche Anordnung geht der Autor hier nicht direkt ein, bezeichnet aber nach Abschluss der jeweiligen Teilmultiplikationen die seitlichen Ziffern β' und α' als zweite bzw. erste Ziffer (sc. von $\alpha\beta'$). Da der Multiplikator zweistellig ist, sind abschließend zwei Teilprodukte stellenweise zu addieren. Die zugehörige Beschreibung im Text ist auch ohne vorherige Behandlung der schriftlichen Addition leicht verständlich, weil hier noch kein Zehnerübertrag auftritt.

11

Über die Probe davon und den Beweis

Die Durchführung der Siebenerprobe ist hier in ihrer allgemeinen Form durchzuführen.

Die Siebenerreste von 153 und 12 sind 6 bzw. 5 (siehe Diagramm von Kapitel 10): $6 \cdot 5 = 30$ (siehe Diagramm). Der Siebenerrest von 30 ist 2 (1. Probezahl, im Diagramm oben wieder eingekreist). Der Siebenerrest von 1836 ist 2 (2. Probezahl, im Diagramm unten wieder eingekreist).

12

Wie man die Jahre seit Christi Geburt, die $\alpha\upsilon\lambda\varsigma'$ sind, mit den $\tau\xi\varepsilon'$ Tagen des Jahres multiplizieren und wissen kann, wie viel Tage sich ergeben

$$(1436 \cdot 365 = 524140)$$

Erstmals wird hier die Multiplikation bei einer Sachaufgabe angewendet, wobei allerdings die Schaltjahre vernachlässigt werden. Diese Aufgabe ist aber von besonderer Bedeutung, da sie uns das Abfassungsjahr (1436) der Handschrift verrät.

Darüber hinaus macht sich der Autor wieder Gedanken über die Ziffern, die zuerst zu multiplizieren sind: Es sind die letzte Ziffer (Endziffer) der Zahl auf der Seite, nämlich 5, und die Endziffer 6 der oberen Zahl. Damit ist die umgekehrte Ziffernreihenfolge des rechten Multiplikators – von oben nach unten betrachtet – festgelegt.

Der ausführliche Text zur stellengerechten Addition der drei Teilprodukte, bei der Zehnerüberträge auftreten, hätte sich erübrigt, wenn zuvor die schriftliche Addition behandelt worden wäre.

13

Über die Probe davon und den Beweis

Schon in den Kapiteln 9 und 11 wurde deutlich, dass sich zur Durchführung der Siebenerprobe das schriftliche Divisionsverfahren anbietet, wobei es schrittweise allerdings nur auf die Reste und nicht auf die Quotienten ankommt. So bestimmt unser Schreiber z. B. den Siebenerrest von 1436 folgendermaßen: $14:7 \Rightarrow \text{Rest } 0$, $(03=) 3:7$ "geht nicht", weshalb die nächste Stelle hinzugezogen werden muss: (Bei der schriftlichen Division wäre der Teilquotient 0 zu notieren.) $36:7 \Rightarrow \text{Rest } 1$

Am Schluss des Kapitels verweist der Autor auch auf die Möglichkeit, die Siebenerprobe im Kopf durchzuführen. Dazu sei jeweils der Zusammenschluss (συζυγία) zweier Ziffern zu nehmen und durch 7 zu teilen (Umkehrung des kleinen Einmaleins!). Hier erwähnt er allerdings nicht, dass mit der ersten Ziffer anders zu verfahren ist, falls diese größer oder gleich 7 ist: In Kapitel 7 bestimmt er den Siebenerrest von 90, indem er zunächst 7 von 9 subtrahiert und dann 20 betrachtet. Natürlich hätte er auch $9:7$ rechnen können.

Traditionell galt eine schriftliche Rechnung ohne Rechenprobe (z. B. Siebenerprobe, Neunerprobe oder Probe durch die Umkehroperation) als unvollständig, sodass unser Autor, wie andere auch, die Erklärung der Siebenerprobe nicht so lange zurückstellte, bis er die schriftliche Division eingeführt hatte.

14

Umfassend über alle Teile, die multipliziert werden

Nachdem wir euch zur Genüge in verschiedenen Beispielen aufgezeigt haben, wie es nun möglich ist, zwei Teile miteinander zu multiplizieren und zuverlässig und leicht das aus ihnen entstandene Endprodukt zu erfahren, schien es uns erforderlich zu sein, euch auch umfassend darzulegen und aufzuzeichnen, wie du (!) zwei zufällige Zahlen sachgerecht durch das zweiseitige Schema multiplizieren und zuverlässig und leicht das aus ihnen entstandene Endprodukt erfahren kannst.

Zuerst, wie wir auch in den Beispielen sagten, setze dir den größeren Teil der zwei Teile, die multipliziert werden, wie groß auch immer er sei, oberhalb des geraden Strichs, seitlich aber setze dir den kleineren Teil, wie man dies auch in den Beispielen sehr deutlich sieht. Danach multipliziere die seitlich oberste Ziffer, die die Einerziffer ist, mit der letzten Ziffer oben, die sich an der Einerstelle befindet, und das daraus entstehende Produkt – die unterhalb des Zehners befindliche einzifferige Zahl setze dir in die Einerstelle ein, anstatt der Zehner aber nimm so viele Einer, d. h. α' anstatt der ι' und β' anstatt der κ' und γ' anstatt der λ' und so der Reihe nach, und behalte diese bei dir. Multipliziere wiederum mit derselben seitlichen Einerziffer die oben vor der Endziffer stehende Ziffer, die sich an der Zehnerstelle befindet: Das Produkt, das sich daraus ergibt, addiere zu den Einern, die du gesondert anstatt der Zehner behältst, und das, was von den Zehnern übrig bleibt, setze dir unterhalb des geraden Strichs an die Zehnerstelle, anstatt der Zehner aber behalte ebenso viele Einer bei dir. Auf die gleiche Weise multipliziere mit derselben seitlichen Einerziffer die Ziffer oben, die sich an der Hunderterstelle befindet, welche die dritte ist. Ebenso multipliziere auch die an vierter und fünfter Stelle – und

wie viel auch immer du oben hast bis zur letzten Ziffer vom Ende her, zur ersten aber vom Anfang her – mit der seitlich obersten Einerziffer und setze dir unterhalb des geraden Strichs an die zugehörigen Stellen entsprechend das, was kleiner ist als die Zehner, anstatt der Zehner aber nimm ebenso viele Einer und behalte diese bei dir. Und zu den multiplizierten Zahlen addiere die Einer, die du anstatt der Zehner bei dir behältst, bis du auf diese Weise alle oberen Ziffern beendest, wie viele auch immer es sind.

Nach der Beendigung der seitlich obersten Ziffer, die an der Einerstelle liegt, mache wiederum mit allen Ziffern oben bei der seitlich tieferen zweiten Ziffer den Anfang, die an der Zehnerstelle steht, und multipliziere diese mit allen Ziffern oben, so wie du es auch bei der ersten gemacht hast. Die auftretenden Zehner- und Einerziffern – da du mit der Ziffer auf der Seite multiplizierst, die sich an der Zehnerstelle befindet, rücke um die Einerstelle vor und beginne diese ab der Zehnerstelle zu schreiben, welche die zweite ist, bis du auf diese Weise entsprechend die seitlich zweite Ziffer, die sich an der Zehnerstelle befindet, mit allen Ziffern oben beendest, so wie du es auch bei der ersten gemacht hast.

Ebenso multipliziere wiederum auch die seitlich dritte Ziffer, die an der Hunderterstelle steht, auf die gleiche Weise mit allen Ziffern oben, die herauskommenden Einer und Zehner aber – da du mit der Hunderterziffer multiplizierst, rücke sowohl um die Einerstelle als auch um die Zehnerstelle vor und beginne diese entsprechend ab der dritten Stelle zu schreiben, welche die Hunderterstelle ist, bis du alle Ziffern oben beendest.

Ebenso wenn du auf der Seite auch eine vierte Ziffer mit den Ziffern oben zu multiplizieren hast: Da die vierte Ziffer zum Tausender gehört, die auftretenden Einer und Zehner – rücke sowohl um die Einer- als auch um die Zehner- als auch um die Hunderterstelle vor und beginne diese entsprechend ab der vierten Stelle zu schreiben, welche die Tausenderstelle ist, bis du alle Ziffern oben beendest.

Wenn du auf der Seite auch eine fünfte Ziffer mit den Ziffern oben zu multiplizieren hast: Die auftretenden Einer und Zehner – rücke um die Einer-, die Zehner-, die Hunderter- und die Tausenderstelle vor und beginne diese entsprechend ab der fünften Stelle zu schreiben, welche die Myriadenstelle ist, bis du alle Ziffern oben beendest.

Nach der Multiplikation aller Ziffern auf der Seite mit allen Ziffern oben addiere all diese, angefangen vom Ende, welches die Einerstelle ist, und die Einer, die von den Zehnern übrig bleiben, setze dir unterhalb des anderen geraden Strichs direkt nach jeder Aufreihung. Anstatt der Zehner aber behalte ebenso viele Einer bei dir. Nachdem du die Einer, die du anstatt der Zehner behältst, mit den anderen Ziffern addiert hast, die du noch nicht addierst hast, setze dir die Einer direkt unterhalb der Ziffern, die du entsprechend aufsuchst, anstatt der Zehner aber behalte ebenso viele Einer bei dir, bis du auf diese Weise entsprechend alle Ziffern von denen addiert hast, die du bei der Multiplikation erhalten hast; und du wirst die im Einzelnen multiplizierten Ziffern davon zu einer einzigen Endzahl machen. Auf diese Weise wirst du jedes gesuchte Produkt zweier Zahlen richtig herausfinden.

Eine sehr ausführliche, vollständige und korrekte allgemeine Beschreibung des "zweiseitigen" Multiplikationsverfahrens, die auch die schriftliche Addition der Teilprodukte mit einschließt

Bei der Multiplikation der Einerziffern wird auf die *unterhalb des Zehners befindliche einzifferige Zahl* (τὸν μὲν κάτωθεν τῆς δεκάδος ὄντα ἀπλὸν ἀριθμόν) hingewiesen: κάτωθεν ist hier und auch an manchen anderen Stellen quantitativ gemeint.

15 ***Umfassend über Probe und Beweis aller Teile, die multipliziert werden***

Nachdem wir die Methode und Behandlung bei der Multiplikation beendet haben, wollen wir fernerhin auch über die Probe und den Beweis von allen deutlicher reden und umfassend aufzeigen, wie du nun die Proben für alle herauskommenden Endzahlen richtig nehmen kannst.

Suche zuerst, welche Zahl du oberhalb des geraden Strichs multiplizierst, nimm von ihr die ersten zwei Ziffern und prüfe, wie viel sie bezeichnen. Teile aber das, was bezeichnet wird, so oft es möglich ist, durch die ζ'. Und wenn das Ergebnis davon herauskommt, ohne einen Rest unterhalb der ζ' zu haben, behalte anstatt irgendeiner Zahl υ'; wenn aber eine Zahl übrig bleibt, die kleiner als die ζ' ist, behalte diese (Zahl). Nimm aber entsprechend der Reihe nach auch eine weitere Ziffer und prüfe diese zwei – die gegenüber den ζ' kleinere natürlich und die andere, die du hinzugenommen hast –, wie viel sie bezeichnen, und teile diese wiederum durch die ζ'. Und wenn etwas Kleineres unterhalb von den ζ' übrig bleibt, behalte dies und nimm wiederum eine weitere Ziffer entsprechend der Reihe nach und teile diese wiederum durch die ζ'. Wenn aber die zwei Ziffern völlig zu Ende gebracht werden, ohne dass sie etwas gegenüber den ζ' Kleineres haben, behalte anstatt irgendeiner Zahl υ', wie wir sagten. Von dem υ' aber kannst du ζ' nicht subtrahieren; vernachlässige nun das υ', weil es unbrauchbar ist, nimm der Reihe nach zwei weitere Ziffern, prüfe, wie viel sie bezeichnen, und teile sie durch die ζ'. Auf diese Weise führe, beginnend von der ersten und zweiten Ziffer, alle Ziffern des geraden Strichs oben bis zur letzten Ziffer zu Ende – und Ende von allem. Wenn etwas unterhalb von den ζ' übrig bleibt, schreibe dies gesondert. Wenn aber das Ende davon in den nämlichen ζ' aufhört, ohne dass sie etwas übrig haben, schreibe anstatt irgendeiner Zahl υ'.

Danach mache auch bei den auf der Seite stehenden Zahlen das Gleiche für alle Ziffern, die sich finden, beginnend von den zwei Ziffern an – der ersten natürlich und der zweiten –, bis du alle vom Anfang bis zur letzten zu Ende gebracht hast, indem du diese durch die ζ' dividierst, so wie wir es – wie gesagt – bei den Ziffern oberhalb des geraden Strichs machen – und Ende von allem. Wenn etwas unterhalb von den ζ' übrig bleibt, schreibe dieses in die Nähe zu dem, was du aus der letzten Verbindung der letzten zwei Ziffern von oben gesondert geschrieben hast. Wenn sie aber keinen Rest haben, der kleiner als die ζ' ist, schreibe anstatt irgendeiner Zahl υ'.

Die letzten zwei Ziffern unterhalb von den ζ', die aus dem herauskommen, was oberhalb des geraden Strichs und was auf der Seite steht, und die wir, wie wir

sagten, nahe nebeneinander gesondert geschrieben haben — multipliziere die zwei herausgekommenen Teile davon miteinander; und wenn der eine Teil ψ' hat, der andere aber irgendeine Zahl, etwa ψ' mit γ' oder mit δ' oder mit ε' , ergibt sich bei der Multiplikation wiederum ψ' . Wenn aber der eine α' hat, der andere aber β' oder γ' und so der Reihe nach, ist einmal β' wieder β' und einmal γ' wieder γ' und so der Reihe nach. Wenn aber der eine δ' ist, der andere ε' , gibt δ' mal ε' κ' und ε' mal ς' λ' und so der Reihe nach. Wenn nun die letzten beiden Ziffern unterhalb von den ζ' von oben und von der Seite multipliziert werden und dieses Produkt kleiner wird als die ζ' , wie bei einmal die β' wieder gleich β' und einmal die γ' wieder gleich γ' — setze dies in einen Kreis, wie es in den Beispielen gesetzt ist. Wenn es aber größer als die ζ' wird, wie z. B. δ' mal ε' κ' und ε' mal ς' λ' ergeben und so der Reihe nach, teile auch dies durch die ζ' , und den Rest unterhalb der ζ' — setze diesen in einen Kreis. Wenn es aber völlig durch ζ' teilbar ist, ohne einen Rest zu haben, schreibe anstatt einer anderen Zahl ψ' in einen Kreis.

Danach mache es, wie du es bei den Ziffern oberhalb des geraden Strichs und bei den seitlichen Ziffern getan hast, indem du diese zu je zwei Ziffern durch die ζ' geteilt hast, so auf die gleiche Weise auch bei der herauskommenden Endzahl, die sich aus den beiden durch Multiplikation ergeben hat: Teile alle ihre Ziffern zu je zweien durch die ζ' , angefangen von den ersten bis zur letzten Ziffer. Die äußerste und letzte von all diesen, gleich ob sie auf ψ' endet oder ob sie etwas Kleineres als die ζ' hat — die aus der Endzahl herauskommende Ziffer muss jener gleich sein, die du vorher in den Kreis gesetzt hast. Und wenn β' die in jenem Kreis gesetzte Zahl bezeichnet, muss auch diese β' bezeichnen. Kurz gesagt: Bei den beiden herauskommenden Teilen, die sich innerhalb der Kreise befinden, muss in gleicher Weise ein und dieselbe Zahl sein, und es darf nicht eine gegenüber der anderen ungleich und verschieden sein. Wenn sich nun die beiden Proben so verhalten, hat sich die herausgekommene Endzahl, das Produkt aus dem oben und dem seitlich Stehenden, schon richtig ergeben. Wenn aber die eine Probe γ' , die andere aber δ' hat, oder die eine sich so, die andere aber nicht so verhält, die Proben davon sich also voneinander unterscheiden, hat sich auch die herausgekommene Endzahl bei der Multiplikation nicht richtig ergeben.

Folgendes ist nötig, wenn du zwei Ziffern verbinden willst, um diese durch die ζ' zu teilen: Wenn die erste Ziffer unterhalb von den ζ' ist, etwa ς' oder ε' , nimm auch die entsprechende andere Ziffer und teile die von diesen bezeichnete Zahl durch die ζ' ; wenn aber die erste Ziffer mehr als die ζ' bezeichnet, d. h. ϑ' oder auch η' , subtrahiere von derselben ersten Ziffer einmal ζ' , und der Rest — sei es β' oder α' — nimm auch die entsprechende, der Reihe nach zweite Ziffer und vereinige, was von den ϑ' oder den η' übrig geblieben ist, mit der der Reihe nach entsprechenden Ziffer und teile dies durch die ζ' .

Angenommen, du willst diese zwei Ziffern ϑ η' , welche $\varsigma\eta'$ bezeichnen, durch die ζ' teilen. ϑ mal ζ' gibt $\varsigma\eta'$, es bleibt ψ' , und siehe, du hast die ϑ η' mühsam durch die ζ' geteilt, und es blieb ψ' . Subtrahiere von der ersten Ziffer, die ϑ ist, einmal ζ' , und es bleiben β' übrig; diese β' mit den η' — so gesetzt: β η' — bezeichnen $\kappa\eta'$. Teile diese durch die ζ' : δ' mal ζ' gibt $\kappa\eta'$, es

bleibt ψ' . Und siehe, nun hast du diese sehr viel bequemer durch die ζ' dividiert als vorher, als es $\vartheta \eta'$ war. Denn sowohl von den $\vartheta \eta'$ als auch von $\beta \eta'$ blieb ψ' .

Wenn nun die erste Ziffer, die du zu dividieren suchst, größer als die ζ' oder auch ζ' ist, subtrahiere einmal ζ' von ihr. Wenn sie größer ist als die ζ' , sodass von ihr etwas übrig bleibt, nimm auch die der Reihe nach entsprechende Ziffer, vereinige sie mit der übrig gebliebenen Ziffer unterhalb der ζ' und teile die beiden Ziffern durch die ζ' , wie wir es gewöhnlich auch bei den anderen Beispielen tun, die wir vorher besprochen haben. Wenn sie aber ζ' ist und nach Subtraktion von ζ' ψ' übrig bleibt, rücke vor, nimm zwei weitere Ziffern und teile das, was bezeichnet wird, durch die ζ' , bis du auf diese Weise alle Ziffern vom Anfang bis zum Ende zu Ende bringst, wie wir oben deutlicher aufgezeigt haben.

Man muss auch dies wissen, dass, wenn wir zwei Ziffern nur im Kopf durch die ζ' dividieren, wir diese in unserem Kopf gewöhnlich so dividieren: Von den $\alpha \delta'$ bleibt ψ' , von den $\alpha \varepsilon'$ bleibt α' übrig, von den $\beta \psi'$ bleiben ς' übrig, von den $\beta \alpha'$ bleibt ψ' , von den $\beta \varepsilon'$ erhältst du δ' , von den $\beta \zeta'$ erhältst du ς' , von den $\gamma \psi'$ erhältst du β' , von den $\gamma \delta'$ erhältst du ς' , von den $\delta \psi'$ erhältst du ε' , von den $\delta \varepsilon'$ erhältst du γ' , und so in gleicher Weise dividieren wir gewöhnlich weiter bis zu den $\xi \vartheta'$. Denn keinesfalls können die beiden durch die ζ' dividierten Ziffern noch mehr bezeichnen, sondern bis zu den $\xi \vartheta'$ dehnt sich die größte Zahl von diesen aus. Denn wenn du dich ein wenig in deinem Verstand bemühst, wird dir aufgrund der Erfahrung bei je zwei beliebigen Ziffern der Rest unterhalb der ζ' bekannt werden. Denn wir suchen keineswegs danach, wie oft es möglich ist, durch die ζ' zu dividieren – dies nämlich hat für uns keinen Nutzen –, sondern nur den Rest aus den beiden Ziffern unterhalb der ζ' – diesen müssen wir wissen, wie wir es diesbezüglich auch deutlicher aufgezeigt haben. Wenn du dich aber in deinem Verstand bemühst, kannst du aufgrund der Erfahrung die Reste aus den ζ' gut wissen. Wenn du aber aufgrund der Erfahrung die Reste von den ζ' richtig zu nehmen weißt, kannst du leicht die Proben davon nehmen, ob das Produkt, das aus den zwei Zahlen herauskommt, sich richtig oder nicht richtig ergeben hat.

Zum 2. Absatz der Übersetzung:

Die Ermittlung einer Probezahl wird hier noch nicht vollständig dargestellt. Am Anfang sind die ersten beiden Ziffern nur dann zu betrachten, wenn die erste Ziffer kleiner als 7 ist. Zutreffend wird beschrieben, dass "zwischendurch" bei einem positiven Rest die nächste Ziffer der Zahl, bei einem Rest 0 die beiden nächsten Ziffern der Zahl hinzuzuziehen sind. Insofern stellt der Rest 0 einen Sonderfall dar – für den Autor gehört 0 nicht zu den Resten, die kleiner als 7 sind.

Zum 4. Absatz:

Fallunterscheidung: Das Produkt aus den Probezahlen, die von den Zahlen oben und an der Seite gewonnen werden, kann kleiner oder größer als 7 sein. Im letzteren Fall muss nochmals der Siebenerrest bestimmt werden.

Der Schreiber berücksichtigt auch die Möglichkeit, dass eine der beiden Probe-

zahlen 0 ist, vernachlässigt aber den Fall, dass sich für beide 0 ergibt. Hierzu sei auf den Kommentar zu Kapitel 30 verwiesen.

Zum 5. Absatz:

Der Autor vertritt wieder die Ansicht, dass die Übereinstimmung der Probezahlen ein Beleg für die korrekte Multiplikation ist, was im Allgemeinen aber nicht zutrifft – vgl. hierzu den Kommentar zu Kapitel 7. Richtig ist hingegen wieder die Feststellung, dass nicht übereinstimmende Probezahlen eine fehlerhafte Multiplikation aufdecken.

Zum 6.–8. Absatz:

Hier wird der Inhalt des 2. Absatzes präzisiert: Beim ersten Divisionsschritt sind nur dann die ersten zwei Ziffern der Zahl zu betrachten, wenn die erste Ziffer kleiner als 7 ist. Andernfalls soll von der ersten Ziffer 7 subtrahiert werden, so wie der Autor es schon bei der Bestimmung der Probezahl von 90 in Kapitel 7 getan hatte. Jetzt wählt er das Beispiel $98:7$ und betont, dass die Rechenschritte $9-7=2$, $28:7 \Rightarrow \text{Rest } 0$ bequemer durchzuführen seien als die direkte Rechnung (Kopfrechnung?) $98:7$ – die Division $9:7$ usw. diskutiert er allerdings nicht.

Auch weist der Autor – analog zu seinen Ausführungen im 2. Absatz – darauf hin, dass bei einer Anfangsziffer 7 (mit Rest 0) im nächsten Schritt zwei weitere Ziffern hinzuzuziehen sind. Hierbei vernachlässigt er allerdings den Fall, dass die zweite Ziffer 8 oder 9 sein kann: Jetzt wäre erst wieder 7 zu subtrahieren.

Zum 9. Absatz:

Hier findet sich der Hinweis auf die Möglichkeit, den Siebenerrest einer zweistelligen Zahl mithilfe des kleinen Einmaleins schrittweise im Kopf zu bestimmen, wobei die größte Zahl, die dabei überhaupt vorkommen kann, erwähnt wird: $69 = 9 \cdot 7 + 6$

Sehr klar wird noch einmal zwischen der Siebenerrestbestimmung und der allgemeinen Division durch 7 unterschieden.

16 ***Über eine andere Multiplikationsmethode, die "Haus" genannt wird, nach der auch η' mit den $\kappa\alpha'$ multipliziert werden und so weiter***

Es gibt auch eine andere Multiplikationsmethode, die "Haus" genannt wird, da die Ziffern vierecksförmig zusammengefasst werden, wie du durch die künftig aufgezeigte Methode klarer erfahren kannst.

1. Beispiel (ohne Überschrift): η' mal $\kappa\alpha'$ ($8 \cdot 21 = 168$)
2. Beispiel: $\iota\gamma'$ mit den $\iota\varepsilon'$ multipliziert ($13 \cdot 15 = 195$)
3. Beispiel: $\kappa\varepsilon'$ mit den $\kappa\varepsilon'$ multipliziert ($25 \cdot 25 = 625$)
4. Beispiel: $\mu\gamma'$ mit den $\xi\varepsilon'$ multipliziert ($43 \cdot 65 = 2795$)
5. Beispiel: $\lambda\zeta'$ mit den $\pi\varepsilon'$ multipliziert ($37 \cdot 85 = 3145$)
6. Beispiel: $\iota\varepsilon'$ mit den $\rho\kappa\gamma'$ multipliziert ($15 \cdot 123 = 1845$)

7. Beispiel: $\rho\kappa\varepsilon'$ mit den $\sigma\nu\zeta'$ multipliziert ($125 \cdot 257 = 32125$)

Setze oben die $\rho\kappa\varepsilon'$ <der Autor versehentlich: $\rho\kappa\gamma'$ >, darunter aber die $\sigma\nu\zeta'$. Multipliziere aber die ε' oben mit den ζ' unten: ε' mal ζ' gibt $\lambda\varepsilon'$. Setze un-

ten ε' , setze aber γ' anstatt der λ' gesondert.

Multipliziere aber die vier Ziffern über Kreuz: ε' mal ε' gibt $\kappa\varepsilon'$, zwei mal ζ' aber gibt $\iota\delta'$. $\kappa\varepsilon'$ aber und $\iota\delta'$ und γ' , was du anstatt der λ' gesondert gesetzt hast, gibt zusammen $\mu\beta'$. Setze unten an die Zehnerstelle β' , setze aber δ' anstatt

$$\begin{array}{r|rr} \alpha \cdot \beta \cdot \varepsilon & \gamma & \zeta & \textcircled{\beta} \\ \beta \cdot \varepsilon \cdot \zeta & \delta & & \textcircled{\gamma} \\ \hline & \gamma & \beta & \alpha & \beta & \varepsilon & \alpha & \textcircled{\beta} \end{array}$$

der μ' gesondert. Multipliziere aber die beiden Ränder der sechs Ziffern über Kreuz: zwei mal ε' gibt ι' , einmal ζ' aber ist wieder ζ' . Multipliziere aber auch die Ziffern der Mitte: zwei mal ε' gibt ι' . ι' aber und ζ' und ι' und δ' , was du anstatt der μ' gesondert gesetzt hast, gibt zusammen $\lambda\alpha'$. Setze unten an die Hunderterstelle α' , setze aber γ' anstatt der λ' gesondert. Kennzeichne aber die ε' oben und die ζ' darunter, weil sie nun unnütz sind. Multipliziere aber die vier Ziffern der Mitte und des Anfangs über Kreuz: zwei mal β' gibt δ' , einmal ε' aber ist wieder ε' . δ' aber und ε' und γ' , was du anstatt der λ' gesondert gesetzt hast, gibt zusammen $\iota\beta'$. Setze unten an die Tausenderstelle β' , setze aber α' anstatt der Zehn gesondert. Kennzeichne aber die β' und ε' der Mitte, weil sie unnütz sind. Multipliziere aber das α' oben mit den β' darunter: einmal β' ist wieder β' . Addiere auch das α' , was du anstatt der Zehn gesondert gesetzt hast, und es gibt zusammen γ' . Setze dies unten an die fünfte Stelle, die zur Myriade gehört. Und siehe, wenn man die $\rho\kappa\varepsilon'$ mit den $\sigma\nu\zeta'$ multipliziert, ergibt sich als Produkt λ, β' und $\rho\kappa\varepsilon'$.

Bei dieser Multiplikationsmethode werden die beiden Zahlen zunächst stellengerecht untereinandergeschrieben. In den Beispielen steht die kleinere Zahl stets oben, was aber hinsichtlich des Rechenaufwands keine Rolle spielt. Ist ihre Stellenzahl kleiner als die der unteren, so werden die fehlenden Stellen – wie in den Beispielen 6 und 9 – mit Nullen aufgefüllt. (Bei dem sehr einfachen 1. Beispiel hat dies der Schreiber unterlassen.)

Nun werden die Faktorenziffern so über Kreuz ($\sigma\tau\alpha\upsilon\rho\sigma\iota\delta\tilde{\omega}\zeta$) multipliziert, dass im Prinzip nur die endgültigen Ziffern des Produkts notiert werden. Alles andere wird im Kopf durchgeführt.

Seien $E_1, Z_1, H_1, T_1, (ZT)_1 \dots$ und $E_2, Z_2, H_2, T_2, (ZT)_2 \dots$ die Einer-, Zehner-, Hunderter-, Tausender-, Zehntausenderziffern usw. des ersten bzw. des zweiten Faktors, so ergibt sich die Einerziffer des Produkts aus $E_1 \cdot E_2$, wobei eventuell ein Zehnerübertrag (Z_0) auftritt. Die Zehnerziffer des Produkts ergibt sich über Kreuz aus $E_1 \cdot Z_2 + E_2 \cdot Z_1 + Z_0$, wobei eventuell ein Hunderterübertrag (H_0) auftritt. Die Hunderterziffer des Produkts ergibt sich über Kreuz aus $E_1 \cdot H_2 + Z_1 \cdot Z_2 + E_2 \cdot H_1 + H_0$, wobei eventuell ein Tausenderübertrag (T_0) auftritt. Die Tausenderziffer des Produkts ergibt sich über Kreuz aus $E_1 \cdot T_2 + Z_1 \cdot H_2 + Z_2 \cdot H_1 + E_2 \cdot T_1 + T_0$, wobei eventuell ein Zehntausenderübertrag ($(ZT)_0$) auftritt. Die Zehntausenderziffer des Produkts ergibt sich über Kreuz aus $E_1 \cdot (ZT)_2 + Z_1 \cdot T_2 + H_1 \cdot H_2 + Z_2 \cdot T_1 + E_2 \cdot (ZT)_1 + (ZT)_0$, wobei eventuell ein Hunderttausenderübertrag auftritt usw.

Im vorliegenden Beispiel hat der Autor – offenbar zur Erleichterung der Kopfrechnung – die Überträge $Z_0=3, H_0=4, T_0=3, (ZT)_0=1$ rechts von der senkrechten Linie der Reihe nach von oben nach unten notiert. Ebenso hält er die

Überträge bei den anderen Beispielen fest. (Im 8. Beispiel wird der letzte Übertrag aus Platzgründen rechts neben dem vorletzten vermerkt.)

Eine weitere Erleichterung bei der Rechnung stellt die Markierung von verbrauchten, unnütz gewordenen Ziffern dar. (σημείωσον τὰ ἄνωθεν ... καὶ κάτωθεν ... ὡς ἀργὰ νῦν ὄντα.) In unserem Beispiel sind die Faktoren jeweils dreistellig, sodass $T_1 = ZT_1 = T_2 = ZT_2 = 0$ gilt. Die Bestimmung der Tausenderziffer des Produkts reduziert sich damit auf $Z_1 \cdot H_2 + Z_2 \cdot H_1 + T_0$, sodass die (zur Berechnung der Einer-, Zehner- und Hunderterziffern des Produkts mit herangezogenen) Einerziffern der Faktoren nun nicht mehr gebraucht werden. Entsprechend vereinfacht sich die Bestimmung der Zehntausenderziffer des Produkts zu $H_1 \cdot H_2 + (ZT)_0$, sodass zusätzlich auch die vorher herangezogenen Zehnerziffern keine Rolle mehr spielen. Der Autor kennzeichnet diese verbrauchten Ziffern mit einem vorangesetzten Pünktchen.

8. Beispiel: , α σ λ ς ´ mit den , γ υ ν η ´ multipliziert ($1236 \cdot 3458 = 4274088$)

9. Beispiel: τ μ ´ mit den , ι , β ´ und τ ν ς ´ multipliziert
($340 \cdot 12356 = 4201040$)

Bei allen 9 Beispielen finden sich in den Diagrammen ganz rechts die Schemata der Siebenerprobe, auf die im Text aber nicht mehr eingegangen wird.

Am Schluss des Kapitels schreibt der Autor:

Nun ist es uns möglich, sowohl mit der ersten Methode zu multiplizieren, die man dreiseitig nennt, als auch mit der vorliegenden, die man "Haus" nennt. Da aber die erste Methode klarer ist als die vorliegende, soll man eher mit der ersten jedes Produkt aufsuchen. Denn überall ist es notwendig und nützlich, die Klarheit aufzusuchen – hierbei aber ist es ganz besonders notwendig, die klarere und bequeme Methode aufzusuchen, damit euch mit ihrer Hilfe das Gesuchte zuverlässig und bequem bekannt wird.

Vorher hatte der Autor die 1. Methode nur als "zweiseitig" bezeichnet. Seine Bewertung der beiden Methoden ist im Wesentlichen zutreffend.

Die Über-Kreuz-Methode ist bereits in Indien ab dem 9. Jahrhundert nachweisbar. Gaṇeśa, ein späterer Kommentator aus dem 16. Jahrhundert, hält sie für schwierig, sodass sie von dummen Schülern nicht ohne mündliche Unterweisung gelernt werden könne (TROPFKE 1980, S. 211 f., S. 683, S. 714 f.). Im byzantinischen Bereich findet sie sich bereits in der anonymen Algorismusschrift von 1252 (ed. ALLARD 1977) und im Rechenbuch des Maximos Planudes aus dem späten 13. Jahrhundert (ed. ALLARD 1981), wobei jeweils der Fachausdruck κατὰ χιασμόν verwendet wird. Die älteste bisher bekannte westeuropäische Quelle für das Verfahren ist Leonardo von Pisas "Il liber abbaci" von 1202 (BONCOMPAGNI 1857). In den späteren italienischen Rechenbüchern (vgl. TROPFKE 1980, S. 220), in denen die Methode häufig als *moltiplicazione per crocetta* bezeichnet wird, wird es üblich, die zu multiplizierenden Ziffern mit Strichen zu verbinden, wodurch die vorgeschriebene Rechenreihenfolge leichter eingehalten werden kann. Auch Rechenmeister im deutschen Sprachraum des 15./16. Jahrhunderts kennen das Verfahren (vgl. TROPFKE 1980, S. 220). So

schreibt zum Beispiel Adam Ries (1550, f iij^v = 111^v):

Es haben die alten Creutzweis eine zal durch die andern Multiplicirt / Nimpt vil kopffs / als du hie in folgenden exempel sehen wirst ...

Im Vortext (fol. 6^r–7^r) zum Rechenbuch führt der Autor außerdem noch eine dritte schriftliche Multiplikationsmethode ein, die sog. Gittermultiplikation:

Wie man mithilfe des Gitters (διὰ τῆς σχάρας) leicht multiplizieren kann
Viele verschiedene Arten der Multiplikationen, die von uns aufgezeigt werden, wirst du bei der Untersuchung zur Multiplikation finden (gemeint sind die Kap. 6, 8, 10, 12, 14, 16–20 im vorliegenden Rechenbuch), die imstande sind, jede aufgesuchte Zahl gut zu multiplizieren. Denn du wirst eine "zweiseitig" genannte Multiplikationsmethode finden. Du wirst auch eine andere Multiplikationsmethode finden, die "Haus" genannt wird. Du wirst auch andere verschiedene Methoden ohne Gestalt und Bezeichnung finden, die imstande sind, allein im Kopf jede aufgesuchte Zahl zu multiplizieren. Die vorliegende Methode aber, die mithilfe des Gitters entsteht, wurde noch nicht aufgezeigt, obgleich sie gegenüber allen anderen am leichtesten und nützlich ist. Denn alle anderen Methoden, die du bei der Untersuchung zur Multiplikation finden wirst, fallen, indem sie einer Vorstellungskraft und Erinnerung bedürfen, dem Verstand zur Last und rufen uns zur Anstrengung auf. (αἱ μὲν γὰρ ἄλλαι πᾶσαι μεταχειρίσεις ... φαντασίας καὶ μνήμης δεόμεναι παρενοχλοῦσι τῷ νῷ καὶ εἰς ἀγῶνα ἡμῶν διεγείρουσι.)

Es folgt die Erläuterung der Gittermethode anhand von vier Beispielen – beim ersten wird die Multiplikation von $\upsilon\zeta\zeta'$ mit $\tau\xi\eta'$ ($497 \cdot 368 = 182\,896$) vorgeführt. Mit arabischen Ziffern geschrieben hat das zugehörige Multiplikationsschema folgende Gestalt:

	4	9	7													
8	<table><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>	3	2	2	3	<table><tr><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td></tr></table>	7	2	5	7	<table><tr><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	5	6	2	5	6
3	2															
2	3															
7	2															
5	7															
5	6															
2	5															
6	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td></tr></table>	2	4	4	2	<table><tr><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td></tr></table>	5	4	4	5	<table><tr><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	4	2	2	4	9
2	4															
4	2															
5	4															
4	5															
4	2															
2	4															
3	<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	1	2	2	1	<table><tr><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>7</td><td>2</td></tr></table>	2	7	7	2	<table><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	2	1	1	2	8
1	2															
2	1															
2	7															
7	2															
2	1															
1	2															
	1	8	2													

Der erste Faktor steht oberhalb des Gitterdiagramms, der zweite, mit Schrift-richtung nach oben, links vom Diagramm. Jede Ziffer des einen Faktors wird mit jeder des anderen multipliziert, und die Produkte werden in die entsprechenden quadratischen Felder eingetragen, und zwar so, dass jeweils die Ziffer des niederen Stellenwerts oberhalb und die Ziffer des höheren Stellenwerts unterhalb der Felddiagonale steht. Dadurch werden die (hier sechs) Diagonalstreifen, in die sich das Diagramm aufteilt, zu Stellenwertordnern:

Der erste Streifen rechts oben enthält den Beitrag für die Einer (6) des Produkts, der nächste die Beiträge für die Zehner ($2 + 5 + 2 = 9$). Dabei stammt die erste 2 aus dem Produkt $9 \cdot 8$ (Zehner des ersten Faktors mal Einer des zweiten), die zweite 2 aus dem Produkt $7 \cdot 6$ (Einer des ersten Faktors mal Zehner des zweiten), und 5 ist der Stellenübertrag aus dem Einerprodukt $7 \cdot 8$. Damit

sind alle Beiträge zur Zehnerstelle des Produkts erfasst.

Der Hunderterstreifen liefert einen Übertrag (1) für den Tausenderstreifen, der wiederum einen Übertrag (2) für den Zehntausenderstreifen.

Die "Einerziffer" der Summe der Zahlen einen jeden Streifens zuzüglich des evtl. Übertrags werden in der diagonalen Verlängerung außerhalb des Schemas notiert. Das gesuchte Produkt kann nun unten von links nach rechts und weiter von rechts unten nach rechts oben abgelesen werden.

Bei dieser Methode wird alles – bis auf die Stellenüberträge – schriftlich festgehalten, sodass die Merkfähigkeit des Rechners tatsächlich so gut wie gar nicht beansprucht wird. Damit liegt ein extremes Gegenmodell zur Überkreuz-Methode vor, bei der im Prinzip nur die endgültigen Ziffern des Produkts notiert werden. Betrachtet man aber – einmal abgesehen von der aufwendigen Diagrammgestaltung – den beträchtlichen Schreibaufwand, so wird man die überaus positive Einschätzung der Gittermethode durch unseren Autor kaum teilen können. Am effektivsten sind zweifellos die Verfahren, bei denen schriftliche Notation und Kopfrechnung in einem ausgewogenen Verhältnis zueinander stehen, wie zum Beispiel bei der "zweiseitigen" Methode.

Die Gittermethode tritt auch in anderen byzantinischen Schriften auf: im Cod. Laurentianus Ashburnhamiani Gr. 1599 (Standort: Biblioteca Nazionale Medicea Laurenziana Florenz, aus dem früheren Besitz von Lord Ashburnham) aus dem 14. und 15. Jahrhundert und im Cod. Parisinus supp. Gr. 652 aus dem 15. Jahrhundert (vgl. ALLARD 1973, S. 119–134 bzw. S. 134–143). Sie dürfte ihren Weg von den Indern über die Araber zu den Byzantinern gefunden haben (vgl. TROPFKE 1980, S. 214, S. 218 f.). Die Italiener sprachen von der *gelosia*-Methode, weil sie das Diagramm an ein Fenstergitter (Jalousie) denken ließ, das die Frauen vor den Blicken fremder Männer schützen sollte: *gelosia* heißt Eifersucht.

17

**Über die Multiplikation, die nur im Kopf entsteht,
bei der auch $\iota\gamma'$ mit den $\iota\gamma'$ multipliziert werden und so weiter**

Es ist schon an der Zeit, auch über die Multiplikation zu sprechen, die nur im Kopf entsteht: Es gibt nämlich viele verschiedene Arten und Weisen, die imstande sind, ohne Aufzeichnung nur im Kopf zu multiplizieren und uns das Gesuchte richtig aufzuzeigen.

Die erste Methode einer nichtschriftlichen Multiplikation aber, die nur im Kopf entsteht, ist die folgende. Du weißt also gut, dass ι' mit den ι' multipliziert ρ' ergeben. Aber angenommen, dies ist deinerseits bedacht worden, dass bei der Multiplikation von $\iota\gamma'$ mit den $\iota\gamma'$ und von $\iota\delta'$ mit den $\iota\delta'$ und von $\iota\gamma'$ mit den $\iota\beta'$ und von $\iota\zeta'$ mit den $\iota\gamma'$ und so der Reihe nach die Zehner davon das Produkt ρ' haben.

Du suchst nun $\iota\gamma'$ mit den $\iota\gamma'$ zu multiplizieren. Die ι' aber mit den ι' multipliziert haben, wie wir sagten, das Produkt ρ' . Behalte nun bei dir wegen der zwei Zehner ρ' . Addiere aber die γ' zu den γ' , und es ergeben sich ς' . Dies aber bedeutet ς' Zehner, d. h. ξ' . Addiere auch diese zu den ρ' , und es ergeben sich $\rho\xi'$. Multipliziere aber die γ' mit den γ' : drei mal γ' ergeben nun ϑ' .

Addiere auch diese zu den $\rho\xi'$, und es ergeben sich insgesamt $\rho\xi\theta'$. Und siehe, du hast nur in deinem Kopf – ohne Aufzeichnung – gefunden, dass sich bei der Multiplikation von $\iota\gamma'$ mit den $\iota\gamma'$ daraus das Produkt $\rho\xi\theta'$ ergibt.

Die Berechnung von $13 \cdot 13$ im Kopf verläuft also folgendermaßen: $10 \cdot 10 = 100$, $3 + 3 = 6 \Rightarrow 60$, $100 + 60 = 160$, $3 \cdot 3 = 9$, $160 + 9 = \underline{169}$

2. Beispiel: $\iota\delta'$ mit den $\iota\delta'$ multipliziert ($14 \cdot 14 = 196$)

3. Beispiel: $\iota\gamma'$ mit den $\iota\beta'$ multipliziert ($13 \cdot 12 = 156$)

4. Beispiel: $\iota\zeta'$ mit den $\iota\beta'$ multipliziert ($17 \cdot 12 = 204$)

Die nur für die Multiplikation von Zahlen zwischen 10 und 20 sinnvolle Rechenvorschrift beruht auf der Formel $(10 + b) \cdot (10 + d) = 10^2 + 10 \cdot (b + d) + b \cdot d$ ($1 \leq b, d \leq 9$).

18 **Wie man auch anders allein im Kopf multiplizieren kann, indem man nicht vom Anfang, sondern vielmehr vom Ende her beginnt**

Nun beginnt die Rechnung mit den Einern der Faktoren. Dabei handelt es sich aber eher um ein schriftliches Rechnen im Kopf als um ein eigentliches Kopfrechnen.

1. Beispiel: $\iota\zeta'$ mit den $\iota\beta'$ multipliziert ($17 \cdot 12 = 204$)

Der Autor beschreibt das Vorgehen, das teilweise an die schriftliche Überkreuz-Methode erinnert, folgendermaßen: $2 \cdot 7 = 14$, $2 + 7 = 9$, $9 + 1 = 10$, $10 + 10 = 20$, $10 \cdot 20 = 200$, $200 + 4 = \underline{204}$.

Sei Z_0 der Zehnerübertrag von $b \cdot d$, also $b \cdot d = 10 Z_0 + k$, dann gilt $(10 + b) \cdot (10 + d) = 10(b + d + Z_0 + 10) + k$ ($1 \leq b, d \leq 9$, $0 \leq Z_0 \leq 8$, $0 \leq k \leq 9$). Im vorliegenden Fall sind $b = 7$, $d = 2$, $Z_0 = 1$, $k = 4$.

2. Beispiel: $\iota\varsigma'$ mit den $\iota\delta'$ multipliziert ($16 \cdot 14 = 224$)

3. Beispiel: $\iota\theta'$ mit den $\iota\theta'$ multipliziert ($19 \cdot 19 = 361$)

Am Ende des Kapitels weist der Schreiber zu Recht darauf hin, dass diese Multiplikationsmethode nur für Faktoren unter 20 geeignet ist:

Ebenso aber auch bei jeder anderen gleichartigen Aufgabe: mithilfe dieser beiden Methoden kannst du allein in deinem Kopf, ohne Aufzeichnung, das Produkt zweier beliebiger Zahlen erfahren, wenn sie unterhalb der κ' sind. Wenn sie aber oberhalb der κ' sind, wie die $\kappa\alpha'$ mit den $\kappa\beta'$ multipliziert und so weiter, kannst du das Gesuchte mithilfe dieser beiden Methoden (sc. von Kap. 17 und 18) nicht gut erfahren.

19 **Wie man auch anders allein im Kopf jede aufgesuchte Zahl richtig multiplizieren kann, gleich ob sie kleiner oder größer als die κ' ist**

1. Beispiel: $\iota\varepsilon'$ mit den $\iota\beta'$ multipliziert ($15 \cdot 12 = 180$)

Der Schreiber rechnet $1 \cdot 15 = 15 \Rightarrow 150$, $2 \cdot 15 = 30$, $150 + 30 = 180$ oder alternativ mit vertauschten Faktoren $1 \cdot 12 = 12 \Rightarrow 120$, $5 \cdot 12 = 60$, $120 + 60 = 180$.

2. Beispiel: $\iota\gamma'$ mit den $\iota\vartheta'$ multipliziert ($13 \cdot 19 = 247$)

Der Schreiber rechnet $1 \cdot 19 = 19 \Rightarrow 190$, $3 \cdot 19 = 57$ (ohne Zwischenrechnung), $190 + 57 = 247$ oder alternativ mit vertauschten Faktoren $1 \cdot 13 = 13 \Rightarrow 130$, $9 \cdot 13 = 117$, $130 + 117 = 247$.

3. Beispiel: $\kappa\beta'$ mit den $\kappa\gamma'$ multipliziert ($22 \cdot 23 = 506$)

Bei Zahlen über 20 (siehe Kapitelüberschrift) lässt sich die Methode unverändert anwenden: $2 \cdot 23 = 46 \Rightarrow 460$, $2 \cdot 23 = 46$, $460 + 46 = 506$ oder $2 \cdot 22 = 44 \Rightarrow 440$, $3 \cdot 22 = 66$, $440 + 66 = 506$

4. Beispiel: $\kappa\gamma'$ mit den $\lambda\varepsilon'$ multipliziert ($23 \cdot 35 = 805$)

Allgemein wird hier das Produkt von zwei zweistelligen Zahlen, die keine Zehnerzahlen sind, wie folgt im Kopf ausgerechnet:

$$(10a + b) \cdot (10c + d) = a \cdot (10c + d) \cdot 10 + b \cdot (10c + d) \text{ oder}$$

$$(10a + b) \cdot (10c + d) = c \cdot (10a + b) \cdot 10 + d \cdot (10a + b) \text{ mit } 1 \leq a, b, c, d \leq 9$$

5. Beispiel: $\nu\gamma'$ mit den $\rho\kappa'$ multipliziert ($53 \cdot 120 = 6360$)

Addition von $5 \cdot 120$ mit angehängter Null und von $3 \cdot 120$ oder Addition von $1 \cdot 53$ mit zwei angehängten Nullen und von $2 \cdot 53$ mit angehängter Null

6. Beispiel: $\rho\lambda'$ mit den $\rho\nu'$ multipliziert ($130 \cdot 150 = 19500$)

Addition von $1 \cdot 150$ mit zwei angehängten Nullen und von $3 \cdot 150$ mit angehängter Null: Die alternative Rechnung wird hier und im folgenden Beispiel nicht mehr durchgeführt.

7. Beispiel: $\alpha\rho'$ mit den $\alpha\sigma'$ multipliziert ($1100 \cdot 1200 = 1320000$)

Addition von $1 \cdot 1200$ mit drei angehängten Nullen und von $1 \cdot 1200$ mit zwei angehängten Nullen

20

Wie man auch anders allein im Kopf multiplizieren kann, wenn die aufgesuchte Zahl eine Ziffer ψ' hat

1. Beispiel: μ' mit den μ' multipliziert ($40 \cdot 40 = 1600$)

2. Beispiel: ρ' mit den σ' multipliziert ($100 \cdot 200 = 20000$)

3. Beispiel: τ' mit den β' multipliziert ($300 \cdot 2000 = 600000$)

4. Beispiel: γ' mit den δ' multipliziert ($3000 \cdot 4000 = 12000000$)

In diesen Beispielen treten bei den Faktoren bis zur zweithöchsten Stelle (einschließlich) nur Nullen auf. Der Schreiber multipliziert die Ziffern der höchsten Stelle und fügt dem Produkt so viele Nullen hinzu, wie beide Faktoren zusammen aufweisen.

Anschließend betrachtet er ein Produkt, bei dem der zweite Faktor in der Weise modifiziert wird, dass (auch) die Ziffer der zweithöchsten Stelle von Null verschieden ist:

5. Beispiel (ohne eigene Überschrift): $30 \cdot 45 = 1350$

Rechnung: $3 \cdot 45 = 135$ (ohne Zwischenrechnung), $135 \Rightarrow 1350$

6. Beispiel: ρ' mit den $\sigma\nu'$ multipliziert ($100 \cdot 250 = 25000$)

Rechnung: $1 \cdot 25 = 25$, $25 \Rightarrow 25000$

7. Beispiel: σ' mit den $\alpha\tau'$ multipliziert ($200 \cdot 1300 = 260000$)

Rechnung: $2 \cdot 13 = 26$, $26 \Rightarrow 260000$

Schließlich kündigt der Autor die Multiplikation von Zahlen ohne die Ziffer 0 an, was aber nur für sein folgendes Beispiel zutrifft:

8. Beispiel (ohne eigene Überschrift): $23 \cdot 39 = 897$

Es wird gefragt, welcher Faktor näher an einer reinen Zehnerzahl liegt: das ist 39 (an 40). Berechnung von $23 \cdot 40$: $4 \cdot 23 = 92$, $92 \Rightarrow 920$. Korrektur: $920 - 1 \cdot 23 = 897$

Dieses uns heute noch geläufige Ausnutzen von Rechenvorteilen beruht auf dem Distributivgesetz

$$(10a + b) \cdot (10c - d) = c \cdot (10a + b) \cdot 10 - d \cdot (10a + b) \quad (\text{hier mit } a = 2, b = 3, c = 4, d = 1).$$

9. Beispiel: $\rho\sigma'$ mit den $\tau\pi'$ multipliziert ($170 \cdot 380 = 64600$)

Hier liegt 380 näher an einer Hunderterzahl (400, Differenz: 20). Berechnung von $170 \cdot 400$: $17 \cdot 4 = 68$, $68 \Rightarrow 68000$. Berechnung von $170 \cdot 20$: $2 \cdot 17 = 34$, $34 \Rightarrow 3400$. Korrektur: $68000 - 3400 = 64600$

Im Abschlusstext dieses Kapitels zieht der Autor ein Resümee über alle behandelten Multiplikationsmethoden.

Nun ist es euch möglich, sowohl schriftlich als auch ohne Aufzeichnung, allein im Kopf, mithilfe dieser verschiedenen Methoden zu multiplizieren, die wir darlegen (!), und das Produkt, das sich aus zwei beliebigen Zahlen ergibt, richtig zu erfahren. Denn wenn auch solche Dinge nur mit Mühe geschrieben und noch viel mühsamer durch Denken bewältigt werden, sind sie trotzdem leicht durch Denken zu finden. Denn jede diesbezügliche Schwierigkeit ergibt sich beim Begreifen. Wenn man aber die Arten und Weisen, diese zu finden, begriffen hat, findet man sie mithilfe der Erfahrung als Lehrmeisterin leicht.

Im "Vortext" zum Rechenbuch findet sich ein weiteres, umfangreiches Kapitel zur Multiplikation im Kopf (fol. 8^v–9^v). (Darin bezieht sich der Schreiber rückblickend auf die vorliegenden Kapitel 17–20 unseres Rechenbuchs: *Im 17. und 18. und 19. und 20. Kapitel ist gesagt worden ...*)

Der Inhalt soll im Folgenden kurz skizziert werden:

Quadrieren von Zahlen zwischen 10 und 100 im Wesentlichen nach der 1. binomischen Formel: $(10a + b)^2 = a^2 \cdot 100 + (a + a) \cdot b \cdot 10 + b^2$ (Beispiele: 11^2 , 13^2 , 22^2 , 55^2)

Produkte von zweistelligen Zahlen mit gleichen Endziffern (b) im Wesentlichen nach dem verallgemeinerten Distributivgesetz, wobei in den beiden mittleren Gliedern b ausgeklammert wird: $(10a + b) \cdot (10c + b) = ac \cdot 100 + (a + c) \cdot b \cdot 10 + b^2$ (Beispiele: $13 \cdot 23$, $25 \cdot 65$)

Alternativ hierzu eine "Halbierungsmethode" – nur das mittlere Glied wird umgeformt: $(10a + b) \cdot (10c + b) = ac \cdot 100 + \frac{1}{2}(a + c)(b + b) \cdot 10 + b^2$ (Beispiel: $27 \cdot 57$)

Produkte von zweistelligen Zahlen mit gleichen Anfangsziffern nach einer analogen Halbierungsmethode: $(10a + b) \cdot (10a + d) = a^2 \cdot 100 + \frac{1}{2}(a + a)(b + d) \cdot 10 + bd$ (Beispiele: $13 \cdot 17$, $25 \cdot 28$, $53 \cdot 58$, $22 \cdot 22$, $35 \cdot 35$, $37 \cdot 31$)

Die beiden Halbierungsmethoden sind recht geschickt: Man braucht sich nur einzuprägen, dass die Zehnerziffern und die Einerziffern jeweils für sich einmal zu multiplizieren und einmal zu addieren sind und außerdem das Produkt der Summe halbiert werden muss. Dieses mittlere Glied hat aber im allgemeinen Multiplikationsfall $(10a + b) \cdot (10c + d)$ nicht die Gestalt $\frac{1}{2}(a + c)(b + d) \cdot 10$ – eine naheliegende, aber unzulässige Verallgemeinerung –, es hat vielmehr die Darstellung $(ad + bc) \cdot 10$. Wie man leicht zeigen kann, gilt nun $\frac{1}{2}(a + c)(b + d) \cdot 10 = (ad + bc) \cdot 10$ genau dann, wenn $a = c$ oder $b = d$ ist, d. h. wenn Faktoren mit gleichen Anfangs- oder Endziffern vorliegen. Dementsprechend warnt der Schreiber davor, etwa $25 \cdot 37$ oder $34 \cdot 53$ (ungleiche Anfangs- und Endziffern) nach der Halbierungsmethode zu berechnen.

Die hier besprochenen Kapitel zur Multiplikation im Kopf verdienen insofern besondere Beachtung, als die dem Gegenstand entsprechende mündliche Lehrtradition nur recht selten schriftlich fixiert wurde. Zudem war bis zur Erfindung des Buchdrucks die Herstellung von Abschriften zeitraubend und kostspielig, sodass Themen der "höheren Mathematik" bevorzugt wurden. Im Fall der Verwendung des dezimalen Positionssystems begnügte man sich meistens mit einer Tafel des kleinen Einmaleins, das auswendig gelernt werden sollte. Im Übrigen genügte diese Fertigkeit, um auf dem Rechenbrett (Abakus) einfache alltägliche Rechnungen auch ohne schriftliche Verfahren zu bewältigen.

Jedoch ist uns aus der byzantinischen Arithmetik nichts über die Verwendung eines Abakus überliefert, obwohl man im griechischen Kulturraum inzwischen zahlreiche antike Rechentafeln gefunden hat, von denen die salaminische die bekannteste ist (vgl. SCHÄRLIG 2001, S. 61–104). Stattdessen scheint das Fingerrechnen eine Rolle gespielt zu haben – vgl. Rhabdas' Brief an Georgios Chatzyke (um 1341, ed. TANNERY IV, 4–1886, Band 4, S. 90–97): er gebraucht hierfür den Fachausdruck $\delta α κ τ υ λ ι κ ό ν μ έ τ ρ ο ν$.

Eine Tafel des kleinen Einmaleins, die man in den Kapiteln unseres Rechenbuchs zur Multiplikation vermisst, ist wieder im Vortext (fol. 5^r) zu finden. Unser Autor überschreibt diese (quadratische) Tafel mit: $\delta \acute{\upsilon} ο \acute{\epsilon} χ ε ι \acute{\alpha} ν α γ γ \acute{\omega} σ ε ι ς \dots \kappa α τ \acute{\alpha} σ υ ν θ \acute{\eta} κ η ν \tau \acute{\epsilon} \kappa α ι \delta ι α ί ρ ε σ ι ν$. (*Sie hat zwei Lesarten ... gemäß der Zusammensetzung* (sc. Multiplikation) *und der Teilung*.) Er will also darauf hinweisen, dass man sie auch für die Rechnungen des "kleinen Einsdurcheins" verwenden kann. In seinen Ausführungen bezieht er sich auf Nikomachos (2. Jh. n. Chr.), der eine Einmaleinstafel mit den milesischen Zahlen bis 10 vorgestellt hat (vgl. HOCHÉ 1866, S. 51), wobei es diesem in erster Linie auf eine Zusammenstellung von Zahlen mit gleicher Teilbarkeitseigenschaft ankam.

Nach unserem Verständnis ist das kleine Einmaleins die Gesamtheit aller Multiplikationen zweier einstelliger Zahlen, gegebenenfalls noch erweitert durch die Zehnerreihe. Unser kleines Einmaleins (mit den Faktoren 1 bis 9) umfasst im Fall einer quadratischen Tafel 81 Produkte. Nutzt man jedoch das Kommutativgesetz aus, so kann man den Umfang auf $1 + 2 + \dots + 9$ Produkte = 45 Produkte

reduzieren (und die Tafel in Dreiecksgestalt darstellen). Im traditionellen milesischen Zahlensystem der Griechen, das kein Stellenwertsystem ist, gibt es prinzipiell beliebig viele Zahlen (Ziffern), die nur mit einem Symbol dargestellt werden – "einstellige" Zahlen gibt es ja nicht. Beim milesischen "kleinen" Einmaleins hat man z. B. bis zum Faktor 10000 (einschließlich) folgende 37 Ziffern zu berücksichtigen:

$\alpha', \beta', \gamma', \delta', \epsilon', \varsigma', \zeta', \eta', \theta', \iota', \kappa', \lambda', \mu', \nu', \xi', \omicron', \pi', \varsigma', \rho', \sigma', \tau', \upsilon', \varphi', \chi', \psi', \omega', \wp', \alpha', \beta', \dots, \theta', \iota'$

Damit wären, selbst wenn man den Umfang wieder mit Hilfe des Kommutativgesetzes reduziert, $1 + 2 + \dots + 37 = 703$ Produkte zu vertafeln.

In der Tat findet sich ein solch umfangreiches Tafelwerk, das zweifellos auf alter Überlieferung beruht, wiederum in Rhabdas' Brief an Georgios Chatzyke (TANNERY IV, 4–1886, Band 4, S. 110–113, dort auszugsweise ed.).

In Bezug auf weitere Einzelheiten zur Geschichte des Kopfrechnens vgl. auch DESCHAUER (1990).

21 **Die Einführung in die Division, bei der auch ξ' durch die θ' dividiert werden (60 : 9) und so weiter**

Nachdem wir die Regel der Multiplikation schon hinreichend überliefert haben, wie man also zwei beliebige Teile sowohl schriftlich als auch ohne Aufzeichnung allein im Kopf multiplizieren kann und machen kann, dass das Kleinere größer wird, wollen wir auch darüber sprechen, wie man das Größere – in wie viele Teile auch immer du willst – teilen und kleiner machen kann. Dies geschieht mit erheblich mehr Mühe als die Multiplikation, und die Erklärung davon wird keineswegs leicht, mit Papier und Tinte allein reicht sie nicht aus, sondern vielmehr mit der lebendigen Sprache und der dazugehörenden Erfahrung wird sie euch mit Mühe klar. Wir wollen es trotzdem anhand von verschiedenen Beispielen versuchen, um euch zu zeigen, wie die Art und Weise der Methode davon ausführbar ist. Und was immer wir euch nicht aufzeigen können, weil es ganz schwierig und Grund für viel Schreibarbeit ist, wollen wir der Erfahrung überlassen für diejenigen, die dieses gründlich wissen und Lehrer von diesem werden wollen. Denn diese ist selbst eine wahre Lehrmeisterin, die das, was gar nicht gefunden wurde, bewerkstelligen und neu bilden kann, um vieles eher also das Bestehende. Und durch so viele Beispiele, die wir vorzuzeigen haben, wird es euch leicht werden, mithilfe der Erfahrung zu begreifen, was von uns an euch nicht weitergegeben wurde.

Angenommen, du willst ξ' in θ' Teile teilen. Setze oben die ξ' , nach unten aber die θ' ; diese θ' nennen wir gewöhnlich Teiler, denn durch ihn wird all das oben geteilt, was es auch ist.

Wenn nun die erste Ziffer oben, die ς' ist und ξ' bezeichnet, θ' gewesen wäre, sodass sie – an der Zehnerstelle befindlich – ς' bezeichnet hätte, hättest du die θ'

unten, die der Teiler sind, nicht an die Einerstelle gesetzt, wie sie jetzt liegen, sondern an die Zehnerstelle, die unterhalb der ς' ist, die ξ' bezeichnen. Die θ' – der Teiler – können nämlich von den oberhalb davon stehenden θ' subtrahiert

$$\begin{array}{r} \varsigma' \\ \theta' \end{array} \quad \begin{array}{r} \xi' \\ \theta' \end{array} \quad \begin{array}{r} \beta' \\ \varsigma' \end{array} \quad \begin{array}{r} \alpha' \\ \theta' \end{array} \quad \begin{array}{r} \eta' \\ \theta' \end{array}$$

werden, die ς' bezeichnen. Nun aber, weil die erste Ziffer ς' ist und unterhalb von ihr ϑ' gesetzt sind, können die ϑ' nicht von den ς' subtrahiert werden, da sie größer sind. Deshalb setze auch, indem du die Zehnerstelle aufgibst und entsprechend vorrückst, die ϑ' , die der Teiler der ξ' sind, an die Einerstelle, d. h. unterhalb des ψ' . Wenn aber die ϑ' unterhalb des ψ' gesetzt werden, haben die ς' die Zehnerstelle inne und bezeichnen ξ' , von den ξ' aber können die ϑ' vielfach subtrahiert werden. Suche nun, wie oft die ϑ' in den ξ' aufgehen. ξ' mal ϑ' gibt nun $\varsigma \gamma'$, und ξ' -mal gehen die ϑ' in den $\varsigma \psi'$ nicht auf. Aber ς' mal ϑ' gibt $\nu\delta'$, und es bleiben ς' bis zu den ξ' . Setze nun ς' unterhalb der ϑ' , die du als Teiler der ξ' hast, um zu zeigen, dass die ϑ' sechsmal in den ξ' aufgehen. Die ς' aber, die von den ξ' als Rest geblieben sind – setze diese oberhalb des ψ' . Streiche aber die ς' , die ξ' bezeichnen, ebenso auch das ψ' ; denn die $\varsigma \psi'$ wurden hergenommen, und es entstanden ς' Teiler (!), und es blieben auch ς' übrig, die oberhalb des ψ' stehen, die wir gewöhnlich Zähler nennen. Ziehe nun einen Querstrich und setze die ς' nach oben, die – wie wir sagten – ein Zähler sind, nach unten aber die ϑ' , die – wie wir sagten – ein Teiler (oder Nenner) sind. Und siehe, du hast gefunden, dass die ξ' durch die ϑ' dividiert ς' Teile ergeben, wobei jeder Teil jeweils Neun hat. Als Rest bleiben aber auch ς' , die mit den ϑ' – dem Nenner natürlich – ein "zweigeteiltes Verhältnis" (gemeint ist das Verhältnis 2:3) haben, d. h. zwei Drittel eines Ganzen; denn zwei mal γ' gibt ς' und drei mal γ' gibt ϑ' . Wenn aber die ξ' durch die ϑ' geteilt werden, ergeben sich ς' Teile und zwei Drittel eines Ganzen. ($\frac{2}{3}$ fehlt im Diagramm.)

Der Verfasser hält also die schriftliche Division für so schwierig, dass sie auf der Grundlage eines Lehrtextes allein nicht erlernt werden kann. Es müssten mündliche Unterweisung und Erfahrung hinzukommen, aber auch dann erschließe sich diese Methode nur mit Mühe. Bei der Rolle, die der Autor der Erfahrung zuschreibt, klingt wieder der Topos für die Zeit aus dem Proömium (Kap. 1) an.

Das Divisionsbeispiel $60:9=6\frac{6}{9}$ ($6\frac{2}{3}$) ist einerseits sehr einfach – eine zweistellige Zahl wird durch eine einstellige geteilt –, andererseits würden wir für den Anfang sicher Zahlen wählen, bei denen die Division "aufgeht".

Von unserem Verfahren unterscheidet sich das vorliegende, dass Divisor und Quotient *unter* dem Dividenden, der nach dem Zurückmultiplizieren ($6 \cdot 9 = 54$) entstehende Rest (6) *über* dem Dividenden notiert werden. Außerdem werden verbrauchte Ziffern gestrichen. Weitere Unterschiede werden sich in den folgenden Kapiteln 23, 25, 27, 29, 31, 33, 34, 36 und 37 zeigen. Es handelt sich um die auf die Inder zurückgehende Methode des *Überwärtsdividierens*, deren Verwendung vom europäischen Mittelalter an bis in die 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts nachgewiesen ist (TROPFKE 1980, S. 234–241). Insbesondere sind hier die deutschsprachigen Rechenbücher des 16. Jahrhunderts zu nennen. Im byzantinischen Raum sind Varianten dieses Verfahrens in der anonymen Algorismuschrift von 1252 (ed. ALLARD 1977) und im Rechenbuch des Maximos Planudes aus dem späten 13. Jahrhundert (ed. ALLARD 1981) zu finden.

Der Autor diskutiert gut verständlich und sehr ausführlich die Frage, warum

der Divisor hier unter die Einerstelle des Dividenden zu setzen ist. Des Weiteren klingt bei der Überlegung, wie oft 9 in 60 aufgeht, bereits an, dass bei der Division als einziger Grundrechenart i. Allg. ein Abschätzen erforderlich ist – vgl. den gezielten Fehlversuch $7 \cdot 9 = 63$.

Die Darstellung des nichtganzzahligen Anteils des Quotienten als Bruch und dessen Vereinfachung durch Kürzen sind ein Vorgriff auf Kapitel 40, in dem Brüche systematisch eingeführt werden.

22

Über die Probe davon und den Beweis

Der Beweis und die Probe davon, ob sich das Gesuchte richtig ergeben hat, ist diese.

Suche zuerst den Zähler auf, der nun ς' ist und den du oberhalb der ϑ' gesetzt hast, und dividiere diesen durch ζ' auf die Art, wie wir sie auch bei der Multiplikation besprochen haben. Da nun aber nur eine Ziffer vorhanden ist und nicht mehrere und du die ς' nicht durch die ζ' teilen kannst, da sie kleiner als die ζ' sind, ziehe einen passenden Querstrich und setze diese ς' nahe an das Ende des Querstrichs. Danach teile auch den Nenner, die ϑ' natürlich, durch die ζ' . Als Rest bleiben β' von den ϑ' . Setze nun β' oberhalb des Querstrichs. Danach teile auch den am Ende herausgekommenen Quotienten, der nun ς' ist, welche unterhalb der ϑ' stehen, durch die ζ' . Da es aber nur eine Ziffer ist, die kleiner als die ζ' ist, und sie nicht durch die ζ' geteilt werden kann, setze ς' unterhalb des Querstrichs, d. h. unterhalb der β' . Multipliziere aber die β' oben mit den ς' unten: zwei mal ς' gibt $\alpha \beta'$. Addiere auch die ς' auf der Seite, die zum Zähler gehören, und es ergibt sich zusammen $\alpha \eta'$. Dividiere diese durch die ζ' , und es bleiben δ' als Rest. Setze diese in einen Kreis: $\textcircled{\delta}$. Teile auch die erste Zahl, d. h. die $\varsigma \psi'$, durch die ζ' : Von den $\varsigma \psi'$ nun bleiben δ' als Rest. Setze auch diese in einen Kreis: $\textcircled{\delta}$. Und siehe, die beiden Proben wurden als gleich befunden, da jede innerhalb des Kreises $\textcircled{\delta}$ hat. Und dies ist der Beweis dazu, dass die Division dieser Zahlen richtig herausgekommen ist. Wenn sich aber die eine Probe so verhielte, die andere hingegen irgendwie anders, also die Proben sich voneinander unterscheiden würden, wäre der Quotient am Ende nicht richtig herausgekommen, d. h. die ς' und zwei Drittel eines Ganzen.

Im vorigen Kapitel stand rechts vom Divisionsdiagramm ein weiteres Schema, und zwar das Schema der Siebenerprobe. Mit unseren Ziffern sähen die beiden Diagramme so aus:

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \overline{) 6} \quad \frac{6}{9} \quad \frac{2}{6} \quad \begin{array}{c} \textcircled{4} \\ 6 \overline{) 18} \\ \textcircled{4} \end{array} \end{array}$$

Der Autor führt die Siebenerprobe zu seinem Divisionsbeispiel folgendermaßen durch: Den Zähler des Bruchs $\frac{6}{9}$, der sich nicht durch 7 dividieren lässt, setzt er an das Ende eines Querstrichs, den Siebenerrest 2 des Nenners über den Querstrich. Auch der Quotient 6 lässt sich nicht durch 7 dividieren – er wird unver-

ändert unter den Querstrich gesetzt. Die Zahlen, die durch den Strich getrennt sind, werden multipliziert, und dazu wird die Zahl nach dem Strich addiert: $2 \cdot 6 + 6 = 18$, 18 wird notiert. Der Siebenerrest von 18 ist 4 – vgl. die obere eingekreiste Zahl. Andererseits ist der Siebenerrest des Dividenden 60 ebenfalls 4 – vgl. die untere eingekreiste Zahl.

Wie schon bei der Siebenerprobe zur Multiplikation schließt der Schreiber aus den übereinstimmenden Probezahlen zu Unrecht, dass die Division korrekt durchgeführt wurde. So ergäbe sich z. B. für die fehlerhafte Division $67 : 9 = 6\frac{6}{9}$ dasselbe Probeschema. Umgekehrt weisen nach der Aussage des Autors nicht übereinstimmende Probezahlen in der Tat auf einen Rechenfehler in der Division hin.

Zum besseren Verständnis der hier durchgeführten Siebenerprobe schreiben wir $60 : 9 = 6\frac{6}{9}$ in der multiplikativen Form $60 = 6 \cdot 9 + 6$. Das Verfahren beruht nun darauf, dass der Siebenerrest der Summe rechts mit dem Siebenerrest der Summe der Siebenerreste der Summanden ($6 \cdot 9$ und 6) übereinstimmt (Additivität der Kongruenzrelation). Der erste Summand ist ein Produkt, sein Siebenerrest kann nach den Überlegungen im Kommentar zu Kapitel 7 (Multiplikativität der Kongruenzrelation) faktorenweise bestimmt werden: $6 \cdot 9 \Rightarrow 6 \cdot 2 = 12 \Rightarrow 5$. Der Siebenerrest des zweiten Summanden ist 6, Addition ergibt 11 mit dem Siebenerrest 4, wie auch 60 auf der linken Seite den Siebenerrest 4 hat. Unser Autor hat aber, was letztlich keinen Unterschied macht, "rechts" mit der 12 weitergerechnet: $12 + 6 = 18 \Rightarrow 4$.

In der Terminologie des Kommentars zu Kapitel 7 besteht die Additivität der Kongruenzrelation allgemein in folgender Aussage:

Aus $a \equiv a' \pmod{m}$ und $b \equiv b' \pmod{m}$ folgt $a + b \equiv a' + b' \pmod{m}$.

Dies ist sofort einzusehen, denn wenn sowohl $a - a'$ als auch $b - b'$ durch m teilbar sind, dann ist auch die Summe $(a + b) - (a' + b')$ durch m teilbar.

Wählt man nun a' , b' so, dass $0 \leq a', b' < m$ gilt, so sind a' und b' die Reste von a bzw. b nach Division durch m . Der Rest von $a + b$ nach Division durch m lässt sich also über die Summe der Reste von a und b berechnen. Falls diese Summe größer oder gleich m ist, stimmt erst ihr Rest nach Division durch m , d. h. $a' + b' - m$ (mit der Eigenschaft $0 \leq a' + b' - m < m$) mit dem Rest von $a + b$ überein. Mit der speziellen Wahl $m = 7$ kommt man zur Siebenerprobe der Addition.

In unserem Beispiel ist $a = 6 \cdot 9$, $b = 6$, $a + b = 60$, $a' = 5$, $b' = 6$, $a' + b' = 11$, $11 - 7 = 4$. Dies ist auch der Siebenerrest von 60. Der Autor aber nimmt den Siebenerrest des zweiten Faktors von a , multipliziert damit den ersten Faktor und addiert sogleich b' usw. (s. o.)

Die Schrittfolge zur Durchführung der Siebenerprobe soll hier einmal bei einer allgemeinen Division in Kurznotation demonstriert werden.

Seien a der Dividend, b ($\neq 0$) der Divisor, q der (ganzzahlige) Quotient. Dann gilt $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ mit einer natürlichen Zahl r ($0 \leq r < b$). (Bei der unvollständigen Division ist $r > 0$ der Rest.) Die Gleichung lässt sich multiplikativ schreiben:

$$a = qb + r$$

Mit $S(n)$ werde der Siebenerrest einer natürlichen Zahl n bezeichnet.

Rechte Seite: (1) $S(qb) = S(q) \cdot S(b)$, falls $S(q) \cdot S(b) < 7$
 (1') $S(qb) = S(S(q) \cdot S(b))$, falls $S(q) \cdot S(b) > 7$
 (2) $S(r)$
 (3) $S(qb+r) = S(qb) + S(r)$, falls $S(qb) + S(r) < 7$
 (3') $S(qb+r) = S(S(qb) + S(r))$, falls $S(qb) + S(r) > 7$

Linke Seite: (4) Vergleich von $S(qb+r)$ mit $S(a)$

Der Schritt (1') sorgt für eine Rechnung mit möglichst kleinen Zahlen. Man kann jedoch, wie unser Autor, auf die Bestimmung von $S(qb)$ im Fall (1') verzichten, berechnet wie im Fall (1) nur $S(q) \cdot S(b)$ und erhält analog zu (3'):

(3'') $S(qb+r) = S(S(q) \cdot S(b) + S(r))$, falls $S(q) \cdot S(b) + S(r) \geq 7$

Dabei treten rechts in der äußeren Klammer im Allgemeinen größere Zahlen als nötig auf.

Andererseits kann man statt $m=7$ (s. vorherige Seite) z. B. auch $m=9$ wählen: Die Neunerprobe zur Division verläuft völlig analog zur Siebenerprobe – man ersetze in (1) bis (4) $S()$ durch $Q()$ und 7 durch 9 –, hat aber gegenüber dieser wieder den entscheidenden Vorteil, dass die Neunerreste ohne Division einfach mithilfe der Quersumme bestimmt werden können. (Vgl. den Kommentar zu Kap. 7.) Im "Vortext" zum Rechenbuch hat der Autor dieser Divisionsprobe ein eigenes Kapitel (fol. 8^r/8^v) gewidmet, in dem er ausdrücklich erklärt, dass die Probe mit 9 leichter als die Siebenerprobe durchzuführen sei. Das erste seiner vier Beispiele bezieht sich auf die Division $154:25 = 6\frac{4}{25}$ wobei einerseits $Q(25)=7$, $Q(6)=6$, $Q(4)=4$, $Q(6 \cdot 7 + 4)=10$, $Q(10)=\underline{1}$, andererseits übereinstimmend $Q(154)=10$ und $Q(10)=\underline{1}$ ist. Dabei wählt er rechts vom Divisionsdiagramm wieder das Schema mit den eingekreisten Probezahlen, das wir von der Siebenerprobe her kennen.

Die Siebenerprobe kann nur dann sinnvoll sein, wenn sie nicht aufwendiger ist als die Rechnung, die durch sie überprüft werden soll. Für das (noch zu einfache) Beispiel $60:9 = 6\frac{6}{9}$ ist dieses "ökonomische Prinzip" noch nicht erfüllt.

23

$\pi\gamma'$ durch die ε' dividiert (83:5)

Zunächst begründet der Autor, warum er hier – im Unterschied zum vorigen Beispiel – den Teiler (ε') unter die Zehnerstelle (η') des Dividenten schreibt: *Du kannst die ε' von den η' abziehen.*

Die Division wird dann, in unsere Ziffern übertragen, in folgenden Schritten durchgeführt:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(I)} & \begin{array}{r} 3 \\ 8 \ 3 \\ \cancel{8} \\ 1 \end{array} & \text{(II)} & \begin{array}{r} \cancel{3} \\ \cancel{8} \ 3 \\ \cancel{8} \ \cancel{8} \\ 1 \ 6 \end{array} & \text{(III)} & \begin{array}{r} \cancel{3} \\ \cancel{8} \ 3 \ \frac{3}{5} \\ \cancel{8} \ \cancel{8} \\ 1 \ 6 \end{array}
 \end{array}$$

(I) Der Teiler 5 wird unter die 8 gesetzt. $8:5=1$ Rest 3: Die erste Quotientenziffer 1 wird unter die 5 gesetzt, der Rest 3 über die 8, die nun verbraucht ist und deshalb gestrichen wird. Dasselbe gilt für den Teiler 5 unter der 8.

(II) Der Teiler 5 rückt unter die 3 vor. Der nächste Divident ist die nach

rechts unten abfallende Zahl 33. $33:5=6$ Rest 3. Die zweite Quotientenziffer 6 wird unter den neuen Teiler 5 gesetzt. Die Zehnerziffer von 33 ist verbraucht und wird gestrichen, ebenso der zweite Teiler 5.

(III) Die Division ist abgeschlossen. Die Einerziffer von 33 bleibt ungestrichen, da sie (zufällig) mit dem Rest übereinstimmt. Übrig bleibt der Bruch $\frac{3}{5}$. Das Schema des Autors ist erreicht. Ergebnis: $16\frac{3}{5}$.

Die folgende Überlegung schließt das Kapitel ab: ... *jeder Teil von den 16 hat jeweils 5: denn 5 mal 16 ergeben 80, und es bleiben 3 als Zähler übrig* ... Hier wird also zur Überprüfung, ob die Division korrekt ist, die Umkehrmultiplikation verwendet.

Im Kapitel 25 wird sich der Autor zu dieser Probe noch ausführlicher äußern.

24

Über die Probe davon und den Beweis

Der Autor erklärt wieder das Schema der Siebenerprobe – hier zu $83=5 \cdot 16 + 3$ –, das rechts vom Divisionsdiagramm im vorigen Kapitel steht:

$$\begin{array}{r} \textcircled{6} \\ \frac{5}{2} \overline{) 3} 13 \text{ (mit unseren Ziffern)} \\ \textcircled{6} \end{array}$$

Der Rest 3 steht hinter, der Teiler 5 auf und der Siebenerrest 2 des Quotienten 16 unter dem Querstrich. Nun ist $S(2 \cdot 5 + 3) = 6$ (oben eingekreist). Damit ist $S(83)$ zu vergleichen. Diesen Siebenerrest des Dividenden gibt der Schreiber nicht direkt an, sondern bestimmt ihn schrittweise durch Subtraktion: $8-7=1$, $13-7=6$ (unten eingekreist). Er hätte auch schrittweise unter Vernachlässigung der Teilquotienten durch 7 dividieren können, da es hier ja nur auf die Reste ankommt.

25

 $\omega\iota\varsigma'$ durch die ς' dividiert ($816:6=136$)

Das Divisionsdiagramm des Autors entsteht nach folgenden Schritten:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \begin{array}{r} 2 \\ \overline{) 8} 1 6 \\ \underline{6} \\ 1 \end{array} & \text{(II)} & \begin{array}{r} \cancel{2} 3 \\ \overline{) \cancel{8} 1 6} \\ \underline{\cancel{6} 6} \\ 1 3 \end{array} & \text{(III)} & \begin{array}{r} \cancel{2} \cancel{3} \\ \overline{) \cancel{8} \cancel{1} \cancel{6}} \frac{0}{6} \\ \underline{\cancel{6} \cancel{6} \cancel{6}} \\ 1 3 6 \end{array} \end{array}$$

(I) $8:6=1$ Rest 2 (II) $21:6=3$ Rest 3 (III) $36:6=6$ Rest 0.

Der Teiler wird zweimal eingerückt, also dreimal notiert. Die Division geht auf. Dennoch gibt der Schreiber den "Restbruch" $\frac{0}{6}$ an.

Zum Abschluss des Kapitels erläutert er die Multiplikation als Umkehrung der Division und die Division als Umkehrung der Multiplikation am gerade behandelten Divisionsbeispiel ($816:6=136 \Rightarrow 136 \cdot 6=816$) sowie an den Beispielen $100:4=25 \Rightarrow 25 \cdot 4=100$, $25 \cdot 4=100 \Rightarrow 100:4=25$. Dazu sagt er, dass der Teiler, der zum Faktor des Quotienten wird, diesen (bei erneuter Umkehrung) wieder in den früheren Zustand ($\epsilon\iota\varsigma$ τὴν προτέραν ἀποκατάστασιν) überführt und dass der Faktor, der zum Teiler des Produkts wird, die Multiplikation (bei erneuter Umkehrung) ebenfalls wieder in ihren Ursprungszustand bringt.

Im Unterschied zur Siebenerprobe ist diese Umkehrprobe zuverlässig, allerdings

muss bei komplizierteren Divisionen entsprechend aufwendig multipliziert werden.

26

Über die Probe davon und den Beweis

Der Autor gibt wieder die Schritte zur Durchführung der Siebenerprobe an. Im Schema rechts vom Divisionsdiagramm im vorigen Kapitel (s. S. 29) sind die übereinstimmenden Siebenerreste von $6 \cdot 136 + 0$ und von 816 jeweils eingekreist: ④

27

$\rho\nu'$ durch die $\iota\beta'$ dividiert ($150 : 12 = 12\frac{6}{12}$)

Erstmals wird durch eine zweistellige Zahl dividiert. Hier sollen die einzelnen Schritte, die der Autor sehr sorgfältig beschreibt, sinngemäß wiedergegeben werden. Das Vorgehen lässt sich im Wesentlichen auch anhand des abgeschlossenen Divisionsdiagramms rekonstruieren.

12 wird unter die 15 von 150 geschrieben, da 12 von 15 abgezogen werden kann. Zunächst werden nur die beiden ersten Ziffern von 15 und 12 betrachtet: $1 - \underline{1} \cdot 1 = 0$, 1 wird unter die 1 von 12 gesetzt, die erste Ziffer von 150 (1) und von 12 (1) werden gestrichen.

Anschließend ist die zweite Ziffer von 12 ebenfalls einmal von der zweiten von 15 zu subtrahieren: $5 - \underline{1} \cdot 2 = 3$, der Rest 3 wird über die 5 geschrieben, die Ziffern 5 und 2 (zweite Ziffer von 12) werden gestrichen. (Ein kleiner Bogen, der 1 und 2 verbindet, kennzeichnet die Streichung des Teilers 12.) Damit ist der Teiler 12 in seiner ersten Position vollständig verbraucht. Jetzt wird der Teiler 12 nach rechts gerückt, wobei die 2 platzsparend nach oben direkt unter die 0 gesetzt wird. Es geht um die Division von 30 durch 12, wobei aber zunächst wieder nur die beiden ersten Ziffern dieser Zahlen betrachtet werden. Zwar gilt $3 - \underline{3} \cdot 1 = 0$, aber es bleibt nichts übrig, wovon auch die zweite Ziffer von 12 abgezogen werden könnte. Diese Überlegung führt zur Korrektur $3 - \underline{2} \cdot 1 = 1$, 2 wird unter die erste Ziffer des eingerückten Teilers 12 geschrieben, der Rest 1 wird über die 3 geschrieben, 3 und die erste Ziffer des eingerückten Teilers (1) werden gestrichen. Dadurch ist die "dreistöckige" Zahl 10 entstanden, von der die zweite Ziffer des eingerückten Teilers (2) ebenfalls zweimal abzuziehen ist: $10 - \underline{2} \cdot 2 = 6$, der Rest 6 wird über die 0 gesetzt, die Ziffern der 10 und die zweite Ziffer des eingerückten Teilers werden gestrichen. (Ein kleiner nach oben gerichteter Bogen kennzeichnet die Streichung des eingerückten Teilers.) Die Division ist abgeschlossen, da der Rest 6 nicht mehr ganzzahlig durch 12 geteilt werden kann. Insgesamt ergibt sich der Quotient 12 und der Bruchteil $\frac{6}{12}$, den der Autor (nur im Text) noch zu $\frac{1}{2}$ kürzt.

Abschließend führt er noch die Umkehrmultiplikation an: $12 \cdot 12 = 144$, $144 + 6 = 150 \Rightarrow 12\frac{1}{2} \cdot 12 = 150$

Der wesentliche Unterschied zwischen einer Division durch einen mehrstelligen Divisor und einer Division durch einen einstelligen besteht darin, dass im ersten Fall die Teilquotienten in der Regel zunächst geschätzt werden müssen, während sie sich im zweiten Fall direkt aus der Umkehrung des kleinen Einmaleins ergeben. So diskutiert der Autor in seinem Beispiel, wie oft 12 von 30 subtra-

$$\begin{array}{r}
 \cancel{1} \quad \cancel{5} \quad 0 \\
 \underline{12} \\
 36 \\
 \underline{24} \\
 10 \\
 \underline{6} \\
 4
 \end{array}$$

hiert werden kann, wobei die Anfangsziffern zunächst eine dreifache Subtraktion nahelegen. Freilich sind die notwendigen Überlegungen hier noch sehr elementar, doch mit wachsender Stellenzahl des Teilers wird ein solches Schätzen zunehmend schwieriger.

Der Schreiber bedient sich, wie auch schon in den Kapiteln 21, 23 und 25, bei der Beschreibung der Divisionsmethode vorwiegend der Sprache der Subtraktion. Das ist völlig sachgerecht, da ein enger Zusammenhang zwischen diesen beiden Rechenarten besteht: Der Dividend kann als Minuend, der Divisor als Subtrahend verstanden werden, wobei der Quotient Auskunft darüber gibt, wie (ganzzahlig) oft der Subtrahend von Minuenden maximal abgezogen werden kann. Tritt noch ein Rest auf, so hat der Quotient noch einen zusätzlichen Bruchanteil, dessen Zähler der Rest und dessen Nenner der Subtrahend ist. So erlaubt z. B. die Division in diesem Kapitel die folgende subtraktive Deutung: $150 - \underline{12} \cdot 12 = 6$, wobei zum Quotienten $\underline{12}$ noch der Bruchteil $\frac{6}{12}$ hinzukommt. (Die 12 im Nenner ist der Subtrahend und stimmt nur zufällig mit dem Ganztteil des Quotienten überein.)

28

Über die Probe davon und den Beweis

Der Autor gibt wieder die einzelnen Schritte zur Durchführung der Siebenerprobe an. Im Schema zur Siebenerprobe rechts vom Divisionsdiagramm im vorigen Kapitel (s. S. 31) sind die übereinstimmenden Siebenerreste von $12 \cdot 12 + 6$ und von 150 jeweils eingekreist: ③

29

Wie man , $\alpha\phi\xi\eta'$ (1568) Hyperpyra auf $\iota\delta'$ (14) Gesellschafter verteilen und wissen kann, wie viel jeder von ihnen von den , $\alpha\phi\xi\eta'$ Hyperpyra gewinnt
Angenommen, irgendwelche $\iota\delta'$ Gesellschafter haben , $\alpha\phi\xi\eta'$ Hyperpyra unter sich zu verteilen. Du suchst zu erfahren, was sich auf jeden der $\iota\delta'$ Gesellschafter als zustehender Teil aus den , $\alpha\phi\xi\eta'$ Hyperpyra verteilt ...

Eine erste einfache Textaufgabe zur Division: (Der Geldwert Hyperpyron wird in der Handschrift mit $\wp$ abgekürzt.) Im Unterschied zur Division von Kapitel 27 ist hier der Teiler dreimal anzusetzen. Die vom Autor vollständig beschriebenen Einzelschritte lassen sich anhand des Diagramms gut nachvollziehen.

$$\begin{array}{r} \cancel{1} \cancel{2} \\ \cancel{1} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{8} \\ 1 \cancel{4} \cancel{4} \cancel{4} \quad \frac{0}{14} \\ \underline{1 \quad 1} \end{array}$$

Ergebnis: 1568 Hyperpyra : 14 (Gesellschafter) = 112 Hyperpyra

Es folgen noch die Umkehrprobe durch Multiplikation (112 Hyperpyra $\cdot$ 14 (Gesellschafter) = 1568 Hyperpyra) sowie die Umkehrung $1568 : 112 = 14$ der ursprünglichen Division (Vertauschung des Divisors mit dem Quotienten).

Abschließend weist der Schreiber darauf hin, dass zufällig kein Bruch übrig geblieben ist, und erläutert die Schreibweise $\frac{0}{14}$.

30

Über die Probe davon und den Beweis

Der Autor gibt wieder die einzelnen Schritte zur Durchführung der Siebenerprobe an. Im Schema zur Siebenerprobe rechts vom Divisionsdiagramm im vorigen Kapitel (s. S. 32) erkennt man, dass alle Zwischenreste gleich 0 sind. Diese werden aber nicht (mittels $0 \cdot 0 + 0 = 0$) miteinander verrechnet, sondern es wird einfach 0 als Probezahl festgelegt. Vermutlich ist der Schreiber der Auffassung, dass die Null, die keine "richtige Zahl" ist, nicht mit sich selbst multipliziert werden kann.

Insgesamt ergibt sich 0 – jeweils eingekreist – als gemeinsamer Siebenerrest von $14 \cdot 112$ und von 1568.

31

**Wie man $\mu\gamma'$ Tausend Tage durch die $\tau\xi\varepsilon'$ Tage eines Jahres dividieren
und wissen kann, wie viele Jahre es werden**

$$(43000 : 365 = 117 \frac{295}{365})$$

Wie in Kapitel 12 werden wieder die Schaltjahre vernachlässigt.

Hier ist also durch eine dreistellige Zahl zu dividieren. Das komplizierte Divisionsdiagramm des Autors beinhaltet drei Schritte, da der erste Teiler noch zweimal eingerückt werden muss.

$\begin{array}{r} 6 \\ 175 \\ 43000 \\ \underline{365} \end{array}$ (I)	$\begin{array}{r} 2 \\ 38 \\ 69 \\ 1785 \\ 43000 \\ \underline{3655} \end{array}$ (II)	$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ 27 \\ 389 \\ 693 \\ 17885 \\ 43000 \\ \underline{36555} \\ 366 \\ 3 \end{array}$ (III)
1	1 1	1 1 7 Bruch $\frac{295}{365}$

Zu (I): $430 - 1 \cdot 365 = 65$ ergibt sich aus $4 - 1 \cdot 3 = 1$, $13 - 1 \cdot 6 = 7$, $70 - 1 \cdot 5 = 65$.

Der Autor berechnet die Differenzen $13 - 6$ und $70 - 5$ wie folgt: $13 - 6 = (10 - 6) + 3 = 4 + 3 = 7$ bzw. $70 - 5 = 60 + (10 - 5) = 65$. Ähnlich verfährt er bei den in (II) und (III) auftretenden Subtraktionen mit Zehnerunterschreitung. Diese umständlich anmutenden Zwischenrechnungen sind aber für den Leser gedacht, der ja bisher noch kein Subtraktionsverfahren, wie es für die schriftliche Division offensichtlich erforderlich ist, gelehrt wurde: Dies wird erst im Kapitel 102 nachgeholt.

Die hier verwendete Methode zur Berechnung der Differenz bei Zehnerunterschreitung – die Einerziffer des Minuenden ist kleiner als die des Subtrahenden – war als Methode der "dekadischen Ergänzung" auch in deutschsprachigen Rechenbüchern des 16. Jahrhunderts verbreitet (vgl. TROPFKE 1980, S. 197 f.). Allgemein (ohne Betrachtung von Hunderter- oder höheren Stellen) lässt sie sich so beschreiben:

Sei $10a + b$, der Minuend, eine zweistellige und $10c + d$, der Subtrahend, eine mindestens einstellige Zahl, die Differenz sei positiv, und es trete Zehnerunterschreitung auf. Die Variablen erfüllen somit die Bedingung

$0 \leq c < a < 10$, $0 \leq b < d < 10$. Dann lässt sich $(10a + b) - (10c + d)$ in der Form $10(a - (c + 1)) + (b + (10 - d))$ schreiben.

In den beiden oben genannten Beispielen ist $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$, $d = 6$ bzw. $a = 7$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 5$.

Didaktisch gesehen ist es sehr ungeschickt, dass die Erklärung des Divisionsverfahrens immer wieder durch die Erläuterung des Subtraktionsverfahrens unterbrochen wird.

Zu (II): $650 - \underline{1} \cdot 365 = 285$ ergibt sich aus $6 - \underline{1} \cdot 3 = 3$, $35 - \underline{1} \cdot 6 = 29$, $290 - \underline{1} \cdot 5 = 285$.

Zur Abschätzung des 2. Teilquotienten (1) wird gesagt, dass 3 (aus 365) zwar 2-mal in 6 (aus 650) aufgehe, aber 6 (aus 365) nicht 2-mal von 5 (aus 650) abgezogen werden könne. Daher sei $6 - \underline{1} \cdot 3$ zu rechnen.

Zu (III): $2850 - \underline{7} \cdot 365 = 295$ ergibt sich aus $28 - \underline{7} \cdot 3 = 7$, $75 - \underline{7} \cdot 6 = 33$, $330 - \underline{7} \cdot 5 = 295$.

Zur Abschätzung des 3. Teilquotienten (7) bemerkt der Autor, dass 3 (aus 365) nicht 8-mal von 28 (aus 2850) subtrahiert werden könne, da dann aus dem Rest 4 und der nächsten Ziffer 5 (aus 2850) die Zahl 45 entstehe, von der 6 (aus 365) nicht 8-mal abgezogen werden könne. Gar nicht erst in Betracht gezogen wird die Frage, ob 3 sogar 9-mal von 28 subtrahiert werden kann, was im Hinblick auf die Konsequenzen natürlich erst recht nicht möglich ist.

Also ist $28 - \underline{7} \cdot 3$ zu bilden.

Letztlich ergibt sich bei der Division der ganzzahlige Quotient 117 und ein Rest 295, der zum Zähler des Bruchs mit dem Teiler 365 als Nenner wird. Der Autor kommt zu dem Resultat, dass 43000 Tage also 117 Jahre und 295 Tage ausmachen, wobei diese Tage in Bezug auf die 365 Tage eines Jahres als Jahresbruchteil zu verstehen sind.

Die Reihenfolge, in der die entsprechenden Ziffern im Diagramm (III) eingetragen werden, lässt sich noch einigermaßen gut nachvollziehen. Ungewohnt für uns ist nur, dass zusammengehörende Ziffern in verschiedenen Zeilen stehen. Dies gilt für die eingerückten Teiler, insbesondere aber für die Ziffern der Reste: So steht z. B. die Einerziffer von 330 (s. (III)) zwei Zeilen tiefer als die Zehnerziffer und diese wiederum drei Zeilen tiefer als die Hunderterziffer. (Gleiches gilt für 295.)

32

Über die Probe davon und den Beweis

Der Autor gibt wieder die einzelnen Schritte zur Durchführung der Siebenerprobe an. Im betreffenden Schema zur Siebenerprobe rechts vom Divisionsdiagramm im vorigen Kapitel (s. S. 35) ergibt sich 6 – jeweils eingekreist – als gemeinsamer Siebenerrest von $365 \cdot 117 + 295$ und von 43000.

33

Wie man sich damit in besonderer Weise auseinandersetzen muss.

Und wenn du es nämlich so tust, wie die Rechentechnik es zu tun lehrt, wirst du das, was gesagt wird, gut verstehen

Wie dies nun mit diesen verschiedenen verwickelten Ziffern niedergelegt wurde, ist es sehr mühsam zu begreifen, und du kannst die Zahlen wohl nicht gut

überschauen, von denen wir im Einzelnen sagen: Subtrahiere dies hier und streiche wiederum das da. Denn nun ist das Beispiel, das wir zusammengesetzt haben, beendet. Anfangs ist zu sagen, dass du dies hier addieren und das da subtrahieren sollst, und zu wissen, dass keineswegs nur die erste Ziffer aufzusuchen ist – du weißt, dass das Ganze ausgeführt wird, wie die Rechenkunst euch (!) lehrt – und wenn du den Anfang davon aufsuchst, hast du die Mitte überschritten und bist schon ans Ende der Aufgabe herangekommen. Und dies bereitet euch (!) eine nicht unbeträchtliche Unklarheit, vielmehr macht es auch das Begreifen sehr mühsam. Wenn du aber gut wissen und klarer verstehen willst, wie viel die Methode dir sagt, setze für dich auf ein Papier die $\mu\gamma'$ Tausend Tage – so, wie sie auch dort stehen: $\delta\gamma\psi\psi\psi'$ –, darunter aber setze die Tage eines Jahres, d. h. $\tau\xi\varepsilon'$, was der Teiler ist. Beginne aber, die Methode und die eigenen Divisionen wiederzuerkennen. Und wie die Methode euch (!) lehrt, so fängst auch du es an zu tun. Und streiche, was dich die Methode entsprechend lehrt, subtrahiere hingegen wiederum, wie die Methode dir andeutet, und addiere wiederum, was addiert werden muss, wie dies euch (!) auch klar wird, indem es durch die Methode aufgezeigt ist. Wenn du dies so vom Anfang bis zum Ende tust, wirst du gut finden, was du zu wissen suchst, und du kannst dies klarer verstehen, wenn du dies von Anfang an schriftlich machst, wie die Methode im Einzelnen andeutet, als allein von einer Betrachtung der verschiedenen und verwickelten Ziffern, die wir uns darlegen. Dies gilt aber auch bei allen anderen (Divisionen), von denen wir vorher sagten, dass wir sie richtig gemacht haben, und nicht nur bei diesen, sondern auch bei denen, von denen wir noch künftig sprechen werden – und wenn du es mit diesen so machst, wirst du durch die Methode, dich damit auseinanderzusetzen, die Divisionen gut herausfinden, die wir uns in verschiedenen Beispielen zugrunde legen und auch noch künftig zugrunde legen werden.

Dem Autor ist nach dem letzten Beispiel, auf das er sich hier explizit bezieht, bewusst, dass das komplizierte Zahlenschema als Endschema zu unübersichtlich ist und Verwirrung stiften kann. Daher fordert er in diesem kurzen theoretischen Zwischentext den Leser auf, die schriftlichen Divisionen nach der vorgeschriebenen Methode selbst durchzuführen.

Im Text fällt der mehrfache Numeruswechsel des Adressaten auf.

34

**Wie man $\rho\sigma\varepsilon'$ Tausend und $\psi\chi\varepsilon'$ Hyperpyra
auf β' Gesellschafter verteilen kann**

(175426 Hyperpyra : 2000 = $87\frac{1426}{2000}$ Hyperpyra)

Angenommen, β' Soldaten (!) haben $\rho\sigma\varepsilon'$ Tausend Hyperpyra und $\psi\chi\varepsilon'$ Hyperpyra gewonnen. Du suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra sich auf jeden der β' Soldaten aus den bezeichneten Hyperpyra verteilen ...

Obwohl hier sogar durch eine vierstellige Zahl dividiert werden muss, ist diese Aufgabe bedeutend einfacher als das Beispiel von Kapitel 31. Die Nullen des Teilers erlauben, seine Anfangsziffer 2 so oft wie möglich von der jeweils darüberstehenden Zahl abzuziehen, sodass ein Schätzen entfällt. Im ersten Schritt – der Teiler 2000 ist einzurücken – wird die 2 achtmal von 17 subtrahiert. Nun müssten auch die Nullen achtmal von den jeweils oben stehenden Zahlen abgezogen werden. Über die dabei entstehenden Subtrahenden schreibt der Autor:

$$\begin{array}{r} \cancel{1} 1 \\ \cancel{1} 7 \ 8 \ 4 \ 2 \ 6 \\ \underline{2 \ 0 \ 0 \ 0} \ 0 \\ \underline{2 \ 0 \ 0} \\ 8 \ 7 \quad \text{Bruch} \quad \frac{1 \ 4 \ 2 \ 6}{2 \ 0 \ 0 \ 0} \end{array}$$

Nicht allein wenn du achtmal 0 abziehst, wird es wieder 0, sondern auch wenn du zehntausendmal 0 abziehst, hast du nichts mehr eingebracht als wiederum 0. ... Derselbe Schaden (ἡττημα) aber (ist) auch bei allen anderen Nullen, die der Reihe nach bei den 2000 Soldaten vorhanden sind.

Mit dieser Begründung streicht er mit der 2 auch die drei Nullen und rückt den Teiler weiter ein. Nach Abschluss der Division kündigt er die weitere Verteilung der restlichen 1426 Hyperpyra auf die 2000 Soldaten an – vgl. Kapitel 36. Nur in der Überschrift werden die Personen als σύντροφοι (Gesellschafter) bezeichnet.

35

Über die Probe davon und den Beweis

Der Autor gibt wieder die einzelnen Schritte zur Durchführung der Siebenerprobe an. Im betreffenden Schema zur Siebenerprobe rechts vom Divisionsdiagramm im vorigen Kapitel (s. S. 38) ergibt sich 6 – jeweils eingekreist – als gemeinsamer Siebenerrest von $2000 \cdot 87 + 1426$ und von 175426.

36

Wie man wissen kann, was sich auf jeden der ,β´ Soldaten aus den ,αυκς´ Hyperpyra verteilt – dem Zähler, der von den ροε´ Tausend und υκς´ Hyperpyra übrig geblieben ist (1426 Hyperpyra : 2000 = 14 Kukkia $1\frac{1}{25}$ Turnesia)

Hier also setzt der Autor die Verteilungsaufgabe von Kapitel 34 wie angekündigt fort. Die verbliebenen 1426

Hyperpyra (Abkürzung: ἥ) werden in die kleinere Einheit Kukkia (Abkürzung: κ) umgewandelt, wobei 1 Hyperpyron 20 Kukkia entspricht – vgl. das 1. Multiplikationsdiagramm. (Hier hätte eine einfache Kopfrechnung genügt.) Anschließend wird das Produkt durch 2000 geteilt mit

$$\begin{array}{r} \text{ἥ} \ 1 \ 4 \ 2 \ 6 \\ \underline{0 \ 0 \ 0 \ 0} \ 0 \\ \underline{2 \ 8 \ 5 \ 2} \ 2 \\ \text{κ} \ 2 \ 8 \ 5 \ 2 \ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \ 8 \ 5 \ 2 \ 0 \\ \underline{2 \ 0 \ 0 \ 0} \ 0 \\ \underline{2 \ 0 \ 0} \\ \text{κ} \ 1 \ 4 \quad \text{Bruch} \quad \frac{\text{κ} \ 5 \ 2 \ 0}{2 \ 0 \ 0 \ 0} \end{array}$$

dem Ergebnis, dass jeder Soldat (noch zusätzlich) 14 Kukkia erhält.

Darüber hinaus hat sich noch der Bruchanteil $\frac{520}{2000}$ von 1 Kukki ergeben. Zur weiteren Verteilung auf die Soldaten wird das Kukki auf eine noch kleinere Einheit umgerechnet, und zwar auf Turnesia, wobei 1 Kukki = 4 Turnesia gilt.

$$\begin{array}{r} \text{κ} \ 5 \ 2 \ 0 \\ \underline{2 \ 0 \ 8 \ 0} \ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Turnesia} \quad 2 \ 0 \ 8 \ 0 \\ \underline{2 \ 0 \ 0 \ 0} \\ \text{Turnesi} \quad 1 \quad \text{Bruch} \quad \frac{8 \ 0}{2 \ 0 \ 0 \ 0} \end{array}$$

Damit erklären sich die folgende Multiplikation und Division, wobei die Diagramme bei so einfachen Rechnungen völlig entbehrlich sind. Jeder Soldat erhält also zusätzlich 1 Turnesi, aber es bleiben noch $\frac{80}{2000}$ Turnesia übrig, wobei der Zähler, wie der Autor bemerkt, 1 Hyperpyron entspricht. (Der Rest beträgt somit $\frac{1}{2000}$ Hyperpyron.)

Offenbar ist das Turnesi die kleinste Münzeinheit, sodass es nicht weiter umgewandelt werden kann. Der Autor hätte nun den Bruch $\frac{80}{2000}$ nur zu $\frac{1}{25}$ kürzen müssen, um das Ergebnis zu erhalten, aber er schreibt zunächst: ... *du kannst nicht die 80 in Bezug auf die 2000 auszahlen, weil sie viel kleiner sind.* Nun sucht er eine Zahl, die als Divisor von 80 zum Quotienten 2000 führt, damit jeder der 2000 einen geringen Teil eines Turnesi bekommt. (Aus $80 : x = 2000$ folgt $x = \frac{1}{25}$.) Dazu dividiert er 2000 durch 80 – siehe das nebenstehende Divisionsdiagramm – und erhält ($\frac{1}{x} =$) 25. Daraus schließt er richtig, aber ohne weitere Erklärung, dass jeder Soldat zusätzlich noch $\frac{1}{25}$ eines Turnesi erhält.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 2 \overline{) 8000} \\ \underline{80} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

Seine Probe besteht in der schriftlichen (!) Multiplikation $80 \cdot 25 = 2000$.

37

Umfassend über alle Teile, die geteilt werden

Nachdem wir die Divisionen der verschiedenen Aufgaben zugrunde gelegt und, wie ausgeführt, anhand verwickelter Beispiele aufgezeigt haben, wie du nun die größeren Teile dividieren und daraus kleinere machen kannst, schien es uns notwendig zu sein, euch (!) auch umfassend darzulegen und aufzuzeichnen, wie du nun jede Division ausführen kannst, in wie viele Teile auch immer du sie teilen willst.

Und zuerst – wie du weißt und hinreichend anhand der Beispiele gelernt hast – setze nach oben die ganze Einheit der aufgesuchten Größe, die du, in wie viele Teile auch immer, dividieren willst. Unterhalb dieser ganzen Größe aber setze den Teiler, das ist jener Teil, durch den du gerade das Größere dividieren willst, damit es kleiner wird. Und wenn du den Teiler von den ersten Ziffern oben subtrahieren kannst, setze diesen direkt unterhalb der ersten Ziffer oben. Wenn du aber den Teiler nicht von der ersten Ziffer oben subtrahieren kannst, rücke um die erste Ziffer oben vor und setze diesen direkt unterhalb der zweiten Ziffer oben.

Prüfe aber gut, wie oft die erste Ziffer des Teilers von der Ziffer oberhalb von ihr subtrahiert werden kann. Und wenn der Teiler direkt unterhalb der ersten Ziffer oben steht, ist das, was oberhalb des Teilers steht, gleichbedeutend und übereinstimmend, Einer mit Einer und Zehner mit Zehner und so weiter. Wenn aber der Teiler direkt unterhalb der zweiten Ziffer oben steht, bezeichnet die erste Ziffer oben, da der Teiler an zweiter Stelle steht, Zehner und keine Einer. Wie oft nun die erste Ziffer des Teilers subtrahiert werden kann, gleich, ob sie an der Einerstelle steht oder an der Zehnerstelle, von den Ziffern oben oder nur von einer Ziffer, einmal natürlich oder zweimal oder auch vielfach: auch die übrigen Ziffern des zusammen aufgetretenen Teilers, wie viele auch immer es sind, – so oft subtrahiere auch alle diese, wie oft die erste Ziffer des Teilers von den Ziffern oder der Ziffer oben subtrahiert werden konnte;

dies hast du auch nach unten gesetzt, um anzuzeigen, dass du ihn (den Teiler) so oft von den Ziffern oben subtrahiert hast.

Man muss aber gut prüfen und sorgfältig bestrebt sein, die erste Ziffer des Teilers so zu subtrahieren, dass du die Ziffern oben nicht gänzlich mit hinzunimmst und alle übrigen Ziffern des Teilers nicht mehr subtrahieren kannst, sondern subtrahiere die erste Ziffer des Teilers so, dass dir irgendwelche Ziffern übrig bleiben, um auch alle übrigen Ziffern des Teilers zu Ende zu führen, wie viele auch immer es sind, — Ziffern, die geeignet sind, um auch diese (Teilerziffern) zu subtrahieren, wie du auch die erste Ziffer des Teilers subtrahiert hast, was du auch nach unten gesetzt hast, um anzuzeigen, dass du sie so oft von den Ziffern oben subtrahiert hast.

Wenn nun der Teiler aus drei Stellen besteht — so gesetzt: $\alpha \gamma \gamma'$ — oder aus vier Stellen — so gesetzt: $\alpha \gamma \gamma \gamma'$ —, die erste Stelle also eine Ziffer hat, die weiteren aber aus nichts bestehen, subtrahiere nun die erste Ziffer des Teilers von den Ziffern oben, so oft es möglich ist. Die übrigen aber — da sie nichts sind, kannst du von diesen nichts subtrahieren. Streiche sowohl die erste Ziffer des Teilers und alle übrigen "Nichts", weil sie unnütz und unwirksam sind. Rücke nun um eine Ziffer entsprechend vor und schreibe einen weiteren Teiler, den du auch vorher geschrieben hast. Und subtrahiere wiederum, so oft es möglich ist, die erste Ziffer des zweiten Teilers von den Ziffern oben. Und setze dies direkt nach unten, um anzuzeigen, dass du die erste Ziffer des Teilers so oft von den Ziffern oberhalb von ihr subtrahiert hast. Die übrigen "Nichts" zusammen mit der ersten Ziffer — streiche diese. Rücke nun wiederum um eine Ziffer entsprechend vor und schreibe einen weiteren Teiler, bis du auf diese Weise alle Ziffern oben mit dem zusammen aufgetretenen Teiler beendet hast. Dies aber geschieht so, wenn die erste Ziffer des Teilers irgendeine Zahl bezeichnet, alle übrigen aber nichts sind.

Wenn aber der Teiler — wenn seine erste und zweite Stelle, manchmal ist es aber auch die dritte und vierte und fünfte, irgendwelche bezeichnenden Ziffern haben, muss man, wie wir oben sagten, so oft, wie oft du die erste Ziffer des Teilers subtrahiert hast, was du auch nach unten geschrieben hast, auch alle seine übrigen Ziffern subtrahieren, wie du auch die erste subtrahiert hast. Wenn nun oben irgend zwei Ziffern eines Zehners und eines Einers stehen und — wie jemand sagen könnte — $\mu\gamma'$ bezeichnen oder wie sie auch anders einen Zehner und einen Einer bezeichnen können, du aber von den zwei Ziffern oben die erste Teilerziffer oder die zweite oder die dritte zu subtrahieren suchst, multipliziere die Ziffer des Teilers, welche immer du von den Ziffern oben zu subtrahieren suchst, so oft, wie oft du auch die erste subtrahiert hast — was wir auch gewöhnlich nach unten setzen, um anzuzeigen, dass die erste Ziffer des Teilers so oft von den Ziffern oder der Ziffer oberhalb von ihr subtrahiert werden konnte.

Damit aber das Gesagte klarer wird, werde angenommen, dass die zwei Ziffern oben — so gesetzt: $\delta \gamma'$ — $\mu\gamma'$ bezeichnen, von welcher Stelle herab (betrachtet) die dritte Ziffer des Teilers steht. Die dritte Ziffer des Teilers aber sei ς' . Angenommen aber, du hast die erste Ziffer des Teilers, was immer sie war, δ' -mal von den Ziffern oder der Ziffer oberhalb von ihr subtrahiert. Du hast aber

nach unten δ' gesetzt, um anzuzeigen, dass du sie δ' -mal von den Ziffern oben subtrahiert hast. Du hast aber auch die zweite Ziffer des Teilers δ' -mal subtrahiert wie auch die erste. Nun aber suchst du auch die dritte Ziffer des Teilers, welche ς' ist, δ' -mal von den nämlichen zwei Ziffern oben zu subtrahieren, die $\mu\gamma'$ bezeichnen, wie wir sagten. Multipliziere nun die ς' , welche die dritte Ziffer des Teilers ist, mit den δ' , die du nach unten gesetzt hast, um anzuzeigen, dass du die erste Ziffer des Teilers δ' -mal von den Ziffern oben subtrahiert hast. δ' mal ς' gibt $\kappa\delta'$. Subtrahiere aber die $\kappa\delta'$ von den $\mu\gamma'$ oben so: Addiere zu den $\kappa\delta'$, wie viel ihnen fehlt, um Zehner ohne einen Einer zu werden, das sind ς' , um λ' zu werden. Die ς' aber, die du addiert hast, übersteigen die $\kappa\delta'$, die zu subtrahieren nötig sind. Addiere diese aber mit den γ' , von denen wir sagten, dass oben $\mu\gamma'$ steht, und es ergibt sich ϑ' . Setze nun oberhalb der γ' ϑ' . Streiche aber die γ' . Von den δ' aber, die an der Zehnerstelle sind und μ' bezeichnen, subtrahiere die λ' — du hast ς' zu den $\kappa\delta'$ addiert und die $\kappa\delta'$ zu λ' gemacht. Die λ' aber sind γ' Zehner. Subtrahiere nun drei Zehner, d. h. λ' , von den δ' Zehnern, die μ' bezeichnen, und es bleibt noch α' Zehner als Rest. Setze nun α' oberhalb der δ' , das ist ein Zehner. Streiche aber die δ' . Dies aber, was wir sagten, dass du ς' zu den $\kappa\delta'$ addieren sollst, damit sich λ' ergeben, geschieht so, wenn du die Endziffer der $\kappa\delta'$, die δ' ist, nicht von der Endziffer der beiden Ziffern oben subtrahieren kannst, die $\mu\gamma'$ bezeichnen; denn die δ' können nicht von den γ' subtrahiert werden.

Wenn aber die beiden Ziffern oben, die $\mu\gamma'$ bezeichnen, $\mu\delta'$ oder auch $\mu\varepsilon'$ gewesen wären, hättest du nicht ς' zu den $\kappa\delta'$ addiert, damit sie λ' werden, sondern du hättest die δ' , die letzte Ziffer der $\kappa\delta'$ natürlich, von den ε' subtrahiert, die die letzte Ziffer der $\mu\varepsilon'$ sind. Das α' aber, das als Rest von den ε' bleibt — das α' hättest du oberhalb der ε' gesetzt. Nachdem du aber die ε' gestrichen hättest, hättest du wiederum die κ' , die β' Zehner sind, von den μ' oben subtrahiert, die δ' Zehner sind, indem du β' Zehner oberhalb der δ' geschrieben und die δ' gestrichen hättest, die μ' bezeichnen. Ebenso geschieht es auch bei allen Ziffern oben, wenn du von ihnen die erste Ziffer des Teilers oder die zweite oder die dritte und so weiter subtrahieren willst.

Wenn aber die gerade auftretende Ziffer des Teilers, welche auch immer du von den beiden Ziffern des Einers und Zehners oben zu subtrahieren suchst, nicht subtrahiert werden kann — denn angenommen, du suchst die zweite oder dritte oder vierte Ziffer des Teilers, die ζ' ist, η' -mal von den beiden Ziffern oben zu subtrahieren, die $\nu\gamma'$ bezeichnen: ζ' mal η' gibt $\nu\varsigma'$, und du kannst die $\nu\varsigma'$ nicht von den beiden Ziffern oben subtrahieren, die $\nu\gamma'$ bezeichnen. Es ist aber oben an der Hunderterstelle γ' vorhanden und bezeichnet τ' , was mit den $\nu\gamma'$ $\tau\nu\gamma'$ bezeichnet. Du suchst aber $\nu\varsigma'$ von den $\tau\nu\gamma'$ oben zu subtrahieren. Subtrahiere nun von den γ' , die τ' bezeichnen, einen Hunderter, d. h. α' ; denn das α' ist ρ' , wie die γ' τ' sind. Und es bleiben β' übrig, was σ' ist. Setze nun β' oberhalb der γ' . Streiche aber die γ' , die τ' bezeichnen. Die ρ' aber, die du von den τ' subtrahiert hast, sind zehn Zehner; es gibt auch noch weitere ε' Zehner, die ν' bezeichnen. Die ρ' aber und die ν' sind $\iota\varepsilon'$ Zehner. Addiere nun zu den $\nu\varsigma'$, die du zu subtrahieren suchst, δ' , damit es ξ' werden, d. h. ς' Zehner. Da du nun δ' addiert hast, übersteigen die δ' sicher die $\nu\varsigma'$.

Addiere die δ' mit den γ' , die an der Einerstelle stehen und Drei bezeichnen, und es gibt zusammen ζ' . Setze oberhalb der γ' , die an der Einerstelle stehen, ζ' , streiche aber die γ' . Subtrahiere aber die ς' Zehner, d. h. die ξ' , von den $\iota\varepsilon'$ Zehnern, die $\rho\nu'$ bezeichnen, und es bleiben noch ϑ' Zehner übrig, d. h. ς' ; denn ς' und ξ' ist $\rho\nu'$. Streiche aber auch die ε' , die an der Zehnerstelle stehen und ν' bezeichnen. Oberhalb der ε' aber, die ν' bezeichnen, setze die ϑ' , die ς' bezeichnen, weil sie an der Zehnerstelle gelegen sind. Auf diese Weise nun kannst du es auch bei ähnlichen Fällen machen, wenn es nicht möglich ist, vom Zehner und Einer die Ziffer des Teilers zu subtrahieren, welche auch immer du von den Ziffern oben zu subtrahieren suchen musst.

Angenommen, der Teiler habe δ' oder ε' Ziffern und bezeichne Tausender oder Myriaden. Wenn du nun die erste oder zweite oder dritte Ziffer des Teilers, die du so oft multipliziert hast, wie oft du auch die erste Ziffer des Teilers subtrahiert hast, nicht von den Ziffern des Zehners und Hunderters oben subtrahieren kannst, d. h. von der ersten und zweiten und der dritten Stelle, von welcher Stelle herab (betrachtet) die fragliche Ziffer des Teilers steht, streiche von der Ziffer des Tausenders, der die vierte Stelle ist, – derart, wie du es auch beim Hunderter gemacht hast und die multiplizierte Ziffer des Teilers subtrahiert hast, d. h. die $\nu\varsigma'$ von den $\tau\nu\gamma'$ – nun alles, was immer du von den Ziffern oben subtrahierst.

Wenn du das Ganze nimmst, ohne oberhalb davon einen Rest setzen zu können, streiche es. Wenn aber irgendein Rest übrig bleibt, setze diesen ohne Bezeichnung oberhalb der gestrichenen Ziffer, damit du schön siehst, welche Ziffern einerseits bereits erfasst wurden und unbrauchbar und bezeichnet sind und welche andererseits, weil sie noch unbezeichnet sind, noch selbst zur Subtraktion aufgesucht werden.

Wenn du es so von Anfang an machst, bis du alle Ziffern oben vollendet hast, indem du diese durch den gerade vorhandenen Teiler dividierst, ist von den am Ende übrig bleibenden unbezeichneten Ziffern klar, dass sie übrig geblieben und zum Zähler geworden sind. Setze nun die unbezeichneten Ziffern, die als Zähler übrig geblieben sind, oberhalb eines Querstrichs, unter diesen aber setze den Teiler. Und prüfe, welches Verhältnis der Zähler in Bezug auf den Teiler im Vergleich hat, ein Drittel oder ein Viertel, wie wir auch das Zahlenverhältnis, das den Bruch betrifft, noch klarer an der dazu passenden Stelle besprechen werden, wenn wir auf dem Weg voranschreiten.

In diesem sehr langen Kapitel unternimmt der Autor den Versuch, das Verfahren der schriftlichen Division nicht beispielgebunden, sondern umfassend (περιεκτικῶς) darzustellen. Diese schwierige Aufgabe ist ihm mit Einschränkungen recht gut gelungen. U. a. stört wieder wie in Kap. 31 die integrierte Erklärung der schriftlichen Subtraktion.

Zum 1. Absatz:

Der Autor geht von der Notwendigkeit einer solchen allgemeinen Darstellung aus.

Zum 2. Absatz:

Position von Dividend und Divisor: Lässt sich die erste Ziffer des Divisors von

der ersten des Dividenden abziehen, dann stehen die beiden Ziffern untereinander; andernfalls muss der Divisor um eine Stelle nach rechts eingerückt werden.

Zum 3. Absatz:

Bestimmung des 1. Teilquotienten: Der Autor greift die im 2. Absatz erwähnte Fallunterscheidung auf. Im ersten Fall stimmen die untereinanderstehenden Stellenwerte von Dividend und Divisor überein, im zweiten Fall ist die erste Ziffer des Dividenden in Bezug auf die erste des Divisors eine Zehnerziffer. So oft wie die erste Ziffer des Divisors von der Ziffer bzw. den Ziffern des Dividenden subtrahiert werden kann, müssten auch alle weiteren Ziffern abgezogen werden. Der entsprechende Faktor des Subtrahenden ist (als Teilquotient) "nach unten" zu setzen. Für den Schreiber ist offenbar selbstverständlich, dass damit die Position unterhalb der ersten Ziffer des Divisors gemeint ist.

Zum 4. Absatz:

Abschätzen des Teilquotienten: Bei der Frage, wie oft die erste Ziffer des Divisors zu subtrahieren ist, ist darauf zu achten, dass nicht alle Ziffern oben "mit hinzugenommen werden" (συμπαράλαμβάνειν), damit auch die übrigen Teilerziffern noch (ebenso oft) subtrahiert werden können. Damit geht der Autor auf die typische Situation ein, dass die Anfangsziffern von Dividend und Divisor oft einen (maximalen) Subtrahendenfaktor nahelegen, der bei weiterer Rechnung nach unten korrigiert werden muss. Die Subtraktionsvorschrift im vorigen Absatz wird also relativiert.

Zum 5. Absatz:

100 oder 1000 als spezielle Divisoren: Hier kann man die erste Ziffer (1) so oft wie möglich von der obigen Ziffer subtrahieren. Es fehlt der Hinweis auf die Notation des Teilquotienten. Von den weiteren Ziffern des Dividenden lassen sich die Nullen des Divisors nicht subtrahieren, sodass jetzt nicht nur die 1, sondern auch die Nullen gestrichen werden. Nur hier spricht der Autor davon, dass nun ein zweiter Teiler eingerückt geschrieben werden muss. Das weitere Vorgehen bedarf keiner Erläuterung mehr und endet dann, wenn alle Ziffern des Dividenden berücksichtigt worden sind.

Verallgemeinerung: Das spezielle Verfahren gilt für alle Divisoren mit beliebiger Anfangsziffer, wenn sonst nur Nullen folgen.

Zum 6. Absatz:

Teilweise Wiederholung des 4. Absatzes in Bezug auf allgemeinere als die im vorigen Absatz diskutierten Divisoren, spezielles Eingehen auf den Faktor des Subtrahenden bei der Subtraktion von einer darüberstehenden zweistelligen Zahl (43), wenn der Subtrahend eine beliebige Teilerziffer ist: Der Autor betont, dass auch hier nur ebenso oft abgezogen werden darf, wie es bei der ersten Teilerziffer geschehen ist.

Zum 7. Absatz:

Ein Beispiel zum 6. Absatz, Subtraktion mit Hilfe der dekadischen Ergänzung: Oben stehe 43, darunter (also unter 3) stehe die dritte Teilerziffer, nämlich 6. Die erste Teilerziffer, die hier keine Rolle spielt, sei 4-mal von der oberen Dividendenziffer bzw. von den beiden oberen abgezogen worden. Entsprechend sei der Teilquotient 4 notiert worden. Ebenso sei die zweite Teilerziffer 4-mal subtrahiert worden. Daher müsse nun $43 - \underline{4} \cdot 6 = 43 - 24$ gerechnet werden. Für

diese Subtraktion mit Zehnerunterschreitung erläutert der Schreiber anschließend sehr ausführlich das Verfahren der dekadischen Ergänzung – vgl. den Kommentar zu Kapitel 31. Fasst man die einzelnen Schritte zusammen, so rechnet er wie folgt: $43 - 24 = (43 + 6) - (24 + 6) = 49 - 30$, 4 Zehner – 3 Zehner = 1 Zehner. Dabei streicht er die Ziffern von 43 schrittweise: erst die 3, die durch die 9 darüber ersetzt wird ($\Rightarrow 49$), dann die 4, über welche die 1 geschrieben wird ($\Rightarrow 1$ Zehner). Auf die berechnete Differenz 19, die aus den neuen Dividendenziffern abzulesen ist, geht er nicht mehr ein. Schließlich weist er sinngemäß darauf hin, dass dekadisch zu ergänzen ist – hier: $24 + 6 = 30$ –, wenn bei einer Subtraktion eine Zehnerunterschreitung auftritt.

Zum 8. Absatz:

Subtraktion ohne Zehnerunterschreitung: 44 oder 45 anstelle von 43 im Minuenden verändert die Situation. $45 - 24$ wird nicht mit dekadischer Ergänzung, sondern einfach ziffernweise berechnet. Der Autor beschreibt wieder die Position der neuen Ziffern und das Streichen der verbrauchten.

Zum 9. Absatz:

Zur Rolle der Hunderterziffer des Dividenden, Subtraktion durch dekadische Ergänzung: 7, eine Teilerziffer, soll 8-mal von einer oben stehenden Zahl 53 abgezogen werden. Da das nicht möglich ist, muss die Hunderterziffer oben – sie sei 3 – mit einbezogen werden. Der Autor rechnet nun $353 - 56$ wieder ausführlich mittels dekadischer Ergänzung vor, wobei er auch auf die Position der neuen Ziffern und das Streichen der verbrauchten eingeht. Fasst man die einzelnen Schritte zusammen, so subtrahiert er sehr umständlich wie folgt: $353 - 56 = (200 + 10 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 3) - 56 = (200 + 15 \cdot 10 + 3 + 4) - (56 + 4) = 200 + (15 - 6) \cdot 10 + 7 = 200 + 9 \cdot 10 + 7$. Das Ergebnis 297 ist aus den neuen Dividendenziffern abzulesen, es wird nicht mehr eigens angeführt. Hier hätte vorteilhaftes Rechnen, etwa $353 - 56 = (353 - 53) - 3$, wesentlich schneller zum Resultat geführt.

Der Autor verweist darauf, dass immer dann entsprechend vorzugehen ist, wenn die vorgeschriebene Subtraktion von den zugehörigen Zehnern und Einern des Dividenden nicht möglich ist.

Zum 10. Absatz:

Ausweitung der Überlegungen des vorigen Absatzes auf den Fall, dass zur vorgeschriebenen Subtraktion des Teilers auch die Tausenderziffer des Dividenden herangezogen werden muss

Zum 11. Absatz:

Regeln für eine übersichtliche Durchführung der Division: Bei einer Subtraktion ohne Rest soll die obige Ziffer gestrichen werden, andernfalls der Rest "unbezeichnet" ($\alpha\sigma\eta\mu\epsilon\acute{\iota}\omega\tau\omicron\nu$), also ungestrichen, über die gestrichene Ziffer gesetzt werden. Damit behält man den Überblick über die bereits verbrauchten Ziffern und über diejenigen, die noch zur Subtraktion heranzuziehen sind.

Zum 12. Absatz:

Übrig gebliebene Ziffern nach Abschluss der Division: Diese Ziffern bilden den Zähler eines Bruchs, dessen Nenner der Teiler ist. (Dass bei einer Division ohne Rest keine ungestrichenen Ziffern übrig bleiben, erwähnt der Schreiber nicht.) Das Verhältnis von Zähler und Nenner soll geprüft werden. Der Autor verweist auf die spätere Behandlung der Brüche (vgl. insbesondere Kapitel 40–42).

Der Autor hat es versäumt, allgemein darauf einzugehen, dass der Divisor nach vollständiger Verrechnung mit dem jeweiligen Teildividenden schrittweise nach rechts einzurücken ist. Im 5. Absatz hat er das nur im Zusammenhang mit sehr speziellen Teilern erwähnt. Dieses Einrücken kann dazu führen, dass der Teiler vom neuen Teildividenden nicht subtrahiert werden kann: In diesem Fall muss 0 als Teilquotient notiert, der Teiler gestrichen und ein weiterer Teiler erneut eingerückt werden. Diese Situation ist bekanntlich auch bei unserem Divisionsverfahren fehleranfällig – vgl. z. B. $19402:178=109$. Solche Beispiele kommen (ohne Kommentar des Autors) erst in späteren Kapiteln der Handschrift vor.

38 ***Umfassend über Probe und Beweis aller Teile, die dividiert werden***

Wir wollen auch noch umfassend über die Probe und den Beweis von allem sprechen, wofür du zu dividieren Sorge trägst, – wie du dies also gut machen und von allem die Proben nehmen kannst, wie die Rechenkunst uns lehrt.

Mache es so:

Der Zähler, den wir gewöhnlich oberhalb des geraden Strichs setzen, gleich ob er aus einer Ziffer besteht oder aus mehreren, wie viele auch immer es sind – wenn es sehr viele sind, nimm die ersten beiden Ziffern und teile diese durch die ζ' . Den restlichen Teil unterhalb der ζ' aber vereinige mit der nächsten Ziffer und teile dies wiederum durch die ζ' , bis du auf diese Weise alle Ziffern des Zählers zu Ende geführt hast. Wenn du aber keine weitere Ziffer des Zählers mehr hast, sondern schon an dessen äußerste und letzte Ziffer gelangt bist, den Rest unterhalb der ζ' von der letzten Ziffer – setze diesen nahe an das Ende des weiteren Querstrichs. Wenn aber der Zähler nicht viele verschiedene Ziffern hat, sondern nur aus einer Ziffer besteht: wenn die eine Ziffer mehr als die ζ' bezeichnet, d. h. η' oder auch ϑ' , subtrahiere einmal ζ' von ihr, und den Rest unterhalb der ζ' – setze diesen dorthin, nahe an das Ende des anderen Querstrichs. Wenn aber die eine Ziffer des Zählers ζ' nicht übersteigt, sondern kleiner als die ζ' ist, setze sie wiederum dorthin – nahe an das Ende des Querstrichs – so, wie sie ist, weil sie kleiner als die ζ' ist. Wenn aber die eine Ziffer nicht größer oder kleiner als die ζ' ist, sondern ζ' ist, setze ψ' anstatt irgendeiner anderen Ziffer nahe an das Ende des Querstrichs; du hast nämlich einmal ζ' von den ζ' subtrahiert, und es ist ψ' geblieben.

Ebenso mache es auch beim Nenner, den wir gewöhnlich unterhalb des Zählers und des Querstrichs setzen. Und wenn der Nenner selbst auch nur aus einer Ziffer besteht, mache es so wie auch beim Zähler und setze das, was kleiner als die ζ' ist, oberhalb desselben zweiten Querstrichs. Wenn es aber sehr viele Ziffern sind, nimm jeweils zwei und teile diese durch die ζ' bis zur letzten Ziffer. Wenn du auf diese Weise alle Ziffern des Nenners zu Ende geführt hast, den Rest unterhalb der ζ' – setze diesen oberhalb des Querstrichs.

Suche aber wiederum auch den Quotienten auf, und wenn auch jener nur aus einer Ziffer besteht, mache es bei ihm in gleicher Weise wie auch beim Zähler und beim Nenner, und den Rest unterhalb der ζ' – setze diesen unterhalb desselben Querstrichs. Wenn aber auch der Quotient aus sehr vielen Ziffern be-

steht, nimm jeweils zwei und teile diese durch die ζ' bis zur letzten Ziffer des Quotienten, und den Rest unterhalb der ζ' – setze diesen unterhalb des Querstrichs.

Danach multipliziere die beiden Ziffern, die oberhalb und unterhalb des Querstrichs stehen. Und wenn die Ziffer oberhalb oder unterhalb des Querstrichs α' ist, die andere aber γ' , ist bei deren Multiplikation einmal die γ' wieder γ' oder einmal die δ' wieder δ' und so weiter. Wenn aber die Ziffer oberhalb oder unterhalb des Querstrichs mehr als Eins bezeichnet und die eine β' , die andere aber γ' , oder die eine γ' , die andere aber δ' ist und so weiter, ergibt sich bei der Multiplikation der beiden Ziffern zwei mal die $\gamma' \zeta'$ oder wiederum drei mal die $\delta' \iota \beta'$ und so weiter.

Und wie groß auch immer das Produkt der Ziffer(n) oberhalb und unterhalb des Querstrichs wird, addiere es mit der Ziffer, die nahe am Ende desselben Querstrichs liegt und sich dort befindet und zum Zähler gehört. Und wie groß auch immer die Zahl aus diesen drei Ziffern wird: Wenn sie größer als die ζ' ist, dividiere sie durch die ζ' , und den Rest unterhalb der ζ' – setze diesen in einen Kreis. Wenn aber die Verknüpfung der drei Ziffern, von denen wir sprachen, Kleineres als die ζ' bezeichnet, setze dies wiederum in einen Kreis, da es kleiner ist als die ζ' . Wenn es aber weder größer als die ζ' ist noch kleiner, sondern ζ' die Verknüpfung der drei Ziffern ist, subtrahiere einmal ζ' von den ζ' , und es bleibt ψ' . Setze nun anstatt irgendeiner anderen Ziffer ψ' in einen Kreis. Wenn aber oberhalb oder unterhalb des Querstrichs zufällig ψ' liegt, kannst du das ψ' nicht mit irgendeiner anderen Ziffer multiplizieren, da die mit dem ψ' multiplizierte Ziffer kein weiteres Wachstum annimmt, sondern vielmehr auch selbst ψ' wird. Gleich ob nun die beiden Ziffern oberhalb und unterhalb des Querstrichs ψ' sind oder die eine ψ' ist, die andere aber irgendeine Zahl bezeichnet – sie bleiben unwirksam, weil es geschieht, dass sie mit ψ' multipliziert werden. Nimm aber nur die Ziffer, die nahe am Ende des Querstrichs gelegen ist und die zum Zähler gehört, und setze diese in einen Kreis. Wenn aber die nahe am Ende desselben Querstrichs gelegene Ziffer ψ' ist, oberhalb aber und unterhalb desselben Querstrichs irgend zwei bezeichnende Ziffern sind, multipliziere diese, gleich ob du sie nur einmal oder vielfach zu multiplizieren hast. Und das Produkt, das aus diesen entstanden ist, teile durch die ζ' , wenn es größer als die ζ' ist, und den Rest unterhalb der ζ' schreibe wie gewohnt in einen Kreis. Gib aber das ψ' auf, das nahe am Ende des Querstrichs steht, weil es nichts ist.

Nach dem Ende dieser ersten Probe aber, die so durchzuführen ist, wie wir sagen, suche auch die obige Zahl auf, die wir gewöhnlich an den Anfang setzen, um sie zu dividieren. Und nimm von dieser je zwei Ziffern und teile die bezeichnenden Ziffern davon durch die ζ' bis zur letzten Ziffer, wie wir es auch bei den anderen klarer aufgezeigt haben. Den Rest unterhalb der ζ' aber – setze auch diesen in einen Kreis. Wenn nun die beiden Proben, die du in Kreise gesetzt hast, als gleich befunden wurden, ist der am Ende herausgekommene Quotient richtig; wenn aber die beiden Proben davon ungleich sind, weil sich die eine so verhält und die andere irgendwie anders, hat sich der Quotient am Ende bereits nicht richtig ergeben.

Man muss aber auch dies wissen, dass der Zähler in jedem Fall kleiner als die angezeigte Größe des Teilers sein muss. Denn deswegen sagt man auch Tzakisma ("Zerteilung"), weil es kleiner als der Teiler ist. Das gegenüber dem Größeren Kleinere nämlich nennt man wohl zu Recht Tzakisma. Denn das Zerteilte, wie jemand auch sagen könnte, ist zum Tzakisma geworden. Wenn nun der Zähler kleiner ist als der Nenner, ist er wirklich und richtig ein Tzakisma. Wenn er aber größer oder gänzlich gleich und um überhaupt nichts gegenüber dem Teiler verkleinert ist, hat sich der Quotient am Ende, den du errechnet hast, – weißt du – wieder nicht richtig ergeben. Wenn du aber wiederum diese Division anders durchgeführt hast, wirst du finden, dass der Zähler in jedem Fall kleiner ist; denn keineswegs wird man sich darin täuschen, wenn man glaubt, dass es niemals anders ist.

Zum 1. Absatz:

Ankündigung einer generellen (nicht beispielgebundenen) Erklärung der (Siebener-)Probe mit Aufbau des zugehörigen Diagramms

Mit den Bezeichnungen aus dem Kommentar zu Kapitel 22 geht es also um die Siebenerprobe zur Division (mit oder ohne Rest) $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ ($b \neq 0$, $0 \leq r < b$).

Zum 2. Absatz:

Bestimmung von $S(r)$ mit Fallunterscheidung:

– r habe "sehr viele" Ziffern. Dann sollen die ersten beiden Ziffern durch 7 geteilt und der Rest mit der nächsten Ziffer vereinigt werden.

Der Autor vernachlässigt hier den Fall, dass auch 7, 8 oder 9 die Anfangsziffer von r sein kann: Dann ist zunächst nur die Anfangsziffer allein zu teilen.

Entsprechendes gilt für eine Ziffer 7, 8 oder 9, die nach einer zwischendurch erfolgten restlosen Teilung hinzugezogen werden muss (z. B. bei 2892).

– $r = 8$ oder $r = 9$: Dann ist 7 abzuziehen.

– $r < 7$: r bleibt unverändert.

– $r = 7$: Dann ist 0 zu setzen ($7 - 7 = 0$).

Diagramm: — $S(r)$

Zum 3. Absatz:

Bestimmung von $S(b)$ mit Fallunterscheidung (analog zur Bestimmung von $S(r)$)

Diagramm: $\frac{S(b)}{S(r)}$

Zum 4. Absatz:

Bestimmung von $S(q)$ mit Fallunterscheidung (analog zur Bestimmung von $S(r)$ und $S(b)$)

Diagramm: $\frac{S(b)}{S(q)}$ $S(r)$

Zum 5. Absatz:

Berechnung von $S(b) \cdot S(q)$ mit Zahlenbeispielen

Zum 6. Absatz:

Berechnung von $S(b) \cdot S(q) + S(r)$, anschließend Fallunterscheidung:

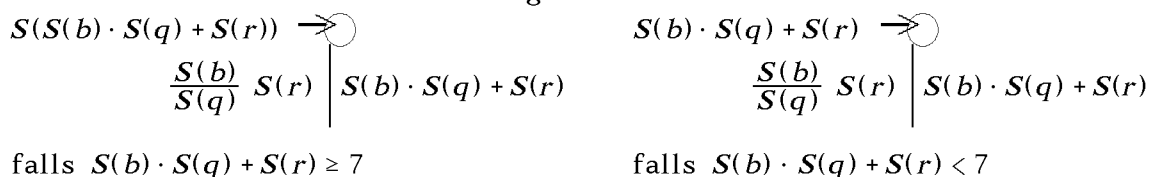
– Falls $S(b) \cdot S(q) + S(r) > 7$ ist, bildet man $S(S(b) \cdot S(q) + S(r))$ und setzt dies in einen Kreis.

– Falls $S(b) \cdot S(q) + S(r) < 7$ ist, wird $S(b) \cdot S(q) + S(r)$ selbst eingekreist.

– Falls $S(b) \cdot S(q) + S(r) = 7$ ist, setzt man 0 in einen Kreis ($7 - 7 = 0$).

- Falls mindestens eine der beiden Zahlen $S(b)$ und $S(q)$ gleich Null ist, setzt man $S(r)$ in einen Kreis. Der Autor erläutert hierzu, dass man mit 0 nicht multiplizieren könne, da sich dabei kein Wachstum ergebe. Es komme wieder nur 0 heraus.
- Falls $S(r) = 0$ ist, $S(b)$ und $S(q)$ aber beide ungleich Null sind, so ist nur $S(b) \cdot S(q)$ zu betrachten (vgl. die ersten drei Fallunterscheidungen). Nicht direkt angesprochen wird der Fall $S(r) = S(b) = S(q) = 0$, der sich bei der Division von Kapitel 29 ergab und vom Autor in Kapitel 30 diskutiert wurde. Er lässt sich aber dem vorigen Fall unterordnen.

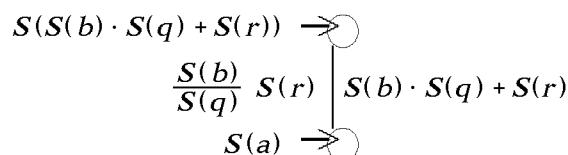
Diagramme:



Die beiden Diagramme lassen sich für alle $S(b) \cdot S(q) + S(r)$ zum ersten zusammenfassen, da die Zahl $S(b) \cdot S(q) + S(r)$ mit ihrem Siebenerrest übereinstimmt, wenn sie kleiner als 7 ist.

Zum 7. Absatz:

Bestimmung von $S(a)$, Interpretation von gleichen und ungleichen Probezahlen $S(a)$ wird in einen weiteren Kreis gesetzt. Das Abschlussdiagramm hat für den allgemeinen Fall die folgende Gestalt:



Erneut schließt der Autor aus der Gleichheit der eingekreisten Probezahlen zu Unrecht, dass die Division richtig durchgeführt worden ist. Hingegen folgert er korrekt, dass ungleiche Probezahlen eine fehlerhafte Division aufzeigen. (Natürlich käme auch ein Fehler bei der Durchführung der Siebenerprobe in Betracht.)

Zum 8. Absatz:

Das Größenverhältnis von Zähler und Nenner nach der Division

Wie der Autor zutreffend ausführt, muss der bei der Division entstandene Zähler (τῆξιμα) unbedingt kleiner als der Teiler (Nenner) sein – das ergebe sich schon aus dem Wortsinn ("Zerteilung"). Wenn der Zähler aber größer als der Teiler oder ihm gleich sei, so habe man den Quotienten nicht richtig berechnet.

Über die Division, die allein im Kopf entsteht

Man kann aber nicht nur allein im Kopf multiplizieren, sondern auch zu dividieren ist möglich, nicht bei allen, aber von denen, die es zulassen, ist es möglich, auf diese Weise zu dividieren.

Prüfe nun gut – nicht bei den geteilten größeren Stücken, sondern bei dem

Teilenden, welches wir gewöhnlich Teiler nennen –, welche Zahlen wohl umkehrbar (ἐπιστρεπτικοί) sind. Und alle Zahlen des aufgesuchten Teilers, die umkehrbar sind – du kannst wohl gut allein in deinem Kopf ohne schriftliche Aufzeichnung die aufgesuchte Zahl teilen; alle aber, die nicht umkehrbar sind, kannst du nicht in deinem Kopf teilen. Umkehrbar aber nennen wir Zahlen, die zweifach multipliziert werden und wiederum zum selben zurückkehren wie die $\kappa\alpha'$ – denn drei mal ζ' geben $\kappa\alpha'$ und ζ' mal γ' geben wiederum $\kappa\alpha'$ – oder wieder wie die $\kappa\eta'$ – denn δ' mal ζ' geben $\kappa\eta'$ und ζ' mal δ' geben wiederum $\kappa\eta'$ – oder wieder wie die λ' – denn ε' mal ς' geben λ' und ς' mal ε' geben wiederum λ' – oder wieder wie die ρ' – denn ε' mal κ' geben ρ' und κ' mal ε' geben wiederum ρ' – und so weiter jede andere umkehrbare Zahl, die auf diese Weise zweifach multipliziert wird. Die aber gar nicht umkehrbaren (μῆπω στρέφοντες) sind wie die $\iota\alpha'$ und $\iota\zeta'$ und $\kappa\gamma'$ und $\lambda\alpha'$ und so weiter. Es sind nämlich ungeteilte und unumkehrbare Zahlen (ἀμέριστοι καὶ ἀνυπόστροφοι ἀριθμοί), und du kannst durch sie die aufgesuchte Zahl, die du teilen willst, nicht teilen.

ρ' durch die $\iota\eta'$ geteilt

Die $\iota\eta'$ sind umkehrbar, denn zwei mal ϑ' geben $\iota\eta'$ und ϑ' mal β' geben wiederum $\iota\eta'$. Teile die ρ' in zwei Teile, wie auch die zwei mal ϑ' $\iota\eta'$ ergeben. Wenn aber die ρ' in zwei Teile geteilt werden, ergibt jeder Teil der beiden jeweils ν' . Teile aber die ν' durch die ϑ' : ε' mal ϑ' gibt nun $\mu\varepsilon'$, und es bleiben ε' als Zähler bis zu den ν' übrig. Und siehe – du hast allein in deinem Kopf gefunden, dass bei der Division der ρ' durch die $\iota\eta'$ der endgültige Quotient von diesen ε' ergibt, wie ε' -mal die ϑ' in den ν' aufgegangen sind, und es bleibt auch der vorliegende Bruch $\frac{\varepsilon}{\vartheta}$ übrig.

Ganz offensichtlich kommt es dem Autor für die Division im Kopf darauf an, dass der Divisor eine Nichtprimzahl ist; andernfalls hält er das Verfahren für nicht durchführbar. Statt der klassischen (euklidischen) Begriffe σύνθετος ἀριθμός für eine zusammengesetzte Zahl und πρῶτος ἀριθμός für eine Primzahl (vgl. TROPFKE 1930, S. 123), die er auch im Text vor dem Rechenbuch (fol. 1^v) verwendet, wählt er hier Termini, die auf die Vertauschbarkeit der Faktoren bezogen sind.

Rechnung zum 1. Beispiel: $100 : 18 = 50 : 9 = 5\frac{5}{9}$

Dividend und Divisor werden also mit 2 gekürzt. Die dadurch vereinfachte Division lässt sich mithilfe einer Multiplikation im Rahmen des kleinen Einmal-eins, also im Kopf durchführen.

Es zeigt sich, dass der Dividend, dessen Eigenschaften vom Autor gar nicht betrachtet werden, ebenfalls als "umkehrbar" vorauszusetzen ist und darüber hinaus mindestens einen gemeinsamen Faktor mit dem Divisor haben muss – vgl. das 5. Beispiel.

2. Beispiel: $\rho\kappa'$ durch die $\iota\eta'$ geteilt ($120 : 18 = 6\frac{2}{3}$)

Kopfrechnung: $120 : 18 = 60 : 9 = 6\frac{6}{9} = 6\frac{2}{3}$ mit den Alternativen $120 : 18 = 40 : 6 = 6\frac{4}{6} = 6\frac{2}{3}$ oder $120 : 18 = 20 : 3 = 6\frac{2}{3}$ und dem abschließenden Hinweis darauf, dass bei allen drei Brüchen Zähler und Nenner im gleichen Verhältnis stehen

3. Beispiel: τ' durch die $\kappa\alpha'$ geteilt ($300:21=14\frac{2}{7}$)

Dividend und Divisor werden mit 3 gekürzt. Für die dadurch zwar vereinfachte Division wird allerdings das große Einmaleins (im Kopf) benötigt.

4. Beispiel: τ' durch die $\kappa\delta'$ geteilt ($300:24=12\frac{1}{2}$)

Wahlweise wird mit 2, 12, 4 oder 6 gekürzt.

5. Beispiel: υ' durch die $\lambda\varsigma'$ geteilt ($400:36=11\frac{2}{9}$)

Es wird nur mit 2, nicht mit 4 gekürzt, dafür aber gezeigt, dass man wegen des Dividenden nicht mit 3 kürzen kann. Der Restbruch bleibt ungekürzt stehen.

6. Beispiel (ohne eigene Überschrift): ($600:36=16\frac{2}{3}$)

Wahlweise wird mit 3, 12 oder 6 gekürzt. Rückblickend auf das vorige Beispiel wird angemerkt, dass sich 400 nicht durch 6 teilen lässt.

7. Beispiel: $\alpha\upsilon'$ durch die $\xi\delta'$ geteilt ($1400:64=21\frac{7}{8}$)

$1400:64=700:32$ (Kürzen mit 2) mit folgendem Herantasten an den Quotienten: $10\cdot 32=320$, $20\cdot 32=2\cdot 320=640$, $640+32=672$, also $21\cdot 32=672$ mit Rest 28 bis 700. Es folgt: $1400:64=21\frac{28}{32}=21\frac{7}{8}$

Oder Kürzen mit 4: Der Quotient von $350:16$ wird durch analoges Herantasten bestimmt: $21\cdot 16=336$ mit Rest 14 bis 350. Es folgt $1400:64=21\frac{14}{16}=21\frac{7}{8}$ mit dem Nachweis, dass die drei Brüche übereinstimmen, die beim Kürzen mit 2 und hier entstanden sind, und einem Verweis auf das nächste Kapitel.

Oder Kürzen mit 8: $1400:8=175$ wegen $8\cdot 175=1400$, $175:8=21$ Rest 7, denn $4\cdot 21=84$, $8\cdot 21=168$ mit Rest 7 bis 175 (Verwendung des bereits bekannten Quotienten 21). Es folgt wieder $1400:64=21\frac{7}{8}$.

8. Beispiel: $\rho\pi'$ Tausender durch die $\rho\kappa'$ geteilt ($180000:120=1500$)

Wahlweise wird mit 20, 10 oder 12 gekürzt. Zum ersten Fall führt der Autor aus, dass 6 in 9000 ebenso oft aufgeht wie 120 in 180000, nämlich 1500-mal (Begründung: $1000\cdot 6+500\cdot 6=9000$), und dass 6 sich zu 9000 verhält wie 120 zu 180000.

Insgesamt kann dieses Kapitel zur Division im Kopf nur teilweise überzeugen. Das Kürzen von Dividend und Divisor ist sicher vorteilhaft, um zu kleineren Zahlen zu gelangen, die man dann gegebenenfalls auch im Kopf dividieren kann, was in allen hier vorgestellten Beispielen auch durchaus möglich ist. Dabei bietet auch die "Methode des Herantastens" (siehe das 7. Beispiel) eine Hilfe. Doch der Autor vernachlässigt im Einführungstext die Untersuchung des Dividenden auf (echte) Teiler, obwohl mindestens ein mit dem Divisor gemeinsamer (echter) Teiler existieren muss, damit das beschriebene Kürzungsverfahren durchgeführt werden kann. Dieses Versäumnis offenbart sich in seiner Diskussion im 5. Beispiel.

Andererseits sind bei entsprechend einfachen Divisionsaufgaben Primteiler (vgl. 11, 17, 23, 31 und die zweifache Umschreibung solcher Zahlen durch den Autor)

kein Hindernis für eine Kopfrechnung. Zudem fehlt ein Hinweis darauf, dass man das schriftliche Divisionsverfahren in einfachen Fällen, insbesondere bei einstelligen Divisoren und "kleinen" Dividenden, im Kopf nachvollziehen kann.

40 *Wie man wissen kann, welches Verhältnis der Zähler im Vergleich zum Nenner hat, ob es ganzzahlig ist oder auch gespalten, d. h. geteilt*

Wenn du wissen willst, welches Verhältnis der Zähler im Vergleich zum Nenner hat, ein Drittel freilich oder ein Viertel oder wie es sich anders zeigen kann – wenn du dies gut erkennen kannst, weil sich von dem zeigt, was oberhalb des Nenners und des geraden Strichs liegt, welches Verhältnis es im Vergleich zum Nenner hat, hast du das Gesuchte schon gut gefunden. Wenn du aber, obwohl der Zähler und der Nenner ganzzahlig sind, nicht gut erkennen kannst, welches Verhältnis der Zähler im Vergleich zum Nenner hat, spalte den Zähler in kleinste Teile auf. Spalte ihn aber auf – teile ihn, wenn man so will – derart in kleinste Teile, dass es möglich ist, auch den Nenner in ebenso viele Teile aufzuspalten und zu teilen, in wie viele du auch den Zähler aufgespalten hast. Wenn du nun den Zähler in zehn Teile aufgespalten hast, spalte auch den Nenner in zehn Teile auf. Wenn du aber den Zähler in 20 oder auch 30 aufgespalten hast, spalte auch den Nenner in gleicher Weise in 20 oder auch 30 Teile auf. Kurz gesagt: In wie viele Teile auch immer du den Zähler aufspaltest, in so viele Teile spalte auch den Nenner auf. Mach dies so, bis du den Zähler und den Nenner in den kleinsten Teil aufspalten und teilen kannst, der entstehen kann. Aber die zwei Teile davon, des Zählers natürlich und des Nenners, die zum kleinsten Teil geworden sind, auf welche Weise wir es sagen, – du kannst klarer erkennen, welches Verhältnis der Zähler im Vergleich zum Nenner hat ...

Zur Übersetzung: $\sigma\chi\iota\zeta\epsilon\iota\nu$, das hier wörtlich mit "aufspalten" wiedergegeben wurde, dient im Wesentlichen als Fachbegriff für "kürzen". Im Unterschied zur heutigen Sprechweise (Kürzen eines Bruchs) werden Zähler und Nenner mit derselben Zahl "gekürzt".

Als Beispiel nimmt der Autor nun den Bruch $\frac{150}{200}$, bei dem sich – auch ohne zu kürzen – das Zahlenverhältnis erkennen lasse: $3 \cdot 50 = 150$, $4 \cdot 50 = 200$, also $\frac{150}{200} = \frac{3}{4}$. Kürzen mit 50 führe zum selben Ergebnis.

Dieses Kapitel zum Thema "Kürzen von Brüchen" kann inhaltlich in keiner Weise überzeugen. Es fehlen Definitionen für die einschlägigen Begriffe und insbesondere die Darstellung eines Verfahrens, mit dem ein beliebiger Bruch vollständig gekürzt werden kann.

Euklid beschreibt das Verfahren im 7. Buch seiner Elemente – vgl. [7, §§ 1, 2, S. 142 ff.] –, das hier in moderner Formulierung vorgestellt werden soll:

Sei $\frac{a}{b}$ ein Bruch mit $a < b$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Gesucht ist die maximale Kürzungszahl, d. h. der größte gemeinsame Teiler (ggT) von b und a .

Zunächst existieren $q_1, r_1 \in \mathbb{N}$ mit $b = q_1 a + r_1$ und $0 \leq r_1 < a$ (Division von b durch a mit Rest). Im Fall $r_1 = 0$ ist a Teiler von b , also $a = \text{ggT}(b, a)$.

Im Fall $r_1 > 0$ wird das Verfahren fortgesetzt: $a = q_2 r_1 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$.

Falls nun $r_2 = 0$ ist, so ist r_1 Teiler von a , aber auch von b . Andererseits lässt sich leicht zeigen, dass jeder gemeinsame Teiler von b und a auch Teiler von r_1 ist. Daraus folgt: $r_1 = \text{ggT}(b, a)$.

Im Fall $r_2 > 0$ wird das Verfahren weiter fortgesetzt: $r_1 = q_3 r_2 + r_3$, $0 \leq r_3 < r_2$ usw.; es entsteht eine streng monoton fallende Folge nichtnegativer ganzer Zahlen $b > a = r_0 > r_1 > r_2 > r_3 > \dots$, sodass ein n existiert mit $r_n > 0$, $r_{n+1} = 0$ ($n \geq 0$). Dieses r_n , das bei den letzten beiden Divisionen $r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$, $r_{n-1} = q_{n+1} r_n + 0$ auftritt, ist Teiler von b und a .

Andererseits ist wieder jeder gemeinsame Teiler von b und a auch Teiler von r_n . Daraus folgt: $r_n = \text{ggT}(b, a)$.

Im Fall $r_n = \text{ggT}(b, a) = 1$ sind b und a teilerfremd; der Bruch $\frac{a}{b}$ lässt sich daher nicht kürzen.

Für den größten gemeinsamen Teiler von b und a gilt also im Hinblick auf $r_n > 0$, $r_{n+1} = 0$ die folgende Gleichungskette:

$$\text{ggT}(b, a) = \text{ggT}(a, r_1) = \text{ggT}(r_1, r_2) = \text{ggT}(r_2, r_3) = \dots = \text{ggT}(r_{n-1}, r_n) = \text{ggT}(r_n, r_{n+1}) = r_n$$

Offenbar hat der Autor die Defizite seiner Ausführungen erkannt. Eine Marginalie verweist auf fol. 142/1^v – fol. 145^v im Anhang zum Rechenbuch, wo er das Kapitel 40 vollständig und gründlich überarbeitet hat. Dabei zeigen zahlreiche Streichungen und Neuansätze, dass er sowohl mit der Formulierung als auch mit dem Inhalt gerungen hat. Insgesamt ist das mathematische Ergebnis beachtlich, weshalb der Inhalt dieses Nachtrags näher betrachtet werden soll.

Der Text beginnt ganz ähnlich wie in Kapitel 40, doch dann heißt es:

Wenn du aber nicht erkennen kannst, welches Verhältnis der Zähler im Vergleich zum Nenner hat, suchen wir nach einer Methode, mit deren Hilfe du wissen kannst, in wie viele Teile sich der Zähler aufteilen lässt, um klarer zu zeigen, wenn er in die kleinste Teilung (τμήμα) gelangt ist, welches Verhältnis er im Vergleich zum Nenner hat.

Am obigen Beispiel $\frac{150}{200}$ definiert der Schreiber nun:

Im Allgemeinen (γενικῶς) nennen wir τζάκισμα die obigen 150 und die unteren 200, speziell (κυρίως) aber nennen wir τζάκισμα die oberen Zahlen, Nenner (Teiler) aber die unteren.

τζάκισμα bezeichnet also sowohl den Bruch als ganzen als auch den Zähler.

Nach zwei weiteren Beispielen für Brüche, deren Verhältnis auch ohne Kürzen (ἄνευ τινὸς μερισμοῦ) zu erkennen sei, geht er beim nächsten anders vor.

4. Beispiel $\frac{225}{300}$:

$300 - 225 = 75$ (ἐλλειψις oder λεῖψις), $2 \cdot 225 - 300 = 150$ (περισσειά oder ὑπεροχή, singulär auch πλεονασμός); weil die ἐλλειψις hier kleiner als die περισσειά ist, wählt er jene als Kürzungszahl mit dem Ergebnis $\frac{225}{300} = \frac{3}{4}$ (vollständig gekürzter Bruch).

5. Beispiel $\frac{225}{375}$:

Nun ist umgekehrt die περισσειά kleiner als die ἐλλειψις ($2 \cdot 225 - 375 = 75 < 150$), "deshalb" 75 Kürzungszahl mit dem Ergebnis $\frac{225}{375} = \frac{3}{5}$ (vollständig gekürzter Bruch).

6. Beispiel $\frac{250}{325}$:

Hier zeigt sich, dass natürlich noch kein allgemeingültiges Verfahren zum voll-

ständigen Kürzen von Brüchen vorliegt. Der Autor muss "nachbessern": Die ἔλλειψις ist 75, die περισσεία 175, doch lässt sich 250 nicht durch 75 teilen, aber durch 25 (Kürzungszahl). Ergebnis: $\frac{250}{325} = \frac{10}{13}$

Es folgen weitere Beispiele, wobei das zehnte den mathematisch noch unklaren Begriff περισσεία präzisiert.

10. Beispiel $\frac{126}{483}$:

Die περισσεία 21, die hier auch maximale Kürzungszahl ist, berechnet sich jetzt aus $4 \cdot 126 - 483$. Leider verzichtet der Autor auf den Vergleich mit der ἔλλειψις, die im Allgemeinen nicht – wie die bisherigen Beispiele suggerieren – mit der Differenz aus Nenner und Zähler übereinstimmt, sondern mit dem nichtnegativen Rest aus der Division des Nenners durch den Zähler. (Die oben genannte Differenz ergibt sich nur dann, wenn der (ganzzahlige) Quotient gleich 1 ist – vgl. die Beispiele.) Für die ἔλλειψις erhalte man hier $483 - 3 \cdot 126 = 105$.

Ergebnis: $\frac{6}{23}$

In der obigen Terminologie des euklidischen Algorithmus ist also $r_1 = b - q_1 a$ die ἔλλειψις (λείψις), $a - r_1 = (q_1 + 1)a - b$ die περισσεία (ὑπεροχή). Dabei gilt $1 \leq a - r_1 \leq a$. In einer theoretischen Passage stellt der Autor nun, modern formuliert, folgende Behauptungen auf:

(40.1) Aus $\min(r_1, a - r_1) \mid a$ folgt auch $\min(r_1, a - r_1) \mid b$, und $\min(r_1, a - r_1)$ ist die maximale Kürzungszahl für den Bruch $\frac{a}{b}$.

(40.2) Aus $\min(r_1, a - r_1) \nmid a$ folgt auch $\min(r_1, a - r_1) \nmid b$.

(In diesem Fall kommen die Teiler von $\min(r_1, a - r_1)$ zum Kürzen infrage – vgl. das 6. Beispiel.)

$\min(r_1, a - r_1)$ wird mit ἐγγυτέρω λείψις ἢ ὑπεροχή umschrieben.

Die Minimumbedingung spielt hier noch keine Rolle – es genügt, die Zahlen r_1 und $a - r_1$ zu untersuchen.

Zu (40.1): Man kann sofort zeigen, dass im Fall $r_1 \mid a$ für a und b die folgenden speziellen Darstellungen gelten: $a = q_2 r_1$, $b = (q_1 q_2 + 1) r_1$. Damit ist auch b durch r_1 teilbar. Darüber hinaus führt Kürzen von $\frac{a}{b}$ mit r_1 zum vollständig gekürzten Bruch $\frac{q_2}{q_1 q_2 + 1}$, denn Zähler und Nenner sind teilerfremd.

Vgl. das 4. Beispiel: $q_1 = 1$, $r_1 = 75$, $q_2 = 3$, $r_2 = 0$. Der vollständig gekürzte Bruch nimmt den Wert $\frac{3}{4}$ an.

Der Fall $a - r_1 \mid a (= (a - r_1) + r_1)$ soll zunächst nur für $r_1 > 0$ betrachtet werden. Es folgt $a - r_1 = (q_2 - 1)r_1 + r_2 \mid r_1$, sodass q_2 nur die Werte 1 oder 2 annehmen kann.

Für $q_2 = 1$ gilt $a - r_1 = r_2$, und man erhält die Darstellungen $a = (q_3 + 1)r_2$, $b = ((q_1 + 1)(q_3 + 1) - 1)r_2$. Also ist auch b durch r_2 teilbar. Darüber hinaus führt

Kürzen von $\frac{a}{b}$ mit r_2 zum vollständig gekürzten Bruch $\frac{q_3 + 1}{(q_1 + 1)(q_3 + 1) - 1}$, denn Zähler und Nenner sind teilerfremd.

Vgl. das 5. Beispiel: $q_1 = 1$, $r_1 = 150$, $q_2 = 1$, $r_2 = 75$, $q_3 = 2$, $r_3 = 0$. Der vollständig gekürzte Bruch nimmt den Wert $\frac{3}{5}$ an.

Vgl. das 10. Beispiel: $q_1 = 3$, $r_1 = 105$, $q_2 = 1$, $r_2 = 21$, $q_3 = 5$, $r_3 = 0$. Der vollständig gekürzte Bruch nimmt den Wert $\frac{6}{23}$ an.

Für $q_2=2$ gilt $r_2=0$. Es folgt $a=2r_1$ bzw. $a-r_1=r_1$ und $b=(2q_1+1)r_1$. Also ist auch b durch r_1 teilbar. Kürzen von $\frac{a}{b}$ mit r_1 führt zum vollständig gekürzten Bruch $\frac{2}{2q_1+1}$. (Der Autor bringt hierzu keine Beispiele.)

Der Fall $a-r_1 \mid a$ mit $r_1=0$ führt sofort zu $b=q_1a$, sodass $\frac{a}{b}=\frac{1}{q_1}$ ist.

Dieser Fall tritt beim 11. Beispiel $\frac{13}{143}$ auf: Der Autor schreibt, dass das Zahlenverhältnis nicht gut zu erkennen sei. Daher multipliziere man den Zähler so, dass er gemäß Mangel oder Überschuss den Nenner annähernd ausgleiche (ὥστε ἐξισωθῆναι ἔγγιστα κατ' ἐλλείψιν ἢ ὑπεροχὴν τῷ ... μεριστῇ). Multiplikation mit 11 – so stellt er fest – führt hier aber zu keiner ἐλλείψει oder ὑπεροχῇ, sodass mit 13 gekürzt werden kann mit dem Ergebnis $\frac{1}{11}$.

Die Behauptung (40.1) ist also wahr.

Die Behauptung (40.2) hingegen ist falsch, denn es lassen sich leicht Gegenbeispiele angeben, und zwar

- im Fall $r_1 < a-r_1$: Mit $b=27$, $a=8$ hat man $q_1=r_1=3$, wobei $3 \nmid 8$, aber $3 \mid 27$ gilt.
- im Fall $a-r_1 < r_1$: Mit $b=21$, $a=8$ hat man $q_1=2$, $r_1=5$, $a-r_1=3$, wobei $3 \nmid 8$, aber $3 \mid 21$ gilt.

12. Beispiel $\frac{216}{260}$:

$260-216=44$ (λείψις; ὑπεροχὴ wird nicht betrachtet), $216:44=4\frac{40}{44}$, $44-40=4$ (die ὑπεροχὴ wird wieder nicht betrachtet), $4 \cdot 11=44$ (ohne λείψις oder ὑπεροχὴ), $\frac{216}{260}$ und $\frac{40}{44}$ lassen sich also mit 4 vollständig kürzen. Ergebnis: $\frac{216}{260}=\frac{54}{65}$

Hierbei werden die Überlegungen am Schluss etwas verkürzt: Man kann noch den Schritt $\frac{44}{40}=1\frac{4}{40}$ betrachten, und der Bruch $\frac{4}{40}$ hat wegen $4 \cdot 10=40$ keine λείψις mehr, womit sich 4 wieder als maximale Kürzungszahl ergibt.

Vgl. hierzu den euklidischen Algorithmus in Bruchschreibweise: $\frac{b}{a}=q_1+\frac{r_1}{a}$, $\frac{a}{r_1}=q_2+\frac{r_2}{r_1}$, $\frac{r_1}{r_2}=q_3+\frac{r_3}{r_2}$, ...

Ähnlich geht der Autor bei zwei weiteren Beispielen vor. Doch danach wird allmählich deutlich, welches allgemeine Verfahren der Autor zum Kürzen von Brüchen lehrt.

In seinem 15. Beispiel $\frac{459}{558}$ spielt wieder wie beim zehnten (auch) die ὑπεροχὴ eine Rolle:

$558-459=99$ (λείψις; ὑπεροχὴ wird nicht betrachtet), $459:99=4\frac{63}{99}$, $2 \cdot 63-99=27$ (ὑπεροχὴ; hier wird die größere λείψις $99-63=36$ nicht betrachtet), $\frac{63}{27}=2\frac{9}{27}$, $9 \cdot 3=27$ (ohne λείψις oder ὑπεροχὴ). $\frac{459}{558}$ lässt sich also mit 9 vollständig kürzen. Ergebnis: $\frac{51}{62}$ (Der Verfasser weist darauf hin, dass man hier drei Brüche benötigt, um zum Ziel zu kommen.)

Es schließt sich eine ausführliche allgemeine Methodenbeschreibung an, die wie folgt beginnt (fol. 144^{r/v}):

Damit euch aber das Gesuchte klarer wird, untersuchen wir dies auch umfassend.

Und als erstes muss man dies wissen: In so große Teile muss der Zähler oben geteilt werden, in wie große auch der Nenner unten zulässt geteilt zu werden. Wenn nämlich durch den gleichen Teil geteilt wird, bewahrt sowohl der Zähler

oben als auch der Nenner unten das vorherige Verhältnis, auch wenn es in kleinster Teilung entsteht (Hinweis auf den vollständig gekürzten Bruch). Wenn aber der Zähler oben durch den einen Teil geteilt wird, der Nenner unten aber durch einen anderen, wird das Verhältnis der beiden aufgrund ihrer verschiedenen Teilung nicht bewahrt. Wenn nun der Zähler oben bei Weitem kleiner ist als der Nenner unten, multipliziere den Zähler oben mit so viel, dass er gemäß Mangel oder Überschuss mit der Zahl des Nenners unten annähernd ausgeglichen wird. Wenn der Zähler oben nach der Multiplikation völlig gleich der Zahl des Nenners unten wird, sodass er weder einen Mangel noch einen Überschuss hat, teile durch dieselbe obige Zahl des Zählers sowohl denselben Zähler oben als auch den unteren Nenner davon. Und die Teilung daraus wird ganzzahlig werden, insoweit es möglich ist, dass der Zähler oben und der Nenner darunter verkleinert wird ($\sigma\mu\kappa\rho\upsilon\nu\theta\eta\nu\alpha\iota$), um das kleiner Gewordene sicherer zu vergleichen. Wenn aber der Zähler gegenüber dem Nenner unten bei Weitem kleiner ist und nach Multiplikation des Zählers oben – um mit der Zahl des Nenners annähernd auszugleichen – das Produkt des Zählers oben mit der Zahl des Nenners unten nicht völlig ausgeglichen, sondern näherungsweise mangelhaft oder überschießend wurde, nimm den Mangel, wenn er der Zahl des Nenners unten näher ist, oder aber nimm nun den Überschuss, wenn er kleiner ist als der Mangel. Teile durch den kleineren – den Mangel oder den Überschuss – die obige Zahl des Zählers. Und wenn die Teilung daraus ganzzahlig geworden ist, hast du bereits den Zähler oben in einen kleinsten Teiler geteilt. Teile durch denselben kleineren – Mangel oder Überschuss – auch die untere Zahl des Nenners, denn es wird auch die Teilung daraus ganzzahlig werden wie auch die Teilung des Zählers oben. Wenn aber die Teilung des Zählers oben nicht ganzzahlig geworden ist, wird auch diejenige unten nicht ganzzahlig werden (Wiederholung der falschen Behauptung (40.2)). Wenn der kleinere – Mangel oder Überschuss – durch den du die obige Zahl des Zählers nicht in ganzzahliger Teilung geteilt hast, keine Teiler hat, um in Halbe oder Drittel oder Viertel oder auch irgendwie anders geteilt zu werden, ist sowohl die Zahl oben als auch die unten – des Zählers und des Nenners – unteilbar in ein und derselben Teilung ($\alpha\mu\epsilon\rho\eta\varsigma\ \epsilon\nu\ \tau\omega\ \alpha\upsilon\tau\omega\ \kappa\alpha\iota\ \epsilon\nu\ \mu\epsilon\rho\iota\sigma\mu\omega$, Definition der Teilerfremdheit); in einer Teilung nämlich kann der Zähler und in einer anderen der Nenner vielleicht geteilt werden. (Teilerfremde Zähler und Nenner können jeweils eigene verschiedene Teiler haben.) Wenn aber der kleinere – Mangel oder Überschuss – gewisse Teiler hat, aber die Teilung durch ihn nicht ganzzahlig geworden ist, sondern auch einen Bruch enthält, suche wiederum auch aus dem zweiten Bruch wie auch beim ersten den kleineren – Mangel oder Überschuss – der obigen Zahl des zweiten Zählers gegenüber der unteren Zahl des zweiten Nenners ...

Der Autor schildert nun den Umgang mit dem zweiten Bruch, wobei das Verfahren genauso wie beim ersten verläuft, und geht außerdem noch auf den möglichen Fall (mit erneuter Beschreibung des Verfahrens) ein, dass ein dritter Bruch entsteht. Die Tatsache, dass sein Verfahren – in Abhängigkeit von der Wahl des ersten Bruchs – auch mehr als drei Brüche (sogar beliebig viele) erzeugen kann, berücksichtigt er allerdings nicht.

Bei diesem Verfahren, einer vorteilhaften Variante des euklidischen Algorith-

mus, betrachtet man also nicht die kleinsten nichtnegativen Reste der Division, sondern die dem Betrage nach kleinsten Reste. Hierzu ist z. B. bei der ersten Division $b:a$ die Darstellung $b = q_1 a + r_1$, $0 \leq r_1 < a$ mit der Darstellung $b = (q_1 + 1)a - (a - r_1)$, $1 \leq a - r_1 \leq a$ zu vergleichen. Dabei ist $-(a - r_1)$ der größte nichtpositive Rest. Mit der Wahl des Minimums von $\lambda\epsilon\acute{\iota}\psi\iota\varsigma$ (r_1) und $\acute{\upsilon}\pi\epsilon\rho\omicron\chi\acute{\eta}$ ($a - r_1$) erhält man den Rest mit dem kleinsten Absolutbetrag. Dieses Minimum genügt außerdem einer verschärften Restbedingung bezüglich a : Falls r_1 das Minimum ist, folgt aus $r_1 \leq a - r_1$ sofort $r_1 \leq \frac{a}{2}$, umgekehrt folgt aus $a - r_1 \leq r_1$ die Beziehung $r_1 \geq \frac{a}{2}$, sodass auch $a - r_1 \leq \frac{a}{2}$ gilt. Insgesamt erhält man also die Abschätzung $\min(r_1, a - r_1) \leq \frac{a}{2}$.

Auch das modifizierte Verfahren erzeugt wieder eine streng monoton fallende Folge nichtnegativer ganzer Zahlen, und zwar der kleinsten Restbeträge $b > a = r_0' > r_1' > r_2' > r_3' > \dots$, sodass ein m existiert mit $r_m' > 0$, $r_{m+1}' = 0$ ($m \geq 0$). Außerdem gilt in Entsprechung zu $\text{ggT}(b, a) = \dots = r_n$ beim Ausgangsverfahren eine entsprechende Gleichungskette $\text{ggT}(b, a) = \dots = r_m'$, wobei sich die Zwischenglieder $\text{ggT}(r_i', r_{i+1}')$ im Allgemeinen von $\text{ggT}(r_i, r_{i+1})$, denen des ursprünglichen euklidischen Algorithmus, unterscheiden. Da die dem Absolutbetrag nach kleinsten Reste höchstens so groß wie die kleinsten nichtnegativen Reste sind, gilt darüber hinaus $m \leq n$, d. h.: Das modifizierte Verfahren benötigt höchstens so viele Schritte (ist "mindestens so schnell") wie das ursprüngliche.

Hierzu wollen wir noch einmal die Beispiele 4 und 15 des Autors aufgreifen.

$\frac{225}{300}$: Der euklidische Algorithmus ergibt $300 = 1 \cdot 225 + 75$, ($300 = 2 \cdot 225 - 150$ führt zu einem dem Betrage nach größeren Rest), $225 = 3 \cdot 75 + 0$. Die beschriebene Modifikation des Verfahrens wirkt sich hier nicht aus.

Parameter: $b = 300$, $a = 225$, $r_1 = r_1' = 75$, $\text{ggT}(300, 225) = \text{ggT}(225, 75) = 75$, $n = m = 1$

$\frac{459}{558}$: Der euklidische Algorithmus ergibt $558 = 1 \cdot 459 + 99$, $459 = 4 \cdot 99 + 63$, $99 = 1 \cdot 63 + 36$, $63 = 1 \cdot 36 + 27$, $36 = 1 \cdot 27 + 9$, $27 = 3 \cdot 9 + 0$.

Das modifizierte Verfahren, das der Autor nicht konsequent durchführt, verläuft folgendermaßen: $558 = 1 \cdot 459 + 99$ ($558 = 2 \cdot 459 - 360$ führt zu einem dem Betrage nach größeren Rest), $459 = 5 \cdot 99 - 36$ ($459 = 4 \cdot 99 + 63$ führt zu einem dem Betrage nach größeren Rest, den aber der Autor weiterverwendet), $99 = 3 \cdot 36 - 9$ ($99 = 2 \cdot 36 + 27$ führt zu einem dem Betrage nach größeren Rest), $36 = 4 \cdot 9 + 0$.

Parameter: $b = 558$, $a = 459$, $r_1 = 99$, $r_2 = 63$, $r_3 = 36$, $r_4 = 27$, $r_5 = 9$, $\text{ggT}(558, 459) = \text{ggT}(459, 99) = \text{ggT}(99, 63) = \text{ggT}(63, 36) = \text{ggT}(36, 27) = \text{ggT}(27, 9) = 9$, $n = 5$

$r_1' = r_1 = 99$, $r_2' = 36$, $r_3' = 9$, $\text{ggT}(558, 459) = \text{ggT}(459, 99) = \text{ggT}(99, 36) = \text{ggT}(36, 9) = 9$, $m = 3$

Hier erreicht man mit dem euklidischen Algorithmus in 6 Schritten, mit dem modifizierten Verfahren aber bereits in 4 Schritten das Ziel.

Im Übrigen hat der Verfasser das Beispiel $\frac{459}{558}$ später noch einmal aufgenommen und den Algorithmus mit den jeweils kleinsten Restbeträgen (s. o.) strikt durchgeführt.

Weiterhin erklärt der Autor u. a. zu diesem Verfahren sinngemäß: Die (letzte positive) $\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\varsigma$ oder $\acute{\upsilon}\pi\epsilon\rho\omicron\chi\acute{\eta}$ – unser r_m' – ist die maximale Kürzungszahl des Ausgangsbruchs. Wenn aber r_m' nur im Nenner des Ausgangsbruchs aufgeht, nicht aber im Zähler (oder auch umgekehrt, worauf der Verfasser aber

nicht eingeht), so hat man sich bei der Teilung verrechnet.

Nun werden noch drei Methoden zur Durchführung des Verfahrens genannt.

– ... *allein durch Multiplikation:*

Der Autor schreibt (fol. 145^r): Εὐρίσκεται δὲ τοῦτο καλῶς καὶ προχείρως διὰ μόνου τοῦ πολλ(α)πλασιασμοῦ, ἐὰν ἔχωμεν ἐν χερσὶ τὰ τῶν πολλ(α)πλασιασμῶν κανόνια ... Er knüpft an diese Methode also die Bedingung, dass Multiplikationstabellen zur Verfügung stehen. Solche Tabellen müssten aber einen enormen Umfang haben, um allein für die Bewältigung der bisherigen Beispiele hilfreich zu sein. Eine schlichte Einmaleinstafel wie im "Vorspann" auf fol. 5^r reicht also bei Weitem nicht aus, und die immerhin stattliche Quadratzahlentabelle von 1^2 bis 1050^2 im "2. Buch" (foll. 67^r–73^r) ist für den vorliegenden Zweck ungeeignet. Auch wenn ein Beispiel fehlt, dürfte immerhin feststehen, dass die multiplikative Schreibweise gemeint ist, wie wir sie bei der allgemeinen Darstellung des euklidischen Algorithmus verwendet haben.

– ... *allein durch Teilung:*

In einem allgemeinen Lehrtext (fol. 145^r) beschreibt der Autor hier erstmals den nicht modifizierten euklidischen Algorithmus, bei dem der Vergleich von ἔλλειψις und ὑπεροχή keine Rolle spielt, und zwar in der bei ihm üblichen Bruchschreibweise. Neu ist auch, dass von der Möglichkeit eines vierten oder fünften Bruchs oder von noch mehr Brüchen die Rede ist, um zum Ziel zu gelangen. Leider sind die Beispiele $\frac{234}{312}$ ($=\frac{3}{4}$) und $\frac{1332}{1887}$ ($=\frac{12}{17}$) nicht geeignet, den "neuen" Algorithmus zu illustrieren, da hier die positiven Reste stets auch die dem Betrage nach kleinsten Reste sind.

– ... *nicht allein durch die Teilungen, die man hat, sondern auch durch die Brüche, die nicht ganzzahlig geteilt werden*

Dieses bemerkenswerte Verfahren führt bei den Beispielen des Autors auf Doppelbrüche, im Allgemeinen auf Kettenbrüche. Eines seiner Beispiele ist $\frac{555}{1332}$. Die Rechnung verläuft folgendermaßen: $1332 : 555 = 2\frac{222}{555}$, also gilt $\frac{555}{1332} = \frac{1}{2\frac{222}{555}}$, in griechischer Schreibweise $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\beta\beta\beta}{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}$, mit $\frac{555}{222} = 2\frac{1}{2}$. Somit folgt

$$\frac{222}{555} = \frac{1}{2\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\frac{222}{555}} = \frac{1}{2\frac{2}{5}}.$$

Erweitere (ἀνάλυσον) aber dies mit den 5 unten,

und es kommt $\frac{5}{12}$ heraus ...

Offenkundig bahnt sich hier schon ein erstes Verständnis für die Kettenbruchentwicklung von Brüchen an. In unserer Terminologie zum euklidischen Algorithmus gilt nämlich:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{a}} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{r_3}{r_2}}}} = \dots =$$

$$\frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_n + \frac{1}{q_{n+1}}}}}}$$

Für das obige Beispiel gilt $q_1 = q_2 = q_3 = 2$, $n = 2$.

Das letzte Verfahren ("Doppelbruchverfahren") dient dem Autor außerdem zur Bestimmung von Näherungsbrüchen. (Dieser moderne Aspekt spielt auch im Zusammenhang mit der Kettenbruchentwicklung eine wichtige Rolle.) In seinen Beispielen geht er jeweils von einem unkürzbaren Bruch aus.

Betrachten wir seine Vorgehensweise bei $\frac{194}{443}$: Zunächst stellt der Autor zutreffend, aber ohne Begründung, fest, dass sich der Bruch nicht kürzen lässt. Es folgen die Schritte

$$\frac{443}{194} = 2\frac{55}{194}, \quad \frac{194}{443} = \frac{1}{2\frac{55}{194}}, \quad \frac{194}{55} = 3\frac{29}{55} \approx 3\frac{1}{2}, \text{ denn } 2 \cdot 29 = 58, \quad 58 - 55 = 3, \text{ also gilt}$$

$$\frac{55}{194} \approx \frac{1}{3\frac{1}{2}} = \frac{2}{7}, \quad \frac{1}{2\frac{55}{194}} \approx \frac{1}{2\frac{2}{7}}. \text{ Dies führt, mit 7 erweitert, zum Rundungsergebnis } \frac{7}{16}.$$

Anschließend untersucht der Verfasser noch, in welchem Zusammenhang der Näherungsbruch mit dem Ausgangsbruch steht, und gewinnt dabei Einsicht in die Größe des Rundungsfehlers.

Er stellt fest, dass $\frac{7}{16} = \frac{194 - \frac{3}{16}}{443}$ gilt, weil $\frac{7}{16} \cdot 443 = 194 - \frac{3}{16}$ ist. Daraus leitet er auch die Korrektur von $\frac{7}{16}$ zur Übereinstimmung mit dem Ausgangsbruch her:

$$\frac{194}{443} = \frac{7 + \frac{3}{443}}{16}$$

41 ***Darüber, welchen Nutzen die drei Viertel erbringen – der Bruch, der von den ,αρν' Hyperpyra übrig geblieben ist, die σ' Leute unter sich aufteilen***

Damit du weißt, welchen Nutzen die drei Viertel erbringen, was wir sagten: Angenommen, σ' Leute haben ,αρν' Hyperpyra unter sich aufzuteilen ... (vgl. Kap. 40)

Es folgt ein langer Text mit etlichen unnötigen Redundanzen. Es geht im Wesentlichen nur darum, wie man einen Geldwert mit gebrochener Maßzahl evtl. mithilfe einer kleineren Geldeinheit in einen ganzzahligen Geldwert umwandeln kann. Das Beispiel führt auf die Division $1150 : 200 = 5\frac{150}{200}$ (Hyperpyra) $= 5\frac{3}{4}$ (Hyperpyra). Wenn der Zähler 200 wäre – so der Verfasser – erhielte jede Person 6 Hyperpyra, und es bliebe zufällig (τὸ τυχόν) kein Bruch übrig. Zur Probe rechnet er $150 + 50 = 200$, $1150 + 50 = 1200$, $1200 : 200 = 6$ (mit den jeweiligen Einheiten).

Dann kehrt er zum Ausgangsbeispiel zurück, wandelt 1 Hyperpyron in 20 Kukkia um und erhält $\frac{3}{4}$ Hyperpyra $= \frac{3}{4}$ von 20 Kukkia = 15 Kukkia. Seine Begründung: $3 \cdot 5 = 15$ und $4 \cdot 5 = 20$ (Erweiterung des Bruchs $\frac{3}{4}$ mit 5 ergibt $\frac{15}{20}$.) Dem-

nach stehen jeder Person 5 Hyperpyra 15 Kukkia zu. Die Rechnung verlaufe (bis auf die Umwandlung) ebenso, wenn Florine (φλουρίά) zu verteilen gewesen wären. Zum Zähler 150 bemerkt er, er sei $\frac{3}{4}$ des Teilers und zugleich $\frac{3}{4}$ eines Hyperpyrons, wobei Letzteres nicht ganz korrekt ist.

Es folgt ein naheliegendes alternatives Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe: Der Zähler 150 (Hyperpyra) wird mit 20 multipliziert, anschließend wird das Produkt (3000 Kukkia) durch den Nenner 200 dividiert mit dem Ergebnis 15 (Kukkia). Die schriftlichen Rechenschemata des Autors sind dabei unnötig.

Als 2. Beispiel wählt er die Verteilung von 1040 Florin auf 50 Personen. Die wiederum schriftlich durchgeführte Division ergibt $20\frac{40}{50}$ Florin oder gekürzt $20\frac{4}{5}$ Florin. Nun nimmt er an, dass 1 Florin dem Wert von 8 Hyperpyra und daher von 160 Kukkia entspricht. (Im Rechenbuch treten für den Florin auch andere Paritäten auf – s. Metrologie.) Die weitere Rechnung $\frac{4}{5} \cdot 160$ Kukkia = 128 Kukkia erfolgt in zwei Schritten. Jeder Beteiligte erhält also 20 Florin 128 Kukkia bzw. 20 Florin 6 Hyperpyra 8 Kukkia, wobei die letzte Umrechnung ohne Kommentar angegeben wird. Rückblickend stellt der Autor – fachsprachlich nicht ganz korrekt – folgende Betrachtung an: *Dies hat uns der Bruch gezeigt, dass von den 1000 Florin jeder der 50 Leute 20 Florin gewinnt und dass von den 40 Florin – dem Zähler – jeder der 50 Leute jeweils 128 Kukkia gewinnt ... Wie nämlich die 40 Florin vier Fünftel von 50 Leuten sind, so gewinnt jeder der 50 vier Fünftel eines Florins, was 160 Kukkia sind.*

Anschließend stellt der Verfasser noch einen anderen Lösungsweg vor: 1 Florin = 8 Hyperpyra, 40 Florin (s. Zähler) = 320 Hyperpyra, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia, 320 Hyperpyra = 6400 Kukkia, 6400 Kukkia : 50 (s. Nenner) = 128 Kukkia = $\frac{4}{5}$ Florin = 6 Hyperpyra 8 Kukkia

Im Abschlusstext erläutert der Autor noch einmal (unter der Voraussetzung, dass bei der Division ein Bruch auftritt) die Bedeutung von Zähler und Nenner für die Umwandlung in kleinere Münzeinheiten, und dass der beschriebene Lösungsweg unabhängig von der zu verteilenden Größe – z. B. auch bei den Gewichtsmaßen Pfund und Unze – zum Ziel führt.

42 **Wie es möglich ist aufzuzeigen, welches Verhältnis der Zähler im Vergleich zum Nenner hat, γ'' oder δ'' oder ϵ'' , und welche Zeichen wir setzen**

Man muss auch dies wissen, welche Schriftzeichen wir gewöhnlich oberhalb des kleinen Strichs setzen, die zum Zähler gehören, und welche unterhalb des kleinen Strichs, die zum Nenner gehören, um ein Drittel oder ein Viertel oder ein Fünftel anzuzeigen, oder wie man den Zähler im Vergleich mit dem Nenner anders anzuzeigen hat.

Als Erstes werden die Stammbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{12}$ betrachtet, wobei jetzt die Schreibweise $\frac{\alpha}{\beta}$ (statt β''), $\frac{\alpha}{\gamma}$ (statt γ'') usw. gewählt wird: Der Autor beschreibt sie als die Hälfte eines Ganzen, da 1 die Hälfte von 2 ist, bzw. als ein Drittel eines Ganzen usw.

Danach erklärt er, wie man die folgenden Brüche ausspricht, und erläutert, wie sie gegebenenfalls zu kürzen sind: $\frac{2}{3}$ (δύο τρίτα, die anderen Brüche entsprechend), $\frac{2}{4}$ (= $\frac{1}{2}$, da 2 die Hälfte von 4 sei), $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{6}$ (= $\frac{1}{3}$, da 2 ein Drittel von 6

sei), $\frac{2}{12}$ ($= \frac{1}{6}$, mit Angabe der Kürzungsvorschrift), $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{6}$ ($= \frac{1}{2}$), $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$ ($= \frac{2}{3}$, mit Angabe der Kürzungsvorschrift), $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{6}{8}$ ($= \frac{3}{4}$, mit Kürzungsvorschrift), $\frac{6}{9}$ ($= \frac{2}{3}$), $\frac{6}{10}$ ($= \frac{3}{5}$), $\frac{6}{11}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{15}{17}$, $\frac{23}{35}$ und $\frac{25}{35}$ ($= \frac{5}{7}$). So gehe es weiter bis zu den Hundertern und Tausendern im Zähler und Nenner.

Man dürfe $\frac{3}{4}$ nicht "drei vier" aussprechen, denn *das klingt undeutlich und unbrauchbar* (ἀσήμεως γὰρ φωνεῖ τε καὶ ἀχρήστως), sondern müsse "drei Viertel" sagen. Die entsprechende Warnung wiederholt er beim Bruch $\frac{7}{8}$.

Sinngemäß erklärt er zum Abschluss dieses eher dürftigen Kapitels, dass die jeweilige Position der Zahlen im Hinblick auf den Bruchstrich die Lesart des Bruchs festlegt.

43

**Wie es möglich ist, zwei Brüche zu addieren, und zwar $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$,
und zu wissen, wie viel die beiden Teile addiert ergeben**

Angenommen, von irgendwelchen Divisionen seien zwei Brüche übrig geblieben, einerseits $\frac{2}{3}$, andererseits $\frac{3}{4}$. Du suchst diese zu addieren und zu wissen, wie viele Ganze die beiden Teile werden, wenn sie addiert worden sind ...

Zum Lösungsweg: Zunächst multipliziert man *die beiden Zahlen unten* (τὰς δύο κάτωθεν ψήφους), also 3 und 4, miteinander. 12 ist *eine gemeinsame Größe der beiden Teile* (ἐν σῶμα τῶν δύο μερῶν), von der dann $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ genommen werden: $\frac{2}{3}$ von 12 ist 8, $\frac{3}{4}$ von 12 ist 9. Addition ergibt 17, und dies ist noch durch 12 zu dividieren. Ergebnis: $1\frac{5}{12}$

Und anders leichter. Jetzt wird zwischen die beiden Brüche ein Andreaskreuz gesetzt, welches darauf hinweist, dass der Zähler jedes Bruchs mit dem Nenner des jeweils anderen zu multiplizieren ist: $2 \cdot 4 = 8$, $3 \cdot 3 = 9$. Daraus ergibt sich der Zähler $8 + 9 = 17$ der Summe. Zuvor wurde wieder der Nenner 12 (ἐν σῶμα τῶν δύο μερῶν) der Summe (Produkt der Nenner der Summanden) bestimmt. Ergebnis: $17 : 12 = 1\frac{5}{12}$

Diese Methode entspricht der heutigen, wenn (wie hier) der Hauptnenner (kleinstes gemeinsames Vielfaches – kgV – der Einzelnenner) mit dem Nennerprodukt übereinstimmt. "Methodische Hilfslinien" zur Erleichterung der gemeinen Bruchrechnung findet man auch in deutschsprachigen Rechenbüchern der frühen Neuzeit, z. B. besonders eindrucksvoll bei Apian (1527, E 8^v).

Schließlich bestätigt der Autor die Beziehung $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = 1\frac{5}{12}$ noch durch ein "praktisches" Beispiel, bei dem es ums Rechnen mit Geld geht. Die "allgemeine und bürgerliche Methode" (κοινὴ καὶ πολ(ι)τευομένη μεταχείρισις), die dem nahekommt, was wir heute unter "bürgerlichem Rechnen" verstehen, zitiert er im weiteren Verlauf des Rechenbuchs häufig dann, wenn es sich nicht um abstraktes Rechnen, sondern um das alltägliche mit Größen (hier: mit Geldwerten) handelt. Hier werden $\frac{2}{3}$ Florin und $\frac{3}{4}$ Florin mithilfe einer Umrechnung auf kleinere Münzeinheiten addiert, die ungebrochene Maßzahlen liefert. Im Unterschied zu Kapitel 41 soll dabei 1 Florin = 6 Hyperpyra, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia gelten. Zur Rechnung: $\frac{2}{3}$ von 120 Kukkia sind 80 Kukkia oder 4 Hyperpyra, $\frac{3}{4}$ von 120 Kukkia sind 90 Kukkia oder 4 Hyperpyra 10 Kukkia, als Summe ergeben sich 8 Hyperpyra 10 Kukkia. Davon werden 6 Hyperpyra (= 1 Florin) abgezogen, der Rest

2 Hyperpyra 10 Kukkia ist der Bruchanteil (τζάκισμα) von 1 Florin, und zwar $\frac{5}{12}$ Florin. (Begründung des Autors: $\frac{1}{12}$ von 120 Kukkia = 10 Kukkia, $\frac{5}{12}$ von 120 Kukkia = 50 Kukkia = 2 Hyperpyra 10 Kukkia)

Resultat: $\frac{2}{3}$ Florin + $\frac{3}{4}$ Florin = $1\frac{5}{12}$ Florin = 1 Florin 2 Hyperpyra 10 Kukkia.

Die Addition und Subtraktion von gebrochenen Größen über die Umwandlung in kleinere Größen mit ganzzahligen Maßzahlen ist eine immer noch aktuelle Methode der Didaktik des Bruchrechnens. Andererseits vermisst man ein vorgeschaltetes Kapitel zur (leichteren) Addition von gleichnamigen Brüchen.

44

**Wie es möglich ist, vier verschiedene Brüche zu addieren,
und zwar $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$,
und – wenn diese alle addiert worden sind – zu wissen,
welche ganze Zahlen sich ergeben**

Wie beim 1. Lösungsweg des vorigen Kapitels wählt der Autor wieder das Nennerprodukt ($3 \cdot 4 = 12$, $12 \cdot 5 = 60$, $60 \cdot 6 = 360$) als *gemeinsame Größe*, von der er die einzelnen Anteile berechnet: $\frac{2}{3}$ von 360 ist 240, $\frac{3}{4}$ von 360 ist 270, $\frac{4}{5}$ von 360 ist 288, $\frac{5}{6}$ von 360 ist 300. Mithilfe eines schriftlichen Additionsschemas erhält er als Summe 1098, anschließend dividiert er (schriftlich) durch das Nennerprodukt: $1098 : 360 = 3\frac{18}{360}$ (mit Umkehrprobe $3 \cdot 360 + 18 = 1098$). Er sieht noch, dass mit 18 gekürzt werden kann, und notiert $3\frac{1}{20}$ als Endergebnis.

Hier wäre es bequemer gewesen, mit dem Hauptnenner 60 (kgV der einzelnen Nenner) zu rechnen. Ergebnis: $3\frac{3}{60}$ oder $3\frac{1}{20}$

Es folgt wieder die "allgemeine und bürgerliche Methode", wobei dasselbe Währungssystem wie im vorigen Kapitel zur Anwendung kommt:

$\frac{2}{3}$ Florin + $\frac{3}{4}$ Florin + $\frac{4}{5}$ Florin + $\frac{5}{6}$ Florin = 4 Hyperpyra + 90 Kukkia (oder 4 Hyperpyra 10 Kukkia) + 96 Kukkia (oder 4 Hyperpyra 16 Kukkia) + 100 Kukkia (oder 5 Hyperpyra) = 18 Hyperpyra 6 Kukkia = 3 Florin 6 Kukkia = $3\frac{1}{20}$ Florin

Abschließend erklärt der Verfasser sinngemäß, dass man mit dieser Methode die Summe beliebiger verschiedener Brüche bestimmen kann.

Auf dem linken Rand des Blatts 30^v (Kapitel 43) verweist er auf ein Kapitel des sog. zweiten Buchs und auf Texte im Anhang, von denen aber nur der auf fol. 158^{r/v} die Addition von Brüchen direkt betrifft. Auf fol. 158^r findet man eine Marginalie: *Anstelle des 43. und 44. und 135. Kapitels* (letzteres gehört wieder zum "2. Buch") *schreibe man das Vorliegende, denn es enthält die drei Kapitel.* Hier berechnet der Autor zunächst $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ (s. Kapitel 43), $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8}$ (neues Beispiel) und $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$ (s. Kap. 44). Dabei greift er im Wesentlichen den ersten Lösungsweg aus den beiden zuletzt besprochenen Rechenbuchkapiteln auf. Allerdings werden die Summanden so erweitert, dass sie das Nennerprodukt als gemeinsamen Nenner – Bezeichnung: κοινὸς ἀριθμὸς (*gemeinsame Zahl*) statt ἐν σῶμα – annehmen.

Und anders leichter. Und zuerst muss man dies wissen: Wenn alle Teile unten von den verschiedenen aufgesuchten Teilen unteilbar und zueinander ungeformt (ἀμερῇ τε καὶ ἀσχημάτιστα πρὸς ἄλληλα) sind, werden sie mit der aufgezeigten Methode addiert. Damit ist gemeint, dass als gemeinsamer Nenner das Nenner-

produkt zu wählen ist, falls die Nenner "zueinander" teilerfremd sind. (Tatsächlich genügt allgemeine Teilerfremdheit.) *Wenn aber gewisse Teile der verschiedenen unten aufgesuchten Teile irgendwelche Teiler haben, sodass der eine Teil zum anderen gemäß dem halben Teil oder dem dritten "in Form steht"* (σχηματίζεσθαι), *werden sie sehr leicht mit der vorliegenden Methode addiert ...*

Beispiel $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8}$: Dieselbe Aufgabe hatte der Autor oben mit dem Nennerprodukt (192) berechnet. Nun stellt er fest, dass 4, 6 und 8 (gemeinsame) Teiler haben, und zwar verhalte sich 4 zu 6 wie $\frac{2}{3}$, 4 zu 8 wie $\frac{1}{2}$. Jetzt multipliziert er den größten Nenner (8) mit 3 – alternativ dazu die beiden Nenner 4 und 6 miteinander – und weist darauf hin, dass 24 durch die drei Nenner ganzzahlig teilbar ist. (24 ist der Hauptnenner.) Die weitere Rechnung soll hier übergangen werden.

Beispiel $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$ (s. o. und Kapitel 44, Nennerprodukt 360), Methode der Hauptnennerbestimmung: 3 wird mit 4 multipliziert. 12 ist durch 6 teilbar, aber nicht durch 5; $2 \cdot 12$, $3 \cdot 12$, $4 \cdot 12$ sind ebenfalls nicht durch 5 teilbar, aber $5 \cdot 12 = 60$ (Hauptnenner).

Dieses "systematische Probieren" ist hier eigentlich unnötig, ähnelt aber dem noch im heutigen Mathematikunterricht gebräuchlichen Verfahren zur kgV-Bestimmung über die Vielfachenmengen.

Beispiel $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{20}{21}$ (Nennerprodukt 2646), Methode der Hauptnennerbestimmung: Der Autor stellt wieder fest, dass die Nenner "zueinander in Form stehen" (πρὸς ἀλλήλα σχηματίζονται), also gemeinsame Teiler haben, denn 3 verhalte sich zu 6 wie $\frac{1}{2}$, zu 21 wie $\frac{1}{7}$, und 7 zu 21 wie $\frac{1}{3}$. Nun verdoppelt er den größten Nenner (21) und erhält 42 als Hauptnenner, der durch alle Nenner teilbar ist.

Die vorgestellten Beispiele lassen zunächst kein systematisches, sondern nur ein situationsbedingtes Vorgehen bei der Hauptnennerbestimmung erkennen. Doch zum Abschluss des Textes auf fol. 158^v präzisiert der Autor sein Verfahren. Sinngemäß drückt er sich folgendermaßen aus:

- Wenn die Nenner (paarweise) teilerfremd sind, erfolgt die Addition nach der 1. Methode, d. h. mithilfe des Nennerprodukts.
- Andernfalls soll man den größten Nenner verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen usw., bis ein Produkt entsteht, das durch alle Nenner ganzzahlig geteilt werden kann.

Man könnte auch einen kleineren Nenner vervielfachen, aber die Wahl des größten minimiert die Anzahl der nötigen Problemultiplikationen.

Es handelt sich tatsächlich um dasselbe Verfahren, das – neben dem der Primfaktorzerlegung – im heutigen Mathematikunterricht noch gebräuchlich ist.

Zu der Zeit, in der das Rechenbuch entstand, war die Bestimmung des Hauptnenners bei der Addition und Subtraktion von Brüchen noch keineswegs selbstverständlich. Bis zum 15. Jahrhundert haben sich nach TROPFKE (1980, S. 249–252, S. 254 f.) folgende Mathematiker dem Thema gewidmet: al-Karaǧi (10./11. Jh., Bagdad), Leonardo von Pisa (ca. 1170 bis nach 1240), Barlaam (1290 bis nach 1348, Kalabrien) und al-Kāšī (gest. 1429 in Samarkand). Von der *Logistica* Barlaams, eines byzantinischen Mönchs und Bischofs, könnte unser Autor Kenntnis gehabt haben.

45

**Wie es möglich ist, $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ zu subtrahieren
und den Rest zu wissen, wie groß er ist**

Um zu zeigen, dass $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ gilt, verwendet der Autor dieselben drei Methoden wie in Kapitel 43. Bei der dritten, der "allgemeinen und bürgerlichen Methode", legt er wieder die Paritäten 1 Florin = 6 Hyperpyra, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia zugrunde und erhält – hier etwas abgekürzt – $\frac{3}{4}$ Florin – $\frac{2}{3}$ Florin = 4 Hyperpyra 10 Kukkia – 4 Hyperpyra = 10 Kukkia = $\frac{1}{12}$ Florin.

Auf dem unteren Rand von fol. 31^r findet sich eine Notiz des Schreibers B (vgl. foll. 126^v–140^r, ed. HUNGER/VOGEL 1963), die sich auf die Überschrift des vorliegenden Kapitels bezieht. Es geht um die *Subtraktion von Brüchen* (ὀφειλμὸς τζακισμάτων), wobei ὀφειλμός bezeichnenderweise nicht zum Vokabular unseres Autors (Schreiber A) gehört.

$$\begin{array}{r} 11\frac{1}{3} \quad 25\frac{1}{2} \\ \hline 34 \quad 51 \\ 2 \quad 3 \\ \hline 68 \quad 153 \\ \hline 68 \quad 68 \\ \hline 85 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 88 \\ 66 \end{array} \Bigg| 14\frac{1}{6}$$

Nach dem Schema wird $25\frac{1}{2} - 11\frac{1}{3}$ wie folgt berechnet: $3 \cdot 11 + 1 = 34$, $2 \cdot 25 + 1 = 51$, $34 \cdot 2 = 68$, $51 \cdot 3 = 153$, $153 - 68 = 85$, $85 : 6 = 14\frac{1}{6}$. Dabei wird die Multiplikation über Kreuz beim Gleichnamigmachen von $\frac{34}{3}$ und $\frac{51}{2}$ graphisch hervorgehoben. Die weitere Rechnung ist klar. Natürlich wäre es einfacher gewesen, zuerst die ganzzahligen Anteile zu subtrahieren.

46

Wie es möglich ist zu wissen, wie viele Fünftel die $\frac{7}{8}$ ergeben

Hier wäre eine elementare Rechnung $\frac{7}{8} = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{5} = \frac{35}{8} \cdot \frac{1}{5}$ möglich gewesen – Ergebnis: $\frac{35}{8}$ oder $4\frac{3}{8}$ – oder man wählt den algebraischen Ansatz $\frac{7}{8} = \frac{x}{5}$ mit demselben Resultat für x . Bei beiden Wegen ist allerdings die Multiplikation von Brüchen erforderlich, die erst im Kap. 48 behandelt wird.

Der Autor geht folgendermaßen vor: $\frac{7}{8}$ und $\frac{1}{5}$ werden mit einem Andreaskreuz verbunden, um deutlich zu machen, dass jeder Zähler des einen Bruchs mit dem Nenner des jeweils anderen zu multiplizieren ist (vgl. Kap. 43): $7 \cdot 5 = 35$, $1 \cdot 8 = 8$. Es folgt die (schriftliche!) Division $35 : 8 = 4\frac{3}{8}$ und damit das Ergebnis. Dieses Rechenrezept, das ohne die Multiplikationsregel für Brüche nicht verständlich ist, entspricht im Wesentlichen der elementaren Rechnung oben.

Man muss aber auch dies wissen, dass jedes der $\frac{7}{8}$ kleiner als $\frac{1}{5}$ ist und um so viel kleiner, wie groß $\frac{3}{8}$ von $\frac{1}{5}$ ist.

Zur Begründung führt der Autor sinngemäß die Gleichung $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ an. Die Subtraktion $\frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{8-5}{8 \cdot 5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5}$ ($= \frac{3}{40}$) hätte besser erkennen lassen, wie das Ergebnis zustande kommt.

Eine weitere Begründung für die Resultate der beiden Rechnungen liefert wieder die "allgemeine und bürgerliche Methode", wobei nun 80 Hyperpyra als *eine Einheit* (σῶμα ἓν) dienen. Diese Wahl ist insoweit vorteilhaft, als bei sämtlichen Zwischenschritten mit ganzzahligen Hyperpyra-Beträgen operiert werden kann, so dass eine Umrechnung in kleinere Münzeinheiten (s. Kap. 43–45) nicht mehr erforderlich ist. Nach dem Prinzip des Rechnens mit möglichst kleinen Zahlen, das uns schon beim Gleichnamigmachen von Brüchen begegnet ist (Wahl des

Hauptnenners, der im Allgemeinen kleiner als das Nennerprodukt ist), hätten hier allerdings schon 40 Hyperpyra als "Einheit" denselben Zweck erfüllt. Der explizite Verlauf der Rechnung leuchtet ein und kann daher übergangen werden.

Am Ende des Kapitels versichert der Autor mit einer formelhaften Wendung, die bei ihm häufig zu finden ist: *Ebenso kannst du auch jede andere ähnliche Frage mithilfe derselben gleichen leichten Methode wissen.* So stellt er noch die Fragen, wie viel Viertel $\frac{4}{5}$ und wie viel Drittel $\frac{5}{6}$ sind, welcher Teil $\frac{1}{5}$ fehlt, damit $\frac{1}{4}$ herauskommt, und wie $\frac{1}{6}$ zu $\frac{1}{3}$ ergänzt werden muss (ohne Lösung).

47 *Wie es möglich ist zu wissen, welches größer ist, die $\frac{5}{6}$ oder die $\frac{8}{9}$, und wie man zu $\frac{5}{6}$ so viel addieren kann, dass als Ergebnis $\frac{8}{9}$ zurückbleibt*

Die Kapitelüberschrift ist etwas unglücklich formuliert, da mit der zweiten Frage die Antwort der ersten bereits nahegelegt wird.

Der Text beginnt hier wie in den meisten anderen Kapiteln mit einer Wiederholung der Problemstellung aus der Kapitelüberschrift. Danach folgt eine banale Feststellung: *Wenn das Überschießende zum Kleineren addiert wird, wird das Kleinere so groß werden, wie auch das Größere ist.* Dabei hat der Autor sprachliche Präzision vermissen lassen, denn er verwendet für *das Überschießende* (den Unterschiedsbetrag) denselben Begriff wie für *das Größere*, nämlich τὸ ὑπερέχον.

Dies kannst du so behandeln ... Der Autor berechnet mit Verweis auf das rechts stehende Schema zunächst das Nennerprodukt $6 \cdot 9 = 54$ (ἐν $\frac{5}{6} \times \frac{8}{9}$ σῶμα τῶν δύο μερῶν) – anstatt den Hauptnenner 18 – und nimmt davon jeweils $\frac{5}{6}$ und $\frac{8}{9}$, also 45 und 48. Daraus schließt er, dass $\frac{8}{9}$ um $\frac{3}{54}$ größer als $\frac{5}{6}$ ist. Es folgt eine mehrfache wortreiche Erklärung, dass dieser Unterschiedsbetrag zu $\frac{1}{18}$ gekürzt werden kann.

Wie das Schema nahelegt, ergeben sich die Zahlen 45 und 48 auch durch Multiplikationen über Kreuz; darauf weist der Schreiber in den Randbemerkungen von fol. 31^v hin. Dort wiederholt er die Aussage über das Größenverhältnis der beiden Brüche zueinander und den Unterschiedsbetrag.

Die folgende Aufgabe passt nicht zur Kapitelüberschrift:

Wenn du aber wissen willst, wie viele Ganze bei der Addition von $\frac{5}{6}$ und $\frac{8}{9}$ herauskommen, addiere die 45 ... mit den 48 ..., und es ergeben sich zusammen 93. Dann dividiert der Autor 93 durch 54 schriftlich (!) – vgl. sein Diagramm – mit dem Ergebnis $1\frac{39}{54}$, das er (wieder wortreich) zu $1\frac{13}{18}$ kürzt.

Anschließend geht es darum, von $\frac{8}{9}$ den Überschuss von $\frac{8}{9}$ gegenüber $\frac{5}{6}$ zu subtrahieren. Der Autor rechnet alles ausführlich vor, wobei er wieder das Multiplikationsdiagramm verwendet. Seine Rechenschritte sind $6 \cdot 9 = 54$, $5 \cdot 9 = 45$, $6 \cdot 8 = 48$, $45 \hat{=} (er\ schreibt\ ist)\ \frac{5}{6}$, $48 \hat{=} (ist)\ \frac{8}{9}$, $48 - 3 = 45$, $3 \hat{=} (ist)\ \frac{1}{18}$. Daraus erhält er $\frac{8}{9} - \frac{1}{18} = \frac{5}{6}$. Auf die naheliegende Idee, sofort $\frac{8}{9} - (\frac{8}{9} - \frac{5}{6}) = \frac{5}{6}$ hinzuschreiben, was nur der Auflösung einer Minusklammer entspricht, kommt er nicht.

(Beziehungen wie $a - (a - b) = b$ sind inhaltlich bereits aus der Antike bekannt.)

Am Ende steht eine der häufig wiederholten Redewendungen zur Feststellung,

dass die beschriebene Lösungsmethode auf Aufgaben gleichen oder ähnlichen Typs übertragbar ist (vgl. I. 2. 4. 5). Solche Redefiguren sollen künftig nur noch ausnahmsweise erwähnt werden.

Wie aus den Marginalien von fol. 31^v hervorgeht, möchte aber der Autor seinen Stoff nun nachträglich anders anordnen, und zwar will er die Kapitel 45–47, die hier ohne Nutzen ständen, zusammen mit einer Passage im Anhang des Rechenbuchs, auf die er mit einem Zeichen verweist, vor das Kapitel 144 (aus dem 2. Buch) setzen.

Die genannte Passage (fol. 157/1^v) beinhaltet in Wortform formulierte Aufgaben, die das Lösen von Gleichungen erfordern, z. B. (in unserer Schreibweise) von $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{5}x$. Hier wird die Lösung ($x = 3\frac{1}{3}$) nicht algebraisch, sondern mithilfe eines Rechenrezepts für die Koeffizienten ermittelt, das sich aus den algebraischen Umformungen erklären lässt: $2 \cdot 5 = 10$, $1 \cdot 5 = 5$, $2 \cdot 1 = 2$, $5 - 2 = 3$, $10 : 3 = 3\frac{1}{3}$; multipliziert mit 1 (Subtrahend in der obigen Gleichung) ergibt sich die Lösung $3\frac{1}{3}$. Es ist sofort einzusehen, dass der Autor zunächst $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ berechnet und dann den Kehrwert betrachtet. Es folgen drei weitere analoge Beispiele.

In Kapitel 144 (fol. 79^v) werden spezielle Lösungen von (wieder verbal formulierten) linearen Gleichungen in zwei Variablen gesucht, wie z. B. $\frac{2}{3}x + y = \frac{3}{4}y + x$ (in unserer Schreibweise). Der Autor schreibt die Brüche als Schemata nebeneinander und rechnet $2 \cdot 3 = 6$ (Zähler), $3 \cdot 4 = 12$ (Nenner), $12 - 6 = 6$, *die aus beiden Teilen entstandene Zahl*. Er setzt im rechten Schema fort: $4 - 3 = 1$, $1 \cdot 3$ (aus dem linken Schema) = 3; die gesuchte erste Zahl (x) ist 3. Dann betrachtet er das linke Schema: $3 - 2 = 1$, $1 \cdot 4$ (aus dem rechten Schema) = 4; die gesuchte zweite Zahl (y) ist 4. Es folgt noch eine Probe, die zeigt, dass – wie zuvor behauptet – beide Seiten der Gleichung gleich 6 sind. Die Zahlen 3 und 4 erfüllen die Bedingungen. Mit dieser speziellen Lösung begnügt sich der Autor, weitere Lösungen oder die allgemeine Lösung ($y = \frac{4}{3}x$, x beliebig) gibt er nicht an bzw. umschreibt sie nicht. Hier ist noch zu klären, wie diese Spezialisierung aus algebraischer Sicht zustande kommt:

Wir untersuchen die allgemeine Gleichung $\frac{a}{b}x + y = \frac{c}{d}y + x$ mit $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} < 1$.

Unser Autor betrachtet den Wert $bd - ac$, der wegen $\frac{a}{b} < 1 < \frac{d}{c}$ positiv ist, und ermittelt die Lösungen aus dem Gleichungssystem $x = (d - c) \cdot b$, $y = (b - a) \cdot d$. Setzt man diese x , y in die obige Gleichung ein, so erhält man tatsächlich auf beiden Seiten $bd - ac$. Damit ist das Paar (x, y) als Lösung verifiziert. Die allgemeine Lösung der obigen Gleichung lautet aber, wie man leicht zeigen kann, $y = \frac{(b-a)d}{(d-c)b} \cdot x$ (mit beliebigem x). Jetzt zeigt sich, dass der Autor für x speziell den Nenner dieses Terms gewählt hat, sodass für y gerade der Zähler übrig bleibt. Darüber hinaus gibt es auch unendlich viele ganzzahlige Lösungen.

Im Kapitel 144 ist nur noch eine weitere, analoge Aufgabe zu finden.

48 **Wie man $\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ mit $\frac{1}{3}$ und $2\frac{1}{4}$ mit $\frac{2}{3}$ und $2\frac{3}{4}$ mit $3\frac{4}{5}$ multiplizieren kann usw.**

Angenommen, du willst $\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren und von dem Produkt davon erfahren, wie groß es wird. Und zuerst muss man dies wissen, dass jedes Tza-

kisma ("Zerteilung", hier die Bezeichnung für Bruch) *kleiner ist als ein Ganzes, weshalb es auch Tzakisma genannt wird. Da aber jedes Tzakisma kleiner als ein Ganzes ist, wächst, wenn ein Tzakisma mit einem Tzakisma multipliziert wird, das Produkt von diesen nicht an, sondern es wird vielmehr kleiner. Denn $\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliziert – das Produkt von diesen ergibt $\frac{1}{4}$, denn $\frac{1}{2}$ -mal $\frac{1}{2}$, d. h. die Hälfte der Hälfte ("der Mitte"), ist $\frac{1}{4}$... Das Produkt von diesen entsteht sachverständig so. Erst jetzt folgt die Regel – entsprechend unserer Schreibweise mit Variablen $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ($b, d \neq 0$) – anhand der Beispiele $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$. (Hier hätte von vornherein gekürzt werden können.) Die beiden letzten Beispiele werden in der Kapitelüberschrift nicht erwähnt. Auf das scheinbar merkwürdige Phänomen, dass πολλαπλασιασμός (wörtlich "Vervielfältigung", vgl. lat. *multiplicatio*) zu etwas Kleinerem als vorher führen kann (wie hier bei echten Brüchen), hat der Autor zu Beginn des Kapitels eigens hingewiesen.*

$2\frac{1}{4}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliziert

Nun ist einer der Faktoren eine gemischte Zahl. Der Schreiber gibt zwei Verfahren an.

Beim ersten rechnet er $4 \cdot 2 = 8$, $8 + 1 = 9$, $2 \cdot 9 = 18$, $4 \cdot 3 = 12$, $18 : 12 = 1\frac{6}{12} = 1\frac{1}{2}$. Dabei hat er implizit $2\frac{1}{4}$ in den unechten Bruch $\frac{9}{4}$ verwandelt und diesen mit $\frac{2}{3}$ multipliziert.

Beim zweiten – eingeleitet durch Καὶ ἄλλως – bestimmt er $2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ ($= 1\frac{1}{2}$), wendet also das Distributivgesetz $(a + b)c = ac + bc$ an.

$2\frac{3}{4}$ mit $3\frac{4}{5}$ multipliziert

Jetzt sind beide Faktoren gemischte Zahlen, die implizit in unechte Brüche verwandelt und anschließend multipliziert werden (1. Verfahren). Das Ergebnis $10\frac{9}{20}$ erhält der Autor auch dadurch, dass er das verallgemeinerte Distributivgesetz $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ anwendet, hier also $2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$ berechnet (2. Verfahren). Sofern bei den Summanden unechte Brüche auftreten, werden diese – wie auch schon beim vorherigen Beispiel – sofort wieder in gemischte Zahlen verwandelt.

Im (hier nicht wiedergegebenen) Additionsdiagramm erscheinen die vier Summanden in den ersten drei Zeilen und in der 4. Zeile rechts, $1\frac{9}{20}$ (4. Zeile links) ist als Zwischensumme der drei Brüche $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{5}$ zu verstehen. Die Addition dieser Brüche hätte im Hinblick auf Kapitel 44 nicht mehr ausführlich vorgerechnet werden müssen. Stattdessen treibt der Schreiber einen unangemessenen Aufwand, weil er meint, dass die Brüche *ungleichnamig* (ἀνόμοια) seien und *du diese nicht addieren kannst*. (!) Die Wahl des Nennerprodukts 100 als ἐν σῶμα anstatt des Hauptnenners 20 ist dabei besonders ungeschickt. Zu bemängeln ist außerdem, dass der Autor wie so oft auch hier wieder einfache Kopfrechnungen schriftlich durchführt – vgl. die entsprechenden Diagramme.

Am unteren Seitenrand (fol. 32^r) hat der 2. Schreiber (B), unverkennbar an seiner Punktschreibweise für die Null, die letzten beiden Multiplikationen flüchtig in einem Diagramm skizziert. Dabei sollen einige Verbindungslinien den richtigen Rechenweg aufzeigen, der jeweils nach dem 1. Verfahren unseres Autors abläuft:

$$\begin{array}{r}
 2\frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \\
 \hline
 12 \quad \frac{2}{3} \\
 \hline
 9 \quad 6 \\
 \hline
 2 \quad 18 \\
 \hline
 18 \quad 12 \quad \left| \quad 1\frac{6}{12} \text{ das ist } 1\frac{1}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2\frac{3}{4} \quad 3\frac{4}{5} \\
 \hline
 20 \quad 19 \\
 \hline
 11 \quad 11 \\
 \hline
 19 \\
 \hline
 19 \\
 \hline
 209
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 209 \\
 20 \\
 20 \quad \left| \quad 10\frac{9}{20}
 \end{array}$$

$4\frac{3}{4}$ mit $9\frac{2}{5}$ multipliziert

Mit diesem Beispiel, das in der Überschrift nicht genannt wurde, beschließt der Autor das Kapitel. Der Ablauf der beiden Verfahren wird wieder ausführlich dargestellt, und auch Schreiber B hat wieder ein Diagramm (am linken Rand von fol. 32^v) zur Illustration des 1. Verfahrens beigesteuert. (Ergebnis: $44\frac{13}{20}$)

49

Wie man

**$\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 36 und $\frac{3}{4}$ von $\frac{3}{4}$ von 48 und $\frac{2}{5}$ von $\frac{2}{3}$ von 30
nehmen kann und so der Reihe nach**

Angenommen, du suchst $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 36 zu nehmen. Multipliziere die 2 oben mit der 2 oben: zweimal 2 ergeben 4. Multipliziere auch die 3 unten mit der 3 unten: dreimal 3 ergeben 9 – diese 4 und 9, so gelegen $\frac{4}{9}$, bezeichnen 4 Neuntel. Und siehe, du hast gefunden, dass $\frac{4}{9}$ von 36 (gleich) $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 36 ist. Die $\frac{4}{9}$ von 36 sind 16: Denn das Neuntel von den 36 ist 4, 4 Neuntel aber, d. h. 4-mal 4, gibt 16. 16 ist aber $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 36. Denn $\frac{2}{3}$ von 36 ist 24: denn zweimal 12 ergeben 24 und dreimal 12 ergeben 36. $\frac{2}{3}$ von 24 sind 16: denn zweimal 8 ergeben 16 und dreimal 8 ergeben 24. Und siehe, die $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 36 sind 16, diese 16 ist $\frac{4}{9}$ von 36.

Dem (wieder unnötig ausführlichen) Text ist zu entnehmen, wie man den Bruchanteil eines Bruchanteils einer natürlichen Zahl berechnet ("von" muss multiplikativ gedeutet werden) und wie sich diese Rechenweise begründen lässt. Dies wird deutlich, wenn der Autor bei der vorliegenden Aufgabe $\frac{4}{9}$ von (mal) 36 mit $\frac{2}{3}$ von (mal) 24 vergleicht, letztlich also die Übereinstimmung von $(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}) \cdot 36$ mit $\frac{2}{3} \cdot (\frac{2}{3} \cdot 36)$ feststellt.

In gleicher Ausführlichkeit werden nun noch die beiden anderen angekündigten Beispiele behandelt: $\frac{3}{4}$ von $\frac{3}{4}$ von 48 = 27, $\frac{2}{5}$ von $\frac{2}{3}$ von 30 = 8.

50

Wie man

**$\frac{2}{3}$ von 35 und $\frac{3}{4}$ von 35 und $\frac{7}{9}$ von 5 und $\frac{15}{20}$ von 11 und $\frac{31}{55}$ von 100
nehmen kann und so der Reihe nach**

Angenommen, du suchst $\frac{2}{3}$ von 35 zu nehmen. Du kann dies so nehmen. Multipliziere die 35 mit den 2 oben: zweimal 35 ergeben 70. Teile die 70 durch die 3 unten, und die Teilung von diesen ergibt $23\frac{1}{3}$. Und siehe, die $\frac{2}{3}$ von 35 – du hast gefunden, dass sie $23\frac{1}{3}$ sind.

In sprachlich völlig gleicher Weise werden die Lösungstexte zu den vier weiteren Aufgaben präsentiert, die in der Kapitelüberschrift angekündigt sind. Of-

fenbar hält der Autor es für erforderlich, die dabei vorzunehmenden Divisionen schriftlich detailliert auszuführen, wie seine nachfolgende Tabelle (hier in unsere Ziffern übertragen) zeigt.

$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 7\ 0 \\ 3\ 3 \\ 2\ 3 \text{ und } \frac{1}{3} \end{array}$	$\begin{array}{r} 2\ 1 \\ 1\ 0\ 8 \\ 4\ 4 \\ 2\ 6 \text{ und } \frac{1}{4} \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ 3\ 8 \\ 9 \\ 3 \text{ und } \frac{8}{9} \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ 6\ 5 \\ 2\ 0 \\ 8 \text{ und } \frac{1}{4} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3\ 2 \\ 6\ 8 \\ 3\ 1\ 0\ 0 \\ 5\ 5\ 5 \\ 5\ 6 \text{ und } \frac{4}{11} \end{array}$
$\frac{2}{3}$ von 35	$\frac{3}{4}$ von 35	$\frac{7}{9}$ von 5	$\frac{15}{20}$ von 11	$\frac{31}{55}$ von 100

Darüber hinaus variiert der Autor noch das dritte und vierte Beispiel, indem er – mit der Einleitung *und umgekehrt* – die Kehrbrüche betrachtet, also $\frac{9}{7}$ von 5 ($=6\frac{3}{7}$) und $\frac{20}{15}$ von 11 ($=14\frac{2}{3}$). Hier zeigt er keine Scheu, auch unechte Brüche hinzuschreiben. Zu den Erklärungen der Rechenoperationen liefert er wieder eine Tabelle mit den schriftlichen Divisionen, die für uns nicht weiter von Interesse ist.

Merkwürdig ist, dass im vorigen Kapitel Aufgaben zum selben Thema, nämlich zur Berechnung von Bruchanteilen, schon in komplexerer Form als in diesem auftraten. Daher hätten die Kapitel ausgetauscht werden sollen. Andererseits weist der Autor auf dem rechten Rand von fol. 33^r darauf hin, dass das vorliegende Kapitel mit dem Kapitel 136 (aus dem sog. 2. Buch) vereinigt werden sollte. Dort (fol. 76^r) werden Bruchteile von gemischten Zahlen ausführlich nach dem Distributivgesetz berechnet, z. B. $(\frac{1}{2} \text{ von } 17\frac{13}{25}) = (\frac{1}{2} \text{ von } 17) + (\frac{1}{2} \text{ von } \frac{13}{25}) = 8\frac{1}{2} + \frac{13}{50} = 8\frac{25}{50} + \frac{13}{50} = 8\frac{38}{50} = 8\frac{19}{25}$.

Als Leser erwartet man nun vom folgenden Kapitel, dass die Division von Brüchen behandelt wird. Der Autor geht aber gleich zur Division gemischter Zahlen über.

51

**Wie man 7 und $\frac{1}{3}$ in $5\frac{1}{2}$ Teile teilen und wissen kann,
um wie viel jeder Teil der $5\frac{1}{2}$ größer ist als jeder der 7 und $\frac{1}{3}$**

Angenommen, du willst 7 und $\frac{1}{3}$ in $5\frac{1}{2}$ Teile teilen. Wenn die 7 und $\frac{1}{3}$ Teile $5\frac{1}{2}$ geworden sind, wird jeder Teil (μέρος) der $5\frac{1}{2}$ auf jeden Fall größer als jeder der 7 und $\frac{1}{3}$. Du suchst zu wissen, um wie viel größer jeder der $5\frac{1}{2}$ ist als jeder der 7 und $\frac{1}{3}$.

Du kannst dies so erfahren. Die 5 haben den vorliegenden Bruch $\frac{1}{2}$, was der halbe Teil eines Ganzen ist. Da aber die 5 nicht völlig in ganze Teile aufgeteilt sind, sondern auch $\frac{1}{2}$ haben, mache auch die 5 Ganzen zu Halben ... und die $5\frac{1}{2}$ werden zusammen 11 Halbe. Mache auch die 7 und $\frac{1}{3}$ zu Halben ... und es ergeben sich $14\frac{2}{3}$ Halbe. Und die $14\frac{2}{3}$ sind eine Größe im Verhältnis zu den (σὺμα ἀνάλογον τῶν) 7 und $\frac{1}{3}$. Die 11 [Halben] sind selbst auch eine Größe im Verhältnis zu den $5\frac{1}{2}$, Teiler aber von $14\frac{2}{3}$. Teile die $14\frac{2}{3}$ durch die 11: Die 11 können von den $14\frac{2}{3}$ einmal abgezogen werden, und es bleibt als Bruch $3\frac{2}{3}$. Mache die $3\frac{2}{3}$ zu Dritteln ... – zusammen 11 Drittel die 3 Ganzen und $\frac{2}{3}$. Mache auch

die 11, die du als Teiler der $14\frac{2}{3}$ hattest, zu Dritteln ... 33 Drittel ergeben die 11, der Teiler natürlich. Die 11 Drittel des Zählers verglichen mit den 33 Dritteln des Nenners haben das Verhältnis $\frac{1}{3}$... Und siehe, der Quotient von den $14\frac{2}{3}$ und den 11 ... ist ein Ganzes und $\frac{1}{3}$... Und siehe, jeder Teil (μέρος) der $5\frac{1}{2}$ ist größer als jeder Teil der 7 und $\frac{1}{3}$, und zwar um so viel, wie $\frac{1}{3}$ jeder Einheit (σῶμα) von den 7 ist. Wenn man nämlich $\frac{1}{3}$ jeder Einheit der 7 zur selben Einheit addiert, wird herauskommen, wie groß jeder Teil (σῶμα) der $5\frac{1}{2}$ ist.

In diesem Abschnitt geht es einerseits um die Division $7\frac{1}{3} : 5\frac{1}{2}$, deren rechnerische Durchführung auf den ersten Blick ungeschickt wirkt. Zunächst wird das Verhältnis mit 2 erweitert und $14\frac{2}{3} : 11$ berechnet mit dem Zwischenergebnis 1 Rest $3\frac{2}{3}$. Dieser Rest muss noch durch 11 dividiert werden, was durch Umwandlung von $3\frac{2}{3}$ in den unechten Bruch $\frac{11}{3}$ und Erweiterung von 11 auf Drittel geschieht.

Brüche lassen sich dividieren, indem man sie auf einen gemeinsamen Nenner (vorteilhafterweise den Hauptnenner) erweitert und die dann entstehenden Zähler ins Verhältnis setzt. Diese Methode lässt sich schon im ägyptischen Papyrus Rhind, in der Spätantike, in China, bei den Muslimen und vereinzelt auch noch in deutschsprachigen Rechenbüchern des 16. Jahrhunderts nachweisen (vgl. TROPFKE [1980, S. 261]). Auch der Schreiber B aus demselben Kodex (HUNGER/VOGEL [1963], S. 79, Nr. 96; S. 104) kennt das Erweiterungsverfahren ebenso wie der Autor des byzantinischen Rechenbuchs aus dem frühen 14. Jahrhundert (VOGEL [1968], S. 107, Nr. 88: S. 145).

Unser Schreiber führt eine Erweiterung in zwei Schritten vor: erst mit 2, dann mit 3. Wenn man die Schritte vergleicht, die bei einer sofortigen Erweiterung mit 6 durchzuführen sind, nämlich $7\frac{1}{3} : 5\frac{1}{2} = \frac{22}{3} : \frac{11}{2} = \frac{44}{6} : \frac{33}{6} = 44 : 33 = 1\frac{11}{33} = 1\frac{1}{3}$, so zeigt sich, dass er doch vorteilhaft zu rechnen versteht (Vermeidung "größerer" Zahlen), auch wenn das zunächst wenig transparent für den Lernenden ist.

Im heutigen Mathematikunterricht hingegen lernt man, dass man durch einen Bruch dividiert, indem man mit dem Kehrbuch multipliziert. Diese Regel lässt sich auch herleiten, indem man zunächst Dividend und Divisor auf das Nennerprodukt erweitert: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Sie war den byzantinischen Autoren (s. o.) offenbar nicht bekannt, konnte sich erst in der frühen Neuzeit allmählich durchsetzen und scheint dann das Erweiterungsverfahren mehr und mehr verdrängt zu haben. (Vgl. TROPFKE [1980, S. 261–263].)

Wir kommen zurück zum bisher übersetzten Abschnitt des vorliegenden Kapitels, da hier noch die Begriffe μέρος bzw. σῶμα zu diskutieren sind. Bezogen auf 7 oder $7\frac{1}{3}$ ist offenbar die Einheit 1 gemeint, in Verbindung mit 5 oder $5\frac{1}{2}$ aber $1\frac{1}{3}$, d. h. der Quotient von $7\frac{1}{3}$ und $5\frac{1}{2}$. Der "Teil" oder die "Größe" der $5\frac{1}{2}$ könnte also als der in $7\frac{1}{3}$ enthaltene Anteil von $5\frac{1}{2}$ interpretiert werden. Eine weiter gehende Harmonisierung von sprachlicher Form und mathematischem Inhalt scheint mir hier nicht möglich zu sein.

Zur Verifizierung seines Divisionsergebnisses bedient sich der Autor anschließend wieder einmal der κοινὴ καὶ πολιτευομένη μεταχείρισις, d. h. der Methode des bürgerlichen Rechnens. Er geht von $7\frac{1}{3}$ Florin aus, wobei 1 Florin so viel gilt wie 6 Hyperpyra, also von 44 Hyperpyra. Naheliegender wäre es gewesen, nun durch $5\frac{1}{2}$ Florin, also durch 33 Hyperpyra, zu dividieren, was ohne Weiteres zu $1\frac{1}{3}$ geführt hätte. Der Schreiber aber bezieht sich jetzt darauf, was uns

die leichte Methode gezeigt hat (gemeint ist die vorige), dass nämlich nach Addition von $\frac{1}{3}$ zu jeder Einheit der 7 so viel entsteht, wie viel jeder "Anteil" der 5 ist, also $1\frac{1}{3}$. Im weiteren Verlauf rechnet er vor: $1\frac{1}{3}$ Florin = 8 Hyperpyra, $5 \cdot 8$ (Hyperpyra) = 40 (Hyperpyra) – vgl. die Umkehrmultiplikation $7\frac{1}{3} = 5\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3}$. Nun stellt er fest, dass den 40 Hyperpyra noch 4 Hyperpyra bis zu den 44 Hyperpyra ($7\frac{1}{3}$ Florin) fehlen, andererseits $\frac{1}{2} \cdot 8$ Hyperpyra auch 4 Hyperpyra sind. Direkter wäre die Rechnung $5\frac{1}{2} \cdot 8$ Hyperpyra = 44 Hyperpyra gewesen.

Insgesamt wird die Division $7\frac{1}{3} : 5\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3}$ dadurch überprüft, dass man die zugehörige Multiplikation $7\frac{1}{3} = 5\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3}$ betrachtet, die beiden äußeren gemischten Zahlen als Florin-Beträge deutet und in ganzzahlige Hyperpyra-Beträge umwandelt.

Analog und nicht mehr ganz so ausführlich behandelt der Autor als zweites Beispiel $6\frac{2}{3} : 5\frac{1}{3}$, das nicht in der Kapitelüberschrift genannt war. Zunächst wandelt er die gemischten Zahlen in unechte Brüche um. Da diese gleichnamig sind, können die entstehenden Zähler 20 und 16 (jeweils wieder mit $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ bezeichnet) ins Verhältnis gesetzt werden, und die Division ergibt $1\frac{1}{4}$. Der Begriff $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ wird auch wieder im anderen Sinn verwendet: Einerseits ist 1 das $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ (die Einheit) von 6 bzw. $6\frac{2}{3}$, andererseits ist $1\frac{1}{4}$ das $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ von $5\frac{1}{3}$ (der in $6\frac{2}{3}$ enthaltene Anteil von $5\frac{1}{3}$); das Synonym $\mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$ für $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ tritt nur einmal am Anfang auf.

Der Autor überprüft das Ergebnis wieder mithilfe der "Bürgerlichen Rechenmethode": Es geht – analog zur Umkehrmultiplikation im 1. Beispiel – um die Übereinstimmung von $6\frac{2}{3}$ Florin und $5\frac{1}{3} \cdot (1\frac{1}{4} \text{ Florin})$. Die Umrechnung des Florins in 6 Hyperpyra reicht hier aber noch nicht aus, um alle gebrochenen Maßzahlen zu eliminieren; der Schreiber wandelt, wie sich dem Text unmittelbar entnehmen lässt, 1 Hyperpyron in 20 Kukkia um. Davon abgesehen, verlaufen die einzelnen Überlegungen und Rechenschritte analog zum vorigen Beispiel.

52

**Wie man $5\frac{1}{2}$ in 7 und $\frac{1}{3}$ Teile teilen und wissen kann,
um wie viel jeder der 7 und $\frac{1}{3}$ (Teile) kleiner als jeder der $5\frac{1}{2}$ ist**

Angenommen, du suchst das Umgekehrte zu wissen, d. h. wenn $5\frac{1}{2}$ in 7 und $\frac{1}{3}$ Teile geteilt werden, um wie viel jeder Teil der 7 und $\frac{1}{3}$ kleiner als jeder Teil der $5\frac{1}{2}$ ist ...

Es handelt sich um die Umkehraufgabe zum 1. Beispiel des vorigen Kapitels. Der Autor berechnet wieder (wie dort) $14\frac{2}{3} : 11 = 1$ Rest $3\frac{2}{3}$, anstatt von vornherein Dividend und Divisor zu vertauschen.

... Nun aber sind $3\frac{2}{3}$, nicht mit den 11 (siehe 1. Beispiel des vorigen Kapitels), sondern mit den $14\frac{2}{3}$ verglichen, $\frac{1}{4}$... Und siehe, du hast gefunden, dass jeder (Teil) der $5\frac{1}{2}$ in Bezug auf jeden der 7 und $\frac{1}{3}$ so groß ist wie jeder der 7 und noch ein $\frac{1}{4}$ mehr vom eigenen $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$, von jedem der $5\frac{1}{2}$ natürlich, sodass, wenn du $\frac{1}{4}$ von jedem $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ der $5\frac{1}{2}$ in entsprechender Weise abziehst, der übrig bleibende Teil in Bezug auf jeden (Teil) der 5 – so groß muss auch jedes $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ der 7 und $\frac{1}{3}$ in entsprechender Weise sein.

Der Leser wird Probleme gehabt haben, dem Rechenweg und Gedankengang des Autors zu folgen, auch wird nicht einmal das Ergebnis ($\frac{3}{4}$) explizit genannt.

Die obigen Aussagen ergeben sich nach folgenden Schritten, die im Text fehlen:

$$\text{Aus } 14\frac{2}{3} = 11 + 3\frac{2}{3} \text{ folgt } 1 = \frac{11}{14\frac{2}{3}} + \frac{3\frac{2}{3}}{14\frac{2}{3}} \text{ bzw. } 1 = \frac{5\frac{1}{2}}{7\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}.$$

Hierbei ist das $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ der $5\frac{1}{2}$ die Einheit (1), das $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ der $7\frac{1}{3}$ aber der Quotient, um den es in diesem Kapitel geht.

Am unteren Rand findet sich eine Anmerkung des Schreibers:

Und anders: Wenn du die $3\frac{2}{3}$, den Bruch, nicht mit den $14\frac{2}{3}$, die du als (analoge) Größe ($\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$) hast, sondern mit den 11 vergleichst, die du als Teiler hast, ergibt sich als Bruch $\frac{11}{33}$, das ist $\frac{1}{3}$. Wenn jede Einheit ($\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$) von $5\frac{1}{2}$ in $1\frac{1}{3}$ geteilt wird – wie groß auch immer die Division von diesen wird, so groß wird auch jedes $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ der $7\frac{1}{3}$ sein, wie es auch bei den $6\frac{2}{3}$, die in $18\frac{1}{3}$ geteilt werden, so geschah. (Vgl. das folgende Beispiel.)

Was hier steht, lässt sich im Zusammenhang mit dem 1. Beispiel des vorigen Kapitels gut nachvollziehen, führt aber auch nicht weiter: Es unterbleibt die Berechnung des Quotienten von 1 und $1\frac{1}{3}$, der mit dem gesuchten Quotienten (s. Kapitelüberschrift) übereinstimmt.

Allgemeiner formuliert, spielen in diesem Zusammenhang folgende Beziehungen eine Rolle: a werde durch b mit Rest dividiert, d. h. es gelte $a = qb + r$, $0 \leq r < b$. Dann gilt sowohl $\frac{a}{b} = q + \frac{a-qb}{b}$ als auch (äquivalent dazu) $\frac{b}{a} = \frac{1}{q} (1 - \frac{a-qb}{a})$.

In unserem Beispiel ist aus ursprünglichem $a' = 7\frac{1}{3}$, $b' = 5\frac{1}{2}$ durch Erweiterung $a = 14\frac{2}{3}$, $b = 11$ hervorgegangen. Nun ist $q = 1$ und $r = a - qb = 3\frac{2}{3}$. Da eigentlich $\frac{b}{a}$ gesucht war, hat der Autor im Haupttext auch den Term $\frac{a-qb}{a}$ ($= \frac{1}{4}$) berechnet, und er hätte nur noch einen Schritt weiter gehen müssen.

Es folgt darauf die "Methode der Florine", wie die bürgerliche Methode hier heißt. Sie führe, so der Autor, zum selben Ergebnis wie die "leichte" Methode. Mit Bezug auf das 1. Beispiel von Kapitel 51 setzt er 1 Florin = 6 Hyperpyra und somit $7\frac{1}{3}$ Florin = 44 Hyperpyra an. Jedes der 5, d. h. jeder der $5\frac{1}{2}$ Anteile von $7\frac{1}{3}$ bzw. der Quotient von $7\frac{1}{3}$ und $5\frac{1}{2}$, entspricht 8 Hyperpyra, was auch schon in diesem Beispiel vorkam. Die weitere Rechnung: $5\frac{1}{2} \cdot (8 \text{ Hyperpyra}) = 44 \text{ Hyperpyra}$, $8 \text{ Hyperpyra} - \frac{1}{4} \cdot (8 \text{ Hyperpyra}) = 6 \text{ Hyperpyra} = 1 \text{ Florin}$ ($\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ bzw. Einheit von $7\frac{1}{3}$ Florin bei der vorherigen Umkehraufgabe)

Diese Geldrechnung hat nur Folgendes gezeigt: $5\frac{1}{2} \cdot (1\frac{1}{3} \text{ Florin}) = 7\frac{1}{3} \text{ Florin}$, $1\frac{1}{3} \text{ Florin} - \frac{1}{4} \cdot (1\frac{1}{3} \text{ Florin}) = 1 \text{ Florin}$. Der Autor hätte Letzteres zu $\frac{3}{4} \cdot (1\frac{1}{3} \text{ Florin}) = 1 \text{ Florin}$ zusammenfassen können. Daraus folgt zusammen mit der ersten Beziehung: $5\frac{1}{2} \cdot (1 \text{ Florin}) = \frac{3}{4} \cdot (7\frac{1}{3} \text{ Florin})$, und der gesuchte Quotient hätte sich ablesen lassen.

Das nächste Beispiel, $6\frac{2}{3} : 18\frac{1}{3}$, war nicht in der Kapitelüberschrift angekündigt, und es handelt sich auch nicht um die Umkehrung eines früheren Divisionsbeispiels. Analog zum vorigen Beispiel wird danach gefragt, wie viel kleiner jeder der (Anteile) von $18\frac{1}{3}$, d. h. der Quotient, im Vergleich zu jedem (Anteil) von $6\frac{2}{3}$, d. h. zur Einheit, ist. Die Erweiterung der beiden (diesmal gleichnamigen) gemischten Zahlen führt zu $\frac{20}{3}$ und $\frac{55}{3}$, wobei 20 als Teiler und 55 als $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ (im Sinne von "analoge Größe" zu 20) bezeichnet werden. Eigentlich müsste es gerade umgekehrt sein, aber wieder bevorzugt der Autor die Division des Grö-

ches Runden hat in diesem Fall also keine negativen Auswirkungen gehabt. Für $1:2\frac{3}{4}$ hat er mit Bezug auf ein Währungssystem zwar einen Geldwert gefunden, den Quotienten aber nicht arithmetisch berechnet.

Mache dies auch anders. Jetzt geht es direkt um den Quotienten $6\frac{2}{3}:18\frac{1}{3}$. Der Dividend wird als Maßzahl von Florin aufgefasst und $6\frac{2}{3}$ Florin wieder – was bei der vorigen Rechnung eigentlich unnötig war – in 40 Hyperpyra umgewandelt. *Da ... du die 40 Hyperpyra nicht durch die $18\frac{1}{3}$ teilen kannst*, erweitert der Autor mit 3 und berechnet $(120 \text{ Hyperpyra}):55$. Sein Ergebnis ist natürlich wieder 2 Hyperpyra 3 Kukkia $2\frac{6}{11}$ Turnesia, und er weist auch auf die Übereinstimmung mit dem vorher erzielten Resultat hin.

Es folgt noch ein Text zur Kontrollrechnung $18\frac{1}{3} \cdot (2 \text{ Hyperpyra } 3 \text{ Kukkia } 2\frac{6}{11} \text{ Turnesia}) = 40 \text{ Hyperpyra}$, der nur im Zusammenhang mit dem großen Diagramm auf dem rechten Rand von fol. 34^r zu verstehen ist: Hier wird der genannte Geldwert 18-mal als Summand (!) untereinandergeschrieben. Hinzu kommt der Summand für ein Drittel dieses Geldwerts, und zwar 14 Kukkia $2\frac{2}{11}$ Turnesia, was im Text aber nicht vorgerechnet wird. Hingegen wird beschrieben, welche Teilsummen und Überträge auftreten, wie sie auch im Diagramm vermerkt sind. Im Diagramm selbst ist außerdem noch ein Schema zur schriftlichen Division durch 11 integriert.

Insgesamt kann das vorliegende Kapitel nicht sonderlich zufriedenstellen. Man gewinnt den Eindruck, dass der Autor eine Scheu davor hat, eine gemischte Zahl durch eine größere zu dividieren, was ihm letztlich auch nicht (ganz) gelingt. In gewisser Weise kann er sich hier behelfen, indem er durch die Übertragung auf das Rechnen mit Geldwerten Maßzahlen im Dividenten erzeugt, die größer als die Divisoren sind. Der Text ist streckenweise schwer verständlich, weil die Begrifflichkeit ziemlich schwammig ist (siehe $\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$) und der Autor manche arithmetischen Beziehungen benutzt, ohne sie explizit zu machen oder gar zu begründen.

53

***Wenn die 3 zu 4 werden, wie groß die 5 werden,
und wenn die 11 zu 15 werden, wie groß die 20 werden, und so weiter***

Angenommen, du suchst zu wissen, wenn die 3 anwachsen und 4 werden, wie viel die 5 werden, wenn sie im selben Verhältnis anwachsen. Du kannst dies nun wissen mithilfe der "Methode durch die drei" [Dreisatz]. "Durch die drei" nennt man sie wegen der Multiplikation von 5 mit den 4 und der Division des Produkts durch die 3: Denn durch die 3 und 4 und 5, welche drei ungleiche Zahlen sind, findet man das Gesuchte. Da aber die drei das Gesuchte ins Werk setzen, nennt man sie (die Methode) wohl auch zu Recht "durch die drei".

Dies ist eine Art beispielgebundener Begriffserklärung, wobei der anschließend ausgeführte Rechenweg schon vorgestellt wird. Die Rechnung selbst verläuft grundsätzlich so, dass erst multipliziert, dann dividiert wird, was auch bei uns bis weit in die Neuzeit hinein üblich war, im vorliegenden Beispiel also wie folgt: $(5 \cdot 4):3 = 6\frac{2}{3}$. Bei unserem heutigen Verfahren geht man zuerst auf die Einheit (Einheitsgröße) zurück, was im Allgemeinen eine Division erfordert, und

multipliziert im zweiten Schritt, wie es sich in diesem ersten Beispiel so darstellen würde: Aus $3 \hat{=} 4$ folgt $1 \hat{=} \frac{4}{3}$ und $5 \hat{=} \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.

Im Text schließt sich noch eine Dreisatzprobe ($\alpha\pi\acute{o}\delta\epsilon\iota\chi\iota\varsigma$ διὰ τῶν τριῶν, Probe "durch die drei") an, bei der der Autor feststellt, dass $4 \cdot 5$ mit $3 \cdot 6\frac{2}{3}$ übereinstimmt ($= 20$). Deshalb sei *das Entstandene* (das Ergebnis der Dreisatzaufgabe) richtig.

Die zweite Frage in der Kapitelüberschrift wird nach der gleichen Methode behandelt: $20 \cdot 15 = 300$, $300 : 11 = 27\frac{3}{11}$ (jeweils mit unnötigem schriftlichen Diagramm), d. h. die 20 werden zu $27\frac{3}{11}$.

In der Dreisatzprobe wird festgestellt, dass $20 \cdot 15$ mit $27\frac{3}{11} \cdot 11$ übereinstimmt ($= 300$). *Und dies ist der Beweis (die Probe), dass das Gesuchte gut* (im Sinne von "richtig") *geworden ist*.

54

Und umgekehrt

Angenommen, du suchst das Umgekehrte – wenn sich die 15 verkleinern und 11 werden, wie viel die 20 werden, wenn sie sich im selben Verhältnis verkleinern. Nun aber tue das Entgegengesetzte. Multipliziere die 20 nicht mit den 15, sondern mit den 11: $20 \cdot 11 = 220$. Dividiere diese nicht durch die 11, sondern durch die 15, und die Teilung von diesen ergibt ... 14 und $\frac{10}{15}$, das sind $\frac{2}{3}$. Und siehe, wenn sich die 15 verkleinern und 11 werden, verkleinern sich die 20 im selben Verhältnis und werden 14 und $\frac{2}{3}$ eines Ganzen.

Hier wird das zweite Beispiel des vorigen Kapitels variiert, und zwar durch Vertauschung der ersten beiden Zahlen (Stücke des Dreisatzes); die 3. Zahl (20) bleibt unverändert. Dabei weist der Autor darauf hin, dass die Multiplikation mit 15 und die Division durch 11 (die bei der ursprünglichen Dreisatzaufgabe geboten waren) hier nicht ausgeführt werden dürfen. Die Rechnung erfolgt nach der herkömmlichen Methode und wird wieder von schriftlichen Rechendiagrammen begleitet.

Der Beweis aber ist der gleiche wie bei den früheren. Es geht um die Rechnungen $20 \cdot 11 = 220$, $14\frac{2}{3} \cdot 15 = 220$ und um die Feststellung der Gleichheit. *Und dies ist der Beweis durch den Dreisatz* (η διὰ τῶν τριῶν $\alpha\pi\acute{o}\delta\epsilon\iota\chi\iota\varsigma$), *dass das Gesuchte gut (richtig) geworden ist. Und dies bezüglich dreier ganzer Zahlen.*

Bisher knüpften die Überlegungen unmittelbar an die (ursprünglich) pythagoreische Proportionenlehre an – vgl. TROPFKE (1980, S. 324–334): Wenn natürliche Zahlen a , b und c gegeben sind, soll eine Zahl d gesucht werden mit der Eigenschaft $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. d bezeichnete man als vierte Proportionale, und die anderen Proportionalen a , b , c entsprechen den drei gegebenen Zahlen (Stücken) im Dreisatz. Es gilt $d = \frac{bc}{a}$, analog zur Rechenvorschrift beim Dreisatz.

Der Autor setzt fort:

Wenn aber auch $\frac{1}{2}$ oder auch $\frac{1}{3}$ und so weiter vorhanden sind, gibt es eine andere Methode, die der vorliegenden ähnlich ist, welche auch selbst durch die Drei (den Dreisatz) stattfindet. Durch dieselbe aber findet man jede ähnliche Frage, ob das Gesuchte ganzzahlig ist oder ob es auch einen Bruch $\frac{1}{2}$ oder auch $\frac{1}{3}$ und so weiter hat. Es ist diese.

Eine andere ähnliche Frage durch eine andere Methode. Angenommen, du suchst danach, wenn die $2\frac{1}{2}$ zu 5 werden, die 25 – wie viel sie werden.

Auf den ersten Blick ist klar, dass sich 50 ergeben muss, da 5 das Doppelte von $2\frac{1}{2}$ ist. Dem Autor ist aber zugutezuhalten, dass er hier schon seine "andere Methode" vorstellen will, die er auch bei den darauffolgenden Beispielen anwendet: Er schreibt $2\frac{1}{2}$ als $\frac{5}{2}$ und 5 als $\frac{5}{1}$ und multipliziert nun kreuzweise – vgl. sein Schema $\frac{5}{2} \times \frac{5}{1}$. Dabei sei $1 \cdot 5 = 5$ der Teiler, $2 \cdot 5 = 10$ der Multiplikator des Ganzen (πολλ(α)πλασιαστικὴ τοῦ σώματος). Es folgt noch die schriftliche (!) Rechnung $10 \cdot 25 = 250$, $250 : 5 = 50$. Die Über-Kreuz-Multiplikation und die obige Interpretation der Produkte erklären sich dadurch, dass hier eigentlich $5 : \frac{5}{2} = 5 \cdot \frac{2}{5}$ gerechnet wurde. Es sei daran erinnert, dass es in der Handschrift keinen eigenen Abschnitt zur Division von Brüchen gibt und die Regel zur Division durch einen Bruch – mithilfe der Multiplikation mit dem Kehrbuch – hier, für den Leser wenig transparent, nachträglich hinzugezogen und verwendet wird. Modern gesprochen schließt der Autor gemäß dem Dreisatz wie folgt: Wenn $\frac{a}{b}$ zu $\frac{c}{d}$ wird, dann wird e zu $\frac{bc}{ad} \cdot e$. Sein Diagramm hat allgemein die Gestalt $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ (hier $a=5$, $b=2$, $c=5$, $d=1$, wobei $e=25$ ist).

Ἅτερον τοῦτου ὅμοιον (**Ein anderes, was diesem ähnlich ist**) – so werden die beiden folgenden Beispiele eingeleitet, die völlig gleichförmig wie das erste abgehandelt werden. Auch hier finden wir wieder ausführliche Rechendiagramme.

Wenn die $2\frac{1}{2}$ zu $4\frac{1}{3}$ werden, wie viel werden die 25? ($43\frac{1}{3}$)

($a=5$, $b=2$, $c=13$, $d=3$, $e=25$)

Wenn die $4\frac{1}{3}$ zu $5\frac{1}{4}$ werden, wie viel werden die $25\frac{1}{6}$? ($30\frac{51}{104} \approx 30\frac{1}{2}$)

Das genaue Ergebnis ergibt sich nur aus den Rechendiagrammen, im Text begnügt sich der Autor mit dem guten Näherungswert. ($a=13$, $b=3$, $c=21$, $d=4$, $e=25\frac{1}{6}$)

Und umgekehrt. Wenn die $5\frac{1}{4}$ sich verkleinern und $4\frac{1}{3}$ werden, wie viel werden die $25\frac{1}{2}$? ($21\frac{1}{21}$)

Gegenüber der letzten Aufgabe sind die beiden ersten Dreisatzzahlen vertauscht, die dritte verändert. Hier sind die Werte $a=21$, $b=4$, $c=13$, $d=3$ und $e=25\frac{1}{2}$. Der Autor hat den Multiplikator $bc=52$ mit e zu multiplizieren und nutzt dazu vorteilhaft das Distributivgesetz, indem er $52 \cdot 25 + 52 \cdot \frac{1}{2}$ rechnet. Weitere Besonderheiten gibt es nicht.

Abschließend lässt sich feststellen, dass bei den vorangegangenen Beispielen mit Brüchen gerechnet wird, sonst aber wieder nur der normale Dreisatz Verwendung findet. Man kann aber die Behauptung des Autors, dass es sich um eine andere Methode handelt, auf das (hier) neue Verfahren zur Division durch Brüche beziehen.

55 **Wenn achtmal 8 nicht 64 würden, sondern über Gebühr wachsen**

und 100 würden, wie viel nach dem gleichen Verhältnis zwölfmal 12 würden

In Wahrheit ergeben achtmal 8 64, und zwölfmal 12 multipliziert ergeben 144. Da wir aber nun sagen, dass achtmal 8 nicht 64, sondern über Gebühr wachsen und 100 ergeben, multipliziere die 144 mit den 100 und teile das Multiplizierte durch die 64, und die Teilung von diesen ergibt 225. Und siehe, du hast herausgefunden, dass zwölfmal 12 über Gebühr multipliziert nicht 144, sondern

vielmehr 225 ergeben ... Denn das Verhältnis, das die 100 zu den 64 haben, dasselbe Verhältnis haben auch die 225 zu den 144.

Damit du einsiehst, dass es so ist, wie die leichte Methode gezeigt hat: Zweimal 64 ergibt 128. Es existiert aber auch das zu den 128 passende wachsende Doppelte von den 100, das ist 200: Denn wie die 64 sich 100 zu eigen machen, so machen auch die 128 sich 200 zu eigen. Es fehlen von den 128 bis zu den 144 16. Die 16 aber sind ein vierter Teil von den 64 ... Wie du nun die 64 verdoppelt hast, und es wurden 128, ... so verdoppele die 100, und es werden 200. Es fehlen 25 bis zu den 225. Die 25 aber sind $\frac{1}{4}$ von 100. Und siehe, auch so hast du herausgefunden, das zwölfmal 12 nicht 144, sondern 225 werden, so wie auch achtmal 8 nicht 64, sondern 100 werden.

Und anders: Von den 64 fehlen 36 bis zu den 100. Die 36 aber haben ein Verhältnis $\frac{9}{16}$ (sc. zu 64) ... Von den 144 fehlen 81 bis zu den 225. Die 81 aber haben zu den 144 ein Verhältnis $\frac{9}{16}$... Und siehe, auch so ist aufgezeigt worden: Dasselbe Verhältnis, das die 64 zu den 100 haben, haben auch die 144 zu den 225, so wie wir es auch mithilfe der leichten Methode herausgefunden haben ...

Zunächst geht es wieder um die Bestimmung der vierten Proportionalen d in einer Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, in der $a=64$, $b=100$ und $c=144$ gegeben sind. Die (schriftlich festgehaltene) Dreisatzrechnung führt zum Ergebnis $d=225$.

Verkürzt formuliert, stellt der Autor im nächsten Abschnitt fest, dass $144 = 2\frac{1}{4} \cdot 64$ und $225 = 2\frac{1}{4} \cdot 100$ sind. Daraus folgt natürlich die Gültigkeit der obigen Proportionsgleichung, aber der Text vermittelt das nicht sehr deutlich. Allgemein gilt: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ impliziert $c = \lambda a$, $d = \lambda b$ für ein (rationales) λ (und auch umgekehrt). Es geht aber hier nur um eine Probe, nicht um eine alternative Berechnung von d .

Das Gleiche lässt sich zum letzten Absatz sagen. Der Autor schreibt, dass die Differenz von 100 und 64 gleich 36 ist, wobei 36 zu 64 ein Verhältnis von $\frac{9}{16}$ ergibt. Entsprechend sei die Differenz von 225 und 144 gleich 81, wobei 81 zu 144 ebenfalls ein Verhältnis von $\frac{9}{16}$ hat. Daraus schließt er wieder etwas vorschnell auf die Gültigkeit der obigen Proportionsgleichung. Es fehlen folgende Schritte zur Vervollkommnung der Probe: $100 - 64 = 36$ führt, durch 64 dividiert, zu $\frac{100}{64} = 1 + \frac{9}{16}$, und $225 - 144 = 81$, durch 144 dividiert, zu $\frac{225}{144} = 1 + \frac{9}{16}$, also zum selben Wert. In allgemeiner Formulierung: Aus $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ folgt $\frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$ (und natürlich auch umgekehrt).

56

Und umgekehrt

Wenn achtmal 8 nicht 64 ergeben, sondern kleiner werden und 48 ergeben, wie viel ergeben zwölfmal 12 multipliziert, wenn sie im selben Verhältnis kleiner werden? ... Multipliziere die 144 mit den 48 ... Teile das Produkt durch die 64, und die Teilung von diesen wird 108 ... Denn das Verhältnis, das die 48 zu den 64 haben, dasselbe haben auch die 108 zu den 144 ...

Die Rechnungen werden wieder in Diagrammen schriftlich durchgeführt, wobei das Produkt (6912) nur dort angegeben ist.

Anstatt der 1. Probe aus dem vorigen Kapitel, die hier zu $144 = 2\frac{1}{4} \cdot 64$,

$108 = 2\frac{1}{4} \cdot 48$ geführt hätte, wählt der Autor die zweite: $64 - 48 = 16$, $144 - 108 = 36$; $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$, $\frac{36}{144} = \frac{1}{4}$. Darüber hinaus stellt er aber noch fest, dass 48 mit $\frac{3}{4} \cdot 64$ und 108 mit $\frac{3}{4} \cdot 144$ übereinstimmt. *Und dies ist der Beweis, dass sich das Gesuchte gut* (im Sinne von "richtig") *ergeben hat ...*

Abschließend ist anzumerken, dass der Autor seine vier Dreisatzkapitel ungewöhnlich theoretisch konzipiert hat, und zwar auf der Grundlage der klassischen Proportionenlehre. Der kaufmännische Rahmen, der üblicherweise für die Einführung der Dreisatzrechnung gewählt wird – das Rechnen mit Größen – fehlt völlig. Dies wird erst in den Kapiteln 89–94 nachgeholt.

57

**Wie es mithilfe der leichten Methode möglich ist,
die ungeraden Zahlen zu kennen, wie die Summe von diesen entsteht,
wenn sie vom Anfang bis zum Ende vereinigt werden**

Ungerade Zahlen sind diese: 1 3 5 7 9 und wiederum 11 13 15 17 19 und dies so der Reihe nach weithin entstehend. Wenn du nun die Einerzahlen derselben Ordnung, die von der Eins an beginnen, bis dahin, wo du willst, zu wissen suchst, mache es so, und du wirst das Gesuchte leicht und richtig finden.

Angenommen, du suchst von der 1 bis zu den 17, wie viel es wird. Setze nun dies, wie du siehst, entsprechend 1 3 5 7 9 11 13 15 17 und rechne vom Anfang her so: 1 und 3 ergeben 4, 4 und 5 ergeben 9, 9 und 7 ergeben 16 und so der Reihe nach. Du wirst aber herausfinden: Von der 1 bis zu den 17 – die Zahl all dieser ergibt 81. Dies ist nun ein erfolgloses Unternehmen und eine beschwerliche Vollendung, um zu wissen, wie viel sich ergibt.

Aber mithilfe der leichten Methode findet man es so: Die letzte Verbindung, die auch immer du aufsuchst, die jetzt 17 ist, teile in zwei Teile und nimm die Hälfte und 1 mehr, d. h. von den 17 nimm 9. Multipliziere die 9 mit sich selbst: 9 mal 9 ergeben 81. Und siehe, du hast mithilfe der nämlichen leichten Methode herausgefunden, dass, wenn man von der 1 bis zur Verbindung der 17 addiert, 81 herauskommen.

Mit der "Ordnung" (τάξις) im 1. Absatz ist offenbar die der ungeraden Zahlen gemeint.

Der Autor macht dem Leser ein Verfahren zur Berechnung der Summe ungerader Zahlen dadurch schmackhaft, dass er ihm die Mühseligkeit des schrittweisen Ausrechnens vorführt. Man könnte hier von didaktischem Geschick sprechen.

Unklar ist allerdings noch die Teilung der Endzahl (17) in zwei Teile. Dies wird aber beim zweiten Beispiel deutlich: Zur Berechnung von $1 + 3 + 5 + \dots + 25$ soll 25 in $12 + 13$ zerlegt werden, d. h. in die Summe der beiden ganzen Zahlen, die die Hälfte von 25 einschließen. Man nimmt die größere der beiden, also 13, und quadriert, wie wir es ausdrücken würden (Ergebnis: 169). 13 erhält man natürlich auch, indem man die um 1 vermehrte Endzahl (26) halbiert. Es folgt noch ein drittes Beispiel, und zwar $1 + 3 + 5 + \dots + 101 = 51 \cdot 51 = 2601$.

Die zugrunde liegende Formel für die Summe s_n der ersten n ungeraden Zahlen lautet: $s_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Dabei ergibt sich n aus dem höchsten Summanden (der Endzahl $2n - 1$), wie oben beschrieben.

Auch in den folgenden drei Kapiteln beschäftigt sich der Autor mit arithmetischen Reihen, d. h. mit Summen, bei denen der Zuwachs aufeinanderfolgender Summanden konstant ist.

58 *Wie es leicht möglich ist, die Zweierzahlen zu kennen, d. h. 2 und 4 und 6, und die Dreierzahlen 3 und 6 und 9 und die Viererzahlen 4 und 8 und 12 und so der Reihe nach, wie groß die Summe von diesen wird, wenn sie von Anfang bis Ende vereinigt werden*

Angenommen, du suchst 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20, wie viel sie werden. Du kannst dies so erfahren: Teile die letzte Zahl, die jetzt 20 ist, durch die erste Zahl, die 2 ist, und es wird der Quotient von diesen 10 ... Nimm nun die Hälfte der 10, welche 5 ist. Da aber die 10 in zwei gleiche Teile geteilt werden, jeder dieser zwei Teile jeweils 5, addiere 1 zu den 10, und es entstehen 11. Multipliziere mit den 5 ... die 11: 5-mal 11 ergeben nun 55. Multipliziere die 55 mit der ersten Zahl ..., d. h. mit den 2: Zweimal 55 ergeben nun 110. Und siehe, von den 2 bis zu den 20 entstehen 110.

Im nächsten Beispiel sollen die geraden Zahlen bis 22 aufsummiert werden. Der Autor stellt das Verfahren wieder ausführlich vor, das zum vorigen weitgehend analog verläuft: $22 : 2 = 11$, $11 = 5 + 6$, $11 \cdot 6 = 66$, $66 \cdot 2 = 132$. Dabei weist er darauf hin, dass man dasselbe Ergebnis erhält, wenn man 22 zu 110 (Summe aus dem 1. Beispiel) addiert.

Im Unterschied zum 1. Verfahren tritt hier ein ungerader Quotient (11) auf, der sich nicht (wie die 10 oben) in zwei gleiche ganzzahlige Summanden zerlegen lässt. Der Autor wählt deshalb die Zerlegung $5 + 6$ und erklärt, es sei jetzt nicht nötig, 1 zur 11 zu addieren, sondern man müsse einfach den größeren Summanden (6) mit 11 multiplizieren.

Für die Summe $s_2(n)$ der ersten n geraden Zahlen gilt die Formel

$$s_2(n) = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

Die Fallunterscheidung des Autors bezieht sich nach unserem Verständnis auf den Term $\frac{n(n+1)}{2}$ für gerade bzw. ungerade n . Speziell ergibt sich für $n=10$ (1. Beispiel) $\frac{n}{2} = 5$, $n+1 = 11$, für $n=11$ (2. Beispiel) $\frac{n+1}{2} = 6$. Wegen des Faktors 2 ist sie aber letztlich überflüssig.

Im 3. Beispiel geht es um die Summe der ersten zehn durch 3 teilbaren Zahlen. Allgemein erhält man für $s_3(n)$, die Summe der ersten n dieser Zahlen:

$$s_3(n) = 3 + 6 + 9 + \dots + 3n = 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \text{ und daher } s_3(10) = 165$$

Statt mit dem Faktor 2 rechnet der Autor nun mit dem Faktor 3, sonst stimmt sein Verfahren mit dem bisherigen überein. Dabei berücksichtigt er wieder, dass – modern formuliert – n im Term $\frac{n(n+1)}{2}$ gerade ist (Faktoren 5 und 11 für $n=10$). Analog verläuft die Berechnung weiterer Reihenwerte: $s_3(13) = 273$ (4. Beispiel), $s_4(8) = 4 + 8 + 12 + \dots + 32 = 144$ (5. Beispiel) – vgl. $s_4(n) = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2n(n+1)$ –, $s_4(11) = 264$ (6. Beispiel), $s_5(12) = 5 + 10 + 15 + \dots + 60 = 390$ (7. Beispiel) – vgl. $s_5(n) = 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ – und $s_5(13) = 455$ (8. Beispiel). Ein Hinweis auf die Beziehung $s_5(13) = s_5(12) + 65$ als Möglichkeit zur Probe fehlt.

Bei jedem Beispiel unterscheidet der Autor zwischen geraden und ungeraden n im Hinblick auf $\frac{n(n+1)}{2}$ (siehe oben).

59

Über denjenigen, der, als ein Kind geboren wurde,

jedes Jahr so viele Florine gab, wie viel es an Jahren ist, bis zu 30 Jahren

Ein Mann zeugte einen Sohn. Er verfügte bei jeder Vollendung eines Jahres, im Hinblick darauf, an welchem Tag sein Kind geboren wurde, als Geschenk so viele Florine zu geben, wie viel an Jahren auch sein Sohn ist. Im ersten Jahr, im Hinblick darauf, an welchem Tag sein Sohn geboren wurde, gab er 1 Florin, im zweiten Jahr gab er 2 Florin: 1 und 2 ergeben 3 Florin in den zwei Jahren. Im dritten Jahr gab er 3 Florin: In den drei Jahren ergeben sich 6 Florin. Wenn sein Sohn 30 Jahre alt geworden ist – du suchst zu erfahren, wie viele Florine es werden, die auf diese Weise übergeben werden.

Es geht hier also um die Bestimmung des Reihenwerts $s_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ mit $n = 30$. Diese elementare arithmetische Reihe, auf die alle anderen zurückgeführt werden können (vgl. insbesondere den Kommentar zum vorigen Kapitel), hätte der Autor schon vor Kapitel 57 behandeln sollen. Hier ist die bisher durchgängige Division des höchsten durch den ersten Summanden überflüssig, und der Autor geht auch gar nicht mehr darauf ein. Anstatt aber entsprechend der einheitlichen Formel $s_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ zu verfahren, geht er wieder wie im letzten Kapitel vor, wo er stets zwischen geraden und ungeraden n unterschieden hatte, hier also mit $n = 30$: $30 : 2 = 15$, $30 + 1 = 31$, $15 \cdot 31 = 465$ (Ergebnis: 465 Florin)

Es folgt die Zusatzfrage, wie viel Florin der Sohn nach 31 Jahren erhielte, die aufgrund des letzten Ergebnisses natürlich trivial ist. Das hat auch der Autor erkannt, indem er am Ende dieses Abschnitts auf die Rechnung $465 + 31 = 496$ verweist. Doch zunächst behandelt er diese Zusatzfrage als selbständige Aufgabe, ganz offensichtlich, weil er vorführen will, wie mit ungeraden n umzugehen ist, hier mit $n = 31$: Die "halbierungsnahe" Zerlegung $31 = 15 + 16$ mit $16 > 15$, insbesondere $16 = 15 + 1$, führt dazu, dass nicht auch noch 31 um 1 vergrößert werden muss; $16 \cdot 31 = 496$ (Ergebnis: 496 Florin)

Insgesamt betrachtet ist diese Fallunterscheidung bez. der n zwar korrekt, aber unnötig, denn $\frac{n(n+1)}{2}$ ist in jedem Fall eine ganze Zahl.

Abschließend erklärt der Schreiber, dass man mithilfe dieser Methode das Ergebnis auch bei *sehr vielen Jahren* (ἐπὶ πλείστον χρόνων) finden wird.

60

Wie man leicht erfahren kann, wie viele angezeigte Stunden während der 24 Stunden der Tages- und Nachtzeit geschlagen werden

Die 24 Stunden der Tages- und Nachtzeit werden zuerst 1(-mal), danach 2(-mal) geschlagen, was während der zwei Stunden 3 angezeigte Stunden sind, und so der Reihe nach. Du suchst zu erfahren, nachdem 23 Stunden angezeigt worden sind, wie viele Stundenwiderhülle während der 23 Stunden angezeigt wurden.

Es ist dies ein ähnliches Problem wie das des Kindes und der Florine.

Das Anzeigen der Stunden erfolgt natürlich mit Glockenschlag, sodass *angezeigt* (σημαντικός) in diesem Sinne zu verstehen ist.

Der Autor berechnet nun nach seiner bekannten Methode den Reihenwert $s_1(23) = 276$, indem er wie früher die Zerlegung $23 = 11 + 12$ diskutiert. Anschließend geht es um $s_1(24) = 300$, zunächst nach seiner "altbewährten" Methode berechnet, dann im Hinblick auf $s_1(24) = s_1(23) + 24$.

Das Kapitel schließt mit der Bemerkung, dass man auf diese Weise auch bei anderen Stunden das Gesuchte, d. h. die Anzahl der bis dahin erfolgten Glockenschläge insgesamt, finden kann.

Die vorliegende Aufgabe, die der Unterhaltungsmathematik zuzurechnen ist, präsentiert uns eine interessante Realie, nämlich eine Turmuhr mit 24-Stunden-Schlag. In diesem Zusammenhang schreibt Rudolff (1526, R 7^v) unter der Kapitelüberschrift *Von einer schlahenden Vhr*:

Die Wellisch vhr fahet an 1 stund nach vndergang der Sonnen / schlecht 1. darnach 2. 3. 4. etc. biß auff 24. Ist nun die frag wieuyl schleg tag vnd nacht geschehen / Facit 300 ...

Unser anonymen Autor hat also entweder eine Aufgabe aus italienischer Quelle übernommen, oder er beschreibt das Stundenschlag-System so, wie er es auch in seiner Heimat vorgefunden hat.

Die arithmetischen Reihen gehörten bei allen Kulturvölkern zum Grundbestand der Arithmetik; sie sind z. B. in "vorgriechischer Zeit" schon bei den Babyloniern verwendet und berechnet worden – vgl. TROPFKE (1980, S. 344). In den Lehrplänen der mittelalterlichen Universitäten wurde die Arithmetik im sog. Trivium behandelt. Hier galt das "Progredieren" (Berechnen von arithmetischen und geometrischen Reihen) als eigenständige "Species" (Rechenart) neben den anderen: Nummerieren, Addition, Subtraktion, Duplieren (Verdoppeln), Medieren (Halbieren), Multiplizieren und Dividieren.

Textaufgaben zu arithmetischen Reihen sind seit der Antike vielfältig belegt – vgl. TROPFKE (1980, S. 625–628). Es handelt sich fast ausschließlich um Aufgaben der Unterhaltungsmathematik.

In natürlicher Weise würde sich nun die Behandlung der geometrischen Reihen anschließen, doch der Autor hat sich anderes vorgenommen.

61 ***Über die {essenden} Schmauser – auf die Frage, wie viel sie sind,
sagten sie mit einer ausgeklügelten Antwort: "Zweimal so viele,
wie wir sind, und die Hälfte von uns und das Viertel von uns
werden wir mit dir zusammen 100 Männer sein."***

Irgendwelche Männer, die vereint waren, fand jemand beim Essen vor und fragte sie: "Wie viele seid ihr?" Zur Antwort gaben sie nicht: "Wir sind sound-so viele." Sondern sie sagten: "Wir und andere so viele, wie viele wir sind, und die Hälfte von uns und das Viertel von uns werden mit dir zusammen 100 Männer sein. Auch wenn wir nicht wissen, wie viele die Esser sind – wie können wir diese erfahren? Du kannst dies so erfahren.

Mache für dich selbst einen Ansatz, welchen immer du willst, und sprich: Es seien die Esser 20 Männer, und ebenso viele andere, wie sie sagten, ergeben 40, und die Hälfte der 20, wie sie sagten, ist 10, zusammen 50, und das Viertel der 20, wie sie sagten, das 5 ist – zusammen 55 Männer. Nimm 1 von den 100 weg – wie sie sagten: "Wir werden mit dir zusammen wohl 100 Männer sein" – d. h. deine eigene Zahl, und es bleiben 99 Männer übrig. Multipliziere nun die 99 Männer mit den 20 Männern, du du angesetzt hast: 20 mal 99 ergeben 1980.

Teile die 1980 Männer durch die Anzahl der 55 Männer, die du aus den 20 Männern errechnet hast, die du angesetzt hast: Wenn die 1980 Männer durch die 55 Männer geteilt werden, ergibt der Quotient von diesen 36. Und siehe, du hast gefunden, dass die Esser 36 Männer sind.

Aber der Beweis, dass es so ist, ist dieser: 36 Männer und ebenso viele Männer, wie sie sagten, ergeben 72, und die Hälfte der 36, die 18 ist, zusammen 90, und das Viertel der 36, das 9 ist, zusammen 99. Addiere auch deine eigene Zahl, von der sie sprachen: "Mit dir werden wir 100 Männer sein." Es kommen 99 und 1 heraus, zusammen 100 Männer – gemäß dem Wort, das sie sprachen ... Diese Aufgabe gehört zu dem sehr verbreiteten Typ der "Gott Grüß Euch-Aufgaben" (vgl. TROPFKE 1980, S. 574 f.) – so findet sich genau dasselbe Beispiel auch bei Schreiber B in der Aufgabensammlung dieses Kodex (HUNGER/VOGEL 1963, Nr. 46, S. 39 f.).

Die hier verwendete Methode zur Lösung eines linearen Problems ist schon in altbabylonischen Texten, bei Diophant (um 250 n. Chr.), in indischen Quellen, bei Schreiber B und auch bei Rhabdas (1341) [vgl. TANNERY IV, 4 (1886)] belegt und wird als "einfacher falscher Ansatz" bezeichnet – vgl. TROPFKE (1980, S. 367–371). Ist f eine (vorgegebene) Proportionalität in x , d. h. eine lineare Funktion in x (≥ 0) mit $f(0) = 0$, und zu einem gegebenen Funktionswert b werde der x -Wert gesucht, also x aus $f(x) = b$, so kann man so vorgehen: Man wählt einen (beliebigen) Wert x_1 und berechnet $f(x_1) = b_1$. Nun gilt $\frac{b}{b_1} = \frac{x}{x_1}$, also ist $x = \frac{b}{b_1} \cdot x_1$.

In unserem Beispiel ist $f(x) = x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} (= \frac{11}{4}x)$, $b = 99$, $x_1 = 20$, $b_1 = 55$, $x = \frac{99}{55} \cdot 20 = 36$. Der Autor zeigt, dass das Verfahren auch mit dem Ansatzwert $x_2 = 24$ zum Ziel führt: Es folgt $f(x_2) = b_2 = 66$ und entsprechend $x = \frac{99}{66} \cdot 24 = 36$.

Die schriftlichen Rechnungen des Autors sind ungeschickt, da er es in beiden Fällen versäumt hat, durch 11 zu kürzen.

Auch mit den Ansatzwerten 32 oder 40 komme man – so der Autor – ebenso wie mit den vorliegenden 20 und 24 zur Zahl 36 der Esser.

Der einfache falsche Ansatz diene bei solchen Problemen als Ersatz für die (in der Regel noch nicht bekannte) algebraische Methode:

Aus $f(x) = \frac{11}{4}x = 99$ folgt $x = \frac{4 \cdot 99}{11} = 36$.

- 62 **Über die Schüler, die nicht sagten, wie viele sie sind, aber eine ausgeklügelte Antwort gaben: Wenn jeder von uns jeweils 5 Kukkia gibt, fehlen uns zur Erfüllung unserer Miete 30 Kukkia; wenn aber jeder von uns jeweils 6 Kukkia gibt, sind gegenüber unserer vereinbarten Miete 40 Kukkia übrig.**

Ein Mann ging fort in eine Schule. Er fand dort Schüler und fragte diese: "Wie viele seid ihr nun, ihr Schüler, und wie hoch ist die Miete, die ihr alle jedes Jahr gebt?" Sie sagten aber nicht: "Soundso viele sind wir." Sondern: "Wenn jeder von uns jeweils 5 Kukkia gibt, fehlen zur Erfüllung unserer Miete 30 Kukkia, wenn aber jeder von uns jeweils 6 Kukkia gibt, sind gegenüber der geschuldeten Höhe der Miete 40 Kukkia übrig." Auch wenn wir nicht wissen, wie viele Schüler es sind und wie hoch deren geschuldete Miete ist, wie können

wir dies erfahren? Du kannst dies so erfahren.

Mache wiederum auch hierbei für dich einen Ansatz und sprich: Es seien also 60 Schüler, wobei jeder von diesen jeweils 5 Kukkia gegeben hat. 5 mal 60 ergeben 300. Wie sie nun oben sagten, fehlen ihnen 30 Kukkia zur Erfüllung ihrer Miete. Addiere auch dies, und es ergeben sich zusammen 330 Kukkia. Wenn aber wiederum jeder der 60 jeweils 6 Kukkia gibt, ergeben 6 mal 60 360 Kukkia. Da wir oben sagten, dass, wenn jeder von ihnen jeweils 6 Kukkia gibt, 40 Kukkia übrig bleiben, subtrahiere 40 Kukkia von den 360, und es bleiben 320 Kukkia übrig. Es sind die 320 Kukkia 10 Kukkia weniger als die 330 Kukkia.

Mache wiederum für dich einen anderen Ansatz und sprich: Es seien nun 90 Schüler, wobei jeder von diesen jeweils 5 Kukkia gegeben hat. 5 mal 90 ergeben 450 Kukkia. Addiere wie beim vorigen Mal die 30 Kukkia, die zur Erfüllung ihrer Miete fehlen, und es ergeben sich zusammen 480 Kukkia. Wenn aber wiederum jeder von den 90 jeweils 6 Kukkia gibt – 6 mal 90 ergeben 540. Subtrahiere 40 Kukkia, so wie du es auch getan hast, und es bleiben 500 Kukkia übrig. Es sind aber die 500 Kukkia 20 Kukkia mehr als die 480 Kukkia. Einerseits haben die 60 Schüler, die jeweils 5 Kukkia geben, 10 Kukkia mehr als die, die jeweils 6 Kukkia gegeben haben, andererseits haben die 90, die jeweils 5 Kukkia gegeben haben, 20 Kukkia weniger als die, die jeweils 6 Kukkia gegeben haben.

Setze nun die beiden

Fehler von diesen in eine Gegenüberstellung und

je 5 Kukkia 60 Schüler	X	10 Kukkia mehr
je 5 Kukkia 90 Schüler		20 Kukkia weniger

sprich: 60 Schüler – je-

der jeweils 5 Kukkia – haben 10 Kukkia mehr, und wiederum 90 Schüler – jeweils 5 Kukkia – haben 20 Kukkia weniger. Multipliziere diese kreuzweise entgegengesetzt: 10 mal 90 ergeben 900 und wiederum 20 mal 60 ergeben 1200. Addiere die 900 zu den 1200, und es werden 2100. Addiere auch die 10 Kukkia, die von den 60 Schülern übrig geblieben sind, zu den 20 Kukkia, die die 90 Schüler weniger haben, und es kommen zusammen 30 Kukkia heraus, welches der Teiler ist. Teile nämlich die 2100 durch die 30, und es ergibt sich schließlich der Quotient 70. Und siehe, du hast gefunden, dass es 70 Schüler sind.

Suche auch die Miete, wie hoch sie ist, und hierbei kannst du auch die Höhe der Miete erfassen, wie hoch sie ist (sic), und dass auch die Schüler in Wahrheit 70 sind.

Wenn also jeder der Schüler jeweils 5 Kukkia gegeben hat – 5 mal 70 ergeben 350 Kukkia. Addiere auch die 30 Kukkia, entsprechend wie wir sagten, dass sie für die Erfüllung der Miete fehlen, und es werden zusammen 380 Kukkia. Wenn aber wiederum jeder der 70 Schüler jeweils 6 Kukkia gegeben hat – 6 mal 70 ergeben 420 Kukkia. Subtrahiere davon 40 Kukkia, entsprechend wie sie sagten, dass, wenn sie jeweils 6 Kukkia gegeben haben, 40 Kukkia übrig bleiben. 40 Kukkia von 420 Kukkia subtrahiert – es bleiben 380 Kukkia übrig, so wie du zu den 350 Kukkia 30 addiert hast, und es ergaben sich 380 Kukkia. Und siehe, du hast die Schüler gefunden, dass es 70 sind und dass die jährliche Miete 380 Kukkia beträgt, was 19 Hyperpyra sind.

Damit der Leser nun *die Wahrheit dieser leichten Methode* einsieht, fordert der Autor ihn auf, zwei andere Ansätze zu wählen. Der Text ist ebenso ausführlich wie oben formuliert.

80 Schüler als Ansatz,

jeweils 5 Kukkia Jahresmiete: 400 Kukkia; $400 \text{ Kukkia} + 30 \text{ Kukkia} = 430 \text{ Kukkia}$
(um das Defizit von 30 Kukkia auszugleichen)

jeweils 6 Kukkia Jahresmiete: 480 Kukkia; $480 \text{ Kukkia} - 40 \text{ Kukkia} = 440 \text{ Kukkia}$
(um den Überschuss von 40 Kukkia auszugleichen)

Im zweiten Fall kommen 10 Kukkia mehr als im ersten heraus.

100 Schüler als Ansatz,

jeweils 5 Kukkia Jahresmiete: 500 Kukkia; $500 \text{ Kukkia} + 30 \text{ Kukkia} = 530 \text{ Kukkia}$
(um das Defizit von 30 Kukkia auszugleichen)

jeweils 6 Kukkia Jahresmiete: 600 Kukkia; $600 \text{ Kukkia} - 40 \text{ Kukkia} = 560 \text{ Kukkia}$
(um den Überschuss von 30 Kukkia auszugleichen)

Im zweiten Fall kommen 30 Kukkia mehr als im ersten heraus.

Es folgt wieder ein Sche-

ma wie bei den beiden Ansätzen vorher, das die

je 6 Kukkia	80 Schüler	10 Kukkia mehr
je 6 Kukkia	100 Schüler	30 Kukkia mehr

X

kreuzweisen Multiplikati-

onen $10 \cdot 100 = 1000$ und $30 \cdot 80 = 2400$ veranschaulicht. Da nun aber die Fehler *gleichsinnig* (adv. $\mu\omicron\nu\omicron\mu\epsilon\rho\tilde{\omega}\varsigma$) seien, sollen die beiden Produkte voneinander subtrahiert werden – während es beim vorherigen Ansatzpaar zu addieren galt: $2400 - 1000 = 1400$. Der weitere Teil der Rechnung verläuft wie bisher: $30 - 10 = 20$, $1400 : 20 = 70$. Die Miete der 70 Schüler (380 Kukkia) wird nicht neu berechnet.

In Anlehnung an das Kapitelbeispiel, aber doch eher theoretisch, wirkt der abschließende Abschnitt über die Frage, wie im Fall ungleichsinniger (adv. $\acute{\alpha}\nu\omega\mu\acute{\alpha}\lambda\omega\varsigma$) und im Fall gleichsinniger Fehler rechnerisch zu verfahren ist. Das erste falsche Ansatzpaar lieferte den ersten Fall (10 Kukkia Überschuss, 20 Kukkia Mangel), bei dem die Fehler zu addieren sind. Das zweite falsche Ansatzpaar lieferte den zweiten Fall (10 Kukkia Überschuss, 30 Kukkia Überschuss), bei dem die kleinere Zahl von der größeren abzuziehen ist. Die zweite Möglichkeit für gleichsinnige Fehler, nämlich der zweifache Mangel, wird an dieser Stelle nicht diskutiert. Insgesamt werden hier die Rechenverfahren nicht sehr verständlich dargestellt.

Der doppelte falsche Ansatz ("Regula falsi") war die wichtigste Methode, solche Probleme zu bewältigen, die – algebraisch betrachtet – auf lineare Gleichungen oder einfache lineare Gleichungssysteme führen, ohne dass algebraische Kenntnisse erforderlich gewesen wären. Dieses Verfahren wurde bereits im 1. Jahrhundert v. Chr. in der chinesischen Mathematik verwendet und ist später bei mittelalterlichen Autoren der islamischen Welt wiederzufinden. Im berühmten 2. Rechenbuch von Adam Ries (1522) ist die "Regel der falschen Zahlen" die zweite zentrale Methode neben dem Dreisatz. Es kann nicht verwundern, dass sich unser Autor eingehend mit dieser Methode beschäftigt, aber merkwürdigerweise scheint er im byzantinischen Bereich der einzige zu sein. Eine historische Gesamtübersicht bietet die Monographie von GAVIN/SCHÄRLIG (2012).

Am Beispiel des einfachsten Typs einer linearen Gleichung, $ax=b$ ($a>0$), soll die Methode in moderner Schreibweise erläutert werden – unabhängig davon, dass hierbei schon der einfache falsche Ansatz zum Ziel führt.

Man wählt zwei Versuchszahlen (falsche Ansatzwerte) x_1 und x_2 mit $ax_1 = b_1$ und $ax_2 = b_2$. Dafür gibt es folgende Möglichkeiten:

- I) Beide Versuchszahlen sind zu groß gewählt. Es gelte $x_1 > x_2$, also auch $b_1 > b_2$, und $f_1 = b_1 - b$, $f_2 = b_2 - b$ seien die positiven Fehlbeträge. Dann liefert der Term

$$\frac{x_2 f_1 - x_1 f_2}{f_1 - f_2}$$

die Lösung x , wie sich leicht nachrechnen lässt.

- II) Beide Versuchszahlen sind zu klein gewählt. Es gelte $x_2 > x_1$, also auch $b_2 > b_1$, und $f_1 = b - b_1$, $f_2 = b - b_2$ seien die positiven Fehlbeträge. Dann liefert der Term

$$\frac{x_2 f_1 - x_1 f_2}{f_1 - f_2}$$

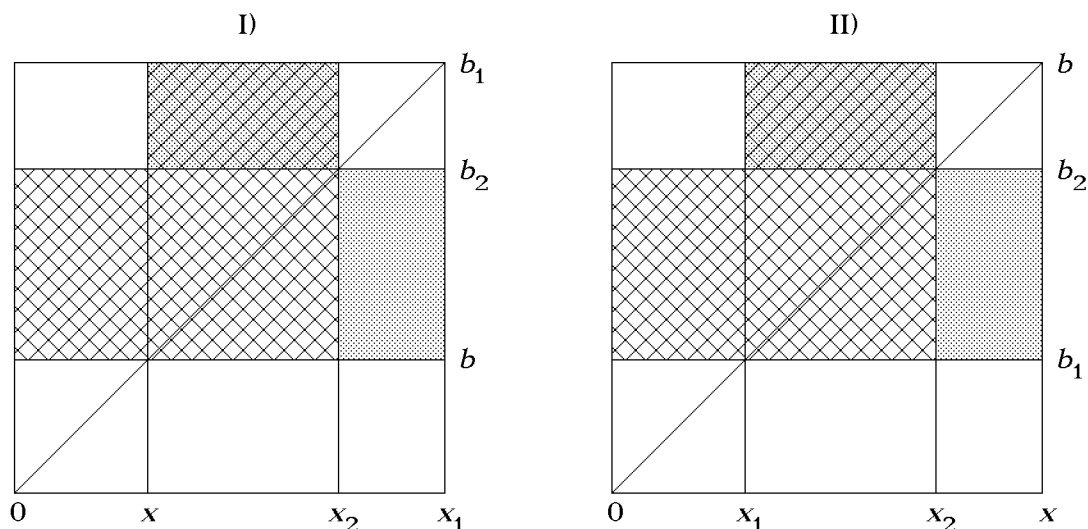
ebenfalls die Lösung x , wie sich leicht nachrechnen lässt.

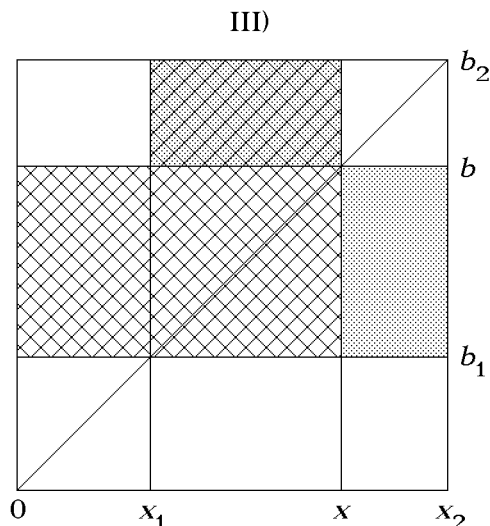
- III) Die eine Versuchszahl, etwa x_1 , ist zu klein, die andere (x_2) ist zu groß gewählt, d. h. es gilt $b_1 < b < b_2$. Sind $f_1 = b - b_1$ und $f_2 = b_2 - b$ die positiven Fehlbeträge, so liefert der Term

$$\frac{x_2 f_1 + x_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

die Lösung x , wie sich leicht nachrechnen lässt.

Der byzantinisch-arabische Mathematiker Qusṭā ibn Lūquā (9./10. Jahrhundert) hat geometrische Beweise für die drei Formeln geliefert – vgl. SUTER (1908/09, S. 112):





Zu I) Die beiden punktierten Rechtecke sind ergänzungsgleich und somit flächeninhaltsgleich. Daher hat das karierte Winkelstück (Gnomon) den Flächeninhalt des mittleren waagerechten Streifens, nämlich $x_1(b_2 - b) = x_1 f_2$.

Andererseits kann der Gnomon mit dem linken oberen Rechteck (Inhalt: $x(b_1 - b_2) = x(f_1 - f_2)$) zu einem Rechteck mit dem Inhalt $x_2(b_1 - b) = x_2 f_1$ ergänzt werden. Es folgt $x_1 f_2 = x_2 f_1 - x(f_1 - f_2)$ und daraus die Formel von I. Dieselben Überlegungen führen bei den beiden anderen Figuren zu den Formeln von II bzw. III.

Im Grunde liefern diese "Beweise" allerdings nur den (geometrischen) Übergang von den Proportionen

$$\frac{f_1}{x_1 - x} = \frac{f_2}{x_2 - x} \quad (\text{vgl. I}), \quad \frac{f_1}{x - x_1} = \frac{f_2}{x - x_2} \quad (\text{vgl. II}) \quad \text{und} \quad \frac{f_1}{x - x_1} = \frac{f_2}{x_2 - x} \quad (\text{vgl. III})$$

zu den Formeln in I, II bzw. III.

Die konkrete Aufgabe in diesem Kapitel führt uns auf die algebraische Gleichung $5x + 30 = 6x - 40$ (x : Anzahl der Schüler). Der einfache falsche Ansatz ist hier nicht direkt anwendbar, da x nicht einfach durch eine "proportionale Korrektur" zu ermitteln ist. Daher musste man zum doppelten falschen Ansatz greifen, sofern man nicht der Algebra mächtig war. Die beiden Paare von Versuchszahlen $x_1 = 60$, $x_2 = 90$ sowie $x_1 = 80$, $x_2 = 100$ führen zum Überschuss $f_1 = 10$ und zum Mangel $f_2 = 20$ der linken Seite gegenüber der rechten Seite bzw. zu den Überschüssen $f_1 = 30$ und $f_2 = 10$ der rechten gegenüber der linken Seite der Gleichung. Die Fehlbeträge stimmen mit denen überein, die man bei gleicher Wahl der Versuchszahlen aus der vereinfachten Gleichung $ax = b$ ($a > 0$) erhält. Hier liefert diese Gleichung mit $a = 1$ und $b = 70$ allerdings schon sofort die Lösung.

Mit den obigen Bezeichnungen haben die beiden Schemata des Autors allgemein folgende Gestalt:

$$\left| \begin{array}{ll} \text{(je 5 Kukkia)} & x_1 \\ \text{(je 5 Kukkia)} & x_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{ll} f_1 & \text{mehr (als bei 6 Kukkia)} \\ f_2 & \text{weniger (als bei 6 Kukkia)} \end{array}$$

Es liegt der Fall III vor, und die entsprechende Rechenvorschrift führt zu x .

$$\left| \begin{array}{ll} \text{(je 6 Kukkia)} & x_2 \\ \text{(je 6 Kukkia)} & x_1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{ll} f_2 & \text{mehr (als bei 5 Kukkia)} \\ f_1 & \text{mehr (als bei 5 Kukkia)} \end{array}$$

Es liegt der Fall I vor, und die entsprechende Rechenvorschrift führt zu x . Der Fall II tritt nicht auf.

Besondere Aufmerksamkeit verdient noch die untere Randbemerkung auf fol. 37^f: *Und anders sehr leicht: Addiere die fehlenden Kukkia zu den überschießenden Kukkia, d. h. addiere 30 Kukkia ... zu den 40 Kukkia, und es ergeben sich zusammen 70. Du hast nun auch so sehr leicht herausgefunden, dass es 70 Schüler sind. Dies geht nun so, wenn Kukkia von der einen Vorgabe her fehlen, von der anderen her aber Kukkia überschüssig sind, wie nun 30 Kukkia von der einen Angabe her fehlen, von der anderen her aber 40 Kukkia überschüssig sind ... Wenn sie aber von den beiden Vorgaben her fehlen oder von den beiden Vorgaben her überschüssig sind, subtrahiere das Kleinere vom Größeren, und so groß der Rest ist, so viele Schüler sind es – und zwar, wenn sich die eine Vorgabe von der anderen um ein Kukki unterscheidet, wie jetzt die eine Vorgabe jeweils 5 Kukkia, die andere aber jeweils 6 Kukkia hat.*

Wenn aber der Unterschied zwei Kukkia beträgt, nimm die Hälfte. Wenn aber der Unterschied drei Kukkia beträgt, nimm das Drittel, und so der Reihe nach.

Wir kommen auf die algebraische Formulierung des Problems zurück:

Ist x die Anzahl der Schüler, so gilt: $5x + 30 = 6x - 40$ (Gleichheit der Mieten). Hieraus folgt $70 = 6x - 5x = x$.

Allgemein erhält man aus der Gleichung $ax + b = cx - d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $a < c$) die Lösung $x = \frac{b+d}{c-a}$. Das Rechenrezept des Autors entspricht den auf die reinen Zahlen beschränkten Äquivalenzumformungen zur Lösung dieser Gleichung. Er weiß aber auch, wie in den Fällen $ax - b = cx - d$ und $ax + b = cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $a \neq c$) zu verfahren ist. Der Divisor ist der (betragsmäßige) Unterschied zwischen den in der Aufgabe fest vorgegebenen Kukkia (nicht zu verwechseln mit den falschen Ansatzwerten) und drückt sich hier durch $|c - a|$ aus.

**Über den, der sein Pferd auf ausgeklügelte Weise verkauft
und dessen Preis nicht verraten will, sondern dessen Preis
in Rätseln dunkel andeutet, wie groß er wohl ist**

Ein Mann verkauft sein Pferd. Jemand, der um zu kaufen kam, fragte nach dem Preis des Pferdes, wie hoch er ist. Der Pferdebesitzer aber antwortete dem, der den Preis dieses (Pferdes) zu erfahren suchte: Ich habe 16 Florin. Wenn du mir

nun von deinen Florinen gibst, was die Hälfte von meinen 16 Florin ist, und noch $\frac{1}{3}$ von dem, worüber du an Florinen verfügst, habe ich den Preis schon erhalten – du aber nimm das Pferd und gehe weg. Es sprach aber auch der Kaufwillige zum Verkäufer: Wenn du mir $\frac{1}{4}$ von deinen 16 Florin gibst, werde ich zusammen mit den $\frac{2}{3}$ von dem, was ich habe, dir geben, was du immer du von mir verlangst, und das Pferd sei mein.

Obwohl wir nicht wissen, welches der Preis ist, den der Verkäufer fordert, und über wie viele Florine der Käufer verfügt, sodass es so geschieht, wie sie sich geeinigt haben – wie können wir dies erfahren?

Die Aussage des Pferdebesitzers zeigt, dass er den Geldbetrag des Käufers kennt. Danach kennt auch der Käufer den Preis des Pferdes. Das "Rätsel" richtet sich also nur an den fiktiven Ohrenzeugen des Gesprächs bzw. den Leser, der zur Lösung auch noch auf die Aussage des Käufers angewiesen ist. Kurios ist, dass der Käufer hier (und ebenso im folgenden Kapitel) den Verkäufer zur Bezahlung des Pferdes mit heranziehen will. Dies erhielte einen Sinn, wenn man den Verkäufer durch einen zweiten Käufer ersetzen würde – vgl. den bekannten Aufgabentyp "Einer allein kann nicht kaufen" – Pferdekauf – (TROPFKE 1980, 4. 2. 2. 3, S. 608 f.)

Der Autor rechnet wieder (sehr ausführlich) mit dem doppelten falschen Ansatz, wobei sich seine Versuchszahlen ($x_1 = 24$, $x_2 = 27$) auf den Geldbetrag des Käufers beziehen und nicht auf den Preis des Pferdes, was nähergelegen hätte. Außerdem geht es hier erstmals um die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Ist x der Geldbetrag des Käufers und y der Preis des Pferdes (jeweils in Florin), so gilt: $8 + \frac{1}{3}x = y$, $4 + \frac{2}{3}x = y$

$$x_1 = 24: 8 + \frac{1}{3}x_1 = 16, 4 + \frac{2}{3}x_1 = 20$$

Dazu heißt es am Ende des Abschnitts: *Und du hast gefunden, dass der Verkäufer 16 Florin, der Käufer 20 hat.* Damit ist gemeint, dass die Forderung des Verkäufers 16 Florin, das Gebot des Käufers 20 Florin beträgt.

$$x_2 = 27: 8 + \frac{1}{3}x_2 = 17, 4 + \frac{2}{3}x_2 = 22$$

Der Käufer hat also einmal $f_1 = 4$ (Florin), ein andermal $f_2 = 5$ (Florin) zu viel bezahlt (s. Diagramm des Autors). Auf den Käufer bezogen liegt also ein doppelter Überschuss vor (vgl. Fall I im Kommentar zu Kap. 62), und dementsprechend erhält der Autor den Geldbetrag (x) des Käufers mithilfe der Rechnung $\frac{24 \cdot 5 - 27 \cdot 4}{5 - 4} = 12$. Dies entspricht der Formel $\frac{x_1 f_2 - x_2 f_1}{f_2 - f_1}$, die zu derjenigen von Fall I äquivalent ist. Ohne weitere Rechnung gibt er auch den Preis des Pferdes an: 12 Florin.

Es folgt eine Probe, die in der Verifizierung von $8 + \frac{1}{3} \cdot 12 = 12$, $4 + \frac{2}{3} \cdot 12 = 12$ besteht, und schließlich noch ein weiterer doppelter falscher Ansatz mit den Versuchszahlen $x_1 = 27$, $x_2 = 33$. Hierbei gilt $8 + \frac{1}{3}x_1 = 17$, $4 + \frac{2}{3}x_1 = 22$, $f_1 = 5$; $8 + \frac{1}{3}x_2 = 19$, $4 + \frac{2}{3}x_2 = 26$, $f_2 = 7$. Erneut liegt in Bezug auf den Käufer ein doppelter Überschuss vor. Der Geldbetrag ($x = 12$) des Käufers berechnet sich jetzt aus $\frac{27 \cdot 7 - 33 \cdot 5}{7 - 5} = \frac{189 - 165}{2}$. Auch diesmal hat der Autor ein kleines Diagramm vorgelegt.

**Über dasselbe Problem, nicht wie das erste, sondern umgekehrt:
Denn jetzt sagte der Verkäufer, dass er 12 Florin habe.
Obwohl wir nun nicht wissen, wie viel Florine der Käufer hat
und wie viel Florin der Preis des Pferdes beträgt,
wird herausgefunden werden, dass der Preis wieder 12 Florin ist,
aber die Florine des Käufers 16 betragen.**

Es gelte nun umgekehrt: Der Verkäufer sagte, dass er 12 Florin habe. Er fordert vom Käufer $\frac{1}{4}$ von den Florinen, die der Käufer hat, und noch $\frac{2}{3}$ von den 12 Florin, die der Verkäufer hat. Dies aber wünscht sich der Käufer: Der Verkäufer soll ein $\frac{1}{3}$ von den 12 Florin, die er hat, und darüber hinaus die Hälfte von dem übergeben, was der Käufer hat. Obwohl wir nun nicht wissen, wie viele Florine der Käufer hat und wie hoch der Preis des Pferdes ist, werden wir herausfinden, dass der Preis wie vorher 12 Florin beträgt, die Florine des Käufers aber 16 sind.

Aufgrund des Ergebnisses, das sowohl schon in der Überschrift als auch im Eingangstext verraten wird, wird deutlich, was der Autor hier mit Umkehrung meint:

Die Aufgabe in Kap. 63 führte in moderner Schreibweise zum Gleichungssystem $8 + \frac{1}{3}x = y$, $4 + \frac{2}{3}x = y$ mit der Lösung $x=y=12$, wobei der Verkäufer 16 Florin hat. Die jetzige führt zu $8 + \frac{1}{4}x = y$, $4 + \frac{1}{2}x = y$ mit der Lösung $x=16$, $y=12$, wobei der Verkäufer 12 Florin hat (x : Geldbetrag des Käufers, y : Preis des Pferdes). Der Preis des Pferdes ist also konstant geblieben, aber Käufer und Verkäufer haben ihre "finanziellen Rollen" vertauscht.

Führen wir für den Geldbetrag des Verkäufers noch zusätzlich die Variable z ein, so erhalten wir die Gleichungssysteme $\frac{1}{2}z + \frac{1}{3}x = y$, $\frac{z}{4} + \frac{2}{3}x = y$ (Kap. 63) bzw. $\frac{2}{3}z + \frac{1}{4}x = y$, $\frac{1}{3}z + \frac{1}{2}x = y$ (Kap. 64). Die Lösungen sind $x = y = \frac{3}{4}z$ bzw. $x = \frac{4}{3}y = \frac{4}{3}z$. Im 1. Fall stimmt also der Geldbetrag des Käufers, im zweiten Fall der Geldbetrag des Verkäufers mit dem Preis für das Pferd überein. Außerdem gilt im 1. Fall $\frac{x}{z} = \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, im 2. Fall ist $\frac{x}{z} = \frac{4}{3} = \frac{16}{12}$. Diese Kehrwertbildung erklärt auch den scheinbar erstaunlichen Austausch von 12 und 16 bei den beteiligten Personen.

Der Autor löst das Problem, das sich – wie schon gesagt – algebraisch in der Form $8 + \frac{1}{4}x = y$, $4 + \frac{1}{2}x = y$ darstellen lässt, wieder mit doppeltem falschen Ansatz, wobei die Versuchszahlen wieder auf den Käufer bezogen sind. Dabei entspricht die 1. Gleichung der Forderung des Verkäufers, die zweite dem "Gebot" des Käufers. $x_1=20$ führt zu 13 Florin als Forderung des Verkäufers und zu 14 Florin als "Gebot" des Käufers. Auch für $x_2=24$ ergibt sich für den Käufer mehr als für den Verkäufer (16 Florin gegenüber 14 Florin). Es liegt wieder doppelter Überschuss vor, und der Geldbetrag (x) des Käufers berechnet sich aus $\frac{2 \cdot 20 - 1 \cdot 24}{2-1} = \frac{16}{1} = 16$. Besonders kurios ist, dass der Autor für die letzte Division das schriftliche Rechenverfahren heranzieht! Anschließend wird der Pferdepreis ($y=12$) dadurch berechnet, dass mit $x=16$ die Verkaufsforderung und das "Kaufgebot" in Einklang gebracht werden.

Es folgt noch ein Hinweis auf weitere mögliche Versuchszahlen ($x_1=24$, $x_2=36$ oder $x_1=48$, $x_2=60$), die ebenfalls zu den bereits gewonnenen Ergebnissen führen.

Ein Anderes, was zu diesem ähnlich ist

Nun ist umgekehrt der Geldbetrag des Käufers gegeben, der des Verkäufers aber und der Preis des Pferdes sind gesucht. Im vorliegenden Beispiel gilt in unserer algebraischen Schreibweise $x = 24$, $4 + \frac{1}{3}z = y$, $8 + \frac{1}{5}z = y$, allgemein also $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}z = y$, $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}z = y$. Daraus ergibt sich $z = \frac{5}{4}x$, $y = \frac{7}{12}x$.

Der doppelte falsche Ansatz betrifft nun die Forderung des Verkäufers. Die vom Autor gewählten Ansatzzahlen $z_2 = 60$ und $z_1 = 90$ für das System $4 + \frac{1}{3}z = y$, $8 + \frac{1}{5}z = y$ liefern wieder doppelten Überschuss, hier für den Verkäufer, und zwar $f_2 = 4$ bzw. $f_1 = 8$. Die weitere Rechnung erfolgt wieder gemäß Fall I im Kommentar zu Kap. 62. Das Ergebnis ist $z = 30$, und dementsprechend bestimmt der Autor den Preis des Pferdes ($y = 14$).

Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn man die Versuchszahlen $z_1 = 15$ und $z_2 = 60$ zugrunde legt. Hier hat der Käufer gegenüber dem Verkäufer zunächst den Überschuss 2 (Florin), dann aber den Mangel 4 (Florin). Auch wenn der Autor mehrfach Käufer und Verkäufer bei dieser Aufgabe (und auch im Diagramm) verwechselt, ist seine weitere Rechnung richtig: Es liegt erstmals der Fall III aus dem Kommentar zu Kap. 62 vor: Im Zähler und Nenner muss jetzt addiert werden, also bestimmt sich z durch den Term $\frac{60 \cdot 2 + 15 \cdot 4}{2 + 4} = 30$.

Der Preis des Pferdes (14 Florin) wird nicht vorgerechnet.

Zu dieser "variantenreich" gelösten Aufgabe präsentiert der Autor nun wieder eine Umkehraufgabe. Jetzt hat der Käufer 30 Florin (siehe das vorherige Ergebnis für den Verkäufer), und die gegenseitigen Forderungen entsprechen dem System $6 + \frac{1}{3}z = y$, $10 + \frac{1}{6}z = y$. Es ergibt sich – nicht ganz zufällig – $z = 24$, $y = 14$, d. h. die Geldbeträge von Käufer und Verkäufer werden vertauscht, aber der Preis des Pferdes ändert sich nicht. Diese Umkehraufgabe steht zur vorigen Aufgabe wie die Aufgabe in der Überschrift dieses Kapitels zur Aufgabe in Kapitel 63, wo wir die auftretenden "Phänomene" schon besprochen und erklärt hatten.

Bedauerlicherweise greift der Autor angesichts dieser vielen ermüdenden doppelten falschen Ansätze sein früheres "Algebra-Rezept" (vgl. fol. 37^r, Kap. 62) nicht mehr auf.

Die beiden Wanderer,

**von denen der eine täglich 10 Stunden, stündlich aber 2 Meilen geht,
der andere aber täglich 8 Stunden, stündlich 5 Meilen:**

In wie vielen Tagen werden sie zusammentreffen

und wie viele Meilen werden herausgefunden werden, die jeder von ihnen hat?

Es ist der Abstand zwischen ihnen 2000 Meilen.

Angenommen, zwei Wanderer haben eine Wanderung aus einer großen Distanz wie etwa 2000 Meilen zu machen. Der eine, der sich bewegte, fing an, zu uns zu gehen, täglich marschiert er 10 Stunden, stündlich aber schafft er für sich 2 Meilen. Am selben Tag und zur selben Stunde, zu der der aufgezeigte Wanderer sich zu uns bewegte, ging von uns auch der andere Wanderer weg und machte für sich seinen Marsch, um zu jener Stadt zu gelangen, die den zu uns entsandten Wanderer hatte. Es marschiert aber der von uns weg dorthin Wan-

dernde täglich 8 Stunden, er macht aber stündlich für sich 5 Meilen. Du suchst zu wissen, in wie vielen Tagen jeder von ihnen die Entfernung von (den) 2000 Meilen erfüllen wird, in wie vielen Tagen die beiden Wanderer hierbei zusammentreffen und wie viele Meilen gefunden werden, die jeder von ihnen zu dem Zeitpunkt hat, wenn die beiden zusammentreffen. Du kannst dies so erfahren ...

Der Autor rechnet folgendermaßen:

10 [h] · 2 Meilen = 20 Meilen, 8 [h] · 5 Meilen = 40 Meilen, schriftlich (!) 2000 Meilen : 20 Meilen = 100 (Tage). In 100 Tagen gelangt der erste Wanderer zu uns.

Es folgt – wieder mit einem Rechendiagramm – 2000 Meilen : 40 Meilen = 50 (Tage). In 50 Tagen hat der gegenläufige Wanderer sein Ziel erreicht.

Die weitere Rechnung sei hier ohne Berücksichtigung der vom Autor genannten oder tatsächlichen Einheiten dargestellt: $100 \cdot 50 = 5000$ (schriftlich !), $100 + 50 = 150$, $5000 : 150 = 33\frac{1}{3}$. In $33\frac{1}{3}$ Tagen treffen die beiden Wanderer zusammen.

Schließlich folgen $20 \cdot 33\frac{1}{3} = 666\frac{2}{3}$ – der (erste) Wanderer, der zu uns kommt, hat $666\frac{2}{3}$ Meilen zurückgelegt – und $40 \cdot 33\frac{1}{3} = 1333\frac{1}{3}$ – der gegenläufige Wanderer also $1333\frac{1}{3}$ Meilen. (Beide Rechnungen werden nicht schriftlich vorgeführt.)

Als Probe dient die Addition von $666\frac{2}{3}$ und $1333\frac{1}{3}$ (in Form eines Diagramms in milesischen Zahlen), die Summe 2000 stimmt mit der Entfernung der beiden Städte (und der Startpunkte der beiden Wanderer) überein.

Allgemein lässt sich dieser Aufgabentyp ohne Algebra wie folgt lösen.

Die Berechnung der Zeiten, die A und B jeweils für die Gesamtstrecke benötigen, liegt auf der Hand. Interessant ist eigentlich nur die Bestimmung von T , dem Zeitpunkt (nach Tagen), zu dem sich die beiden Wanderer treffen:

d sei die anfängliche Entfernung der beiden, v_A , v_B die Geschwindigkeiten von A und B (hier in Meilen pro Tag). Wenn sie nach T Tagen zusammentreffen, dann gilt für die von A und B zurückgelegten Wegstrecken d_A , d_B : $d_A = v_A \cdot T$, $d_B = v_B \cdot T$ und $d_A + d_B = d$. Daraus folgt

$$(65.1) \quad T = \frac{d}{v_A + v_B}.$$

Der Autor hätte T also schneller über $2000 : (20 + 40) = 33\frac{1}{3}$ bestimmen können. Die Formel, die seinem Rechenrezept zugrunde liegt, ist zu (65.1) äquivalent, aber komplizierter:

$$(65.2) \quad T = \frac{\frac{d}{v_A} \cdot \frac{d}{v_B}}{\frac{d}{v_A} + \frac{d}{v_B}}$$

Mit T erhält man nun sofort auch die von A und B anteilig gelaufenen Strecken.

Der Byzantiner schließt wie schon oft mit dem Hinweis, dass man bei ähnlichen oder gleichartigen Aufgaben die Lösung mit der gleichen Methode finden kann.

**Die von einer Stadt Abreisenden,
von denen der eine vor 10 Tagen abreiste,
der andere 10 Tage später als der vorher Abreisende schneller ging:
In wie vielen Tagen mag er den vorher Abreisenden erreicht haben?**

Angenommen, es ist einer der Archonten aus einer Stadt abgereist. Er marschieret täglich 8 Stunden, stündlich macht er 3 Meilen: dreimal 8 ergibt 24, d. h. täglich geht er 24 Meilen. Nach dessen Abreise – im Abstand von 10 Tagen – als den Gebieter und Herrn des vorher abgereisten Archonten das Bedürfnis ergriff, ihm etwas Notwendiges anzuzeigen, sandte er zu ihm einen anderen Soldaten aus, um ihm dies mitzuteilen.

Es marschieret der nach 10 Tagen abreisende Soldat täglich 11 Stunden, stündlich macht er für sich 4 Meilen: 4-mal 11 ergibt 44, d. h. seine tägliche Bewegung ist 44 Meilen.

Du suchst zu wissen, in wie vielen Tagen er den vor ihm vor 10 Tagen abgereisten Archonten erreicht ...

Zu dieser Einholaufgabe gibt der Autor zwei Lösungswege an. Im Haupttext findet sich der folgende, und zwar mit einfachem falschen Ansatz:

Setze eine Wegstrecke an, wie viel an Tagen dir wohl dafür geeignet erscheint, dass es mehr sei als nötig; denn es ist nötig, eine Entfernung und Bewegung von so vielen Tagen anzunehmen, wie viel dir wohl geeignet erscheint, damit der nach 10 Tagen Abreisende zum vorher Abreisenden vorrückt.

Der Schreiber wählt eine Zeitspanne $T_A = 35$ (Tage), seit der der Archont (A) schon unterwegs ist, multipliziert mit dessen Geschwindigkeit $v_A = 24$ (Meilen pro Tag) und erhält eine Wegstrecke $s_A = 840$ (Meilen). Wegen des Vorsprungs von $\tau = 10$ (Tagen) ist der Soldat (B) erst $T_B = 25$ (Tage) unterwegs, mit $v_B = 44$ (Meilen pro Tag) ergibt sich eine Wegstrecke von $s_B = 1100$ Meilen. Der Soldat *hat*, wie der Autor bemerkt, den Archonten *bei Weitem überholt* (προέβη καταπολ(ύ) ...). Die Streckendifferenz $s_B - s_A$ beträgt 260 Meilen, die Geschwindigkeitsdifferenz $v_B - v_A$ 20 Meilen pro Stunde. Die weitere Rechnung: $260 : 20 = 13$, d. h. 13 Tage zuvor (vor Ablauf von T_A) hatte der Soldat den Archonten erreicht. Die Zeitspanne T , während der der Archont unterwegs ist, bis er vom Soldaten eingeholt wird, beträgt also $(35 - 13 =) 22$ Tage. Der 10 Tage später gestartete Soldat erreicht den Archonten in 12 Tagen.

Die Rechnung entspricht der Formel $T = T_A - \frac{v_B(T_A - \tau) - v_A T_A}{v_B - v_A}$ (66.1).

Der Autor führt eine naheliegende Probe durch, indem er die Übereinstimmung der Produkte $22 \cdot 24$ und $12 \cdot 44$ ($= 528$) feststellt. Diese beruht auf der Gleichheit der Wege, die A und B zum Zeitpunkt des Zusammentreffens zurückgelegt haben, in Zeiten und Geschwindigkeiten mit den obigen Bezeichnungen ausgedrückt: $v_A T = v_B (T - \tau)$ (66.2)

Im Übrigen geht der Schreiber hier erstmals auf die Länge der gemeinsam zurückgelegten Strecke ein (528 Meilen).

Ein weiterer falscher Ansatz, und zwar mit $T_A = 30$ (Tagen), soll das Vertrauen des rechnenden Lesers in diese Methode stärken. Es kann nicht verwundern, dass sich am Ergebnis für T nichts ändert, da sich T_A aus der Formel (66.1) heraushebt. Nach Vereinfachung entsteht die Gleichung

$T = \frac{v_B \tau}{v_B - v_A}$ (66.3), die mit (66.2) äquivalent ist.

Offenbar hat der Autor erkannt, dass bei diesem Aufgabentyp der falsche Ansatz zwar zum Ziel führt, aber umständlich ist. So schreibt er zur Kapitelüberschrift an den Rand: *Das Gegenwärtige ist nützlich, das Erste aber unnütz*. Als "Gegenwärtiges" präsentiert er nun auf dem Rand folgendes Rechenrezept – hier in reinen Zahlen wiedergegeben: $10 \cdot 24 = 240$ (A hat in 10 Tagen 240 Meilen zurückgelegt), $44 - 24 = 20$ (Differenz der Geschwindigkeiten von B und A), $240 : 20 = 12$ (Zeit ($T - \tau$), die der Soldat zum Einholen des Archonten benötigt).

Hier liegt die Formel $T - \tau = \frac{v_A \tau}{v_B - v_A}$ (66.4)

zugrunde, die zu (66.3) äquivalent ist.

Es folgt wieder eine Probe, die aber mit der zum ersten einfachen falschen Ansatz übereinstimmt.

67

***Eine ähnliche Frage über zwei Schiffe – wie die zwei Wanderer,
als sie aus den Entfernungen zweier Städte aufeinandertrafen***

Angenommen, zwei Schiffe haben sich an ein und demselben Tag und zur selben Stunde (aufeinander zu) bewegt. Ihre Entfernung ist 1056 Meilen. Während sie nun in entgegengesetzter Richtung segeln, kommt das eine voran, das andere aber nur langsam. Sie bewegen sich nicht gleichmäßig und ähnlich, sondern das Schiff, das günstigen Wind hat, um sich schneller zu bewegen, macht für sich stündlich 4 Meilen, Tag und Nacht also 96 Meilen; denn 4-mal 24 ergibt 96. Das Schiff, das nicht das günstige Wehen der Winde hat, um sich in gleicher Weise wie das vorhergehende zu bewegen, bewegt sich gleichwohl verlangsamt stündlich 2 Meilen, Tag und Nacht also 48 Meilen; denn zweimal 24 ergibt 48. Du suchst zu wissen, in wie vielen Tagen jedes Schiff die Entfernung von 1056 Meilen vollendet und in wie vielen Tagen und nach wie vielen Meilen sich die Schiffe vereinigen, wenn sie aufeinandertreffen. Du kannst das so erfahren ...

Der Autor rechnet – wenn man nur die reinen Zahlenwerte betrachtet – $1056 : 96 = 11$ (Anzahl der Tage, die das schnellere Schiff für die Gesamtstrecke benötigt), $1056 : 48 = 22$ (Anzahl der entsprechenden Tage für das langsamere Schiff), $11 \cdot 22 = 242$, $11 + 22 = 33$, $242 : 33 = 7\frac{1}{3}$ (Anzahl der Tage, nach denen sich die beiden Schiffe treffen, auch in 7 Tage 8 Stunden umgewandelt). Dieser Berechnung der Zeit für den Treffpunkt liegt wieder die etwas umständliche Formel (65.2) zugrunde.

Es folgen die Rechnungen $7\frac{1}{3} \cdot 96 = 704$ (Anzahl der Meilen des schnelleren Schiffs bis zum Treffpunkt), $7\frac{1}{3} \cdot 48 = 352$ (Anzahl der entsprechenden Meilen des langsameren Schiffs) und schließlich die Probe $704 + 352 = 1056$ (Gesamtstrecke in Meilen). Sämtliche Rechnungen sind in Diagrammen niedergelegt, unter denen die Multiplikationen mit $7\frac{1}{3}$ auffallen.

**68 *Über die beiden Schiffe, die sich von ein und derselben Stadt
wie folgt bewegen, wobei das eine schneller ist, das andere langsamer –
in wie vielen Tagen jedes wohlbehalten ankommen wird***

Zwei Schiffe, die sich wie folgt von ein und derselben Stadt aus bewegen – das schneller fahrende legt stündlich 6 Meilen zurück, täglich macht es für sich 144 Meilen: denn 6-mal 24 ergibt 144. Das andere aber, das sich nicht so bewegen kann, weil ein verständlicher Grund es hindert, legt selbst stündlich 5 Meilen zurück, täglich macht es für sich 120 Meilen: denn 5-mal 24 ergibt 120. Du suchst zu wissen, in wie vielen Tagen jedes von ihnen, wenn es so fährt, wohlbehalten ankommen und einen Weg vollenden wird von ungefähr 1300 Meilen.

Es handelt sich nur um eine einfache Bewegungsaufgabe, bei der die Zeiten T_A , T_B aus der Strecke d ($= 1300$ Meilen) und den Geschwindigkeiten v_A ($= 144$ Meilen pro Tag), v_B ($= 120$ Meilen pro Tag) zu berechnen sind: $T_A = \frac{d}{v_A}$, $T_B = \frac{d}{v_B}$

Der Autor berechnet für das 1. Schiff $1300:144 = 9$ und 4 Restmeilen (statt korrekterweise 4 Resttage, die $\frac{2}{3}$ Stunden entsprächen). Es folgt das richtige Ergebnis $T_A = 9$ Tage $\frac{2}{3}$ Stunden. Im Diagramm wird das Ergebnis $9\frac{4}{144}$ Tage zu $9\frac{1}{36}$ Tagen gekürzt. Analog erfolgt die Rechnung für das 2. Schiff ($T_B = 10\frac{5}{6}$ Tage $= 10$ Tage 20 Stunden). Zusätzlich korrigiert sich aber der Schreiber stillschweigend, indem er darauf hinweist, dass bei der Division $1300:120$ ein Restbruchteil $\frac{5}{6}$ entsteht, der als Tagesbruchteil zu verstehen ist und 20 Stunden bezeichnet.

**69 *Über die beiden Schiffe, die sich von ein und derselben Stadt
aus bewegt haben, nicht wie unmittelbar (zuvor) an ein und demselben Tag,
sondern das eine vor, das andere nach gewissen Tagen –
in wie vielen Tagen sie sich vereinigen werden und in wie vielen Tagen
jedes in Bezug auf die Entfernung zum Ziel gelangen wird***

Zwei Schiffe haben eine Fahrt von einer Entfernung von 1500 Meilen zu machen. Und das erste fuhr vor 2 Tagen ab – da es keine schnelle Geschwindigkeit hat, bewegt es sich stündlich 5 Meilen, am Tag 120. Nach den 2 Tagen fuhr auch das andere ab, welches schneller ist und sich stündlich 7 Meilen, am Tag 168 bewegt. Du suchst zu wissen, in wie vielen Tagen und Meilen sie vereinigt werden und in wie vielen (Tagen) jedes von diesen die Entfernung von 1500 Meilen glücklich bewältigen wird.

Im Haupttext erfolgt die Lösung der Frage nach dem Zusammentreffen der Schiffe wieder mit dem einfachen falschen Ansatz – entsprechend der Formel (66.1). Dabei sind – in der Reihenfolge der Rechenschritte des Autors – $T_A = 10$ (Tage, die das langsamere Schiff A schon unterwegs sei), $v_A T_A = 1200$ (zugehörige Meilen von A). Für das schnellere Schiff B gilt $T_B = T_A - \tau = 8$ (Tage) mit $\tau = 2$ (Tagen), $v_B T_B = 1344$ (Meilen von B). Es folgt $v_B T_B - v_A T_A = 144$ Meilen, $v_B - v_A = 48$ (Meilen pro Tag). Der Quotient in (66.1) beträgt 3 (Tage), so dass sich $T = 10 - 3 = 7$ (Tage) ergibt. So lange ist A unterwegs, bis es mit B

zusammentrifft. B benötigt bis zu dieser Begegnung nur $8 - 3 = 5$ (Tage), die der Autor auch aus $7 - 2$ hätte berechnen können.

Es folgt noch eine triviale Bemerkung: Wenn das eine Schiff 7 Tage, das andere 5 Tage bis zum Zusammentreffen benötigen würde, würde das nach 2 Tagen abfahrende Schiff das vorher ausgelaufene erreichen.

Die Probe erfolgt in Entsprechung zu (66.2): $120 \cdot 7 = 168 \cdot 5 = 840$. Dabei ist 840 die Zahl der Meilen bis zum Zusammentreffen der Schiffe, was im Text nicht ganz deutlich wird.

Es bleibt noch die Bestimmung der Fahrzeiten von A und B für die Gesamtstrecke von 1500 Meilen gemäß (68.1): Der Autor berechnet korrekt $12\frac{1}{2}$ Tage für A, aber 8 Tage und *ungefähr* $9\frac{1}{2}$ Stunden für B anstatt $8\frac{13}{14}$ Tage oder 8 Tage $22\frac{2}{7}$ Stunden. Der Fehler ist im zugehörigen Divisionsdiagramm zu finden, wo der Bruchteil $\frac{66}{168}$ anstatt korrektem $\frac{156}{168}$ entsteht. Außerdem hat der Autor noch explizit $9\frac{3}{7}$ Stunden durch den Näherungswert $9\frac{1}{2}$ Stunden ersetzt.

Am rechten Rand von fol. 40^r hat er zusätzlich vermerkt: *Das Gegenwärtige ist nützlich, das Erste aber unnütz*. Mit Letzterem ist wohl wieder die Lösungsmethode des einfachen falschen Ansatzes zur Berechnung der Zeit bis zum Zusammentreffen der Schiffe gemeint (vgl. Kap. 66). Die Alternative, die der Autor nun (auf demselben Rand) bietet, ist weniger umständlich und entspricht im Rechenablauf der Formel (66.4). Hier gilt (ohne Einheiten) $\tau = 2$, $v_A = 120$, $v_B = 168$ und daher $T - 2 = 5$ ($T = 7$).

70

Über die zwei Männer, die sich ungleichmäßig bewegen, die einen Teil des Tages nach vorne marschieren und sich einen Teil des Tages nach hinten umwenden: In wie vielen Tagen werden sie vereinigt werden und in wie vielen Tagen wird jeder von ihnen in Bezug auf die Entfernung ans Ziel gelangen, wenn er so läuft?

Zwei vereinbarten miteinander: Der eine soll sich jeden Tag geradeaus nach vorne bewegen, indem er eine Distanz von $\frac{1}{4}$ von einer Meile geht, dann soll er sich wiederum am selben Tag umwenden und rückwärtsgewandt nicht $\frac{1}{4}$, was er dort vorwärtsgeht, sondern $\frac{1}{5}$ einer Meile (gehen). Der andere wiederum soll sich einen Teil des Tages geradeaus nach vorne bewegen, indem er eine Distanz von $\frac{1}{3}$ Meile geht, dann soll er wiederum am selben Tag nicht $\frac{1}{3}$, was er vorwärtsgeht, sondern $\frac{1}{4}$ einer Meile kehrtmachen. Es ist aber die gesamte Distanz, von der sie vereinbarten, dass sie so gehen, ungefähr 40 Meilen. Nicht von ein und demselben Anfang haben sie begonnen, sondern sie haben begonnen – der eine vom Anfang, der andere vom Ende der 40 Meilen, der eine geht, der andere kommt, um einander zu treffen.

Du suchst zu wissen, in wie vielen Tagen sie vereinigt werden, wenn sie so gehen, und in wie vielen Tagen jeder von ihnen die 40 Meilen erfüllen wird.

Dies ist aber vollkommen unnütz: Denn weder ist solches jemals geschehen noch wird es jemals geschehen, weder bei Männern noch bei irgendeinem anderen ähnlichen Problem. Obwohl es ein vergleichsweise schwieriges Problem ist und schwieriger als die vorher besprochenen, findet man durch die handliche

Methode auch dies leicht heraus.

Für die Lösung der ersten Frage spielt nicht nur die tägliche Verringerung der Distanz d zwischen den beiden Männern M_1 , M_2 um $(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{2}{15}$ (Meilen) eine Rolle; darüber hinaus muss bedacht werden, dass deren erste Begegnung im Zuge ihrer jeweiligen Vorwärtsbewegung (um insgesamt $\frac{7}{12}$ Meilen) erfolgt. Dies geschehe am n -ten Tag.

Für die minimale Distanz am $(n-1)$. Tag gilt dann

$$(70.1) \quad d_{\min} = 40 - \frac{7}{12} - \frac{2}{15}(n-2) > 0,$$

denn nach $(n-2)$ Tagen ist die Distanz $40 - \frac{2}{15}(n-2)$, und die Summe $\frac{7}{12}$ der Vorwärtsbewegungen führt am $(n-1)$. Tag noch nicht zur Begegnung (mit $d=0$). Nach $(n-1)$ Tagen beträgt die Distanz $40 - \frac{2}{15}(n-1)$, aber am n -ten Tag wird sie nach der Begegnung "negativ", also gilt

$$(70.2) \quad 40 - \frac{7}{12} - \frac{2}{15}(n-1) < 0.$$

Aus (70.1) und (70.2) ergibt sich für n die Beschränkung $296\frac{5}{8} < n < 297\frac{5}{8}$, die nur durch $n=297$ ganzzahlig erfüllt wird. Die erste Begegnung der beiden findet also am 297. Tag statt.

Nach 297 Tagen beträgt die Distanz $40 - \frac{2}{15} \cdot 297 = \frac{2}{5} > 0$, sie hat also nach der 1. Begegnung der Männer wieder das Vorzeichen gewechselt, d. h. es gibt am 297. Tag eine 2. Begegnung. Am 298. Tag begegnen sie sich zum 3. Mal, da $\frac{7}{12}$ größer als $\frac{2}{5}$ ist, die Ausgangsdistanz dieses Tages. Danach wird d wieder negativ, nach 298 Tagen aber erneut positiv ($40 - \frac{2}{15} \cdot 298 = \frac{4}{15}$), sodass am 298. Tag eine 4. Begegnung stattfindet. Am 299. Tag gibt es ein 5. Zusammentreffen, da die Ausgangsdistanz dieses Tages ($\frac{4}{15}$) kleiner als $\frac{7}{12}$ ist. d wird negativ, nach 299 Tagen aber wieder positiv ($\frac{2}{15}$), sodass am 299. Tag noch ein 6. Zusammentreffen stattfindet. Am 300. Tag begegnen sie sich noch ein weiteres Mal und an dessen Ende zum 8. Mal, denn es gilt $40 - \frac{2}{15} \cdot 300 = 0$. Dieses 8. Mal ist auch das letzte Mal, da sich die Männer jetzt bei ihrer jeweiligen Rückwärtsbewegung treffen, ohne sich dabei zu überkreuzen.

Die zweite Frage ist ähnlich zu behandeln, auch wenn sie nicht so komplex ist.

Für M_1 lässt sich der gesuchte n -te Tag wegen $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ aus den Ungleichungen

$$(70.3) \quad \frac{1}{20}(n-2) + \frac{1}{4} < 40, \quad \frac{1}{20}(n-1) + \frac{1}{4} \geq 40$$

eindeutig bestimmen: Es folgt $796 \leq n < 797$, also $n=796$. Für diesen Wert wird die zweite Ungleichung zu einer Gleichung, d. h. am 796. Tag erreicht M_1 das Ziel, das ursprünglich 40 Meilen entfernt war, mit dem Abschluss seiner Vorwärtsbewegung. Wenn er trotzdem weiterginge, würde er beim nächsten Voranschreiten übers Ziel hinausschießen oder sich auf $\frac{1}{5}$ einer Meile beschränken, was ebenfalls regelwidrig wäre. Eine Fortsetzung seines Marsches kann also außer Betracht bleiben.

Für M_2 bestimmt sich der gesuchte n -te Tag wegen $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ aus

$$(70.4) \quad \frac{1}{12}(n-2) + \frac{1}{3} < 40, \quad \frac{1}{12}(n-1) + \frac{1}{3} \geq 40.$$

Es folgt $477 \leq n < 478$, also $n=477$, und dieser Wert, in die zweite Ungleichung eingesetzt, führt zu einer Gleichung. M_2 erreicht das Ziel in 40 Meilen Entfernung am 477. Tag mit dem Abschluss seiner Vorwärtsbewegung. Auch hier steht die Fortsetzung des Marsches außer Diskussion.

Der Autor hat die Herausforderung dieser Aufgabe leider nicht erkannt. Zunächst behandelt er das 2. Problem. Dabei berechnet er die täglich zurückgelegten Meilen nicht über die Differenz, sondern über das Produkt der jeweiligen Beträge, was aber in diesem Fall (benachbarte Stammbrüche) am Ergebnis nichts ändert: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ bzw. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Nun schließt er: In 20 Tagen bzw. in 12 Tagen legen M_1 , M_2 1 Meile zurück, in 800 Tagen bzw. 480 Tagen haben sie ihr Ziel in 40 Meilen Entfernung erreicht. Die Antwort ist falsch, wie oben gezeigt.

Die 1. Frage betraf den Zeitpunkt des Zusammentreffens.

Der Autor rechnet entsprechend der Formel (65.2) mit $d=40$ (Meilen) und den nicht allgemeingültigen Werten $v_A = \frac{1}{20}$ (Meile pro Tag), $v_B = \frac{1}{12}$ (Meile pro Tag), also mit $\frac{d}{v_A} = 800$ (Tagen) bzw. $\frac{d}{v_B} = 480$ (Tagen).

Das Ergebnis $T = 300$ Tage ist zumindest nicht falsch – es handelt sich wie gesagt um die letzte Begegnung der beiden Läufer – aber eigentlich interessiert ja nur die Erstbegegnung am 297. Tag, die dem Schreiber entgangen ist.

Auch bei seiner Probe hat er die Rolle der Vorwärtsbewegungen am Tag des Zusammentreffens bzw. vor dem Ziel nicht erkannt. Er schließt folgendermaßen:

M_1 : 300 (Tage) : 20 (Tage pro Meile) = 15 (Meilen);

M_2 : 300 (Tage) : 12 (Tage pro Meile) = 25 (Meilen)

Somit läuft M_1 15 Meilen, M_2 25 Meilen bis zum Treffpunkt, also laufen sie insgesamt 40 Meilen.

Wie die letzten sechs Kapitel belegen, hat sich unser Autor also ausführlich, wenn auch zuletzt nicht fehlerfrei, mit Bewegungsaufgaben auseinandergesetzt. In seinem "2. Buch" (Kap. 163, fol. 96^v–97^v) stellt er noch eine weitere kuriose Bewegungsaufgabe vor, bei der die tägliche Wegstrecke des einen Läufers einer arithmetischen Folge entspricht. Auch der Schreiber B der Aufgabensammlung im selben Kodex bietet hier reichhaltiges, überwiegend realitätsfernes Material, und zwar in den Aufgaben 47, 65, 77–81 [HUNGER/VOGEL (1963), S. 40 f., 50 f., 58–65].

Obwohl Bewegungsaufgaben zum Urgestein der Unterhaltungsmathematik zählen, treten sie in mesopotamischen, ägyptischen und alten griechischen Quellen nicht auf. Ihr Weg führte von China über Indien in die arabische Welt; von dort aus haben sie im Abendland Eingang gefunden [vgl. TROPFKE (1980), 4.2.1.4, insbes. S. 588 f.].

**Wie die Fragen, die im Folgenden besprochen werden,
zum praktischen und bürgerlichen Leben gehören,
weshalb sie auch nützlicher als die vorher besprochenen sind**

Alle Fragen, welche wir gerade bis jetzt aufgeschrieben haben, waren gut, notwendig und nützlich: denn nichts, was außerhalb der Vernunft und der Fragen ist, war dort aufgeschrieben worden, sondern ist auch der Vernunft würdig und nicht ohne Anteil an Nutzen. Aber es ist so, da sie auch aufgesucht werden,

erscheint das Begreifen von diesen auch notwendig zu sein; denn nichts von dem, was nicht aufgesucht wird, ist irgendwann einmal nützlich. Das Aufgesuchte aber wird sehr groß erscheinen, auch wenn es eher sehr klein zu sein scheint, wie auch das vorher Besprochene klein zu sein scheint, als wenn nicht danach gesucht wird. Da wir aber in dessen Nutzen gelangt sind, wird das leichte Begreifen von diesem für uns als notwendig und nützlich gefunden werden. Hauptsächlich aber haben wir dieses der Übung halber aufgeschrieben, damit dies Lehrer und Führer der Probleme wird, die weiter besprochen werden – (Probleme) von diesen, die um vieles nötiger sind, damit das Begreifen von diesen durch die vorfindlichen Beispiele wohl müheloser wird. Die Erfahrung mit den Multiplikations- und Divisionsaufgaben hast du gut ausgebildet, und du bist bereit geworden, um auch das, was noch weiter besprochen wird, gut aufzunehmen, zu verstehen und zu gebrauchen, sobald dir notwendigerweise eine Frage von solcher Art erwächst. Was wir aber nun besprechen wollen, sind verschiedene schwierige Probleme, durch die sich im Leben die bürgerlichen Angelegenheiten der Beteiligungs- und Handelsgeschäfte entwickeln, denn Verkaufen, Kaufen und Zahlen des Handelsverkehrs Aufsuchen – durch all diese (Probleme) werden sie bekannt gemacht und werden leicht durch die aufgezeigte Methode. Solches nun, was notwendig und nützlich ist – jetzt, da du besonders bereit geworden bist, um dies müheloser aufzunehmen – werden wir alles, von nun an beginnend, besprechen.

Dieses Kapitel hat keinen mathematischen Inhalt, sondern leitet von den zahlreichen Aufgaben, die eher oder ganz der Unterhaltungsmathematik zuzurechnen sind (Kap. 55, 56, 59–70) zu solchen aus der kaufmännischen Praxis über. Es ist von besonderer Bedeutung, da sich der Autor nur hier zur "Philosophie" seiner schriftlichen mathematischen Unterweisung äußert. Alle Fragen (Probleme) seien schon deshalb nützlich, weil sie überhaupt gestellt (oder untersucht) worden seien – nur nicht gestellte Fragen seien unnütz. Damit rechtfertigt er offenkundig die vorhergehende Beschäftigung mit unterhaltungsmathematischen Aufgaben. Darüber hinaus seien diese Probleme eine geeignete Übung für die Bewältigung der kommenden praktischen Fragen. Hier hat er wohl an die Möglichkeit des Transfers von Lösungsmethoden gedacht. Insbesondere durch die Multiplikations- und Divisionsaufgaben – der hier nicht genannte Dreisatz verbindet ja beides – sieht der Autor den Leser gut gerüstet, die Rechenverfahren zu allen weiteren Problemen, die aus dem kaufmännischen Leben stammen, mühelos aufzunehmen, zu verstehen und anzuwenden.

72 ***So viele Florine du aufsuchst, wie viele Hyperpyra es werden – eine handliche und leichte Lösungsfindung***

Der Autor stellt 4 Aufgaben vor; dabei variieren die Anzahlen der Florine, aber interessanter sind die verschiedenen Lösungsmethoden, die er in Abhängigkeit von der Umrechnung des Florins verwendet – in reine Hyperpyra (ὑπέρπυρα ἀκέ-
ραια) oder in Hyperpyra mit Kukkia gemischt (μετὰ κουκκιῶν μεμειγμένη, sc. τιμή).

1. Beispiel: 131 Florin mit 1 Florin = 7 Hyperpyra ergeben 917 Hyperpyra.
2. Beispiel: 123 Florin mit 1 Florin = 7 Hyperpyra 6 Kukkia

Die Umrechnung 1 Hyperpyron = 20 Kukkia wird erst im Lösungstext angegeben. Eine der folgenden Rechnungen wäre zu erwarten gewesen:

1 Florin = 146 Kukkia, 123 Florin = 17958 Kukkia = 897 Hyperpyra 18 Kukkia
 # 123 Florin = 861 Hyperpyra 738 Kukkia = 897 Hyperpyra 18 Kukkia
 # 1 Florin = $7\frac{3}{10}$ Hyperpyra, 123 Florin = $897\frac{9}{10}$ Hyperpyra = 897 Hyperpyra 18 Kukkia

Doch der Autor argumentiert anders, und zwar geht er von 10 Florin aus: 10 Florin = 70 Hyperpyra 60 Kukkia = 73 Hyperpyra. Für alles Weitere vergleiche man das Schema rechts: Er multipliziert nun mit 123 und erhält 8979 Hyperpyra. Da er aber mit Zehnern von Florinen multipliziert hat, streicht er eine Stelle ab

$$\begin{array}{r} 123 \\ 369 \\ \hline 861 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 7 \end{array}$$

Hyperpyra 897 | 9
 Kukkia 18 | 0

(*imp. κόψε ένα γράμμα*), hier 9 Hyperpyra, die er in 180 Kukkia umwandelt. Erneutes Abstreichen der letzten Stelle führt zum Ergebnis 897 Hyperpyra 18 Kukkia.

3. Beispiel: 1111 Florin mit 1 Florin = 7 Hyperpyra 11 Kukkia

Hier stellt den Autor der Ansatz mit 10 Florin nicht zufrieden: 10 Florin = 70 Hyperpyra 110 Kukkia = ... = 75 Hyperpyra 10 Kukkia. Damit könne man 1111 Florin nicht gut multiplizieren. (Im vorigen Beispiel stand nämlich an der vergleichbaren Stelle ein reiner Hyperpyra-Betrag.) Daher wählt er nun den Ansatz 100 Florin = ... = 755 Hyperpyra und berechnet $1111 \cdot 755 = 838805$ (Hyperpyra). Mit der Begründung, dass er mit Hundertern von Florinen multipliziert hat, streicht er nun zwei Stellen ab: 8388 | 05. 5 Hyperpyra = 100 Kukkia, davon bleibt nach erneutem Abstreichen von 2 Stellen (1100) 1 Kukki übrig. Ergebnis: 8388 Hyperpyra 1 Kukki

Anschließend äußert sich der Autor allgemein zu dem Verfahren für den Fall, dass auch die Wahl von 100 Florin noch nicht genügt:

Wenn du nun dagegen die Hyperpyra nicht gut mit den 10 Florin und mit den 100 Florin multiplizieren kannst, weil du auch gewisse Kukkia erhältst, suche 1000 Florin auf, wie viele Hyperpyra sie sind, und multipliziere, wie viele Florine auch immer du aufsuchst, diese zu Hyperpyra zu machen, die Hyperpyra mit den 1000 Florin, und von dem entstandenen Produkt streiche, da du 1000 Florin mit Hyperpyra multipliziert hast, drei Ziffern ab, und die übrig bleibenden Ziffern – so viel sie bezeichnen, so viele Hyperpyra ergeben die Florine, die du zu Hyperpyra zu machen suchst. Die drei Ziffern aber, die du abgestrichen hast, sind Hyperpyra. Wie viele Hyperpyra nun die drei Ziffern bezeichnen, die du abgestrichen hast, wandle diese Hyperpyra in so viele Kukkia um, wie es zulässigerweise geschieht, und streiche wiederum auch von den Kukkia drei Ziffern ab wie auch bei den Hyperpyra, und das, was übrig bleibt – wie viel es bezeichnet, so viele Kukkia haben die Florine, die du zu Hyperpyra zu machen suchst, noch zusätzlich zu den Hyperpyra.

Daraufhin wird das gerade behandelte Beispiel mit dem Ansatz 1000 Florin durchgerechnet, der wegen der Parität 1 Kukki = 0,05 Hyperpyra entbehrlich ist.

4. Beispiel: 53 Florin mit 1 Florin = 7 Hyperpyra 11 Kukkia

Ansatz mit 100 Florin: 100 Florin = 755 Hyperpyra (mit Hinweis auf das vorige

Beispiel), $53 \cdot 755 = 40015$ (Hyperpyra); 4 0 0 1 5 mit 15 Hyperpyra = 300 Kukkia; 3 1 0 0; Ergebnis: 400 Hyperpyra 3 Kukkia

Und anders: Der Schreiber rechnet die Aufgabe erneut durch, nur mit vertauschten Faktoren, was völlig überflüssig ist.

In unserer Dezimalbruchschreibweise erhält man auf der Grundlage der jeweiligen Umrechnung des Florins: 123 Florin = 897,9 Hyperpyra (2. Beispiel), 1111 Florin = 8388,05 Hyperpyra (3. Beispiel), 53 Florin = 400,15 Hyperpyra (4. Beispiel).

Am unteren Rand von fol. 41^r steht eine Bemerkung des Schreibers, dass die vorliegende(n) Frage(n) auch mit dem Dreisatz gelöst werden können, wie es auch bei den später vorkommenden Gewichten Zentner und Rhetula besprochen wird. Die Fragen im 2. und 3. Beispiel werden in Dreisatzform formuliert, aber nicht erneut beantwortet: 10 Florin ergeben 73 Hyperpyra, wie viel ergibt 123 Florin? 100 Florin ergeben 755 Hyperpyra, wie viel ergibt 1111 Florin?

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht zweifellos der inhaltliche Umgang mit Dezimalbrüchen, die begrifflich explizit beim Schreiber B desselben Kodex [HUNGER/VOGEL (1963), Nr. 36 f., S. 33–35] zu finden sind. Diese von al-Kāšī, einem persischen Astronomen und Mathematiker in Samarkand, entwickelte Kenntnis hat, vermittelt durch die Türken, zuerst in Byzanz Eingang gefunden: Der Codex Vind. phil. gr. 65 liefert hierzu europaweit die frühesten Belege. (Vgl. JUSCHKEWITSCH (1964), S. 236–242.) In Mittel- und Westeuropa wurden die Dezimalbrüche allerdings erst ca. 150 Jahre später durch das Werk "De Thiende" ("Das Zehntel") des Kaufmanns, Ingenieurs, Mathematikers und Mechanikers Simon Stevin (1585) bekannt.

73

**Wie man die gerade vorhandene Frage
durch eine andere Methode erfahren kann**

Es geht um die Umrechnung von 1561 Florin in Hyperpyra und Kukkia, wenn 1 Florin = 7 Hyperpyra 6 Kukkia ist und wieder 1 Hyperpyron = 20 Kukkia gilt. Jetzt soll aber der Dreisatz verwendet werden.

Der Autor rechnet zunächst 10 Florin = 70 Hyperpyra 60 Kukkia = 73 Hyperpyra. Es folgt der Schluss von 10 Florin auf 1561 Florin, wobei, wie damals üblich, erst multipliziert, dann dividiert wird: $1561 \cdot 73 = 113953$ (Hyperpyra), $113953 : 10 = 11395$ (Hyperpyra) Rest (πζάκισμα) 3. Wir würden jetzt $\frac{3}{10}$ Hyperpyra in 6 Kukkia umwandeln, doch der Schreiber sagt ausdrücklich, dass 3 nicht mit den 10 (Florin), sondern mit den 73 (Hyperpyra) zu einem Bruch verbunden werden soll, und rechnet umständlich $\frac{3}{73}$ Florin = 6 Kukkia, da 1 Florin = ... = 146 Kukkia, also $\frac{1}{73}$ Florin = 2 Kukkia sind. (Natürlich haben $\frac{3}{10}$ Hyperpyra und $\frac{3}{73}$ Florin denselben Wert.) Das Ergebnis lautet 11395 Hyperpyra 6 Kukkia.

Es folgt eine Probe, die darin besteht, dass die Gleichheit von (73 Hyperpyra) · 1561 und von 10 · (11395 Hyperpyra 6 Kukkia) festgestellt wird (= 113953 Hyperpyra, das Produkt beim Dreisatz).

Schließlich wird die Aufgabe auch viel eleganter nach der Dezimalbruchmethode

des vorigen Kapitels (*der ersten Methode*) gelöst. Ohne Einheiten lautet die Rechnung in Kurzfassung: $1561 \cdot 73 = 113953 \rightarrow 1139513, 3$ Hyperpyra = 60 Kukkia $\rightarrow 610$,

Resultat: 11395 Hyperpyra 6 Kukkia

74 *Wie man wissen kann, wie viele Hyperpyra auch immer du aufsuchst, wie viele Florine es werden*

Wenn du aber das Umgekehrte suchst, d. h. die 11395 Hyperpyra und 6 Kukkia – jeder Florin zum Wert von 7 Hyperpyra 6 Kukkia – wie viele Florine es werden, kannst du auch dies so erfahren ...

Der Schreiber rechnet $11395 \cdot 20 + 6 = 227906$ (Kukkia), 1 Florin = 146 Kukkia, $227906 : 146 = 1561$ (Florin).

Es folgt eine allgemeine Verfahrensbeschreibung mit einer abschließenden Bemerkung: *Wenn aber* (sc. bei der Division) *noch ein Bruch übrig bleibt, sind das Übrigbleibende* (sc. der Zähler) *Kukkia, welche keine Florine erreichen, weshalb sie als Bruch* (sc. Zähler) *übrig geblieben sind.*

In moderner Schreibweise gilt mit natürlichen a und b : a Hyperpyra b Kukkia = $(20a + b)$ Kukkia = $\frac{20a+b}{146}$ Florin. Dividiert man $20a + b$ durch 146 mit Rest, so erhält man eine Darstellung $20a + b = 146q + r$ mit natürlichen q und r sowie $0 \leq r < 146$, sodass $(20a + b)$ Kukkia = $(q + \frac{r}{146})$ Florin = q Florin r Kukkia gilt.

Zu diesem Kapitel hat der Autor am unteren Rand von fol. 41^v noch vermerkt, dass die vorliegende Frage sehr leicht mit dem Dreisatz behandelt werden kann, ohne dass er dies weiter ausgeführt hätte. Er denkt sicher an die folgende Schlussweise: 146 Kukkia sind 1 Florin, 227906 Kukkia sind dann 1561 Florin. Die dazu nötigen Rechnungen sind allerdings dieselben wie oben und bieten keine Erleichterung.

75 *Wie man die vorliegende Frage durch eine andere Methode wissen kann*

Es geht hier um die Umwandlung von 12392 Hyperpyra in Florine, wenn 1 Florin den Wert von 7 Hyperpyra 10 Kukkia = $7\frac{1}{2}$ Hyperpyra hat. Der Autor setzt den Dreisatz so an:

$\frac{15}{2}$ (Hyperpyra) geben $\frac{2}{2}$ (Florin), was geben 12392 Hyperpyra?

Rechnung: $2 \cdot 12392 = 24784$ (Hyperpyra), $24784 : 15 = 1652\frac{4}{15}$ (Florin), $\frac{4}{15}$ Florin = 40 Kukkia = 2 Hyperpyra, da – so der Schreiber – $7\frac{1}{2}$ Hyperpyra = 1 Florin = 150 Kukkia seien, und deshalb seien $\frac{4}{15}$ von 150 Kukkia = 40 Kukkia = 2 Hyperpyra. Etwas irritierend ist die weitere, nachgeschobene Begründung: *denn 4 mal 10 ergeben 40, 15 mal 10 wiederum 150.* Damit ist die mögliche Berechnung von $\frac{4}{15}$ von 150 Kukkia durch Erweiterung des Bruchs gemeint: $\frac{40}{150}$ von 150 Kukkia = 40 Kukkia.

Insgesamt sind 12392 Hyperpyra also 1652 Florin 2 Hyperpyra.

Es folgt die Probe $12392 \cdot 2 = 24784$, $15 \cdot 1652\frac{4}{15} = 24784$ entsprechend der Regel, dass beim Dreisatz das Produkt der Innenglieder (links) mit dem Produkt der Außenglieder (rechts) übereinstimmt. Die Größeneinheit der Seiten in der rechten Gleichung ist "Hyperpyra · Florin", was dem Autor sicher nicht bewusst war.

Danach wählt der Autor für dieselbe Aufgabe einen Ansatz mit 10 Florin: 10 Florin ergeben 75 Hyperpyra, 12392 Hyperpyra ergeben wie viel Florin? Hier hätte er die Größen im ersten Teilsatz umstellen sollen, etwa so (hier in Kurzform): 75 Hyperpyra — 10 Florin — 12392 Hyperpyra — ? Er erhält $(12392 \cdot 10) : 75$ Florin = $1652\frac{20}{75}$ Florin, kürzt aber nicht — er hätte dann auf das obige Ergebnis verweisen können —, sondern berechnet $\frac{20}{75}$ Florin mithilfe von 1 Florin = 150 Kukkia, was natürlich wieder zu 40 Kukkia = 2 Hyperpyra führt.

Der Autor stellt auch noch einen Ansatz mit 100 Florin vor, bei dem die Dreisatzrechnung nichts Neues bietet. Der Florinbruchteil hat jetzt die Gestalt $\frac{200}{750}$.

76

***Wie man mithilfe der vorliegenden Methode der Florine
(diese auch bei Tieren gebrauchen kann und) wissen kann,
wie viele Hyperpyra sie kosten, wie viele Tiere auch immer du aufsuchst,
und umgekehrt,***

wie viele Tiere die Hyperpyra wert sind, wie viele auch immer du aufsuchst

Dies geschieht nicht allein bei Florinen und Hyperpyra so, sondern auch bei Tieren und anderen ähnlichen Fragen ist die aufgezeigte Methode nützlich ...

Gesucht wird der Preis von 531 Pferden, wenn jedes von ihnen 45 Hyperpyra 10 Kukkia (= $45\frac{1}{2}$ Hyperpyra) kostet.

Zur Lösung des Autors: 10 Pferde kosten 455 Hyperpyra, $531 \cdot 455$ (Hyperpyra) = 241605 (Hyperpyra). Mit der Begründung, mit 10 Pferden multipliziert zu haben, streicht er beim Produkt 1 Stelle rechts ab: 2416015. 5 Hyperpyra sind 100 Kukkia, von denen wieder 1 Stelle abgestrichen wird: 1010. Resultat: 531 Pferde kosten 24160 Hyperpyra 10 Kukkia.

Die Ziffern im zugehörigen schriftlichen Rechendiagramm sind teilweise nicht deutlich zu erkennen. Es scheint so, dass der Autor 533 statt korrektem 531 geschrieben (1. Zeile) und die richtige Zahl 2124 zu 2224 verändert hat (4. Zeile), ebenso korrektes 24160 zu 25160 (5. Zeile). In seinem Antwortsatz ist der Tausenderbetrag der Hyperpyra aufgrund von Streichungen unleserlich (letzte Zeile von fol. 42^r), sodass er am unteren Rand die Zahl wiederholt hat: Statt korrektem „ κ, δ “ (24000) schreibt er aber „ κ, ε “ (25000). Ansonsten treten aber im Text keine fehlerhaften Zahlen auf.

Nun wird umgekehrt die Frage gestellt, wie viele Pferde man zum Preis von je 45 Hyperpyra 10 Kukkia für 24160 Hyperpyra 10 Kukkia kaufen kann.

Zur Lösung des Autors: Beide Geldwerte werden in Kukkia umgewandelt, also in 483210 Kukkia (2. Geldwert) und 910 Kukkia (1. Geldwert). Die Division von 483210 durch 910 ergibt 531. Resultat: Es können 531 Pferde gekauft werden.

Der Autor führt sowohl die Division $483210 : 910$ als auch die vereinfachte Division $48321 : 91$ schriftlich durch. Die letztere ist Bestandteil seiner "leichteren" Berechnung der vorliegenden Umkehrfrage: $24160 \text{ Hyperpyra } 10 \text{ Kukkia} = 24160\frac{1}{2} \text{ Hyperpyra} = \frac{48321}{2} \text{ Hyperpyra}$, $45 \text{ Hyperpyra } 10 \text{ Kukkia} = 45\frac{1}{2} \text{ Hyperpyra} = \frac{91}{2} \text{ Hyperpyra}$, $48321 \text{ (Halbe)} : 91 \text{ (Halbe)} = 531$

Es folgt eine weitere Aufgabe desselben Typs:

1 Stück Kleinvieh kostet 1 Hyperpyron 15 Kukkia. Was kosten 11729 Stück?

Der Autor erläutert, dass ein Ansatz mit 10 Stück Kleinvieh nicht geeignet sei, denn der Preis dafür betrage 17 Hyperpyra 10 Kukkia, lasse sich also nicht in Hyperpyra allein ausdrücken. Daher setzt er mit 100 Stück Kleinvieh an, die 175 Hyperpyra kosten. Die weitere Rechnung sei hier nur in Kurzform notiert: $11729 \cdot 175 = 2052575 \Rightarrow 20525175$, 75 Hyperpyra = 1500 Kukkia $\Rightarrow 15100$ Kukkia. Ergebnis: 11729 Stück Kleinvieh kosten 20525 Hyperpyra 15 Kukkia.

Auch hierzu wird eine Umkehrfrage gestellt:

Wie viel Stück Kleinvieh kann man für 20525 Hyperpyra 15 Kukkia kaufen, wenn 1 Stück Kleinvieh 1 Hyperpyron 15 Kukkia kostet?

Der Autor wandelt in Kukkia um und erhält 410515 Kukkia bzw. 35 Kukkia. Die Division ergibt wieder 11729: So viel Stück Kleinvieh kann man für 20525 Hyperpyra 15 Kukkia kaufen.

77

Wie dies auch bei Seide nützlich ist

Hier wendet der Autor dasselbe Verfahren, das er schon bei Florinen (Kap. 72, 73) und Tieren (Kap. 76) ausführlich dargestellt hat, auch auf Seide an.

Die Frage: Wie viel Hyperpyra kosten 31000 Pfund Seide, wenn der Pfundpreis 6 Hyperpyra 11 Kukkia beträgt?

Zur Lösung des Autors: 10 Pfund kosten 65 Hyperpyra 10 Kukkia. Da hier noch Kukkia verblieben sind, betrachte man 100 Pfund = 655 Hyperpyra. Die weitere Rechnung kann wieder in Kurzform angegeben werden: $31000 \cdot 655 = 20305000 \Rightarrow 203050100$. 31000 Pfund Seide kosten also 203050 Hyperpyra. Dieser Wert hätte sich aber auch direkt aus $31000 \cdot 6\frac{11}{20}$ Hyperpyra bestimmen lassen.

"Pflichtgemäß" stellt der Autor auch noch die Umkehrfrage nach dem Gewicht (*wie viel Tausend Pfund?*) der Seide, die man für 203050 Hyperpyra kaufen kann. (Der obige Pfundpreis für Seide wird dabei stillschweigend vorausgesetzt, denn er taucht wieder in der Rechnung auf.) Dazu werden beide Geldwerte in Kukkia verwandelt und dividiert: 203050 Hyperpyra = 4061000 Kukkia, 6 Hyperpyra 11 Kukkia = 131 Kukkia, $4061000 : 131 = 31000$. (Im Divisionsdiagramm hat der Schreiber vergessen, auch die letzten beiden Nullen von 4061000 als verbrauchte Ziffern zu streichen.) Ergebnis: Für 203050 Hyperpyra kann man – bei einem Pfundpreis von 6 Hyperpyra 11 Kukkia – 31000 Pfund Seide kaufen. Der Schreiber nimmt dieses Ergebnis zum Anlass für einen Vergleich mit der Ausgangsaufgabe (als Umkehrung dieser Umkehrung) und deren Resultat.

Anschließend weist er darauf hin, dass jede ähnliche Frage, bei der der Wert von Florinen, Tieren oder Pfunden in Hyperpyra zu berechnen ist, mit der vorliegenden Methode (Dezimalbruchmethode) gelöst werden kann. Dabei erwähnt er auch wieder die Umkehraufgabe (Berechnung der Anzahl der Florine, Tiere oder Pfunde, wenn der Gesamtbetrag in Hyperpyra gegeben ist).

Als zweite Methode zur Lösung dieser Aufgaben wird unter Bezug auf die "erste Florin-Aufgabe" der Dreisatz angeführt. Dabei ist nicht klar, ob der Autor tatsächlich das 1. Beispiel von Kap. 72 meint, wo bereits eine einfache Multiplikation zum Ziel führt. Die Dreisatzmethode im Zusammenhang mit Florinen findet man in den Kapiteln 72 (unterer Rand von fol. 41^r), 73 und 75.

Dies alles sei durch die verschiedenen Beispiele gut veranschaulicht worden.

Die genannten Methoden seien aber nur dann notwendig, wenn der Wert der einzelnen Florine, Tiere oder Pfunde (neben Hyperpyra) auch noch Kukkia enthalte. Andernfalls genüge eine Multiplikation, die hier etwas umständlich beschrieben wird. Es ist natürlich die Multiplikation der jeweiligen Anzahl mit dem Einzelpreis gemeint.

Ist umgekehrt nach der Anzahl der Florine oder Tiere gefragt (hier fehlen die Pfunde), die für einen bestimmten Hyperpyra-Betrag eingewechselt bzw. gekauft werden können, und sind in den Einheitsgrößen bzw. Stückpreisen keine zusätzlichen Kukkia enthalten, sondern nur ganzzahlige Hyperpyra-Werte, so ist lediglich der Hyperpyra-Betrag durch die Einheitsgröße (bzw. den Stückpreis) zu dividieren – so äußert sich unser Autor sinngemäß. (Die Pfunde hat er in seiner weitschweifigen Erklärung wieder aufgegriffen.)

78 *Über sehr viele und verschiedene Zentner und Rhetula –*

ein leichtes Begreifen, wie viele Hyperpyra die gesamte Größe von diesen wird
Angenommen, ein Kaufmann habe irgendeine Ware gekauft. Als diese gewogen wurde, entstanden 133 Zentner und 17 Rhetula. Der Zentner aber ist 100 Rhetula. Er hat aber den Zentner für 13 große Hyperpyra gekauft, die auch goldene genannt werden; dieses goldene Hyperpyron hat einen Wert von 24 Kukkia. Du suchst aber von den 133 Zentnern und 17 Rhetula zu wissen, wie viele Hyperpyra es werden. Du kannst es so erfahren ...

Für die Münzeinheit Gold- oder großes Hyperpyron (ὑπέρπυρον χρυσόν oder μέγα) sowie für die Gewichtseinheiten Zentner (καντάριον) und Rhetulon (ῥέτουλον, das schwere Pfundgewicht) sei auf den metrologischen Teil dieser Arbeit verwiesen. Diese Maßeinheiten begegnen uns in diesem Kapitel zum ersten Mal.

Zunächst beschreibt der Autor, wie er den Anfang des Diagramms entwickelt hat. Oben werden 133 Zentner 17 Rhetula geschrieben. Die nächste Zeile, 13317, kommentiert er aber nicht: Es handelt sich natürlich um das Gesamtgewicht in

Rhetula. Unter dieser Zahl, nach rechts eingerückt (περὶ τὸ τέλος, also ans Ende) setzt er 13, den Preis für 1 Zentner in Goldhyperpyra. Er will 13317 mit 13 multiplizieren und weist zuvor auf die angeblich ungewöhnliche Position des Faktors 13 hin, der üblicherweise seitlich geschrieben werde. (Vgl. die Kapitel 6, 8, 10, 12, 14 zur "seitlichen" Multiplikation und Kap. 16 zur ebenfalls unterschiedlichen "Haus"-Multiplikation.) Bei dieser Aufgabe aber sei es besser, ihn so wie im Diagramm zu positionieren. Es komme dabei dasselbe heraus.

Dazu ist anzumerken, dass das hier gewählte Schema und Verfahren im westlichen Abendland schon in der frühen Neuzeit weitverbreitet waren und heute noch in romanischen Ländern dominieren.

	Zentner	Rhetula	
	133	17	
	1 3 3 1 7		
Hyperpyra	13	1 3	
	3 9 9 5 1		
	1 3 3 1 7		
Hyperpyra	1 7 3 1	2 1	
		2 4	Kukkia 24
		8 4	
		4 2	
Kukkia	5	0 4	
Turnesi 0		0 3 2	Turnesia 8

Zuerst ist laut Autor 1 3 3 1 7 mit 3 zu multiplizieren, dann mit 1 an der Zehnerstelle. Dabei weist er nicht mehr eigens darauf hin, dass beim zweiten Schritt eingerückt werden muss. Ohne vorher die Teilprodukte aus dem Diagramm anzugeben, nennt er sofort das gesamte Produkt 1 7 3 1 2 1. (Es handelt sich hierbei um den 100-fachen Preis in Goldhyperpyra von 133 Zentnern 17 Rhetula.) Nach Abstreichen zweier Stellen – *denn bei der vorliegenden Aufgabe* [gemeint ist der vorliegende Aufgabentyp] *werden jedes Mal zwei Stellen abgestrichen* – erhält man 1731 Hyperpyra. Statt dieser wenig hilfreichen apodiktischen Formulierung hätte unser Autor das Verfahren mit der Parität 1 Zentner = 100 Rhetula begründen können. *Die zwei Stellen aber, die du abgestrichen hast, bezeichnen 21. Multipliziere die 21 mit den 24 Kukkia, von denen wir sagten, dass jedes Goldhyperpyron ihren Wert hat, wie es sich in Konstantinopel bei den Handelsgeschäften verhält ...* Dies ist die einzige Textstelle im 1. Teil ("Buch") des Rechenbuchs, an der die Hauptstadt des Byzantinischen Reiches erwähnt wird. Es folgt die Berechnung $21 \cdot 24 = 504$, wobei im Diagramm wieder die Struktur des ersten Multiplikationsschemas und dasselbe Rechenverfahren zu finden sind. Nach erneutem Abstreichen zweier Stellen gelangt der Schreiber zum Zwischenergebnis 1731 Hyperpyra 5 Kukkia. Es bleibt 04 übrig, also 4. Da hier 1 Kukki den Wert von 8 Turnesia hat, ist $4 \cdot 8$ zu berechnen. Das Ergebnis wird im Text und im Diagramm in der Form 032 notiert. Weiteres Abstreichen zweier Stellen führt zu 0 Turnesi, also zu 1731 Hyperpyra 5 Kukki (0 Turnesi), da das Turnesi die kleinste Münzeinheit ist. Doch der Autor beschäftigt sich im Text weiter mit dem Rest und fragt danach, wie viele Viertel eines Turnesi darin noch enthalten sind. Dazu berechnet er $4 \cdot 32 = 128$ und streicht wieder zwei Stellen ab. Das Gesamtergebnis lautet nun 1731 Hyperpyra 5 Kukkia $\frac{1}{4}$ Turnesi. Aus den abgetrennten 28 lasse sich aber nichts nehmen, was für etwas Größeres geeignet wäre, sie würden als unnütz zurückbleiben. Vermutlich hat der Autor das Viertel eines Turnesi untersucht, weil 4 die kleinste Zahl ist, die – mit 32 multipliziert – zu einem Produkt größer als 100 führt. Am unteren Rand von fol. 43^r findet sich noch eine Bemerkung zum Turnesi-Bruchteil:

Der Schreiber erklärt, dass der fragliche Bruchteil mit Vierteln oder Fünfteln nicht ganz zu erfassen sei, sondern es verbleibe immer ein *Teil* (μέρος), den man dabei nicht erfasse. Zur vollständigen Erfassung des Rests seien 100 Rhetula = 1 Zentner in den Nenner zu setzen. Gemeint ist aber nur die Zahl 100, und so betrachtet der Autor auch den Bruch $\frac{32}{100}$, den er zu $\frac{8}{25}$ kürzt. Damit hat er den vollständigen Turnesi-Bruchteil angegeben. Man sieht, dass $\frac{1}{3}$ Turnesi ein besserer Näherungswert gewesen wäre als $\frac{1}{4}$ Turnesi ($\frac{1}{4} < \frac{8}{25} < \frac{1}{3}$). Mit unserer heutigen Dezimalbruchschreibweise hätten wir insgesamt so gerechnet: $133,17 \cdot 13$ Goldhyperpyra = 1731,21 Goldhyperpyra; 0,21 Goldhyperpyra = 5,04 Kukkia; 0,04 Kukkia = 0,32 Turnesi; 133 Zentner 17 Rhetula kosten also 1731 Goldhyperpyra 5 Kukkia 0,32 Turnesi.

Es folgt eine weitere Aufgabe desselben Typs.

Derselbe Kaufmann hat 159 Zentner und 65 Rhetula gekauft, wobei ein Zentner jetzt 21 Goldhyperpyra kostet. Wieder ist der Gesamtpreis gesucht.

Mit einem Diagramm, das zu dem der vorigen Aufgabe analog ist, illustriert der Autor seine Rechenschritte, die er außerdem auch wieder im Text ausführlich beschreibt:

15965 · 21 Goldhyperpyra = 335265 Goldhyperpyra [100-facher Gesamtpreis] → 3352|65 [3352 Goldhyperpyra $\frac{65}{100}$ Goldhyperpyra]; 65 · 24 Kukkia = 1560 Kukkia [100-fache Anzahl der Kukkia] → 15|60 [15 Kukkia $\frac{60}{100}$ Kukkia]; 60 · 8 Turnesia = 480 Turnesia [100-fache Anzahl der Turnesia] → 4|80 [4 Turnesia $\frac{80}{100}$ Turnesia]. Und weil du keine kleinere Währung (χάραγμα) als Turnesi hast, multipliziere die 80 Turnesia mit 4, was Viertel eines Turnesi sind ...: 320 [100-fache Anzahl der Viertel eines Turnesi] → 3|20 [$\frac{3}{4}$ Turnesia]. Im Haupttext lässt der Autor den Rest 20 unberücksichtigt und erhält insgesamt 3352 Goldhyperpyra 15 Kukkia 4 Turnesia $\frac{3}{4}$ Turnesia [sic]. Am linken Rand von fol. 43^v schreibt er aber: Anstelle der $\frac{3}{4}$ nimm lieber $\frac{80}{100}$, was $\frac{4}{5}$ eines Turnesi sind.

Im Vergleich dazu würde unsere heutige Rechnung lauten: 159,65 · 21 Goldhyperpyra = 3352,65 Goldhyperpyra; 0,65 Goldhyperpyra = 15,6 Kukkia; 0,6 Kukkia = 4,8 Turnesia = $4\frac{4}{5}$ Turnesia.

159 Zentner 65 Rhetula kosten also 3352 Goldhyperpyra 15 Kukkia $4\frac{4}{5}$ Turnesia.

79

Wenn der Zentner 17 Hyperpyra kostet,

wie viel Hyperpyra die 22 Rhetula kosten – eine leichte Lösungsfindung

Angenommen, jeder Zentner kostet 17 goldene Hyperpyra, die auch große genannt werden. Du suchst aber, wenn der Zentner 17 Hyperpyra kostet, die 22 Rhetula, wie viel Hyperpyra sie kosten. Der Zentner ist nämlich 100 Rhetula. Die Aufgabe ist hinsichtlich des Zentnerpreises redundant formuliert, und auch die Bezeichnungsvariante für die Goldhyperpyra sowie die Umrechnung von 1 Zentner in Rhetula aus Kap. 78 werden wiederholt.

Auch diesmal beschreibt der Autor seine Rechnung sehr ausführlich und hält sie außerdem wieder in einem Diagramm fest. Er geht dabei so vor:

22 · 17 Hyperpyra = 374 Hyperpyra [100-facher Gesamtpreis] → 3|74 [$3\frac{74}{100}$ Hyperpyra]; 74 · 24 Kukkia = 1776 Kukkia [100-fache Anzahl der Kukkia] → 17|76 [$17\frac{76}{100}$ Kukkia]; 76 · 8 = 608 [100-fache Anzahl der Turnesia] → 6|08 [$6\frac{8}{100}$ Turnesia]; 08 · 4 Viertel eines Turnesi = 032 Viertel eines Turnesi [100-fache Anzahl der Viertel eines Turnesi] → 0|32. Die Umrechnung in Turnesi-Viertel liefert also keinen neuen Beitrag. Gesamtergebnis: 3 Hyperpyra 17 Kukkia 6 Turnesia

Am linken Rand von fol. 43^v schreibt der Autor in Bezug auf den bisher vernachlässigten Rest, dass man $\frac{8}{100}$ bzw. $\frac{2}{25}$ (Turnesia) nehmen soll.

Unsere Rechnung wäre 0,22 · 17 Hyperpyra = 3,74 Hyperpyra; 0,74 Hyperpyra = 17,76 Kukkia; 0,76 Kukkia = 6,08 Turnesia = $6\frac{2}{25}$ Turnesia; insgesamt ergeben sich 3 Hyperpyra 17 Kukkia $6\frac{2}{25}$ Turnesia

In einer zweiten Aufgabe kostet der Zentner 21 Hyperpyra, und der Preis von 95 Rhetula ist gesucht.

Erneut wird die Lösung ausführlich beschrieben, und man findet wieder ein Diagramm. Die Rechnung soll hier nur in Kurzform (ohne Münzeinheiten) vor-

gestellt werden:

$95 \cdot 21 = 1995 \Rightarrow 19|95$; $95 \cdot 24 = 2280 \Rightarrow 22|80$; $80 \cdot 8 = 640 \Rightarrow 6|40$; $40 \cdot 4 = 160 \Rightarrow 1|60$. Dabei werden die Zahlen 640 und 160 im Text nicht explizit genannt.

Resultat: 19 Hyperpyra 22 Kukkia 6 Turnesia $\frac{1}{4}$ Turnesi [sic]

Am linken Rand von fol. 43^v empfiehlt der Autor, $\frac{40}{100}$ Turnesia bzw. $\frac{2}{5}$ Turnesia anstelle von $\frac{1}{4}$ Turnesi zu nehmen.

Am unteren Rand von fol. 43^v weist er außerdem noch darauf hin, dass die vorliegende Methode dem Dreisatz entspricht:

1 Zentner kostet 21 Hyperpyra – wie viel kosten 159 Zentner 65 Rhetula? (neue Aufgabe)

100 Rhetula kosten 17 Hyperpyra – wie viel kosten 22 Rhetula? (1. Aufgabe)

Die Hyperpyra in diesem Kapitel sind stets als Goldhyperpyra zu verstehen.

80

Wie dies auch mit Florinen und kleinen Hyperpyra und bei jeder anderen Währung nützlich ist

Diese beiden Aufgaben [vgl. Kap. 78 und 79] zu den Zentnern und Rhetula werden nicht allein bei den großen Hyperpyra, die wir auch als goldene bezeichnen, sondern auch bei Florinen, kleinen Hyperpyra und bei jeder anderen Währung für nützlich befunden.

Angenommen, jemand hat 131 Zentner und 86 Rhetula gekauft, jeden Zentner für 3 Florin. Der Florin aber habe den Wert von 8 kleinen Hyperpyra. Du suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra sich ergeben.

Darüber hinaus sind natürlich auch die anteiligen Florine, Kukkia und Turnesia gesucht.

Erst aus der Rechnung des Autors geht hervor, dass 1 kleines Hyperpyron im Unterschied zum großen der früher einfach als Hyperpyron bezeichneten Münzeinheit mit einem Wert von 20 Kukkia anstatt von 24 Kukkia entspricht und dass wieder – wie zuletzt in Kap. 52 – 1 Kukki = 4 Turnesia (und nicht mehr 1 Kukki = 8 Turnesia) gilt. Insgesamt lautet das Währungssystem: 1 Florin = 8 kleine Hyperpyra, 1 kleines Hyperpyron = 20 Kukkia, 1 Kukki = 4 Turnesia.

Die Lösung der Aufgabe wird im Text wieder ausführlich beschrieben, und ein Diagramm dient wieder der Illustration. Da es methodisch nichts Neues gibt, soll die Rechnung nur in Kurzform notiert werden, und zwar ohne Einheiten:

$13186 \cdot 3 = 39558 \Rightarrow 395|58$; $58 \cdot 8 = 464 \Rightarrow 4|64$; $64 \cdot 20 = 1280 \Rightarrow 12|80$; $80 \cdot 4 = 320 \Rightarrow 3|20$; $20 \cdot 5 = 100 \Rightarrow 1|00$

Ergebnis: 395 Florin 4 (kleine) Hyperpyra 12 Kukkia 3 Turnesia $\frac{1}{5}$ Turnesi

Etwas kurios ist die Bemerkung am rechten Rand von fol. 44^r zum Turnesi-Bruchteil: *Anstatt $\frac{1}{5}$ nimm $\frac{20}{100}$, was wieder $\frac{1}{5}$ eines Turnesi ist.*

Unsere Dezimalbruchrechnung im Vergleich: $131,86 \cdot 3 = 395,58$; $0,58 \cdot 8 = 4,64$; $0,64 \cdot 20 = 12,8$; $0,8 \cdot 4 = 3,2$ mit demselben Ergebnis wie oben.

81 *Wenn der Zentner 4 Florin kostet,
die 86 Rhetula – wie viel Florine und kleine Hyperpyra sie kosten*

(Natürlich ergeben sich auch wieder Kukkia- und Turnesia-Beträge.)

Bei dieser Aufgabe liegt dasselbe Währungssystem zugrunde, nur die Maßzahlen sind verändert. Erstaunlich ist deshalb, dass sich der Autor zu keiner kürzeren Lösungsdarstellung entschließen konnte, und auch auf das große Diagramm hat er nicht verzichtet.

Seine Rechnung in Kurzform:

$$86 \cdot 4 = 344 \rightarrow 3|44; 44 \cdot 8 = 352 \rightarrow 3|52; 52 \cdot 20 = 1040 \rightarrow 10|40; 40 \cdot 4 = 160 \rightarrow 1|60; 60 \cdot 5 = 300 \rightarrow 3|00$$

Ergebnis: 3 Florin 3 Hyperpyra 10 Kukkia 1 Turnesi $\frac{3}{5}$ Turnesia

(Im Lösungstext heißen die kleinen Hyperpyra einfach Hyperpyra.)

Die Bemerkung zum Turnesi-Bruchteil dieser Aufgabe ist wieder kurios: Am rechten Rand von fol. 44^r schreibt der Autor, dass man anstelle von $\frac{3}{5}$ den Bruch $\frac{60}{100}$ nehmen soll, was wieder $\frac{3}{5}$ Turnesia seien.

Abschließend weist der Autor darauf hin, dass man ebenso verfahren kann, wenn der Zentnerpreis ein Betrag in kleinen Hyperpyra ohne Florine ist.

82 *Wie man es machen muss, wenn du Zentner größer als 100,
Rhetula aber kleiner als 10 aufsuchst*

In einem einleitenden Text erklärt der Autor sinngemäß, dass man Aufgaben mit Zentnern und Rhetula so wie bisher lösen kann, wenn die Anzahl der Rhetula 10 oder mehr beträgt. Dazu verweist er auf die vorher behandelten Beispiele.

Wenn du aber Zentner aufsuchst, so viele du willst, Rhetula aber weniger als 10, mache es so ... Also angenommen, du suchst 20 Zentner und 5 Rhetula, jeden Zentner für 17 Hyperpyra, wie viele Hyperpyra sich ergeben. Setze oben die 20 Zentner, wie du es gewöhnlich tust. Die 5 Rhetula aber – setze diese nicht an die dritte Stelle, sondern an die vierte. An die dritte Stelle aber setze 0 ...

Für den mit dem Stellenwertsystem noch nicht so vertrauten byzantinischen Leser wäre eine anschließende Begründung hilfreich gewesen, etwa dass die Zehnerstelle der Rhetula nicht besetzt ist. Konnte man in den vorangegangenen Kapiteln 78–81 die Ziffern der Beträge von Zentnern und Rhetula einfach aneinanderreihen, so muss man jetzt die Stellenwerte genau beachten. Auch heutige Schüler begehen mitunter den Fehler, 1 Euro 4 Cent in der Form 1,4 Euro zu schreiben. Insofern liefert dieses Kapitel eine nützliche Instruktion zur Fehlervermeidung.

Zur Lösung der Aufgabe: $17 \cdot 2005 = 34085 \rightarrow 340|85$; $85 \cdot 20 = 1700 \rightarrow 17|00$

Die Zahlen 2005, 34085 und 1700 finden sich explizit nur im Diagramm, was aber kaum zur Verkürzung des Lösungstexts beiträgt.

Ergebnis: 20 Zentner 5 Rhetula, jeder Zentner für 17 kleine Hyperpyra, kosten 340 Hyperpyra 17 Kukkia. Eine (teilweise) Umwandlung der Hyperpyra in Florine erfolgt hier nicht.

Diese Einführungsaufgabe hat didaktisch gesehen den Vorteil, dass sich hier eine Diskussion um die Turnesi-Bruchteile erübrigt, sodass sich der Leser ganz

auf die Problematik der Stellenwerte konzentrieren kann.

In einer zweiten Aufgabe ist der Preis von 231 Zentnern 4 Rhetula (= 23104 Rhetula) gesucht, wenn 1 Zentner 21 Hyperpyra kostet.

Auf eine erneute Beschreibung der Lösungsmethode kann hier verzichtet werden. Es kommen – wieder ohne (teilweise) Umwandlung der Hyperpyra in Florine – 4851 Hyperpyra 16 Kukkia $3\frac{1}{5}$ Turnesia heraus. (1 Kukki = 4 Turnesia)

Anschließend betont der Autor noch einmal, dass vor einer Anzahl von Rhetula, die kleiner als 10 ist, eine 0 gesetzt werden muss. Dies – so fährt er sinngemäß fort – gelte aber nicht für Aufgaben, bei denen der Zentnerpreis gegeben ist und nach dem Preis für eine bestimmte Anzahl von reinen Rhetula gesucht wird. Das ist natürlich richtig, da unbesetzte Stellenwerte hier nur bei gemischten Gewichten (Zentner/Rhetula) auftreten können. Der Autor bezieht sich auf das "erste Problem", aber nicht in Kap. 78, sondern nur in den Kapiteln 79 und 81 werden Aufgaben behandelt, bei denen der Preis reiner Rhetula-Gewichte berechnet wird.

**83 Wenn 1000 Pfund 75 Florin kosten, oder wie viele auch immer du sagst,
das "Kentenari" und das "Dekari" und die "Monade" –
wie viel sie entsprechend kosten**

Angenommen, 1000 Pfund kosten 75 Florin, jeder Florin aber 8 Hyperpyra. Wenn nun 1000 Pfund 75 Florin kosten, das Kentenari, das auch Kantari genannt wird, das sind 100 Pfund, und das Dekari, das sind 10 Pfund, und die Monade, das ist 1 Pfund – du suchst zu wissen, wie viel jede Reihe von ihnen entsprechend kostet ...

Das hier genannte Kantari unterscheidet sich also offenbar von dem früheren Zentner mit gleicher Bezeichnung, der sich in 100 Rhetula unterteilt (s. Kap. 78–82).

Chiliade	1000 Pfund kosten	75 Florin
Kantari	100 Pfund kosten	7½ Florin: $\frac{5}{10}$ sind 4 Hyperpyra
Dekari	10 Pfund kosten	6½ Hyperpyra
Monade	1 Pfund kostet	12½ Kukkia

Der Autor beschreibt nun den Aufbau des oben stehenden Diagramms und berechnet nacheinander die Preise für 100, 10 und 1 Pfund, die dort zu finden sind. Er erhält sie durch fortlaufendes Abstreichen einer Stelle, wobei er schrittweise in kleinere Währungseinheiten umwandelt, offenbar um eine Null vor dieser Stelle zu vermeiden, wozu aber keine Veranlassung besteht. Man vergleiche z. B. den Preis für 10 Pfund in der heutigen Schreibweise 0,75 Florin: $0,75 \text{ Florin} = \frac{3}{4} \text{ Florin} = 6 \text{ Hyperpyra}$.

Zur Rechnung des Autors: 100 Pfund kosten 7½ Florin, $\frac{5}{10}$ Florin sind 4 Hyperpyra, 100 Pfund kosten also 60 Hyperpyra; 10 Pfund kosten 6½ Hyperpyra = 120 Kukkia. (Diese bekannte Umrechnung ist wieder dem Text zu entnehmen.) 1 Pfund kostet 12½ Kukkia, also 12 Kukkia.

Der Autor stellt noch ein zweites Beispiel vor, wieder mit Diagramm und aus-

fürlicher Beschreibung der Lösung im Text. Dabei gilt wieder 1 Florin = 8 Hyperpyra und 1 Hyperpyron = 20 Kukkia, wie sich der Rechnung entnehmen lässt. 1000 Pfund sollen jetzt 150 Florin kosten.

Die Lösung soll hier nur skizziert werden.

100 Pfund – 150 Florin; 10 Pfund – 15 Florin, $\frac{5}{10}$ (Florin) sind 4 Hyperpyra, insgesamt: 10 Pfund – 1 Florin 4 Hyperpyra = 12 Hyperpyra; 1 Pfund – $\frac{2}{10}$ (Hyperpyra) sind 4 Kukkia.

Ergebnis: 100 Pfund kosten 150 Florin, 10 Pfund kosten 1 Florin 4 Hyperpyra, 1 Pfund kostet 1 Hyperpyron 4 Kukkia.

Das Kapitel schließt mit dem Hinweis, dass jede andere gleichartige Frage mit dieser Methode beantwortet werden kann.

**84 Wenn du Tausender und Hunderter und Zehner und Einer kennst,
 wie viel jede Reihe von ihnen kostet,
 wie man wissen kann, wie viel 3 Tausender [3000 Pfund] 4 Zentner
 7 Dekaria [70 Pfund] und 9 Pfund kosten**

Angenommen, du weißt, dass der Tausender [1000 Pfund] 75 Florin, der Zentner 7 Florin und 4 Hyperpyra, das Dekari [10 Pfund] 6 Hyperpyra und die Monade [Einheit], d. h. 1 Pfund, 12 Kukkia kosten. Du suchst 3 Tausender [3000 Pfund] und 4 Zentner und 7 Dekaria [70 Pfund] und 9 Pfund zu kaufen oder zu verkaufen. Du suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra dies alles entsprechend kostet. Du kannst dies wissen durch die Toleta, wie sie auf Italienisch genannt wird, – wie wohl jemand in unserer Sprache sagen würde, durch die Tauleta –, mit der die Kinder das Tafelschreiben pflegen.

Die etymologische Erklärung des Autors ist zutreffend, auch wenn man eher ein italienisches *tavoletta* hätte erwarten können. Die Methode, die im Deutschen als Tolletrechnung bezeichnet wird, stammt zweifellos aus der italienischen Kaufmannsarithmetik.

der Tausender	Florin 75	Tausender 3	Florin 225
der Zentner	Florin 7 Hyp. 4	Zentner 4	Florin 30
10 Pfund	Hyp. 6	10 Pfund 7	Florin 5 Hyp. 2
1 Pfund	Kukkia 12	1 Pfund 9	Hyp. Hyp. 5 Kukkia 8
		zusammen	Florin 260 Hyp. 7 Kukkia 8

Der Autor, der die Tolletrechnung mit dem vorigen Kapitel gewissermaßen vorbereitet hat, beschreibt ausführlich den Aufbau der obigen Tafel (Tabelle) und den Rechengang. Offensichtlich gelten wieder die Paritäten 1 Florin = 8 Hyperpyra, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia.

Alle Daten der linken Tabellenspalte sind von vornherein bekannt – dabei hätte nur ein Preis zur Berechnung der anderen vorgegeben werden müssen. Rechts anschließend stehen die Vielfachen der dezimalen Positionen gemäß der Aufgabe und ganz rechts die zugehörigen Preise: $3 \cdot 75$ Florin = 225 Florin, $4 \cdot (7 \text{ Florin } 4 \text{ Hyperpyra}) = 28 \text{ Florin } 16 \text{ Hyperpyra} = 30 \text{ Florin}$, $7 \cdot 6 \text{ Hyperpyra} = 42 \text{ Hyperpyra} = 5 \text{ Florin } 2 \text{ Hyperpyra}$, $9 \cdot 12 \text{ Kukkia} = 108 \text{ Kukkia} = 5 \text{ Hyperpyra } 8 \text{ Kukkia}$.

Die Summe ergibt 260 Florin 7 Hyperpyra 8 Kukkia, den Preis für das Gesamtgewicht von 3479 Pfund.

Unser byzantinischer Autor hat keine weiteren Aufgaben dieser Art behandelt. Die vorliegende Aufgabe ist aber so einfach, dass man überhaupt noch nicht beurteilen kann, ob die Tolletrechnung bei bestimmten Problemen vorteilhafte Lösungswege bietet.

Deshalb soll hier noch auf ein Beispiel aus dem Bamberger Rechenbuch von 1483 eingegangen werden [SCHRÖDER 1988, 41^r–43^r (S. 87–89)].

Es geht dort um den Kauf von 4367 lb (Pfund) 29 Lot 3 Quent Ingwer, wobei 1 lb mit 13 β (Schilling in Gold) angesetzt wird. Es gelten die Umrechnungen 1 fl (Gulden) = 20 β, 1 β = 12 Heller, 1 lb = 32 Lot, 1 Lot = 4 Quent.

Die Tafel hat ungefähr folgende Gestalt:

4 M	650 fl		2600 fl
3 C	65 fl		195 fl
6 X	6 fl 10 β		39 fl
7 lb	13 β		4 fl 11 β
2 X	$\frac{130}{32}$	$\frac{260}{32}$ β	12 β 1 hell $\frac{1}{32}$
9 Lot	$\frac{13}{32}$	$\frac{117}{32}$ β	
3 Quent	$\frac{13}{128}$	$\frac{39}{128}$ β	facit 2839 fl 3 β 1 hell $\frac{1}{32}$

Die Preise für die ganzzahligen Pfundgewichte stehen in den ersten vier Zeilen rechts, die Preise für die Gewichte mit Untereinheiten von Pfund werden in den letzten drei Zeilen in der Mitte ausgerechnet und in der fünften Zeile rechts summiert. Die Gesamtsumme steht unter dem Strich. (10 Pfund und 10 Lot haben dasselbe Zeichen X.)

Diese Aufgabe lässt sich natürlich auch ohne Tolletrechnung lösen.

Man kann $(4367 + \frac{29}{32} + \frac{3}{32 \cdot 4})$ lb = $4367\frac{119}{128}$ lb rechnen und die Maßzahl mit 13 β multiplizieren: $4367\frac{119}{128} \cdot 13 \beta = 56783\frac{11}{128} \beta = 2839 \text{ fl } 3\frac{11}{128} \beta = 2839 \text{ fl } 3 \beta 1\frac{1}{32} \text{ Heller}$. Eine andere Möglichkeit besteht in der Umrechnung auf die kleinste Gewichtseinheit und anschließender Lösung mit Dreisatz: 4367 lb 29 Lot 3 Quent = 559095 Quent, 128 Quent kosten 13 β. Der Gesamtpreis beträgt also $\frac{13 \cdot 559095}{128} \beta = 56783\frac{11}{128} \beta = \dots$ (s. o.)

Die Tolletrechnung scheint hier zumindest nicht ungeschickter zu sein als die beiden anderen Rechenwege. Sie sollte damals gerade gegenüber dem Dreisatz, der bei nicht dezimal strukturierten Größenbereichen erheblichen Rechenaufwand mit sich bringen kann, zur Rechnungserleichterung dienen, ist aber häufig noch umständlicher. Ein anderes Verfahren, von dem man jahrhundertlang glaubte, dass es schneller als der "normale" (durch die oben genannten Größenbereiche erschwerte) Dreisatz durchzuführen sei, war die Welsche Praktik, auf die wir nicht weiter eingehen müssen, da unser Autor sie nicht behandelt. Vgl. hierzu VOGEL [1978, S. 73–76] und DESCHAUER [2010, S. 153–163].

Außer im Bamberger Rechenbuch von 1483 wird die Tolletrechnung, was den deutschsprachigen Raum betrifft, noch in folgenden Werken behandelt:

im *Algorismus Ratisbonensis* (aus der Mitte des 15. Jh.) [VOGEL 1954, S. 164], im Bamberger Rechenbuch von 1482 [VOGEL o. J. (1949/50), S. 249 ff.], bei WIDMANN [1508, 32^r ff., 116^v], APIAN [1527, Aa 3^v–Bb 3^r], STIFEL [1546, S. 273 f.] und GEHRL [1577, S. 128–131]. Es steht zu vermuten, dass auch in italienischen Quellen, die noch deutlich früher als unsere Handschrift zu datieren sind, die Tolletrechnung auftritt. Andererseits scheint sie seit dem 17. Jahrhundert völlig aus den Rechenbüchern verschwunden zu sein.

Weiterführend zu dem Thema sollen noch folgende Titel genannt werden: TREUTLEIN [1877, S. 99], UNGER [1888, S. 94 f.], CANTOR [1900, S. 225], VOGEL [1978, S. 76–79] und TROPFKE [1980, S. 365]

**85 *Wie man wissen kann, wie viele Hyperpyra du gewinnen kannst,
indem du das Pfund mit 15 Unzen für ein Pfund mit 12 Unzen gibst
und umgekehrt***

Angenommen, du hast irgendeine Ware von 1500 Pfund erhalten auf einer Waage, die gewöhnlich Staterin genannt wird, jedes Pfund für 5 Hyperpyra, jedes Pfund des Staterin [Waagebalken, Waage] aber habe 15 Unzen. Du hast aber die 1500 Pfund zu jeweils 5 Hyperpyra auf einer anderen Waage verkauft, die für jedes Pfund 12 Unzen hat, die gewöhnlich auch 12-Unzen-Waage genannt wird, jedes Pfund der 1500 wieder für 5 Hyperpyra. Du suchst aber zu wissen, wie viele Pfund sich mehr als 1500 ergeben haben, indem du das Pfund mit den 15 Unzen auf eine Waage mit 12 Unzen gibst, und wie viele Hyperpyra du aus demselben Grund, den wir sagen, gewonnen hast. Du kannst dies durch die Dreisatzregel erfahren.

Die 4 Pfund des Staterin mit den [jeweils] 15 Unzen ergeben 5 Pfund mit den jeweils 12 Unzen auf der Waage, die – wie wir sagten – auch 12-Unzen-Waage genannt wird; denn 4 mal 15 geben 60 und 5 mal 12 geben 60. Wenn nun 4 Pfund 5 ergeben, wie viele ergeben die 1500 Pfund?

Der Autor rechnet nach dem Dreisatz: $5 \cdot 1500 = 7500$, $7500 : 4 = 1875$. Es kommen also 1875 Pfund heraus, 375 Pfund mehr als vorher. Wegen des Pfundpreises von 5 Hyperpyra beträgt der Gewinn 1875 Hyperpyra.

Es folgt eine Probe:

1500 Pfund kosten $5 \cdot 1500$ Hyperpyra = 7500 Hyperpyra, 1875 Pfund kosten $5 \cdot 1875$ Hyperpyra = 9375 Hyperpyra, $9375 \text{ Hyperpyra} - 7500 \text{ Hyperpyra} = 1875 \text{ Hyperpyra}$.

Und das Umgekehrte. *Angenommen, du hast vielmehr das Gegenteil getan. Du hast auf die 12-Unzen-Waage 1500 Pfund empfangen, jedes Pfund für 5 Hyperpyra. Du hast diese 1500 Pfund auf das Staterin mit den 15 Unzen gegeben, jedes Pfund wieder für 5 Hyperpyra. Du suchst zu wissen, wie viel Pfund ausgefallen sind und wie viele Hyperpyra sich als Schaden ergeben.*

Der Autor argumentiert sinngemäß so: Da nun 5 Pfund auf der 12-Unzen-Waage 4 Pfund auf dem Staterin entsprechen, werden nun aus 1500 Pfund auf der 12-Unzen-Waage 1200 Pfund auf dem Staterin, das sind 300 Pfund weniger. Es

entsteht also ein Verlust von 1500 Hyperpyra.

Anschließend gibt der Autor noch zwei Begründungen dafür an, dass die Lösung dieser Umkehraufgabe korrekt ist.

1. Begründung (hier nur in Kurzform): $5 \cdot 1500$ Hyperpyra = 7500 Hyperpyra, $5 \cdot 1200$ Hyperpyra = 6000 Hyperpyra, 7500 Hyperpyra – 6000 Hyperpyra = 1500 Hyperpyra (Schadenssumme)

2. Begründung, mit dem Dreisatz: Wegen der Gleichheit der Produkte $4 \cdot 1500$ und $5 \cdot 1200$ (jeweils = 6000) sei das Ergebnis richtig. Mehr schreibt er dazu nicht. Offenbar können diese Identitäten als Probe bei der Lösung des folgenden (sehr naheliegenden) Dreisatzes dienen: 5 Pfund verhalten sich zu 4 Pfund wie 1500 Pfund zu 1200 Pfund.

Nach SCHILBACH [1970, S. 278 f.] gab es eine λίτρα λογαρική (Rechnungspfund) und eine λίτρα σουάλια (gebräuchliches Pfund, von lat. *libra usualis*), jeweils in 12 Unzen unterteilt. Die λίτρα λογαρική war ungefähr so schwer wie 1,25 λίτραι σουάλιαι, sodass 12 Rechnungsunzen 15 gebräuchlichen Unzen entsprachen. Auch in unserer Aufgabe wiegt das schwerere Pfund (mit 15 Unzen) das $1\frac{1}{4}$ -fache des leichteren Pfundes (mit 12 Unzen), doch die Unzen sind hier jeweils gleich schwer, wie sich aus der Rechnung des Autors ergeben hat.

Auf die kaufmännische Situation reduziert, geht es in der 1. Aufgabe darum, dass jemand ein schwereres Pfund für 5 Hyperpyra kauft und ein leichteres für denselben Preis verkauft, d. h. ein schwereres für $6\frac{1}{4}$ Hyperpyra. Der Gewinn an jedem schwereren Pfund beträgt $1\frac{1}{4}$ Hyperpyra.

In der Umkehraufgabe kauft jemand 1 leichteres Pfund für 5 Hyperpyra und verkauft ein schwereres für denselben Preis, d. h. ein leichteres für 4 Hyperpyra. Der Verlust an jedem leichteren Pfund beträgt 1 Hyperpyron.

86

Die zwei tauschenden Händler, von denen der eine Wolle verkaufen, der andere Tuch und Florine geben kann, um die Wolle zu erhalten, auf welche Weise euch klarer aufgezeigt werden wird

Es seien zwei Händler, die miteinander tauschen, und der eine kann Wolle verkaufen, der andere Tuch. Und der, der die Wolle hat, vereinbarte für das Kentenari – um dasselbe zu sagen, für das Kantari [Zentner] – 16 Florin. Derjenige aber, der das Tuch hat, vereinbarte, die Hälfte der 16 Florin, 8 Florin, als Geld zu geben, die anderen 8 als Tuch. Er vereinbarte aber, jede Elle für einen Preis von 6 Florin zu geben, wobei die Elle nicht mehr als 4 Florin wert ist. Du suchst nun zu wissen, um wie viel der Zentner, die Wolle, weniger herauskommt, der für 16 Florin vereinbart wurde, dadurch dass die Elle für einen Preis von 6 Florin entgegengenommen wird, die 4 Florin wert ist.

Der Autor überlegt sinngemäß so:

Der Käufer der Wolle gibt 8 Florin in bar und $1\frac{1}{3}$ Ellen Tuch, da er 1 Elle für 6 Florin, $\frac{1}{3}$ Elle also für 2 Florin ansetzt, was insgesamt 16 Florin für 1 Zentner Wolle ergibt, wie der Verkäufer der Wolle gefordert hat. Die 8 Florin, die der Käufer der Wolle mit Tuch bezahlt, sind aber in Wirklichkeit nur $\frac{8 \cdot 4}{6}$ Flo-

rin = $5\frac{1}{3}$ Florin wert. Er hat insgesamt also nur $13\frac{1}{3}$ Florin für den Zentner Wolle bezahlt, wodurch ein Fehlbetrag von $2\frac{2}{3}$ Florin entstanden ist. — Bei dieser Rechnung spielen die eingangs ermittelten $1\frac{1}{3}$ Ellen Tuch keine Rolle. Anders verhält es sich aber beim zweiten Lösungsweg, den der Autor anschließend vorstellt:

$1\frac{1}{3}$ Ellen haben in Wirklichkeit nur einen Wert von $5\frac{1}{3}$ Florin; 8 Florin + $5\frac{1}{3}$ Florin = $13\frac{1}{3}$ Florin; der Fehlbetrag lautet wieder $2\frac{2}{3}$ Florin pro Zentner Wolle.

Die folgende Rechnung wäre schneller gewesen:

8 Florin : 6 Florin = $1\frac{1}{3}$, die Anzahl der Ellen, die nur einen Wert von $5\frac{1}{3}$ Florin anstatt von 8 Florin haben. Fehlbetrag pro Zentner Wolle: $2\frac{2}{3}$ Florin.

87 **Wie dies auch bei sehr vielen Zentnern nützlich ist**

Angenommen, derjenige, der die Wolle hat, hat vereinbart, an den, der die Tücher hat, 31 Zentner Wolle zu geben, jeden Zentner für 18 Florin. Der aber, der das Tuch hat, hat vereinbart, den halben Preis der 31 Zentner in bar zu geben, den anderen halben Preis in Tüchern, die Elle, die einen Wert von 4 Florin hat, wieder für 6 Florin. Du suchst zu wissen, um wie viel derjenige, der die Wolle hat, bei den 31 Zentnern dadurch geschädigt werden wird, dass er die Elle zu den 4 Florin für einen Preis von 6 Florin entgegennimmt.

Da die vorliegende Aufgabe der vorangegangenen ähnelt, kann der Lösungsweg des Autors verkürzt nachvollzogen werden:

$9 \cdot 31 = 279$ (halber Preis für die 31 Zentner Wolle in Florin), $2 \cdot 279 = 558$ (voller Preis in Florin). Der Käufer der Wolle gibt 279 Florin und so viele Ellen Tuch zum Verkaufspreis von je 6 Florin, dass dabei zusätzlich ein Preis von 279 Florin herauskommt. Diese haben in Wirklichkeit aber nur einen Wert von $279 \cdot \frac{4}{6}$ Florin = 186 Florin (Zwischenprodukt im Text: 1116): Schwund von 279 Florin zu 186 Florin; 186 Florin + 279 Florin = 465 Florin, 558 Florin - 465 Florin = 93 Florin (Verlust des Wollhändlers) [Der Autor schreibt mehrfach 83 statt 93.] Es folgen noch die Frage nach der Anzahl der Ellen, die der Tuchhändler dem anderen gegeben hat, und dazu die Rechnung: $279 : 6 = 46\frac{1}{2}$, $186 : 4 = 46\frac{1}{2}$ (Anzahl der Ellen, auf zweierlei Weisen berechnet). *Und die Ellen sind sowohl mit dem Preis der 6 Florine als auch mit dem Preis der 4 Florine $46\frac{1}{2}$.*

Wir würden wohl so rechnen:

$279 : 6 = 46\frac{1}{2}$, d. h. der Tuchhändler gibt $46\frac{1}{2}$ Ellen, die aber nur $46\frac{1}{2} \cdot 4$ Florin = 186 Florin wert sind. Der Verlust für den Wollhändler beträgt (279 - 186) Florin = 93 Florin.

88 **Wie dies auch bei der Seide nützlich ist**

Angenommen, jemand verkauft 3500 Pfund Seide, das Dekari [10 Pfund] für 70 Hyperpyra. Und die Hälfte der 70 Hyperpyra, die die Hyperpyra eines Dekari sind, vereinbarte der Käufer als reine Hyperpyra zu geben, das sind 35 Hyperpyra. Die anderen 35 aber vereinbarte er in Form von Silber und Tüchern zu geben, die 21 Hyperpyra für 3 Unzen fein verarbeitetes Silber, die 14 Hyperpyra für 1 Elle. Bei den 3 Unzen, dem Silber, gingen aber 3 Hyperpyra verloren,

denn die 3 Unzen, die der Käufer gibt, haben einen Wert von 18 Hyperpyra, der Verkäufer aber erhält das Silber mit dem Wert von 18 Hyperpyra für einen Preis von 21 Hyperpyra. Ebenso erhält er auch die Elle, das Tuch, die einen Wert von 12 Hyperpyra hat, für einen Preis von 14. Er büßt aber auf die Elle 2 Hyperpyra ein. Es gingen bei den 35 Hyperpyra des halben Preises 5 Hyperpyra verloren, und anstatt der 35 Hyperpyra nimm vielmehr 30 Hyperpyra. Du suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra bei den 3500 Pfund schwinden, indem man Silber und Tuch nimmt, welche die 35 Hyperpyra des halben Preises der 70 Hyperpyra eines Dekari zu 30 Hyperpyra machen.

Der Autor rechnet so:

3500 Pfund = 350 Dekaria (schriftlich gerechnet!), $350 \cdot 35$ Hyperpyra = 12250 Hyperpyra (halber Preis von 3500 Pfund), $2 \cdot 12250$ Hyperpyra = 24500 Hyperpyra (voller Preis von 3500 Pfund), $12250 \cdot 30$ Hyperpyra = 367500 Hyperpyra, 367500 Hyperpyra : 35 = 10500 Hyperpyra (tatsächlicher Wert von Silber und Tuch, was der Autor aber nicht vermerkt), 12250 Hyperpyra (Bargeld) + 10500 Hyperpyra = 22750 Hyperpyra (tatsächlicher Kaufpreis für die Seide, ohne entsprechenden Vermerk des Autors), Verlust insgesamt (wird nicht vorgerechnet): 1750 Hyperpyra (= 24500 Hyperpyra - 22750 Hyperpyra)

Und anders leichter ...

Der Autor stellt nun folgende Überlegung an: 3500 Pfund = 350 Dekaria; 1 Dekari wird nur mit $(35 + 30)$ Hyperpyra = 65 Hyperpyra anstelle mit 70 Hyperpyra bezahlt; $350 \cdot 65$ Hyperpyra = 22750 Hyperpyra; es ergibt sich wieder derselbe Schwund gegenüber dem Gesamtpreis von 3500 Pfund. (Die 24500 Hyperpyra werden nicht mehr genannt.)

Anschließend stellt unser Schreiber die Frage nach der Anzahl der Unzen Silber und der Ellen Tuch, die der Verkäufer erhalten hat, und löst sie folgendermaßen:

Der halbe Preis für einen Dekari wird mit 21 Hyperpyra in Form von Silber und mit 14 Hyperpyra in Form von Tuch bezahlt. Diese Beträge stehen im Verhältnis 3:2, die zugehörigen Anteile werden zunächst fälschlich mit 3 *Dritteln* und 2 *Dritteln* angegeben. Der halbe Preis für 3500 Pfund Seide beträgt 12250 Hyperpyra. $3 + 2 = 5$, 12250 Hyperpyra : 5 = 2450 Hyperpyra, $3 \cdot 2450$ Hyperpyra = 7350 Hyperpyra (Anteil des Silbers am halben Preis für die Seide), $2 \cdot 2450$ Hyperpyra = 4900 Hyperpyra (Anteil des Tuchs). Kontrolle: Die Summe ergibt wieder 12250 Hyperpyra. Jede Unze kostet den Verkäufer 7 Hyperpyra, jede Elle 14 Hyperpyra. Das ergibt $7350 : 7$ Unzen = 1050 Unzen Silber und $4900 : 14$ Ellen = 350 Ellen Tuch. (Anschließend wiederholt der Autor die Resultate zum Schwund des Preises für 3500 Pfund.)

Es folgen zwei recht interessante Proben für die richtige Bestimmung der Unzen- und Ellenanzahl.

Die erste: Der Verkäufer büßt pro Unze 1 Hyperpyron ein, d. h. bei 1050 Unzen 1050 Hyperpyra, außerdem pro Elle 2 Hyperpyra, d. h. bei 350 Ellen 700 Hyperpyra. Die Schadenssumme beträgt 1750 Hyperpyra.

Die zweite: 12250 Hyperpyra - 1750 Hyperpyra = 10500 Hyperpyra (tatsächlicher Wert von Silber und Tuch, ohne Vermerk durch den Autor), 10500 Hyperpyra : 5

= 2100 Hyperpyra, $3 \cdot 2100$ Hyperpyra = 6300 Hyperpyra, $2 \cdot 2100$ Hyperpyra = 4200 Hyperpyra. Also hat von den 10500 Hyperpyra das Silber einen Anteil von 6300 Hyperpyra, das Tuch einen Anteil von 4200 Hyperpyra (Kontrolle durch Summenbildung). Der wahre Wert einer Unze beträgt 6 Hyperpyra, $6300 \text{ Hyperpyra} : 6 \text{ Hyperpyra} = 1050$, d. h. es kommen wieder 1050 Unzen Silber heraus. Der wahre Wert einer Elle beträgt 12 Hyperpyra, $4200 \text{ Hyperpyra} : 12 \text{ Hyperpyra} = 350$, und das ist wieder die Anzahl der Ellen Tuch.

Ebenso auch jede andere Frage, die zu dieser ähnlich ist – du kannst mithilfe dieser gleichen Methode gut das Gesuchte erfahren in dem Fall, wenn du den Schwund des Silbers und der Tücher, bezogen auf das Dekari, wissen kannst.

Wenn du aber den Schwund, bezogen auf das Dekari, nicht wissen kannst, aber auf den gesamten Preis, mache es so. Angenommen, man hat wieder 350 Dekaria Seide vorgefunden, das sind – wie wir sagten – 3500 Pfund. Der Käufer hat wiederum 70 Hyperpyra für das Dekari vereinbart. In Bezug auf den gesamten Preis für die 3500 Pfund – um dasselbe zu sagen, für die 350 Dekaria – vereinbarte er, den halben Preis in Form von reinen Hyperpyra zu geben, den anderen halben Preis – drei Teile von diesem in Form von Silber, jede Unze für 7 Hyperpyra, die 6 Hyperpyra wert ist, zwei Teile von diesem in Form von Tüchern, jede Elle für 14 Hyperpyra, die 12 Hyperpyra wert ist. Du suchst aus dem ganzen Preis zu wissen, wie viele Hyperpyra ihm [dem Verkäufer] verloren gehen, dadurch dass er die Unze zu den 6 Hyperpyra für 7 Hyperpyra entgegennimmt und die Elle zu den 12 Hyperpyra für 14 Hyperpyra, und wie viele Unzen Silber er nehmen kann und wie viele Ellen Tuch.

Der Autor löst nun dieselbe Aufgabe, indem er den Verlust von Hyperpyra nicht auf 1 Dekari bezieht, sondern direkt aus dem halben Verkaufspreis berechnet.

Die 350 (Dekaria) sollen dem Text zufolge nicht mit 70, sondern nur mit 35 Hyperpyra multipliziert werden: $350 \cdot 35 \text{ Hyperpyra} = 12250 \text{ Hyperpyra}$ (halber Preis von 3500 Pfund); $2 \cdot 12250 \text{ Hyperpyra} = 24500 \text{ Hyperpyra}$ (voller Preis von 3500 Pfund). Nun weist der Schreiber auf das frühere Verfahren hin: $12250 \text{ Hyperpyra} : 5 = 2450 \text{ Hyperpyra}$, $3 \cdot 2450 \text{ Hyperpyra} = 7350 \text{ Hyperpyra}$, $2 \cdot 2450 \text{ Hyperpyra} = 4900 \text{ Hyperpyra}$, wobei 7350 Hyperpyra dem Silberanteil, 4900 Hyperpyra dem Tuchanteil von den 12250 Hyperpyra entspricht. Zur Kontrolle wird noch einmal die Summe der Anteile bestimmt (= 12250 Hyperpyra). $7250 : 7 = 1050$ (Anzahl der Unzen Silber), $4900 : 14 = 350$ (Anzahl der Ellen Tuch): Der Autor erinnert an diese bereits aus der früheren Rechnung bekannten Werte.

Nun würden – so der Autor – 1 Hyperpyron Verlust pro Unze und 2 Hyperpyra Verlust pro Elle bedeuten, dass man 1050 Hyperpyra von 1050 Unzen und $2 \cdot 350 \text{ Hyperpyra}$ von 350 Ellen abziehen müsse – eine fehlerhafte Ausdrucksweise, aber die weitere Rechnung ist korrekt. Er berechnet 1750 Hyperpyra als Gesamtverlust und subtrahiert diesen von 24500 Hyperpyra (Gesamtpreis für die Seide): 22750 "reine" Hyperpyra hat der Verkäufer empfangen, und das ist der tatsächlich entrichtete Kaufpreis für die Seide.

Und siehe, auch aus dem ganzen Preis der 24500 Hyperpyra hast du den Ausfall 1750 Hyperpyra gefunden – und das Silber 1050 Unzen, das Tuch 350 Ellen – so

wie du es früher auch gefunden hast vom Preis der 70 Hyperpyra für 1 Dekari. Der Autor hat diese Aufgabe, auch wenn sie nicht besonders anspruchsvoll ist, sehr eingehend bearbeitet und variantenreich gelöst.

Bis ins 17. Jahrhundert hinein, zumal in Zeiten verminderten Geldumlaufs oder der Geldentwertung, spielte der Warentausch noch eine gewisse Rolle. Dabei hatte sich seit dem 13. Jahrhundert, vor allem in Italien, die Gepflogenheit herausgebildet, den Preis einer Ware beim Tausch ("Stich") höher anzusetzen als bei Barzahlung. Um beiderseits Nachteile zu vermeiden, mussten die Geschäftspartner ihre Waren entsprechend teurer anbieten. Die Preisberechnung für einen fairen Warentausch ist das eigentliche Anliegen der betreffenden Aufgaben, und insofern sind die drei Probleme in den Kapiteln 86–88 nicht typisch. Es ist merkwürdig, dass unser Autor nicht danach gefragt hat, wie sich die Verkäufer der Wolle in Kap. 86, 87 und der Seidenverkäufer in Kap. 88 vor Übervorteilung hätten schützen können (z. B. bei jeweils unveränderten Barzahlungsbeträgen in Kap. 86: 20 Florin statt 16 Florin pro Zentner Wolle; in Kap. 87: $22\frac{1}{2}$ Florin statt 18 Florin pro Zentner Wolle; in Kap. 88: $75\frac{5}{6}$ Hyperpyra statt 70 Hyperpyra pro Dekari Seide). Ein in dieser Hinsicht typisches Beispiel ist beim Schreiber B (HUNGER/VOGEL [1963, Nr. 67, S. 52 f.]) zu finden.

Für weitere Details zum Warentausch sei auf VOGEL [1978, S. 68–73] und DESCHAUER [2012, S. 171–173] verwiesen.

Nun folgen sechs Kapitel, die sich der praxisbezogenen Anwendung der Dreisatzmethode widmen, speziell dem Dreisatz bei Größen mit gemischten Zahlen. Der Autor hatte den Dreisatz an früherer Stelle (Kap. 53–56) weitgehend abstrakt eingeführt.

89

**Wenn $2\frac{1}{2}$ Pfund Seide $2\frac{1}{3}$ Florin kosten,
die $3\frac{1}{2}$ Florin – wie viel Pfund Seide sie ergeben**

Nach einer Wiederholung der Aufgabenstellung bemerkt der Autor: *Dies ist nun eine ähnliche Frage wie jene, die wir vorher im < > Kapitel besprochen haben, denn man findet auch diese mithilfe der Dreisatzmethode.* Die Nummer des Kapitels fehlt, aber offenbar wollte der Autor sie noch nachtragen, da er einen entsprechenden Platz gelassen hat. In erster Linie bietet sich Kap. 54 an, in dem Brüche beim Dreisatz eingeführt worden waren.

Die Reihenfolge der Größen, wie sie in der Kapitelüberschrift und in der Aufgabenstellung vorliegt, ist für die Dreisatzrechnung zu ändern: Die Einheit des ersten und dritten Stücks muss Florin, die des zweiten (und des gesuchten) Stücks Pfund sein, wie man es später in der "Umkehraufgabe" auch sieht. Unser Autor achtet aber nicht darauf und rechnet dennoch korrekt:

$2\frac{1}{2}$ Pfund = $\frac{5}{2}$ Pfund, $2\frac{1}{3}$ Florin = $\frac{7}{3}$ Florin, $\frac{5}{2} \times \frac{7}{3}$: $3 \cdot 5 = 15$ (Multiplikator), $2 \cdot 7 = 14$ (Teiler); $3\frac{1}{2} \cdot 15 = \frac{1}{2} \cdot 15 + 3 \cdot 15 = 52\frac{1}{2}$ (Florin) – diese Rechnung wird in einem Multiplikationsdiagramm durchgeführt. *Da du nicht gut die $52\frac{1}{2}$ durch die 14 teilen kannst ... die $52\frac{1}{2}$ ergeben 105 Halbe, und die 14 ergeben 28 Halbe ...* Anstatt also direkt $\frac{105}{2} : 14 = \frac{105}{28}$ zu rechnen, werden Dividend

und Divisor zunächst gleichnamig gemacht. Der Quotient aus 105 Halben und 28 Halben, nämlich $3\frac{21}{28}$ bzw. $3\frac{3}{4}$, liefert die gesuchte Pfundzahl.

Und umgekehrt: Wenn $2\frac{1}{3}$ Florin der Preis von $2\frac{1}{2}$ Pfund sind, sind die $3\frac{1}{2}$ Florin der Preis für wie viele Pfund?

Es handelt sich eigentlich um keine Umkehraufgabe, bei der das in der vorherigen Aufgabe gesuchte Ergebnis ($3\frac{3}{4}$ Pfund) gegeben und eine der dort gegebenen Größen gesucht wäre. Hier sind gegenüber der Ausgangsaufgabe lediglich die ersten beiden Stücke des Dreisatzes sprachlich vertauscht und stehen jetzt in der richtigen Reihenfolge (... Florin – ... Pfund – ... Florin), sodass sich am Ergebnis nichts ändert. Der Autor führt dennoch eine ausführliche Rechnung vor:

$2\frac{1}{3}$ Florin = $\frac{7}{3}$ Florin, $2\frac{1}{2}$ Pfund = $\frac{5}{2}$ Pfund; es folgt wieder ein Kreuzdiagramm, und zwar $\frac{7}{3} \times \frac{5}{2}$, bei dem die Brüche gegenüber dem Diagramm in der Ausgangsaufgabe vertauscht sind. Das Produkt aus dem Nenner des zweiten Bruchs mit dem Zähler des ersten ist nun der Teiler, das Produkt aus dem Nenner des ersten Bruchs mit dem Zähler des zweiten ist nun der Multiplikator. (Vorher war es umgekehrt.) Darauf weist der Autor auch eigens hin. Natürlich ist $2 \cdot 7 = 14$ wieder der Teiler und $3 \cdot 5 = 15$ wieder der Multiplikator. Schließlich folgen wieder die Rechenschritte $3\frac{1}{2} \cdot 15 = 52\frac{1}{2} = \frac{105}{2}$ (Florin), $14 = \frac{28}{2}$; $\frac{105}{2} : \frac{28}{2} = 3\frac{3}{4}$ (gesuchte Anzahl der Pfunde).

Abschließend weist der Autor darauf hin, dass beide Aufgaben dasselbe Ergebnis haben. Dabei hätte er die erste Aufgabe besser weglassen sollen.

Wie dies auch bei sehr vielen Pfunden nützlich ist

Angenommen, du suchst zu wissen, wenn 250 Pfund Seide 225 Florin kosten, wie viele Pfund Seide den $337\frac{1}{2}$ Florin gemäß demselben entsprechenden Preis zukommen

Auch hier treten die Größen in der für den Dreisatz vorgesehenen Reihenfolge (... Florin – ... Pfund – ... Florin) erst bei der "Umkehrung" auf. Dennoch rechnet der Autor richtig, aber sehr umständlich. Anstatt $337\frac{1}{2}$ mit 250 zu multiplizieren und anschließend durch 225 zu dividieren, setzt er ein Kreuzdiagramm an, in dem die Zahlen 250 und 225 künstlich als Brüche mit dem Nenner 1 dargestellt werden: $\text{Pfund} \frac{250}{1} \times \text{Florine} \frac{225}{1}$. Offenbar legt er Wert auf eine Analogie zum Verfahren bei der Aufgabe des letzten Kapitels, bei der gebrochene Maßzahlen auftraten. Erst die Über-Kreuz-Multiplikationen $1 \cdot 250$ und $1 \cdot 225$ liefern ihm den Multiplikator 250 und den Teiler 225. Nun multipliziert er im Text erst $\frac{1}{2}$ mit 250, danach 337 mit 250, und addiert, während er für die Multiplikation $250 \cdot 337\frac{1}{2}$ ein einheitliches Diagramm verwendet. Das Produkt 84375 wird schließlich durch 225 dividiert. Das Ergebnis ist 375, d. h. $337\frac{1}{2}$ Florin sind der Preis von 375 Pfund Seide.

Es folgt eine Probe:

$225 \text{ Florin} + \frac{1}{2} \cdot 225 \text{ Florin} = 225 \text{ Florin} + 112\frac{1}{2} \text{ Florin} = 337\frac{1}{2} \text{ Florin}$; 250 Pfund entsprechen 225 Florin, deshalb entsprechen $337\frac{1}{2}$ Florin 375 Pfund, denn es gilt: $250 \text{ Pfund} + \frac{1}{2} \cdot 250 \text{ Pfund} = 250 \text{ Pfund} + 125 \text{ Pfund} = 375 \text{ Pfund}$

Der Autor greift hier die Proportionalitätsbeziehung beim Dreisatz auf:

$337\frac{1}{2}$ Florin = $\frac{3}{2} \cdot 225$ Florin, sodass sich das gesuchte Gewicht mithilfe von $\frac{3}{2} \cdot 250$ Pfund berechnen lässt. Sein anschließender Hinweis darauf, dass diese Probe nicht bei allen Aufgaben nützlich sei, bezieht sich wohl nur auf den hier vorliegenden Wert $1\frac{1}{2}$. Bei anderen Proportionalitätsfaktoren kann man natürlich in gleicher Weise vorgehen.

Anschließend bespricht der Autor die "Umkehrung" der Aufgabe, d. h. die Stücke des Dreisatzes stehen jetzt in der richtigen Reihenfolge (... Florin – ... Pfund – ... Florin). Gegenüber der Ausgangsaufgabe sind im Kreuzdiagramm die Brüche vertauscht, und wie in Kap. 89 geht er auf die Frage ein, welche Zahl als Multiplikator und welche als Teiler dient. Die Rechnung ist dieselbe wie vorher.

Abschließend stellt er noch eine echte Umkehraufgabe:

Wenn 250 Pfund 225 Florin kosten, die 375 Pfund – wie viel Florin kosten sie?

Seine Rechnung: $375 \cdot 225 = 84375$, $84375 : 250 = 337\frac{125}{250} = 337\frac{1}{2}$, d. h. $337\frac{1}{2}$ Florin. Zum Vergleich zieht er noch die Ausgangsaufgabe mit ihrem Ergebnis hinzu.

91

Wenn das Webzeug, das Tuch, 544 Hyperpyra kostet,

die 11 Ellen, die du zu kaufen suchst, – wie viele Hyperpyra sie kosten

Angenommen, das Webzeug, das Tuch, habe 17 Ellen, es kosten aber die 17 Ellen 544 Hyperpyra. Du suchst 11 Ellen für denselben entsprechenden Preis zu kaufen, von dem wir sagten, dass die 17 Ellen 544 Hyperpyra kosten. Du suchst aber auch danach, wie viele Hyperpyra du zu geben hast, um 11 Ellen zu empfangen.

Die Kapitelüberschrift ist unvollständig, da der Preis für das Tuch ohne Angabe der Ellenanzahl genannt wird. Der Autor hat dies in der Aufgabenstellung aber nachgeholt.

Wie üblich multipliziert der Autor zunächst und dividiert danach, also $544 \cdot 11 = 5984$, $5984 : 17 = 352$. (Die andere Reihenfolge wäre hier vorteilhaft gewesen: $544 : 17 = 32$, $32 \cdot 11 = 352$.) 11 Ellen kosten also 352 Hyperpyra.

Und dies geschieht immer so, wenn auch die drei Teile ganzzahlig sind ... Wenn sie aber ein Halbes und ein Drittel haben, geschieht es auf andere Art, wie wir früher sagten.

Dementsprechend soll jetzt eine Dreisatzaufgabe behandelt werden, bei der die Maßzahlen der drei Stücke gemischte Zahlen sind:

Ein anderes Webzeug nämlich habe $16\frac{1}{2}$ Ellen. Es kosten aber die $16\frac{1}{2}$ Ellen 592 Hyperpyra und $\frac{3}{4}$ eines Hyperpyrons. Du suchst 9 Ellen und $\frac{1}{3}$ einer Elle zu kaufen. Wie viele Hyperpyra kosten die 9 Ellen und $\frac{1}{3}$ entsprechend?

Nach dem Hinweis darauf, dass die drei Größen (Stücke) *nicht gänzlich ganzzahlig* seien (ἐπεὶ οὖν καὶ τὰ τρία μέρη οὐκ ἔστι ἐξόλου ἀκέραια), beginnt der Autor mit der Rechnung:

$16\frac{1}{2}$ Ellen = $\frac{33}{2}$ Ellen, $9\frac{1}{3}$ Ellen = $\frac{28}{3}$ Ellen; Gegenüberstellung der beiden Brüche im Kreuzdiagramm: $\frac{33}{2} \times \frac{28}{3}$; Über-Kreuz-Multiplikationen $3 \cdot 33 = 99$ (Teiler), $2 \cdot 28 = 56$ (Multiplikator); $56 \cdot 592\frac{3}{4}$ Hyperpyra = $56 \cdot \frac{3}{4}$ Hyperpyra + $56 \cdot 592$ Hyperpyra = 42 Hyperpyra + $56 \cdot 592$ Hyperpyra = 33194 Hyperpyra; $33194 : 99 = 335\frac{29}{99}$. $9\frac{1}{3}$ Ellen kosten demnach $335\frac{29}{99}$ Hyperpyra.

Der Aufwand bei unserer Rechnung wäre auch nicht geringer: $9\frac{1}{3}$ Ellen kosten $(592\frac{3}{4} : 16\frac{1}{2}) \cdot 9\frac{1}{3}$ Hyperpyra = $\frac{2371 \cdot 2}{4 \cdot 33} \cdot \frac{28}{3}$ Hyperpyra = $\frac{2371 \cdot 14}{99}$ Hyperpyra usw. Der Autor merkt weiter an, dass man nicht gut erkennen kann, in welchem Verhältnis der verbliebene Bruch zu 1 Hyperpyron steht, und wandelt dieses in 80 Turnesia um, indem er die Kukkia überspringt (1 Hyperpyron = 20 Kukkia, 1 Kukki = 4 Turnesia). Dann rechnet er $80 \cdot 29 = 2320$, $2320 : 99 \approx 23\frac{1}{2}$. Im zugehörigen Divisionsdiagramm findet sich das genaue Ergebnis $23\frac{43}{99}$, das dort zu $23\frac{2}{5}$ abgerundet wird, was der Autor durch den Zusatz *um etwas Kleines mehr* (βραχύ) τι πλεῖο) kenntlich macht. Der Näherungswert $23\frac{2}{5}$ ist etwas besser als der durch Aufrundung entstandene Wert $23\frac{1}{2}$.

Der Aufgabentext schließt mit der Feststellung, dass $9\frac{1}{3}$ Ellen 335 Hyperpyra 5 Kukkia und ungefähr $3\frac{1}{2}$ Turnesia kosten, wobei stillschweigend 20 Turnesia in 5 Kukkia verwandelt worden sind. In der linken Zeile unter dem Diagramm hat sich der Autor beim Turnesi-Bruchteil verschrieben: dort muss *ungefähr* $\frac{1}{2}$ statt *ungefähr* $\frac{1}{5}$ stehen.

92

Und umgekehrt:

***Wenn die 11 Ellen, die du zu kaufen suchst, 352 Hyperpyra kosten,
die 17 Ellen, das gesamte Webzeug –
wie viele Hyperpyra kosten sie entsprechend?***

Die erste Aufgabe von Kap. 91 ist jetzt so abgeändert, dass das dort gesuchte Stück (352 Hyperpyra) gegeben und das dort gegebene Stück (544 Hyperpyra) gesucht ist. Der Autor weist darauf hin, dass jetzt nicht wie vorher mit 11, sondern mit 17 multipliziert werden muss. Es folgt die Rechnung $352 \cdot 17 = 5984$, $5984 : 11 = 544$, also mit dem Ergebnis, dass 17 Ellen 544 Hyperpyra kosten. Zum Vergleich wird noch einmal die Ausgangsaufgabe mit ihrem Resultat hinzugezogen. Der Autor betont abschließend erneut, dass das Rechenverfahren nur bei ganzzahligen Größen im Dreisatz anwendbar sei; andernfalls müsse man nach der anderen, oben besprochenen Methode vorgehen.

93

***Wenn die 8 Hyperpyra anwachsen und 15 Hyperpyra werden,
die 100 Hyperpyra gemäß demselben Verhältnis –
wie viele Hyperpyra sie werden***

Angenommen, ein Kaufmann erbat von einem reichen Mann irgendwelche Hyperpyra mit einer solchen Vereinbarung, 1 Jahr nach dem Handelsgeschäft anstelle der 8 Hyperpyra 15 Hyperpyra zurückzugeben, das sind 7 Hyperpyra Gewinn. Es bat aber der Kaufmann darum, von dem Reichen 100 Hyperpyra zu empfangen. Du suchst zu wissen, wenn die 8 Hyperpyra mit ihrem Gewinn 15 werden, wie er zu geben versprach, die 100 Hyperpyra, die er zu nehmen erbat – wie viele werden daraus, wenn sie in entsprechender Weise anwachsen?

Rechnung:

$100 \cdot 15 = 1500$ (Rechendiagramm!), $1500 : 8 = 187\frac{1}{2}$, d. h. der Kaufmann muss dem Reichen nach 1 Jahr $187\frac{1}{2}$ Hyperpyra bzw. 187 Hyperpyra 10 Kukkia zurückgeben.

Es schließt sich eine weitere Aufgabe dieser Art an:

Der Kaufmann soll für je 12 geliehene Hyperpyra 18 zurückgeben (hier wird keine Frist genannt) und leiht sich 1150 Hyperpyra. Wie viel ist er schuldig?

Rechnung:

$1150 \cdot 18 = 20700$, $20700 : 12 = 1725$, also 1725 Hyperpyra

Danach weist der Autor erneut darauf hin, dass diese Rechenmethode nur dann anwendbar ist, wenn die drei Stücke im Dreisatz ganzzahlig sind. Andernfalls habe man die andere Methode zu wählen, bei der die Brüche kreuzweise zu multiplizieren sind.

94

Und umgekehrt:

**Wenn die 15 Hyperpyra schwinden und 8 werden,
die 100 Hyperpyra – wie viele werden sie gemäß demselben Verhältnis?**

Diese Aufgabe wird ohne Einbettung in einen kaufmännischen Zusammenhang gestellt.

Im Hinblick auf die erste Aufgabe des vorigen Kapitels erklärt der Autor, dass 100 Hyperpyra mit 8 (und nicht wie vorher mit 15) zu multiplizieren und dann 800 durch 15 (und nicht wie vorher durch 8) zu dividieren seien.

Ergebnis: $53\frac{1}{3}$ Hyperpyra

Im Divisionsdiagramm steht zusätzlich noch der ungekürzte Bruch $\frac{5}{15}$. Der Autor hat auf eine weitere Umwandlung von $\frac{1}{3}$ Hyperpyron in Kukkia und Turnesia verzichtet (6 Kukkia $2\frac{2}{3}$ Turnesia).

Zum Schluss folgt fast wörtlich wieder derselbe Hinweis wie am Ende von Kap 93.

95

**Derjenige, der 100 Florin verliehen hat, der jährliche Zins von diesen
20 Florin – wie groß ist dabei der jährliche und monatliche Zins
nicht von den 100 Florin, sondern von einem jeden der 100 Florin?**

Angenommen, jemand hat irgendeinem anderen 100 Florin geliehen. Der Empfänger versprach dem, der diese besaß, um der Schuld willen jedes Jahr 20 Florin zu geben. Du suchst zu wissen, was der jährliche und der monatliche Zins von jedem der 100 Florin ist; jeder Florin habe den Wert von 8 Hyperpyra. Du kannst dies auf zweierlei Weisen wissen.

Die erste Art.

Der Autor betrachtet das Verhältnis von 20 Florin Jahreszins und 100 Florin Kapital (κεφάλαιον), also $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. 1 Florin erbringt somit einen Jahreszins von $\frac{1}{5}$ Florin, und es gilt: 1 Florin = 8 Hyperpyra = 160 Kukkia. Daher stimmt dieser Jahreszins auch mit 32 Kukkia oder 1 Hyperpyron 12 Kukkia überein. Der Monatszins wird hier noch nicht berechnet.

Die zweite Art.

Der Autor rechnet $20 \text{ Florin} : 5 = 4 \text{ (Florin)} = 32 \text{ (Hyperpyra)}$. Dann argumentiert er: Wie 4 der 5. Teil von 20 sei, so seien die 32 Kukkia der 5. Teil von 160 Kukkia bzw. von 8 Hyperpyra (= 1 Florin). Damit seien 32 Kukkia der Jahreszins von 1 Florin. Klarer wird diese Überlegung, wenn man die Umrechnung $\frac{1}{5} \text{ Florin} = \frac{32}{20} \text{ Hyperpyra} = 32 \text{ Kukkia}$ betrachtet.

Jetzt wird auch der Monatszins für 1 Florin berechnet: Er beträgt $\frac{32}{12}$ Kukkia = $2\frac{2}{3}$ Kukkia = 2 Kukkia $2\frac{1}{3}$ Turnesia, woraus sich eine neue Parität für das Kukki ergibt, nämlich 1 Kukki = $3\frac{1}{2}$ Turnesia, ohne dass der Autor den Leser darüber informiert.

In der nächsten Aufgabe geht es um 15 Florin Jahreszins für 100 Florin. Der Autor rechnet wieder nach der "zweiten Art", und wieder dividiert er den Jahreszins durch 5. Es kommen 3 Florin bzw. 24 Hyperpyra heraus. Der Jahreszins für 1 Florin beträgt daher 24 Kukkia, der Monatszins 2 Kukkia. (Begründung: $\frac{15}{100}$ Florin = $\frac{24}{20}$ Hyperpyra = 24 Kukkia)

In der folgenden Aufgabe soll für 100 Florin ein Jahreszins von 16 Florin gelten. Wieder dividiert der Autor durch 5: $\frac{16}{5}$ Florin = $3\frac{1}{5}$ Florin = $25\frac{3}{5}$ Hyperpyra, sodass sich $25\frac{3}{5}$ Kukkia als Jahreszins für 1 Florin ergeben (nicht für 100 Florin, wie der Autor versehentlich schreibt). $\frac{3}{5}$ Kukkia werden jetzt noch in Turnesia umgewandelt, wobei das Kukki seinen Wert gegenüber der vorletzten Aufgabe wieder geändert hat: 1 Kukki = 4 Turnesia. Der Jahreszins für 1 Florin beträgt also, anders geschrieben, 25 Kukkia $2\frac{2}{5}$ Turnesia. Es wird kein Monatszins berechnet.

Der Autor hat bei der Lösung seiner Zinsaufgaben die zweite Methode favorisiert, die man allgemeiner so formulieren kann: Seien n Florin der Jahreszins von 100 Florin, so sind $\frac{n}{5}$ Florin = $\frac{8n}{5}$ Hyperpyra der Jahreszins von 20 Florin und somit $\frac{8n}{5}$ Kukkia der Jahreszins von 1 Florin. Die Maßzahlen der Hyperpyra und der gesuchten Kukkia stimmen also überein. Man könnte hier von vorteilhaftem Rechnen sprechen – die Parität 1 Hyperpyron = 20 Kukkia wird vorteilhaft genutzt –, wenn die Aufgaben nicht so einfach wären.

96

***Wenn die 100 Florin in 9 Monaten einen Zins von 10 Florin erbringen,
wie viel jeder Florin im Monat und wie viel im Jahr gewinnt –
insgesamt auch die 100 Florin, wie viel sie im Jahr gewinnen***

Nach einer Wiederholung der Aufgabenstellung beginnt der Autor mit der Rechnung:

10 Florin = 80 Hyperpyra = 1600 Kukkia (Zins von 100 Florin in 9 Monaten),
1600 Kukkia : 100 = 16 Kukkia, schriftlich gerechnet! (Zins von 1 Florin in 9 Monaten), 16 Kukkia : 9 = $1\frac{7}{9}$ Kukkia, 7 Kukkia = 28 Turnesia, $\frac{28}{9}$ Turnesia = $3\frac{1}{9}$ Turnesia; der Monatszins von 1 Florin beträgt 1 Kukki $3\frac{1}{9}$ Turnesia.

Zur Berechnung des Jahreszinses von 1 Florin: Der Autor wiederholt die berechneten Zinsen für 9 Monate und für 1 Monat, die jeweils 1 Florin erbringt. Den 9 Monaten fehlen 3 Monate zu 12 Monaten, daher werden jetzt die Zinsen von 1 Florin für 3 Monate bestimmt: $3 \cdot (1 \text{ Kukki } 3\frac{1}{9} \text{ Turnesia}) = \dots = 5 \text{ Kukkia } 1\frac{3}{9} \text{ Turnesia}$ (1 Kukki = 4 Turnesia). Die Addition zu den Zinsen von 1 Florin für 9 Monate ergibt den Jahreszins von 1 Florin: 21 Kukkia $1\frac{3}{9}$ Turnesia. (Der Autor kürzt nicht.)

Nun fehlt noch die Berechnung der Jahreszinsen von 100 Florin. Dazu hätte der Autor den letzten Zinsbetrag mit 100 multiplizieren können: 2100 Kukkia $\frac{4}{3} \cdot 100 \text{ Turnesia} = 2133 \text{ Kukkia } 1\frac{1}{3} \text{ Turnesia} = 106 \text{ Hyperpyra } 13 \text{ Kukkia } 1\frac{1}{3} \text{ Tur-}$

nesia = 13 Florin 2 Hyperpyra 13 Kukkia $1\frac{1}{3}$ Turnesia. Doch er will einen anderen Weg einschlagen und behauptet, dass die 100 Florin einen Jahreszins ergäben, der um $\frac{1}{4}$ höher als 10 Florin sei, da die Zeit von 12 Monaten $\frac{1}{4}$ mehr als 9 Monate betrage. Mit dem falschen Bruchteil $\frac{1}{4}$ (statt $\frac{1}{3}$) rechnet er weiter und gelangt zum Ergebnis 12 Florin 4 Hyperpyra = 100 Hyperpyra.

Hätte er mit $\frac{1}{3}$ gerechnet, so wäre er über $\frac{4}{3} \cdot 10$ Florin = $13\frac{1}{3}$ Florin = 13 Florin $2\frac{2}{3}$ Hyperpyra = 13 Florin 2 Hyperpyra $13\frac{1}{3}$ Kukkia = 13 Florin 2 Hyperpyra 13 Kukkia $1\frac{1}{3}$ Turnesia noch etwas bequemer als oben zum richtigen Resultat gekommen.

97

**Wenn – 156 Florin und 4 Hyperpyra und 10 Kukkia –
jeder Florin im Monat 2 Kukkia gewinnt,
wie hoch der Zins von diesen in $10\frac{1}{2}$ Monaten ist**

Angenommen, du suchst zu wissen: Wenn jeder Florin im Monat 2 Kukkia gewinnt, 156 Florin und 4 Hyperpyra und 10 Kukkia – wie viel haben sie in $10\frac{1}{2}$ Monaten entsprechend zu gewinnen?

Es folgt ein Hinweis auf die bereits aus früheren Kapiteln bekannte Umrechnung 1 Florin = 8 Hyperpyra.

Zunächst bestimmt der Autor nacheinander die Monatszinsen von 156 Florin, 4 Hyperpyra und 10 Kukkia: $2 \cdot 156$ Kukkia = 312 Kukkia = 15 Hyperpyra 12 Kukkia, 4 Hyperpyra = $\frac{1}{2}$ Florin mit 1 Kukki Monatszins, Zwischensumme: 15 Hyperpyra 13 Kukkia; 10 Kukkia = $\frac{1}{16}$ von 8 Hyperpyra = $\frac{1}{16}$ Florin mit dem Monatszins $\frac{2}{16}$ Kukkia = $\frac{1}{2}$ Turnesi [1 Kukki = 4 Turnesia]. Der Monatszins von 156 Florin 4 Hyperpyra 10 Kukkia beträgt demnach 15 Hyperpyra 13 Kukkia $\frac{1}{2}$ Turnesi.

Anschließend wird davon sowohl das Zehnfache als auch die Hälfte berechnet:

$10 \cdot 15$ Hyperpyra = 150 Hyperpyra, $10 \cdot 13$ Kukkia = 130 Kukkia = 6 Hyperpyra 10 Kukkia, Zwischensumme: 156 Hyperpyra 10 Kukkia; $10 \cdot \frac{1}{2}$ Turnesi = 5 Turnesia = 1 Kukki 1 Turnesi, Summe: 156 Hyperpyra 11 Kukkia 1 Turnesi

$\frac{1}{2} \cdot (15 \text{ Hyperpyra } 13 \text{ Kukkia } \frac{1}{2} \text{ Turnesi}) = 7 \text{ Hyperpyra } 16 \text{ Kukkia } 2\frac{1}{4} \text{ Turnesia}$ (ohne Zwischenrechnung, etwa 7 Hyperpyra $(10 + \frac{13}{2})$ Kukkia $\frac{1}{4}$ Turnesi = 7 Hyperpyra $16\frac{1}{2}$ Kukkia $\frac{1}{4}$ Turnesi)

Ergebnis nach Addition: In $10\frac{1}{2}$ Monaten ergeben sich für 156 Florin 4 Hyperpyra 10 Kukkia Zinsen in Höhe von 164 Hyperpyra 7 Kukkia $3\frac{1}{4}$ Turnesia. (Die 164 Hyperpyra hätten noch in 20 Florin 4 Hyperpyra umgewandelt werden können.)

Eine Rechnung mit dem reinen Florin-Betrag ($156\frac{9}{16}$) wäre schneller gewesen.

In Ergänzung zur Aufgabe in der Kapitelüberschrift fragt der Autor nun auch noch nach dem Jahreszins des obigen Geldbetrags.

Die Monatszinsen hat er ebenso wie die Zinsen für 10 Monate bereits berechnet. Daher verdoppelt er jetzt die Monatszinsen: 31 Hyperpyra 6 Kukkia 1 Turnesi. Dies zu 156 Hyperpyra 11 Kukkia 1 Turnesi addiert (s. o.; vgl. auch das Diagramm auf fol. 49^v oben) ergibt den Jahreszins 187 Hyperpyra 17 Kukkia 2 Turnesia. (Statt 187 Hyperpyra hätte er auch 23 Florin 3 Hyperpyra schreiben können.)

Anschließend weist er sinngemäß darauf hin, dass die Lösung so ist, wie sie sich ergeben hat, und nicht mit einer leichten Methode erreicht werden kann. Es ist die erste Aufgabe, bei der der (aus zwei direkten Dreisätzen) zusammen-

Als Lösungsmethode dient dem Autor wieder der zusammengesetzte Dreisatz, neu ist nur die Einbeziehung von Zinstagen: 15 Florin = 120 Hyperpyra, 50 Florin erbringen 60 Hyperpyra Jahreszins, also ergeben 150 Florin einen Jahreszins von 180 Hyperpyra und einen Monatszins von 15 Hyperpyra. Der Zins in 6 Monaten beträgt 90 Hyperpyra, der Zins in 15 Tagen ($= \frac{1}{2}$ Zinsmonat) 7 Hyperpyra 10 Kukkia. Also gewinnen 150 Florin in 6 Monaten 15 Tagen 97 Hyperpyra 10 Kukkia. Wir würden den gesuchten Zins direkt so berechnen: $15 \cdot \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}$ Florin = $12\frac{3}{16}$ Florin = 12 Florin 1 Hyperpyron 10 Kukkia

Tageszins: Der Monatszins von 150 Florin (15 Hyperpyra) wird durch 30 geteilt.
Ergebnis: 10 Kukkia

Jahreszins: Der Jahreszins von 150 Florin (180 Hyperpyra) wird durch 150 geteilt. Ergebnis: $1\frac{30}{150}$ Hyperpyra = $1\frac{1}{5}$ Hyperpyra = 1 Hyperpyron 4 Kukkia. Hier hätte sich der Autor auch auf den gegebenen Jahreszins von 100 Florin (15 Florin) beziehen können: $\frac{15}{100}$ Florin = $1\frac{1}{5}$ Hyperpyra

Es folgt noch eine (überflüssige) Probe zur Umrechnung des Bruchteils $\frac{30}{150}$ Hyperpyra: 30 Hyperpyra = 600 Kukkia, $(600 \text{ Kukkia}) : 150 = 4 \text{ Kukkia}$, also gilt $1 \frac{30}{150} \text{ Hyperpyra} = 4 \text{ Kukkia}$. Hieraus bestimmt der Autor auch noch den Monatszins "von jedem der 150 Florin": 2 Kukkia. Auch dieses Ergebnis hätte er im Prinzip schon vorher aus dem Jahreszins von 100 Florin herleiten können: $\frac{15}{100} \cdot \frac{1}{12} \text{ Florin} = 2 \text{ Kukkia}$

Das Vorgehen des Autors liegt nahe und soll hier nur in Kurzform notiert werden:

Jahreszins von 300 Florin: 45 Florin; $300 : 45 = 6\frac{30}{45} = 6\frac{2}{3}$; Verdoppelung der 300 Florin in $6\frac{2}{3}$ Jahren bzw. in 6 Jahren 8 Monaten

Probe: $6 \cdot 45 = 270$, $\frac{2}{3} \cdot 45 = 30$, $270 + 30 = 300$: In $6\frac{2}{3}$ Jahren entstehen aus 300 Florin weitere 300 Florin an Zinsen.

Der Autor hat hier nur mit dem einfachen Zins gerechnet. Zwar behandelt er auch eine Aufgabe der Zinseszinsrechnung im Rahmen der Algebra in seinem "2. Buch" (Kap. 154), doch eine Lösung der hier vorliegenden Aufgabe wäre ihm unter Zinseszins-Bedingungen nicht möglich gewesen, da dabei die Logarithmen ins Spiel kommen:

Ist i die Anzahl der Jahre, nach denen sich 300 Florin bei einem Jahreszinssatz von 15 % verdoppeln, so gilt $300 \cdot (1 + 0,15)^i = 600$. Daraus ergibt sich $i \cdot \lg 1,15 = \lg 2$ und schließlich $i \approx 4,96$:

Bereits nach 4 Jahren 346 Tagen bzw. nach 4 Jahren 11 Monaten 16 Tagen verdoppeln sich die 300 Florin unter Zinseszins-Bedingungen. (1 Zinsjahr = 360 Zinstage)

Nun fragt der Autor noch nach dem Jahreszins der 300 Florin, obwohl er diesen doch schon oben ermittelt hatte (45 Florin), und dividiert dazu die 300 Florin Zinsen durch $6\frac{2}{3}$: Wie üblich bringt er Dividend und Divisor auf einen gemeinsamen Nenner und rechnet $\frac{900}{3} : \frac{20}{3} = 45$ (Florin).

Darüber hinaus bestimmt er auch noch den Monatszins und den Tageszins für die 300 Florin.

Monatszins: (45 Florin) : 12 = $3\frac{9}{12}$ Florin = $3\frac{3}{4}$ Florin = 3 Florin 6 Hyperpyra = 30 Hyperpyra

Tageszins: (30 Hyperpyra) : 30 = 1 Hyperpyron

100

**Wie man die in verschiedenen Monaten und an verschiedenen Tagen
gegebenen Teile verknüpfen und bewerkstelligen kann,
dass der Zins von diesen an ein und demselben Tag beginnt**

Es sei ein Gläubiger mit Zins, der ein Schuldbuch mit verschiedenen Darlehen hat, die er verschiedenen Monaten und Tagen gemäß gegeben hat, wie detailliert im Schuldbuch von jenem angezeigt wird. Er sucht aber die in verschiedenen Monaten und an verschiedenen Tagen gegebenen verschiedenen Darlehen zu verknüpfen und zu bewerkstelligen, dass der Zins von diesen an ein und demselben Tag beginnt.

Diese Aufgabe gehört zu den sog. Terminrechnungen: Ein Kapital mit bekanntem Jahreszins wird in mehreren Raten zu verschiedenen Zeitpunkten aufgenommen oder verliehen, wobei sich für jede Rate ein bestimmter Zins ergibt. Gesucht wird ein einheitlicher Zeitpunkt (Zinstag), zu dem das Gesamtkapital die Summe der Einzelzinsen erbringt. – Der Autor fährt wie folgt fort:

Du musst dies nun so machen. Angenommen, er hat gemäß dem ersten Zinsjahr in verschiedenen Monaten an jemanden auf Darlehen gewisse Florine gegeben, jeder Florin für 8 Hyperpyra. Er hat für die 100 Florin den Jahreszins 15 Florin vereinbart, es gewinnt aber jeder Florin im Monat 2 Kukkia. (Diesen Monatszins gibt der Autor hier nur an, da er ihn bereits in Kap. 95 berechnet hat.) Er hat an den verschiedenen (Tagen) so gegeben: am 10. September 70 Florin, am 20. Oktober 60 Florin, am 30. November 90 Florin, am 10. Dezember 80 Florin. Lass nun die 70 Florin weg und suche den Zins der 60 Florin des zweiten Darlehens. Die 60 Florin haben nun einen Zins vom 10. September bis zum 20. Oktober erbracht, was 40 Tage sind – die 30 Tage, das ist der Zins eines Monats, zweimal 60 Kukkia, was 120 Kukkia sind. Der Zins von 10 Tagen, die bis zu den 40 fehlen, ist dritter Teil der 30 Tage, auch der Zins davon ist dritter Teil der 120 Kukkia, was 40 Kukkia sind. Und zusammen ist der Zins der 60 Florin während der 40 Tage 160 Kukkia, das sind 1 Florin oder 8 Hyperpyra. Danach berechnet der Autor die Zinsen von 90 Florin für den Zeitraum vom 10. September bis zum 30. November, d. h. für 80 Tage = $2\frac{2}{3}$ Monate: 2 Monate ergeben einen Zins von $2 \cdot 90 \cdot 2$ Kukkia = 360 Kukkia, $\frac{2}{3}$ Monate oder 20 Tage einen Zins von $\frac{2}{3} \cdot 180$ Kukkia = 120 Kukkia. Insgesamt erhält er einen Zins

von 480 Kukkia = 3 Florin = 24 Hyperpyra.

Ganz offensichtlich ist der Autor einem Denkfehler erlegen: An den Tagen, an denen die Teildarlehen ausgezahlt werden, beginnt die Verzinsung und läuft bis zum 10. Dezember, er hingegen hat diese vom 10. September bis zu den Auszahlungstagen angesetzt!

Seinen Fehler hätte er bereits beim 1. Teildarlehen von 70 Florin bemerken müssen, das angeblich keinen Zins erbringt (*Lass nun die 70 Florin weg*), in Wirklichkeit aber über den gesamten Zeitraum von 90 Tagen verzinst werden muss. Bei der noch ausstehenden Berechnung der Zinsen von 80 Florin wird ihm das Dilemma, in das er hineingeraten ist, endlich bewusst (vgl. fol. 129/9–18): *Die 80 Florin aber – in gleicher Weise erfordert es das Richtige, dass sie keinen Zins haben, da sie nichts an vergangenen Tagen haben; denn da sie an dem 10. Dezember selbst gegeben wurden, verzinsen sie sich zufällig nicht. Weil aber der Zins dieser vier verschiedenen Darlehen im Anfang ein und desselben Tages verknüpft werden soll, fordert dieselbe Methode von uns, weil die 70 Florin, die richtigerweise am meisten Zins haben, damit wir aus ihnen keinen Zins abfordern, vielmehr den Zins der 80 Florin vom 10. September bis zum 10. Dezember zu suchen, was 90 Tage sind, d. h. 3 Monate. Es haben aber die 80 Florin im Monat zweimal 80 Kukkia Zins, was 160 Kukkia sind, in drei Monaten dreimal 160 Kukkia, was 480 Kukkia sind, was 3 Florin oder 24 Hyperpyra sind.* Der Autor will also kompensieren: Anstatt die 70 Florin zu verzinsen, die – wie er selbst erkennt – verzinst werden müssten, verzinst er die 80 Florin, die – wie er ebenfalls weiß – keine Zinsen tragen. Ein solches Vorgehen ist natürlich nicht statthaft und wird in der Terminrechnung nicht gefordert.

Verfolgen wir nun die weitere Rechnung des Autors.

Die Summe der Zinsen aus den vier Darlehen beträgt 7 Florin bzw. 56 Hyperpyra, die Summe der Darlehen selbst beträgt 300 Florin. Nun fragt er danach, nach wie vielen Tagen 300 Florin einen Zins von 56 Hyperpyra erbringen. Da 1 Florin einen Monatszins von 2 Kukkia hat (s. o.), haben 300 Florin einen Monatszins von 600 Kukkia bzw. 30 Hyperpyra. 300 Florin haben also einen Tageszins von 1 Hyperpyron. Damit ist nach 56 Tagen der Zeitpunkt erreicht, zu dem sich die 300 Florin zu 56 Hyperpyra verzinsen, d. h. (vom 10. September an betrachtet) am 6. November. An dieser Stelle findet sich ein erklärender Satz über die Länge des Zinsmonats, der (wenn überhaupt) schon im Kap. 98, bei der erstmaligen Berechnung von Tageszinsen, angebracht gewesen wäre: *Denn all die 12 Monate des Jahres rechnen sie bei den Rechnungen und Schuldbüchern als jeweils 30 Tage.* Es folgt daraufhin noch eine Proberechnung dafür, dass der 6. November korrekt ermittelt wurde: 20 restliche September- und 30 Oktobertage ergeben 50 Tage, am 6. November sind 56 Tage erreicht. *Und siehe, es geschah die Verknüpfung und der Anfang des Zinses der vier verschiedenen Darlehen am 6. November.*

Damit du die Wahrheit der vorliegenden Methode einsiehst, wechselt der Autor nun unvermittelt zur Betrachtung der Restlaufzeit, der Anzahl der Tage vom 6. November bis zum 10. Dezember (34). Da 300 Florin einen Tageszins von 1 Hyperpyron haben, ergeben sich für 34 Tage 34 Hyperpyra an Zinsen, "ebenso" wie für die vier Darlehen vom 10. September bis zum 10. Dezember.

Vielleicht hat der Autor bemerkt, dass dieses Ergebnis dem obigen widerspricht, wo er für den Zins der vier Darlehen 56 Hyperpyra erhalten hatte, denn er rollt die Aufgabe noch einmal neu auf.

Zuvor aber wollen wir einmal das Diagramm betrachten, das er seiner Aufgabe beigegeben hat.

am 10. September	70 Florin			
am 20. Oktober	60 Florin:	Zins	1 Florin oder	8 Hyperpyra
am 30. November	90 Florin	Zins	3 Florin oder	24 Hyperpyra
am 10. Dezember	80 Florin	Zins	3 Florin <u>oder</u>	<u>24 Hyperpyra</u>
	insgesamt		7 Florin oder	56 Hyperpyra

Der Kontext ist offenbar ein anderer:

Ein Schuldner zahlt 300 Florin in Raten zurück.

Diese "duale Aufgabe" hat der Autor richtig gelöst. Es ergeben sich tatsächlich 56 Hyperpyra Gesamtzinsen, und der einheitliche Zinstag ist der 6. November.

Die Lösung der ursprünglichen Aufgabe gelingt ihm erst anschließend im zweiten Anlauf, wobei die Ergebnisse seiner Rechnungen, die wir im Einzelnen nicht mehr verfolgen müssen, in einem zweiten Diagramm niedergelegt sind, das dem Kontext einer Kreditvergabe gerecht wird:

am 10. September	70 Florin:	Zins	21 Hyperpyra
am 20. Oktober	60 Florin:	Zins	10 Hyperpyra
am 30. November	90 Florin:	Zins	<u>3 Hyperpyra</u>
am 10. Dezember	80 Florin	insgesamt	34 Hyperpyra

Er stellt dabei fest, dass die Gesamtzinsen in Höhe von 34 Hyperpyra mit den Zinsen aus den 300 Florin ab dem 6. November übereinstimmen. (Die Zinsen für das Gesamtdarlehen vor diesem Stichtag, nämlich 56 Hyperpyra, hatte er ja schon vorher berechnet.)

Dennoch möchte er den einheitlichen Zinstag noch einmal direkt bestimmen, und zwar dadurch, dass er vom Schlusstag, dem 10. Dezember, aus zurückrechnet. Seine Formulierung hierzu:

Mache hinten fest (ὀπισθοπόδησε) und fange rückwärtsgewandt (ὀπισθορμήτως) vom 10. Dezember an, der der Schlusstag all der verschiedenen Darlehen ist, bis immer du diese 34 Tage erfüllt hast – um dasselbe zu sagen: die 34 Hyperpyra –, und wo immer die 34 Tage rückwärtsgewandt aufhören – vielmehr die 34 Hyperpyra –, da ist der Anfang und die Verknüpfung des Zinses der vier verschiedenen Darlehen. Ergebnis ist wieder der 6. November.

(Wie bereits bekannt, ist 1 Hyperpyron der Tageszins von 300 Florin.)

Der Autor erwähnt noch, dass dieser Termin schon mit der ersten Methode (die wir als fehlerhaft erkannt hatten) gefunden wurde, aber immerhin gibt er zu, dass die vorliegende zweite Methode klarer als die erste sei.

Abschließend sollen die beiden durch die Diagramme repräsentierten Aufgaben in verallgemeinerter Form diskutiert werden.

1. Aufgabe (vgl. 1. Diagramm)

Ein Kreditnehmer erhält an einem Tag einen Betrag K und zahlt ihn innerhalb eines Zeitraums von N Tagen in n Raten $K_1, \dots, K_n$ zurück ($K = K_1 + \dots + K_n$), und zwar K_1 am 1. Tag, d. h. nach 0 Tagen, ... K_n am $(N+1)$. Tag, d. h. nach N Tagen. Die Zinszeiträume für $K_1, \dots, K_n$ seien $t_1, \dots, t_n$ Tage (mit $t_1 = 0$, $t_n = N$). Der Jahreszinssatz betrage p %.

z_1 seien die Zinsen. Es gilt $z_1 = (K_2 \cdot t_2 + K_3 \cdot t_3 + \dots + K_{n-1} \cdot t_{n-1} + K_n \cdot N) \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{360}$. Gesucht ist der $(t+1)$. Tag, der einheitlicher Zinstag für K ist (nach t Tagen).

Es gilt $K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360} = (K_2 \cdot t_2 + K_3 \cdot t_3 + \dots + K_{n-1} \cdot t_{n-1} + K_n \cdot N) \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{360}$.

Daraus folgt:

$$t = \frac{1}{K} \cdot (K_2 \cdot t_2 + K_3 \cdot t_3 + \dots + K_{n-1} \cdot t_{n-1} + K_n \cdot N)$$

2. Aufgabe (vgl. 2. Diagramm)

Ein Geldverleiher gibt einen Kredit in Gesamthöhe von K und zahlt ihn innerhalb eines Zeitraums von N Tagen in n Raten $K_1, \dots, K_n$ aus ($K = K_1 + \dots + K_n$), und zwar K_1 am 1. Tag, d. h. nach 0 Tagen, ... K_n am $(N+1)$. Tag, d. h. nach N Tagen. Die Zinszeiträume für $K_1, \dots, K_n$ sind jetzt $N-t_1, \dots, N-t_n$ Tage (mit $N-t_1 = N$, $N-t_n = 0$). Der Jahreszinssatz betrage wieder p %.

z_2 seien die Zinsen. Es gilt $z_2 = (K_1 \cdot N + K_2(N-t_2) + \dots + K_{n-1}(N-t_{n-1})) \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{360}$.

Gesucht ist jetzt der $(N-t+1)$. Tag, der einheitlicher Zinstag für K ist (nach $N-t$ Tagen).

Es gilt $K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{N-t}{360} = (K_1 \cdot N + K_2(N-t_2) + \dots + K_{n-1}(N-t_{n-1})) \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{360}$.

Daraus folgt: $N-t = \frac{1}{K} \cdot (K_1 + K_2 + \dots + K_{n-1}) \cdot N - K_2 \cdot t_2 - \dots - K_{n-1} \cdot t_{n-1} =$

$$\frac{1}{K} \cdot (K \cdot N - K_n \cdot N - K_2 \cdot t_2 - \dots - K_{n-1} \cdot t_{n-1}) = N - \frac{1}{K} \cdot (K_2 \cdot t_2 + \dots + K_{n-1} \cdot t_{n-1} + K_n \cdot N)$$

Es ergibt sich wieder

$$t = \frac{1}{K} \cdot (K_2 \cdot t_2 + \dots + K_{n-1} \cdot t_{n-1} + K_n \cdot N).$$

Darüber hinaus gilt $z_1 + z_2 = (K_1 + K_2 + \dots + K_n) \cdot N \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{360} = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{N}{360}$. Das ist der Zins von K für N Tage, ein Ergebnis, das nicht überraschen kann, denn die Zinszeiträume sind bei den beiden Aufgaben komplementär. (Vgl. die Zinszeiträume in der ersten und der zweiten Aufgabe, wobei "nach t_i Tagen" der Zeitangabe "vor $(N-t_i)$ Tagen" entspricht.) Bei der Addition von z_1 und z_2 werden demnach alle K_i über den gesamten Zeitraum von N Tagen verzinst.

(Vgl. $z_1 = 56$ Hyperpyra, $z_2 = 34$ Hyperpyra, $z_1 + z_2 = 90$ Hyperpyra – den Zins von 300 Florin in 90 Tagen.)

Den Zins von K für N Tage

– hätte der Kreditnehmer (zusammen mit K) zahlen müssen, wenn seine gesamte Rückzahlung erst am letzten Tag $((N+1)$. Tag) stattgefunden hätte. (1. Aufgabe)

– hätte der Geldverleiher erheben können, wenn er den vollen Kredit schon am 1. Tag ausgezahlt hätte (2. Aufgabe).

Terminrechnungen können methodisch wie Mischungsrechnungen behandelt werden: Sei m eine geeignete Größe (Masse, Volumen) mit $m = m_1 + \dots + m_n$, und habe jedes m_i ($i=1, \dots, n$) eine "Konzentration" (Feingehalt, prozentualen Anteil) k_i , so hat m eine mittlere Konzentration k , für die $m \cdot k = m_1 \cdot k_1 + \dots + m_n \cdot k_n$ gilt. Es folgt $k = \frac{1}{m} \cdot (m_1 \cdot k_1 + \dots + m_n \cdot k_n)$. Bei Terminrechnungen spielen dabei offenkundig die Tage t und t_i die Rolle der k und k_i , die Kapitalien K und K_i die Rolle der m und m_i .

Für Terminrechnungen scheint es sonst im byzantinischen Bereich keinen Nachweis zu geben. Weitere Einzelheiten, insbesondere Beispiele anderer Autoren, findet man bei TROPFKE (1980, S. 553 f.).

101

Wie man verschiedene Beträge addieren und wissen kann,

wie groß die Größe all dieser wird, wenn sie ein einziger Betrag geworden ist

Hier liegt das größte Kuriosum in diesem Rechenbuch vor: die Einführung der schriftlichen Addition erfolgt erst jetzt im 101. Kapitel! Der Leser erhält vom Autor keine Information darüber, dass dieser hier einen weit über Gebühr verspäteten Nachtrag vorgenommen hat und dass das erst jetzt vorgestellte Verfahren bereits bei den überaus zahlreichen schriftlichen Multiplikationen von mehrstelligen Zahlen verwendet werden musste. Dieses Versäumnis wurde insbesondere beim Multiplikationsbeispiel in Kap. 12 und bei der allgemeinen Beschreibung des Verfahrens zur "zweiseitigen Multiplikation" in Kap. 14 deutlich. Dieses Kuriosum ist auch einzigartig im Hinblick auf alle anderen bekannten arithmetischen Lehrwerke.

Angenommen, aus verschiedenen Rechnungen kamen verschiedene Beträge heraus, und der erste Betrag ist 1695 Hyperpyra, der zweite Betrag ist 1393 Hyperpyra, der dritte ist 3454 Hyperpyra, der vierte ist 4565 Hyperpyra ...

Nun sollen die Zahlen untereinander aufgereiht werden, *Einer mit Einer und Zehner mit Zehner und so weiter*, also stellengerecht. Natürlich hat der Autor wieder ein Diagramm beigegeben. Die Überträge (z. B. 1 Zehner bei den Einern) werden nicht notiert und müssen gemerkt werden (*behalte ... für dich*). Der Autor addiert, wie aus dem Text hervorgeht, von oben nach unten (jeweils mit Angabe der Zwischensumme) und berücksichtigt den Übertrag erst nach der vollständigen Addition aller anderen Summanden der nächsthöheren Stelle, sodass man ihn sich unnötig lange merken muss. Vorteilhafter wäre es gewesen, den Übertrag bereits mit dem ersten Summanden zu verrechnen.

$$\begin{array}{r}
 \text{Hyperpyra} \quad 1 \ 6 \ 9 \ 5 \ | \ 1 \\
 \text{Hyperpyra} \quad 1 \ 3 \ 9 \ 3 \ | \ 0 \\
 \text{Hyperpyra} \quad 3 \ 4 \ 5 \ 4 \ | \ 3 \\
 \text{Hyperpyra} \quad 4 \ 5 \ 6 \ 5 \ | \ 1 \quad \textcircled{5} \\
 \hline
 \text{insgesamt Hyperpyra} \quad 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 7 \quad \textcircled{5}
 \end{array}$$

Außerdem hat der Autor die Siebenerprobe für diese Addition durchgeführt – am rechten Rand des Diagramms sind die Probezahlen notiert: zunächst die Siebenerreste der Summanden, dann deren Summe (die obere eingekreiste 5), von der er noch einmal den Siebenerrest hätte bestimmen müssen, wenn diese

die Zahl 6 überschritten hätte, und schließlich der Siebenerrest der Summe (die untere eingekreiste 5). Die Berechnung der Probezahlen ist im Text sehr ausführlich dargestellt.

Der zahlentheoretische Hintergrund ist die Additivität der Kongruenzrelation, die bereits im Kommentar zu Kap. 22 eine Rolle spielte:

Aus $a \equiv a' \pmod{m}$ und $b \equiv b' \pmod{m}$ folgt $a + b \equiv a' + b' \pmod{m}$.

Das sieht man leicht ein, wenn man den Term $(a + b) - (a' + b')$ betrachtet und in $(a - a') + (b - b')$ umwandelt. Nach Voraussetzung sind beide Summanden durch m teilbar und daher auch die Summe.

Die Gleichheit der letzten Probezahlen bei der Siebenerprobe ($m=7$) zur Addition ist aber auch wie bei der Siebenerprobe zur Multiplikation (vgl. Kap. 7 – Kommentar) wieder nur eine notwendige, keine hinreichende Bedingung für die Korrektheit der Rechnung. So deckt die Siebenerprobe z. B. die fehlerhafte Addition $8 + 6 = 21$ nicht auf. In diesem Zusammenhang sei noch einmal hingewiesen auf die Kapitel 7, 9, 11, 13, 15 zur Siebenerprobe der Multiplikation sowie auf die Kapitel 22, 24, 26, 28, 30, 32, 35, 38 zur "Siebenerprobe" der Division $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$, d. h. zur Siebenerprobe der dazu äquivalenten Multiplikation $a = qb + r$ ($0 \leq r < b$).

Unser Autor hält die Siebenerprobe, auf die konkrete Additionsaufgabe bezogen, zu Unrecht für hinreichend:

Da die zwei Proben davon gleich geworden sind, indem jede jeweils 5 hat, ist das Gesuchte schon richtig geworden.

Andererseits hält er sie zu Recht für notwendig: *Wenn aber die eine (sc. Probe) 5 hätte, die andere aber irgendein anderes ungleiches Zahlzeichen, wäre der Betrag der 11107 Hyperpyra keineswegs richtig entstanden.*

Am unteren Rand von fol. 50^v hat der Autor notiert:

Suche die Probe davon mit den 9 und nicht mit den 7 auf.

Er hat nachträglich erkannt, dass auch bei der Addition die Neunerprobe ($m=9$) bequemer durchzuführen ist. (Vgl. hierzu Kap. 7 – Kommentar.)

Es folgt ein weiteres Beispiel mit 7 Summanden, bei dem sich der Autor im Text kürzer fasst, indem er die Zwischensummen aus je zwei Summanden nicht mehr notiert.

Hyperpyra	9 5 3	1	
Hyperpyra	8 1 6	4	
Hyperpyra	7 6 3 1	1	
Hyperpyra	6 3 1 5	1	
Hyperpyra	5 2 7 4	3	
Hyperpyra	4 1 6 3	5	
Hyperpyra	1 3 2 4 5	1	insgesamt 16 (2)
insgesamt Hyperpyra	3 8 3 9 7	(2)	

Auch werden die Siebenerreste im Text nicht mehr berechnet, sondern nur noch angegeben (siehe Diagramm). Von der Summe der Siebenerreste der Summanden (16) ist noch der Siebenerrest (2) zu bestimmen, der mit dem Siebenerrest (2) der Hyperpyra-Summe (38397) übereinstimmen muss.

**Wie man einen Betrag von einem Betrag subtrahieren
und den übrig bleibenden Teil wissen kann, wie groß er ist**

Ebenso wie für die Addition gilt auch für die schriftliche Subtraktion, dass ihre extrem verspätete Einführung, erst in diesem Kapitel, nur als kurios bezeichnet werden kann. Dabei ist ihre Kenntnis für die bislang vergleichbar häufig durchgeführte schriftliche Division unentbehrlich. Es sei vor allem an Kap. 31 erinnert, wo sich der Autor bei einer Divisionsaufgabe genötigt sah, eine Subtraktionsmethode zu erläutern, und zwar die Methode der dekadischen Ergänzung.

Der Autor beginnt das Kapitel wie folgt:

Wenn du irgendeinen Betrag von einem anderen subtrahieren willst, kannst du nicht eine so große und gleiche Größe von einer anderen ebenso großen gleichen Größe subtrahieren; wenn du nämlich 100 von 100 und 200 von 200 subtrahierst, wird der Rest 0 sein. Es ist nun notwendig, dass die Größen von diesen ungleich sind, und die eine verhält sich größer, die andere kleiner. Setze nun das Größere nach oben, das Kleinere nach unten.

Hier wird wieder deutlich, dass die Null nicht als vollwertige Zahl angesehen wurde.

Nach dieser Einleitung bespricht der Autor die Subtraktion von 1724 - 1655 (in Hyperpyra) – also sofort ein Beispiel mit Zehnerunterschreitung:

Hyperpyra	1 7 2 4	insgesamt 14	insgesamt aber	5
Hyperpyra	1 6 5 5	8		
Hyperpyra	0 0 6 9	6	} insgesamt 14	insgesamt aber

Dazu schreibt er:

... Und das Obere hat die größeren Teile am Anfang, das Untere aber hat die größeren am Ende. Du kannst nicht das gerade unterhalb am Ende Stehende, was 55 bezeichnet, von dem gerade oberhalb Stehenden subtrahieren, was 24 bezeichnet ... Du könntest schön und leicht das Untere von dem Oberen subtrahieren, wenn das Obere vom Anfang bis zum Ende größer, das Untere aber vom Anfang bis zum Ende kleiner wäre. Nun aber, obwohl sich das Größere und Kleinere ungleichmäßig verhalten, ... kannst du das Untere vom Oberen so subtrahieren.

Merkwürdig ist, dass der Autor diese "Anomalie" erst an der Besetzung der Zehner- und Einerstelle feststellt und nicht schon an den Einern.

Für die Subtraktion werden nun folgende Rechnungen durchgeführt:

Die Anzahl der Zehner des Minuenden (2) wird um 1 verringert – es entstehen 14 Einer, von denen die 5 Einer abgezogen werden können. Ergebnis: 9 Einer

Die Anzahl der Hunderter des Minuenden (7) wird um 1 verringert – es entstehen 11 Zehner, von denen die 5 Zehner abgezogen werden können: Ergebnis: 6 Zehner

Die verbliebenen Differenzen an den höheren Stellen verschwinden (6 Hunderter - 6 Hunderter = 0, 1 Tausender - 1 Tausender = 0).

Die gesuchte Differenz ist 69 – im Diagramm mit den positionellen Leerzeichen für die Hunderter und Tausender geschrieben, also in der Form 0069.

Das Verringern der Zehner- und der Hunderterzahl im Minuenden, das im vor-

liegenden Beispiel erforderlich ist, umschreibt der Autor mit "nehmen" ($\lambda\alpha\beta\epsilon\tilde{\iota}\nu$) oder "streichen" ($\kappa\acute{o}\psi\alpha\iota$), er markiert oder streicht aber keine Ziffern in den Diagrammen.

Die hier verwendete Methode ist die Abzieh- oder Borgemethode, die derzeit in Deutschland nur im bayerischen Lehrplan vorgeschrieben ist. Sie lässt sich allgemein (ohne Betrachtung von Hunderter- oder höheren Stellen) folgendermaßen darstellen:

Sei $10a + b$, der Minuend, eine zweistellige und $10c + d$, der Subtrahend, eine mindestens einstellige Zahl, die Differenz sei positiv, und es trete Zehnerunterschreitung auf. Die Variablen erfüllen somit die Bedingung $0 \leq c < a < 10$, $0 \leq b < d < 10$.

Dann wird für die Differenz der Term $10((a - 1) - c) + (10 + b - d)$ gebildet.

Es sei daran erinnert (vgl. Kap 31 – Kommentar), dass unter den gleichen Voraussetzungen bei der Methode der dekadischen Ergänzung der Term $10(a - (c + 1)) + (b + (10 - d))$ gebildet wird.

Das Verfahren, das heute zumindest im deutschsprachigen Raum dominiert, von unserem Autor aber nicht vorgestellt wird, ist das Ergänzungsverfahren. Unter den gleichen Voraussetzungen wie oben wird hierbei für die Differenz der Term $10(a - (c + 1)) + ((10 + b) - d)$ gebildet.

Wir kehren nun zur Besprechung des Textes zurück, wobei es im Folgenden um die Probe der obigen Subtraktion ($1724 - 1655 = 69$) geht. Der Autor schreibt:

Es gibt auch eine andere Probe, von der wir sagen, dass sie, weil sie klarer und leicht ist, die bessere ist, welche die folgende ist.

Es handelt sich um die Umkehraddition $1655 + 69 = 1724$, die natürlich eine zuverlässige Probe (notwendige und hinreichende Bedingung) ist. Der Autor bespricht diese Addition wieder ausführlich (wieder mit 0069 statt einfachem 69 im Diagramm), wobei er aber jetzt die Überträge sofort mit einem Summanden der nächsthöheren Stelle verrechnet – im Unterschied zum ersten Beispiel von Kap. 101.

Am unteren Rand von fol. 51^r findet sich eine weitere Bemerkung:

Es gibt auch einen anderen Beweis: 1655 ergeben zusammen 17, zusammen ergeben die 17 aber 8. 0069 ergeben zusammen 15, zusammen ergeben die 15 aber 6. Addiere 8 und 6, und zusammen ergeben sich 14, zusammen ergeben aber die 14 ⑤. 1724 ergeben zusammen 14, zusammen ergeben die 14 aber ⑤ – ebenso bei den anderen (Beispielen).

Hier wird sozusagen die Probe der Probe vorgestellt, nämlich als Probe für die Subtraktion wird die Umkehraddition der Neunerprobe unterzogen. Damit ist auch das Diagramm zur obigen Subtraktionsaufgabe vollständig erklärt.

In einer zweiten, wieder ausführlich behandelten Aufgabe geht es um die Subtraktion $658934 - 435749 = 223185$ (Einheiten: Hyperpyra), erneut mit Diagramm, Probe durch Umkehraddition $435749 + 223185 = 658934$, die aber nicht mehr im Einzelnen vorgerechnet wird, und am linken Rand von fol. 51^v mit einem knappen Hinweis:

Neunerprobe Γμαρτυρία ἐνώσεως, weil dabei die Stellenwerte addiert werden!:

Es wurden die zwei Proben jeweils als 8 gefunden.

Damit wird also wieder die Probe geprobt.

Mit der Bezeichnung $Q(a)$ aus dem Kommentar von Kap. 7 gilt nämlich $Q(435749) = 32$, $Q(32) = 5$, $Q(223185) = 21$, $Q(21) = 3$, $5 + 3 = \textcircled{8}$ einerseits und $Q(658934) = 35$, $Q(35) = \textcircled{8}$ andererseits. Diese Probezahlen sowie auch die Zwischensummen 5 und 3 hat der Autor wieder in sein Subtraktionsdiagramm mit aufgenommen, das hier im Kommentar nicht besprochen werden muss, da es genauso wie das Diagramm zur ersten Subtraktionsaufgabe strukturiert ist.

So als wäre dem Autor noch eingefallen, dass es ja auch einfache Subtraktionsaufgaben (ohne "Stellenunterschreitung") gibt, bespricht er erst zum Abschluss des Kapitels das Beispiel $796453 - 584321 = 212132$ (Einheiten: Hyperpyra). Die Situation sei jetzt so, dass *immer das Obere vom Anfang bis zum Ende gleichmäßig mehr habe ... Das Kleinere sei immer ... unten gesetzt.*

Als Probe wird jetzt nur noch die Umkehraddition eingesetzt: $584321 + 212132 = 796453$

Am oberen Rand von fol. 51^v hat Schreiber B einen Eintrag vorgenommen, und zwar geht es um ein Multiplikationsschema, wie es unser Autor (Schreiber A) erstmals in Kap. 78 verwendet hat, hier zu $15 \cdot 16 = 240$. Charakteristisch ist die punktförmige Schreibweise der Null. Das Beispiel steht in keiner Beziehung zum Haupttext.

103

Über die drei, die von den 1000 Hyperpyra haben:

der eine einen dritten Teil, der andere einen vierten, der dritte einen fünften

Angenommen, drei Gesellschafter haben 1000 Hyperpyra zu teilen, und dem ersten kommt zu, von den 1000 Hyperpyra den dritten Teil von ihnen zu nehmen, dem zweiten den vierten Teil von ihnen und dem dritten den fünften Teil von ihnen. Du suchst aber zu wissen, wie viele Hyperpyra jedem von ihnen von den 1000 Hyperpyra zukommen, gemäß welchem Verhältnis wir sagten.

Hierbei ist aber etwas ausgewählt worden, was unseren Verstand wegstehlen und uns denken lassen kann, was wir sagten, es verhalte sich so, was aber keine wahre Vorstellung ist. Das aber ist, dass das $\frac{1}{3}$ der 1000 Hyperpyra 333 Hyperpyra und $\frac{1}{3}$ eines Hyperpyrons, das $\frac{1}{4}$ der 1000 Hyperpyra 250 Hyperpyra und das $\frac{1}{5}$ der 1000 Hyperpyra 200 Hyperpyra sind. Addiere dies alles, und es werden zusammen 783 Hyperpyra und $\frac{1}{3}$ eines Hyperpyrons. Und siehe da, wir haben auf diese Weise gefunden, dass sich auf sie 783 Hyperpyra und $\frac{1}{3}$ verteilen, von den 1000 Hyperpyra sind aber 216 Hyperpyra und $\frac{2}{3}$ eines Hyperpyrons übrig.

Eine solche Rede wird aber gesagt,

dass jemand, der ihnen den jeweils zukommenden Teil zuteilt, weil sie dies nicht richtig tun können, ihnen in entsprechender Weise den zukommenden Teil nicht ehrlich zu-

rückgab, sondern es schien vielmehr nur richtig geteilt und gegeben zu sein, verhielt sich aber nicht so. Er gab ihnen nämlich, wie gezeigt wurde, 783 Hy-

	Hyperpyra	333 und $\frac{1}{3}$
	Hyperpyra	250
	Hyperpyra	200
zusammen	Hyperpyra	783 und $\frac{1}{3}$

perpyra und $\frac{1}{3}$ eines Hyperpyrons, denen, die auch zufriedengestellt waren, dass jeder von ihnen den ihm zukommenden und entsprechenden Teil hat. Die übrig gebliebenen 216 Hyperpyra und $\frac{2}{3}$ eines Hyperpyrons hat derjenige, der dies verteilt hat, um des Lohnes willen heimlich (λεληθότως) an sich genommen.

Damit nicht auch wir dies erleiden, wollen wir dies mithilfe der vorliegenden Methode machen, die uns den passenden Teil eines jeden wahrheitsgemäß und leicht zeigen kann ...

Der Autor schreibt die "Anteile" der drei Gesellschafter nebeneinander: $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$. Anschließend rechnet er $3 \cdot 4 = 12$, $12 \cdot 5 = 60$ und bezeichnet 60 als gemeinsamen Nenner (ἐν σῶμα τῶν τριῶν). Es folgen die Rechnungen $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$, $\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$, $\frac{1}{5} \cdot 60 = 12$, $20 + 15 + 12 = 47$, wobei 47 nun als Teiler der 1000 Hyperpyra dient.

Danach werden – im Text unnötig ausführlich beschrieben – die 1000 Hyperpyra jeweils mit 20, 15 und 12 multipliziert und anschließend durch 47 dividiert: $(1000 \text{ Hyperpyra}) \cdot 20 = 20000 \text{ Hyperpyra}$, $(20000 \text{ Hyperpyra}) : 47 = 425 \text{ Hyperpyra}$ Rest 25, $25 \text{ Hyperpyra} = 500 \text{ Kukkia}$, $(500 \text{ Kukkia}) : 47 = 10 \text{ Kukkia}$ Rest 30, $30 \text{ Kukkia} = 120 \text{ Turnesia}$, $(120 \text{ Turnesia}) : 47 = 2 \text{ Turnesia}$ Rest 26.

Der 1. Gesellschafter erhält also 425 Hyperpyra 10 Kukkia 2 Turnesia "Rest 26". $(1000 \text{ Hyperpyra}) \cdot 15 = 15000 \text{ Hyperpyra}$, $(15000 \text{ Hyperpyra}) : 47 = 319 \text{ Hyperpyra}$ Rest 7, $7 \text{ Hyperpyra} = 140 \text{ Kukkia}$, $(140 \text{ Kukkia}) : 47 = 2 \text{ Kukkia}$ Rest 46, $46 \text{ Kukkia} = 184 \text{ Turnesia}$, $(184 \text{ Turnesia}) : 47 = 3 \text{ Turnesia}$ Rest 43.

Der 2. Gesellschafter erhält also 319 Hyperpyra 2 Kukkia 3 Turnesia "Rest 43". $(1000 \text{ Hyperpyra}) \cdot 12 = 12000 \text{ Hyperpyra}$, $(12000 \text{ Hyperpyra}) : 47 = 255 \text{ Hyperpyra}$ Rest 15, $15 \text{ Hyperpyra} = 300 \text{ Kukkia}$, $(300 \text{ Kukkia}) : 47 = 6 \text{ Kukkia}$ Rest 18, $18 \text{ Kukkia} = 72 \text{ Turnesia}$, $(72 \text{ Turnesia}) : 47 = 1 \text{ Turnesia}$ Rest 25.

Der 3. Gesellschafter erhält also 255 Hyperpyra 6 Kukkia 1 Turnesia "Rest 25".

Der Autor hat für den Rest jeweils das Wort τζάκισμα verwendet, also Zähler. Der Rest ist der Zähler des Bruchs mit dem Nenner 47, wodurch der jeweilige Bruchanteil der Turnesia bestimmt wird. (Beispielsweise entspricht 1 Turnesia "Rest 25" hier $1\frac{25}{47}$ Turnesia.) Der Autor verwendet die Bruchschreibweise aber hier nicht.

Anschließend führt er im Text eine Proberechnung vor, die auch aus seinem folgenden Diagramm zu ersehen ist:

$\frac{1}{3}$	Hyp. 4 2 5	Kukkia 1 0	Turn. 2	Zähler 2 6
$\frac{1}{4}$	Hyp. 3 1 9	Kukkia 2	Turn. 3	Zähler 4 3
$\frac{1}{5}$	Hyp. 2 5 5	Kukkia 6	Turn. 1	Zähler 2 5
	<u>1 2 1</u>	2	2	9 4
	Hyp. 1 0 0 0			zwei Teiler: Turn. 2

Die Summe der Zähler (Reste) beträgt 94, d. h. 2 Teiler (47), und liefert einen Betrag von 2 Turnesia. Der Autor notiert erstmals bei einer schriftlichen Addition auch den Übertrag. Es sind nun insgesamt 8 Turnesia, also 2 Kukkia (Übertrag), und insgesamt 20 Kukkia sind 1 Hyperpyron (Übertrag). Bei der Addition der Hyperpyra werden auch der Zehner- und der Hunderterübertrag notiert. Es ergeben sich glatt 1000 Hyperpyra, was den Autor zur Feststellung

veranlasst, dass "das Gesuchte richtig geworden" sei. Mit der Rechnung ist aber nur belegt, dass diese Summe bei der Verteilung ausgeschöpft wurde (notwendige Bedingung), nicht aber, dass die Verteilung selbst korrekt war. Einen ähnlichen logischen Fehler hatte er schon bei der Beurteilung der Siebennerprobe begangen. (Vgl. den Kommentar zu Kap. 7.)

Dies entsteht wiederum auch anders.

Es folgt nun eine lange und zudem überflüssige Passage, in der der Autor die Lösung der Aufgabe mit 20000 Kukkia anstatt mit 1000 Hyperpyra vorrechnet. Er erhält aber nur eine andere Schreibweise für die Anteile der drei Gesellschafter: Der erste empfängt 8510 Kukkia 2 Turnesia Rest 26, der zweite 6382 Kukkia 3 Turnesia Rest 43 und der dritte 5106 Kukkia 1 Turnesi Rest 25. Das nachstehende Diagramm des Autors spiegelt die ausführliche Rechnung im Text wider, mit der wieder nur die Summe, nicht die Verteilung kontrolliert wird. Die Übertragsziffern sind dabei wieder notiert.

$\frac{1}{3}$	Kukkia	8 5 1 0	Turn. 2	Zähler	2 6
$\frac{1}{4}$	Kukkia	6 3 8 2	Turn. 3	Zähler	4 3
$\frac{1}{5}$	Kukkia	5 1 0 6	Turn. 1	Zähler	2 5
		1 1 1 2	2		9 4
	Kukkia	2 0 0 0 0			zwei Teiler

Bei dieser und der ersten Methode stimmen die Zähler und die Turnesia überein, wie der Autor feststellt. Zur weiteren Kontrolle, auf die er aber hätte verzichten können, wandelt er die Kukkia wieder so weit wie möglich in Hyperpyra um. Als Ergebnis seiner Rechnung erhält er natürlich auch wieder die Hyperpyra- und Kukkia-Werte wie vorher, und er präsentiert sogar noch einmal dasselbe Diagramm. (Hier fehlen nur die Übertragsziffern bei den Hyperpyra.)

Darüber hinaus geht er auf eine dritte Möglichkeit der Berechnung ein, die allerdings nur in der Umkehrung der Reihenfolge der Rechenoperationen besteht: Die 1000 Hyperpyra werden jetzt zuerst durch 47 dividiert und dann jeweils mit 20, 15 und 12 multipliziert. Der Autor führt nur noch die Rechnung für den 1. Gesellschafter durch: $(1000 \text{ Hyperpyra}) : 47 = 21\frac{13}{47} \text{ Hyperpyra}$, $(21\frac{13}{47} \text{ Hyperpyra}) \cdot 20 = 425 \text{ Hyperpyra}$ Rest (Zähler) 25. Die Schreibweise $425\frac{25}{47} \text{ Hyperpyra}$ vermeidet er. Danach multipliziert er den Zähler mit 20 (Umwandlung in Kukkia) usw.

Abschließend erklärt er, dass mit den Kukkia leichter und besser zu rechnen sei als mit den Hyperpyra.

Am oberen Rand von fol. 52^r hat Schreiber B ein Multiplikationsschema hinterlassen, wie es unser Autor (Schreiber A) erstmals in Kap. 78 verwendet hat, hier zu $16 \cdot 7 = 112$. Das Beispiel steht in keiner Beziehung zum Haupttext.

Diese erste Aufgabe zur Gesellschafts- oder Verteilungsrechnung hat der Autor zu Beginn recht nett und humorvoll ausgeschmückt. Aber nur ein ziemlich unbedarfter Leser wird sich seinen Verstand zunächst "wegstehlen" lassen, denn man sieht doch sofort, dass die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ in der Summe weni-

ger als 1 ergeben, also nicht die tatsächlichen Anteile der drei Gesellschafter darstellen können. Einen entsprechenden Hinweis vermisst man im Text. Die weitere Rechnung des Autors zeigt, dass diese Brüche nur die Verhältnisse der tatsächlichen Anteile zueinander bestimmen, die man mit dem Hauptnenner oder dem Nennerprodukt ermitteln kann: $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{20}{60} : \frac{15}{60} : \frac{12}{60} = 20 : 15 : 12$

Dem ersten Gesellschafter stehen also 20, dem zweiten 15 und dem dritten 12 Anteile von insgesamt 47 Anteilen zu, sodass der erste $\frac{20}{47}$, der zweite $\frac{15}{47}$ und der dritte $\frac{12}{47}$ des Geldbetrages (1000 Hyperpyra) erhält.

Im Übrigen hätte man auch aus der falschen Lösung, bei der nur $783\frac{1}{3}$ Hyperpyra verteilt wurden, mit dem Korrekturfaktor $\frac{1000}{783\frac{1}{3}} = \frac{60}{47}$ die tatsächlichen Anteile der Gesellschafter ermitteln können.

Beispielsweise ergeben sich für den ersten $333\frac{1}{3} \cdot \frac{60}{47}$ Hyperpyra = $425\frac{25}{47}$ Hyperpyra, entsprechend für die anderen.

Solche Aufgaben mit "unechten Verteilungen" waren z. B. auch in den deutschsprachigen Rechenbüchern des 16. Jahrhunderts beliebt, doch als Einstiegsbeispiele in den Themenbereich Gesellschaftsrechnungen sind sie nicht geeignet. (Vgl. auch das folgende Kapitel.)

Unser "unermüdlicher" Autor stellt in diesem Kapitel noch eine zweite Aufgabe vor: *... Es sei aber nun, dass von den 1000 Hyperpyra der erste $\frac{1}{2}$, der zweite $\frac{1}{3}$, der dritte $\frac{1}{4}$, der vierte $\frac{1}{5}$ hat. Du suchst zu wissen, ein wie großer Teil jedem der vier von den 1000 Hyperpyra zukommt.*

Wenn dies aber gewöhnlich und nicht fachmännisch gesucht wird, könnte jemand sagen, dass das $\frac{1}{2}$ von den 1000 Hyperpyra 500 Hyperpyra, das $\frac{1}{3}$ aber 333 Hyperpyra und $\frac{1}{3}$, das $\frac{1}{4}$ aber 250 Hyperpyra, das $\frac{1}{5}$ aber 200 Hyperpyra sind. Addiere dies alles, und es ergeben sich zusammen 1283 Hyperpyra und $\frac{1}{3}$. Es scheint aber von dieser laienhaften Lösungsfindung her so, dass die 1000 Hyperpyra nicht ausreichend sind, jedem von ihnen den passenden Teil zurückzugeben; den 1000 Hyperpyra fehlen nämlich 283 Hyperpyra und $\frac{1}{3}$ – es hat nur den Anschein, was nicht richtig ist. Mache dies aber fachmännisch, und du wirst das Gesuchte richtig finden.

Auch hier sieht man sofort, dass die vier Brüche nicht die tatsächlichen Anteile sein können, da sie in der Summe den Wert 1 übersteigen.

Der Autor schreibt die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ nebeneinander hin, bildet das Nennerprodukt 120, wählt aber stattdessen lieber 60, ohne darauf einzugehen, dass diese Zahl der Hauptnenner ist, das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner. Er begründet die Wahl damit, dass mit einem zweizifferigen Teiler leichter zu rechnen sei als mit einem dreizifferigen. Den Teiler bestimmt er als Summe der Produkte $\frac{1}{2} \cdot 60 = 30$, $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$, $\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$ und $\frac{1}{5} \cdot 60 = 12$, er beträgt 77. Mit dem Nennerprodukt 120 hätte man den Teiler 154 erhalten, was die Ergebnisse nicht beeinflusst hätte.

Nun werden die 1000 Hyperpyra jeweils mit 30, 20, 15 und 12 multipliziert und anschließend durch 77 dividiert. Die weitläufigen Rechnungen und zahlreichen Diagramme können hier übersprungen werden. Es ergeben sich

für den ersten Gesellschafter 389 Hyperpyra 12 Kukkia 0 Turnesi Rest (Zähler) 64, für den zweiten 259 Hyperpyra 14 Kukkia 3 Turnesia Rest 17,

für den dritten 194 Hyperpyra 16 Kukkia 0 Turnesi Rest 32,
für den vierten 155 Hyperpyra 16 Kukkia 3 Turnesia Rest 41.

Danach werden wieder – im Text und im Diagramm – die 1000 Hyperpyra als Summe der errechneten Anteile verifiziert.

Wie bei der ersten Aufgabe dieses Kapitels wird auch wieder alternativ die "Kukki-Methode" durchgeführt, d. h. mit 20000 Kukkia anstatt mit 1000 Hyperpyra gerechnet. Es ergeben sich natürlich die gleichen Geldbeträge, nämlich für den ersten Gesellschafter 7792 Kukkia 0 Turnesi Rest (Zähler) 64, für den zweiten 5194 Kukkia 3 Turnesia Rest 17, für den dritten 3896 Kukkia 0 Turnesi Rest 32, für den vierten 3116 Kukkia 3 Turnesia Rest 41.

Wieder werden sowohl im Text als auch in einem Diagramm die 20000 Kukkia als Summe der errechneten Anteile verifiziert. Die anteiligen Beträge werden abschließend wieder so weit wie möglich in Hyperpyra umgewandelt, um die Übereinstimmung der Ergebnisse aufzuzeigen.

Wie bei der ersten Aufgabe hätte man auch hier aus der falschen Lösung, bei der $1283\frac{1}{3}$ Hyperpyra verteilt wurden, mit dem Korrekturfaktor $\frac{1000}{1283\frac{1}{3}} = \frac{60}{77}$ die tatsächlichen Anteile der Gesellschafter ermitteln können.

Allgemein gilt für die Verteilung eines Kapitals K auf n Gesellschafter $A_1, \dots, A_n$, denen die Brüche $\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ zugeordnet sind: A_i ($i=1, \dots, n$) erhält

$$\frac{a_i \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_{i-1} \cdot b_{i+1} \cdot \dots \cdot b_n}{a_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n + a_2 \cdot b_1 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n + a_3 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_4 \cdot \dots \cdot b_n + \dots + a_n \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_{n-1}} \cdot K.$$

In unserem letzten Beispiel sind $n=4$, $a_1=a_2=a_3=a_4=1$, $b_1=2$, $b_2=3$, $b_3=4$, $b_4=5$ und $K=1000$ Hyperpyra. Der Nenner nimmt dann den Wert 154 an, für A_1 erhält man den Zähler ($3 \cdot 4 \cdot 5 =$) 60, für A_2 den Zähler ($2 \cdot 4 \cdot 5 =$) 40, für A_3 den Zähler ($2 \cdot 3 \cdot 5 =$) 30 und für A_4 den Zähler ($2 \cdot 3 \cdot 4 =$) 24.

Über die Anleger –

**der erste 23 Hyperpyra, der zweite 35 Hyperpyra, der dritte 56 Hyperpyra –
wie kann man wissen, wie viele Hyperpyra jeder von ihnen
entsprechend aus den 1000 Hyperpyra gewinnt?**

Setze die Hyperpyra, die jeder von ihnen gab, und der erste gab 23 Hyperpyra, der zweite 35 Hyperpyra, der dritte 56 Hyperpyra. Addiere dies alles, und es werden zusammen 114 Hyperpyra. Diese 114 Hyperpyra sind nun der Teiler der 1000 Hyperpyra; durch dieselben 114 Hyperpyra nämlich werden die 1000 Hyperpyra geteilt, und man findet, wie viele Hyperpyra jeder von ihnen entsprechend aus den 1000 Hyperpyra gewinnt.

Der Autor weist darauf hin, dass man zur Vereinfachung der weiteren Rechnung 114 und 1000 durch 2 teilen soll, d. h. er kürzt $\frac{1000}{114}$ zu $\frac{500}{57}$.

Für den 1. Gesellschafter lautet nun die Rechnung:

(500 Hyperpyra) $\cdot$ 23 = 11500 Hyperpyra, (11500 Hyperpyra) : 57 = 201 Hyperpyra Rest (Zähler) 43, 43 Hyperpyra = 860 Kukkia, (860 Kukkia) : 57 = 15 Kukkia Rest 5, 5 Kukkia = 20 Turnesia; diese bleiben als Rest übrig, da sie kleiner als 47

sind, so der Autor. Im Diagramm hat er hierzu den Bruch $\frac{20}{57}$ notiert, während er sonst die Bruchschreibweise vermeidet.

Ergebnis: 201 Hyperpyra 15 Kukkia 0 Turnesi Rest 20.

2. Gesellschafter:

$(500 \text{ Hyperpyra}) \cdot 35 = 17500 \text{ Hyperpyra}$, $(17500 \text{ Hyperpyra}) : 57 = 307 \text{ Hyperpyra}$ Rest 1, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia; diese können laut Autor nicht durch 57 geteilt werden, weshalb er sie in 80 Turnesia verwandelt: $(80 \text{ Turnesia}) : 57 = 1 \text{ Turnesi}$ Rest 23. Im Diagramm hat er hierfür wieder die Bruchschreibweise $(\frac{23}{57})$ verwendet.

Ergebnis: 307 Hyperpyra 0 Kukki 1 Turnesi Rest 23

3. Gesellschafter:

$(500 \text{ Hyperpyra}) \cdot 56 = 28000 \text{ Hyperpyra}$, $(28000 \text{ Hyperpyra}) : 57 = 491 \text{ Hyperpyra}$ Rest 13, 13 Hyperpyra = 260 Kukkia, $(260 \text{ Kukkia}) : 57 = 4 \text{ Kukkia}$ Rest 32, 32 Kukkia = 128 Turnesia, $(128 \text{ Turnesia}) : 57 = 2 \text{ Turnesia}$ Rest 14 (Schreibweise $\frac{14}{57}$ im Diagramm)

Ergebnis: 491 Hyperpyra 4 Kukkia 2 Turnesia Rest 14

Es folgt wieder wie im vorigen Kapitel eine Probe durch Addition der errechneten Anteile (Summe: 1000 Hyperpyra) mit Diagramm. Darin werden Überträge nur für die Verwandlung von Turnesi-Bruchteilen in Turnesia sowie von Turnesia in Kukkia notiert. Wiederum liegt keine zuverlässige Probe für die Gewinnanteile vor.

Anschließend führt der Autor auch wieder die "Kukki-Methode" durch. Dazu berechnet er $(20000 \text{ Kukkia}) : 114 = 175 \frac{50}{114} \text{ Kukkia} = 175 \frac{25}{57} \text{ Kukkia}$, kürzt also erst nachher und nicht schon vor der Division. Im zugehörigen Diagramm, in dem eine Zahl verschrieben ist, findet sich auch das Schema der Siebenerprobe, die sich auf die äquivalente multiplikative Darstellung $200000 = 114 \cdot 175 + 50$ bezieht. Mit den Bezeichnungen aus dem Kommentar zu Kap. 22 gilt: $S(114) = 2$, $S(175) = 0$, $S(50) = 1$, $2 \cdot 0 + 1 = 1$ einerseits und $S(20000) = 1$ andererseits. Die Probe selbst wird nicht vorgerechnet, nur die Probezahlen stehen da.

Von der "Kukki-Methode" sollen im Weiteren nur die Ergebnisse vermerkt werden.

1. Gesellschafter: 4035 Kukkia 0 Turnesi Rest (Zähler) 20

2. Gesellschafter: 6140 Kukkia 1 Turnesi Rest 23

3. Gesellschafter: 9824 Kukkia 2 Turnesia Rest 14

Wieder wird – begleitet von einem Diagramm – vorgerechnet, dass die Summe dieser Anteile tatsächlich 20000 Kukkia ergibt.

Abschließend wandelt der Autor die Beträge wieder so weit wie möglich in Hyperpyra um (vgl. Kap. 103). Auf diese Weise entsteht erneut das Diagramm (fol. 54^v unten) aus seiner vorherigen Rechnung mit Hyperpyra, wobei er die Addition der einzelnen Posten unnötigerweise noch einmal erläutert.

Der Autor äußert sich nirgendwo darüber, dass die errechneten Teilbeträge von 1000 Hyperpyra als Bruttogewinne der Gesellschafter zu sehen sind. Für die Bestimmung der Nettogewinne müssen die jeweiligen Einlagen in Abzug gebracht werden.

Bei dieser Aufgabe erzielen die Gesellschafter einen Gewinn von mehr als 777 %!

Zur Einführung in die Gesellschaftsrechnung sollten aber prinzipiell solche Aufgaben wie hier gestellt werden, bei denen konkrete Einlagen der Gesellschafter gegeben sind, und nicht solche mit Anteilverhältnissen, die unser Autor bereits im Kap. 103 besprochen hatte.

Es folgt noch ein weiteres Beispiel:

Vier Gesellschafter haben eingelegt wie hier: der erste 140 Hyperpyra, der zweite 230 Hyperpyra, der dritte 320 Hyperpyra, der vierte 410 Hyperpyra. Sie haben 1000 Hyperpyra verdient ...

Es handelt sich also um ein Verlustgeschäft – es sei denn, dass es um einen zusätzlichen Verdienst gehen soll. Der Autor gibt darüber keinen Aufschluss.

Er addiert wieder die Beträge. Die Summe 1100 Hyperpyra sei der Teiler von 1000 Hyperpyra, wobei es einfacher sei, mit 11 Hyperpyra als Teiler von 10 Hyperpyra zu rechnen. Die eingelegten Geldbeträge werden demnach jeweils erst mit 10 multipliziert und dann durch 11 dividiert, wieder unter Vermeidung der Bruchschreibweise. Hier sollen nur die Ergebnisse genannt werden:

Der 1. Gesellschafter erhält 127 Hyperpyra 5 Kukkia 1 Turnesi Rest (Zähler) 9.

Der 2. Gesellschafter erhält 209 Hyperpyra 1 Kukki 3 Turnesia Rest 3.

Der 3. Gesellschafter erhält 290 Hyperpyra 18 Kukkia 0 Turnesi Rest 8.

Der 4. Gesellschafter erhält 372 Hyperpyra 14 Kukkia 2 Turnesia Rest 2.

Der Autor rechnet vor, dass diese Beträge zusammen wieder 1000 Hyperpyra ergeben, und illustriert seine Rechnung auch wieder mit einem Diagramm. Damit ist natürlich noch nicht garantiert, dass die einzelnen Beträge richtig sind.

Es folgt wieder die "Kukki-Methode": Für die 20000 Kukkia wählt er nun den ursprünglichen Teiler 1100. Bei der Division $20000 : 1100 = 18 \frac{200}{1100} = 18 \frac{2}{11}$ wird wieder die Siebenerprobe (bezogen auf die äquivalente Gleichung $20000 = 18 \cdot 1100 + 200$) herangezogen, wobei nur die Reste notiert sind: $S(1100) = 1$, $S(18) = 4$, $S(200) = 4$, $1 \cdot 4 + 4 = 8$, $S(8) = 1$ einerseits und $S(20000) = 1$ andererseits.

Die weitere Rechnung kann übersprungen werden.

Der 1. Gesellschafter erhält 2545 Kukkia 1 Turnesi Rest (Zähler) 9.

Der 2. Gesellschafter erhält 4181 Kukkia 3 Turnesia Rest 3.

Der 3. Gesellschafter erhält 5818 Kukkia 0 Turnesi Rest 8.

Der 4. Gesellschafter erhält 7454 Kukkia 2 Turnesia Rest 2.

Die anschließende Addition der vier Beträge wird wieder in einem Diagramm dargestellt und im Text nicht mehr ganz so ausführlich erläutert. Es kommen wieder 20000 Kukkia heraus, womit aber wieder nur eine notwendige Bedingung für die korrekte Verteilung der Geldwerte auf die Gesellschafter erfüllt ist.

Danach wandelt der Autor die vier Beträge wieder so weit wie möglich in Hyperpyra um. Dadurch erhält er wieder das Diagramm zu seiner vorherigen Berechnung der Anteile mit Hyperpyra.

Abschließend wiederholt er seine Einschätzung, dass die "Kukki-Methode" leichter sei als die Rechnung mit Hyperpyra (vgl. Kap. 103). Tatsächlich gibt es aber keinen Unterschied in der "Schwierigkeit".

**Über die sechs Gesellschafter, die an den 24 Kukkia
der gesamten Schiffsladung einen Anteil haben –
der eine mehr Kukkia, der andere weniger –
zusammen aber haben die sechs 24 Kukkia.**

**Wie kann man wissen, wie viele Hyperpyra jedem von ihnen
von den 17125 Hyperpyra zukommen, die sie gewonnen haben?**

Angenommen, sechs Gesellschafter haben einen Schiffshandel, und der erste hat einen Anteil von 7 Kukkia, der zweite einen von 6 Kukkia, der dritte einen von 5 Kukkia, der vierte einen von 3 Kukkia, der fünfte einen von 2 Kukkia und der sechste einen von 1 Kukki. Addiere dies alles, und es ergeben sich insgesamt 24 Kukkia. Es ist aber die gesamte Ladung des Schiffs 24 Kukkia, und jeder von den sechs Handelsgenossen hat einen Anteil an der Ladung der 24 Kukkia, was wir im Einzelnen sagten. Denn so geschieht es natürlicherweise, wenn viele verschiedene Kaufleute gemeinsam einen Schiffshandel zu betreiben haben. Nachdem dies geschah, werde angenommen, dass sie 17125 Hyperpyra gewonnen haben. Du suchst aber, wie man wissen kann, wie viele Hyperpyra jedem von ihnen entsprechend aus den 17125 Hyperpyra zukommen, die die sechs Gesellschafter gemeinsam gewonnen haben.

Diese Aufgabe ist in zweierlei Hinsicht völlig unrealistisch: Einerseits gibt es keine Schiffsladung von derart geringfügigem Wert, andererseits ergibt sich hier mit der Parität 1 Hyperpyron = 20 Kukkia ein exorbitanter Gewinn von $1426983\frac{1}{3}\%$!

Methodisch bietet die Aufgabe auch nichts Neues gegenüber Kapitel 104, aber der Autor hat ihr wohl deshalb ein eigenes Kapitel gewidmet, weil die Gesellschaftsrechnung beim anteiligen Handel mit einer Schiffsladung eine wichtige Anwendung in der Praxis findet. Die Bedeutung des Schiffshandels wird auch schon in der Aufgabenformulierung herausgestellt.

Aufgaben dieses Typs waren unter anderem auch in den Rechenbüchern der deutschsprachigen Küstenregionen unter der Bezeichnung "Schiffspartenrechnung" (von lat. *pars*) verbreitet.

Zur Rechnung des Autors, der wieder die Bruchschreibweise vermeidet:

1. Gesellschafter: $(17125 \text{ Hyperpyra}) \cdot 7 = 119875 \text{ Hyperpyra}$, $(119875 \text{ Hyperpyra}) : 24 = 4994 \text{ Hyperpyra}$ Rest (Zähler) 19, $19 \text{ Hyperpyra} = 380 \text{ Kukkia}$, $(380 \text{ Kukkia}) : 24 = 15 \text{ Kukkia}$ Rest 20, $20 \text{ Kukkia} = 80 \text{ Turnesia}$, $(80 \text{ Turnesia}) : 24 = 3 \text{ Turnesia}$ Rest 8. *Dies kommt dem zu, der die 7 Kukkia hat.* Der Autor schreibt das Ergebnis nicht mehr hin: 4994 Hyperpyra 15 Kukkia 3 Turnesia Rest 8

Die weiteren Rechnungen können übersprungen werden. Die Ergebnisse sind

- für den 2. Gesellschafter: 4281 Hyperpyra 5 Kukkia 0 Turnesi
- für den 3. Gesellschafter: 3567 Hyperpyra 14 Kukkia 0 Turnesi Rest 16
- für den 4. Gesellschafter: 2140 Hyperpyra 12 Kukkia 2 Turnesia
- für den 5. Gesellschafter: 1427 Hyperpyra 1 Kukki 2 Turnesia Rest 16
- für den 6. Gesellschafter: 713 Hyperpyra 10 Kukkia 3 Turnesia Rest 8.

Anschließend werden die sechs Posten wieder auf ihre Summe (17125 Hyperpyra) überprüft, wobei das obligatorische Diagramm (mit Übertragsnotationen) nur

von einer kurzen Beschreibung der einzelnen Additionsschritte im Text begleitet wird.

Und anders.

Jetzt wird die Reihenfolge der Rechenoperationen umgekehrt, d. h. der Gewinn (17125 Hyperpyra) soll erst durch 24 dividiert und dann mit den jeweiligen Zahlen der Anteile multipliziert werden. Der Autor berechnet den Multiplikator ($713\frac{13}{24}$ Hyperpyra) und bezieht ihn auf den Anteil (7) des ersten Gesellschafters. Die Rechnung wird hier noch vollständig durchgeführt und das Ergebnis von oben noch einmal genannt (allerdings wieder in der Schreibweise mit Rest), während bei den weiteren Gesellschaftern der Rechenweg nur angedeutet und auf die obigen Ergebnisse verwiesen wird.

Der Autor nimmt nun eine Methodenbewertung vor:

Wenn ihr Gewinn ganze Hyperpyra ohne Kukkia sind, wird das Gesuchte sowohl mit der ersten als auch mit der zweiten Methode gut gefunden. Immer wenn aber der Gewinn auch gewisse Kukkia hat – es sei ihr Gewinn 17125 Hyperpyra 17 Kukkia – wird das Gesuchte gut mit der zweiten Methode gefunden.

Das genannte Beispiel führt er nur noch ansatzweise aus: 17125 Hyperpyra 17 Kukkia = 342517 Kukkia, $(342517 \text{ Kukkia}) : 24 = 14271\frac{13}{24}$ Kukkia. Um den Gewinn des ersten Gesellschafters zu bestimmen, müsse man nun mit 7 multiplizieren, entsprechend sei beim zweiten bis zum sechsten zu verfahren. Die Ergebnisse (in Kukkia/Turnesia/Rest) könnten leicht (so weit wie möglich) in Hyperpyra verwandelt werden.

Dem Autor ist hier beizupflichten. Zur Vermeidung großer Zahlen sollte eine gemischte Größe nach Umwandlung in die kleinste Einheit zunächst dividiert und erst dann multipliziert werden, wenn diese beiden Operationen erforderlich sind.

Zum Abschluss verweist unser Autor noch auf Möglichkeiten einer geringfügigen Aufgabenvariation: Z. B. kann der Gewinn ein gemischter Geldwert (Hyperpyra/Kukkia) sein, es kann sich um mehr als 6 Gesellschafter handeln, und der Wert der Schiffsladung kann auch 30 oder 15 Kukkia betragen.

Allgemein gilt:

Sind $K_1, \dots, K_n$ die Kapitaleinlagen von n Gesellschaftern $A_1, \dots, A_n$ und G der Gewinn, so gilt für den Gewinnanteil G_i des Gesellschafters A_i ($i = 1, \dots, n$):

$$G_i = G \cdot \frac{K_i}{K_1 + \dots + K_n}$$

**Über die drei,
von denen der eine 50 Hyperpyra, der andere 80 Hyperpyra
und der dritte 100 Hyperpyra gegeben hat –
gemäß verschiedenen Monaten und Tagen und nicht wie bisher
Wie kann man wissen, wie viele Hyperpyra jedem von ihnen entsprechend
von den 1000 Hyperpyra zukommen, die sie verdient haben?**

Angenommen, drei wurden Gesellschafter, nicht wie bisher an ein und demselben Tag, sondern der erste handelte mit 50 Hyperpyra, nach einigen Tagen kam der zweite und gab 80 Hyperpyra, es kam auch der dritte, einige Tage später als die beiden vorherigen, und gab 100 Hyperpyra. Du suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra jedem von ihnen entsprechend von den 1000 Hyperpyra zukommen, die sie verdient haben, wie in Bezug auf die Hyperpyra, die er gab, und wie in Bezug auf die Monate und die Tage, die vergingen, nach denen jeder seine Hyperpyra gab.

Hyperpyra	5 0	Monate	5	Tage	2 0	Tage	1 7 0	2 2 0
Hyperpyra	8 0	Monate	4	Tage	1 5	Tage	1 3 5	2 1 5
Hyperpyra	1 0 0	Monate	3	Tage	1 0		1 0 0	2 0 0
								6 3 5
								1 2 7

Teiler

Setze nun der Reihe nach die Hyperpyra, die jeder gab, in eine Ordnung, und die Monate und die Tage, die die Hyperpyra eines jeden hatten. Und der erste, der die 50 Hyperpyra hat, handelte mit seinen Hyperpyra 5 Monate und 20 Tage, das sind 170 Tage. Addiere die 170 Tage mit den 50 Hyperpyra, und die Hyperpyra und die Tage des ersten werden zusammen 220. Der zweite aber, der nach einigen Tagen 80 Hyperpyra einlegte, handelte mit seinen Hyperpyra 4 Monate und 15 Tage, das sind 135 Tage. Addiere die 135 Tage mit den 80 Hyperpyra, und die Hyperpyra und die Tage des zweiten werden zusammen 215. Der dritte aber, der nach einigen Tagen 100 Hyperpyra einlegte, handelte mit seinen Hyperpyra 3 Monate und 10 Tage, das sind 100 Tage. Addiere die 100 Tage mit den 100 Hyperpyra, und die Hyperpyra und die Tage des dritten werden zusammen 200.

Aufgrund des Diagramms ist klar, wie nach Meinung des Autors im Wesentlichen weiterzurechnen ist. 635 ist Teiler von 1000 Hyperpyra bzw. 127 ist Teiler von 200 Hyperpyra. Der Anteil des ersten Gesellschafters wäre demnach $(200 \text{ Hyperpyra}) \cdot \frac{220}{127} = 346 \text{ Hyperpyra } 9 \text{ Kukkia } \frac{68}{127} \text{ Turnesia}$, der Anteil des zweiten $(200 \text{ Hyperpyra}) \cdot \frac{215}{127} = 338 \text{ Hyperpyra } 11 \text{ Kukkia } 2\frac{78}{127} \text{ Turnesia}$ und der Anteil des dritten $(200 \text{ Hyperpyra}) \cdot \frac{200}{127} = 314 \text{ Hyperpyra } 19 \text{ Kukkia } \frac{108}{127} \text{ Turnesia}$.

Hier ist unserem Autor aber ein eklatanter Fehler unterlaufen: Gewinne sind proportional nicht nur zur Höhe der Einlagen, sondern auch zu deren Laufzeiten (vom Zinseszins einmal abgesehen). Anstatt zu addieren, hätte er die Anzahl der Tage mit der Anzahl der Hyperpyra multiplizieren müssen.

Demgemäß müssen in der rechten Spalte des obigen Diagramms von oben nach

unten die Zahlen 8500, 10800, 10000, 29300 (Summe und Teiler von 1000 Hyperpyra) und 293 (Teiler von 10 Hyperpyra) stehen.

Nun gilt $8500 \cdot \frac{10}{293}$ Hyperpyra = $290 \frac{30}{293}$ Hyperpyra = 290 Hyperpyra 2 Kukkia $\frac{56}{293}$ Turnesia (Anteil des 1. Gesellschafters). Mit den Faktoren 10800 und 10000 erhält man 368 Hyperpyra 12 Kukkia $\frac{16}{293}$ Turnesia für den zweiten Gesellschafter bzw. 341 Hyperpyra 5 Kukkia $3 \frac{221}{293}$ Turnesia für den dritten.

Der Autor zeigt im Text und wieder in einem Diagramm auf, dass auch seine falsch berechneten Gewinnanteile zusammen wieder 1000 Hyperpyra ergeben.

Es folgt noch die aus den beiden letzten Kapiteln bekannte "Kukki-Methode" mit der Summenprobe und der anschließenden Umrechnung in Hyperpyra, womit er seine falschen Ergebnisse zu bestätigen glaubt.

Ein weiteres Beispiel wird ebenso fehlerhaft vorgerechnet:

4 Gesellschafter verdienen zusammen 2000 Hyperpyra. Der erste legt 103 Hyperpyra für 6 Monate 9 Tage ein, der zweite 150 Hyperpyra für 5 Monate 7 Tage, der dritte 208 Hyperpyra für 4 Monate 6 Tage, der vierte 315 Hyperpyra für 3 Monate 8 Tage.

Wieder addiert der Autor die Anzahlen der Hyperpyra und der Tage, anstatt sie zu multiplizieren. Es lohnt sich nicht, seine Rechnung weiter nachzuvollziehen, nur die falschen Ergebnisse seien hier noch angeführt.

1. Gesellschafter: 433 Hyperpyra 17 Kukkia 2 Turnesia Rest (Zähler) 170
2. Gesellschafter: 456 Hyperpyra 3 Kukkia 1 Turnesi Rest 211
3. Gesellschafter: 496 Hyperpyra 5 Kukkia 2 Turnesia Rest 554
4. Gesellschafter: 613 Hyperpyra 3 Kukkia 1 Turnesi Rest 411.

Multipliziert man die Anzahl der Hyperpyra mit der Anzahl der Tage, so ist 100095 (= $103 \cdot 189 + 150 \cdot 157 + 208 \cdot 126 + 315 \cdot 98$) der Teiler von 2000 Hyperpyra bzw. 20019 der Teiler von 400. Das jeweilige Produkt aus der Zahl der Hyperpyra und der Tageszahl wird jetzt mit $\frac{400}{20019}$ multipliziert. Die Gewinne teilen sich tatsächlich wie folgt auf.

1. Gesellschafter: 388 Hyperpyra 19 Kukkia $1 \frac{12777}{20019}$ Turnesia
2. Gesellschafter: 470 Hyperpyra 11 Kukkia $\frac{4764}{20019}$ Turnesia
3. Gesellschafter: 523 Hyperpyra 13 Kukkia $1 \frac{33}{20019}$ Turnesia
4. Gesellschafter: 616 Hyperpyra 16 Kukkia $1 \frac{2445}{20019}$ Turnesia

Allgemein lässt sich (im Fall der einfachen Verzinsung) folgende Formel aufstellen:

Sind $K_1, \dots, K_n$ die Kapitaleinlagen von n Gesellschaftern $A_1, \dots, A_n$, $t_1, \dots, t_n$ die jeweiligen Anlagezeiten und G der Gewinn, so gilt für den Gewinnanteil G_i des Gesellschafters A_i ($i = 1, \dots, n$):

$$G_i = G \cdot \frac{K_i \cdot t_i}{K_1 t_1 + \dots + K_n t_n}$$

Aufgaben dieser Art werden sonst auch im byzantinischen Bereich richtig gelöst, z. B. vom Schreiber B (vgl. HUNGER/VOGEL [1963, Nr. 9 f., S. 21; Nr. 40, S. 37]).

Die vier Kapitel 103 bis 106 zur Gesellschaftsrechnung stellen sicher keine Glanzleistung unseres Autors dar. Erinnerung sei auch noch einmal an den für ein Einführungskapitel unpassenden Inhalt bzw. – anders ausgedrückt – an die falsche Reihenfolge der Kap. 103 und 104. Auch die Aufgaben selbst sind wenig abwechslungsreich – vgl. Kap. 104 und 105. Insbesondere fehlen die Umkehraufgaben, bei denen aufgrund anderer entsprechend gegebener Stücke zum Beispiel nach der Einlage eines einzelnen Gesellschafters oder nach seiner Anlagezeit oder auch nach der Anzahl der Gesellschafter gefragt wird. Auch fehlen Aufgaben, bei denen Waren in die Gesellschaft eingeschossen werden. Die deutschsprachige Rechenbuchliteratur des 16. Jahrhunderts zeigt hier eine Vielfalt von Möglichkeiten auf.

107

Wenn 1 Exagion Perlen 7 Hyperpyra kostet,

2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia – wie viele Hyperpyra sie entsprechend kosten

Angenommen, jemand verkauft Perlen, jedes Exagion für 7 Hyperpyra. Du aber willst 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia kaufen. Du suchst aber zu wissen, wie viele Hyperpyra die 2 Pfund und 4 Unzen und 5 Exagia entsprechend kosten.

Du kannst dies so wissen. Die 2 Pfund sind 24 Unzen. Addiere auch die 4 Unzen, und es werden 28 Unzen. Da jede Unze 6 Exagia ist, werden 6 mal 28 168 Exagia. Addiere auch die 5 Exagia, und die 2 Pfund und 4 Unzen und 5 Exagia werden zusammen 173 Exagia. Multipliziere die 173 Exagia mit den 7 Hyperpyra, von denen wir sagten, dass sie den Wert von 1 Exagion haben: 7 mal 173 ergeben 1211. Und siehe, die 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia kosten 1211 Hyperpyra.

In diesem sehr kurzen Kapitel werden die Untereinheiten des Pfunds eingeführt. Es gelten die Relationen 1 Pfund = 12 Unzen, 1 Unze = 6 Exagia, wie sie auch in einem byzantinischen Rechenbuch des 14. Jahrhunderts (VOGEL [1968, S. 161]) und bei Rhabdas (TANNERY [1886]), ebenfalls im 14. Jahrhundert, belegt sind.

108

Wenn 1 Pfund Perlen 100 Florin kostet,

4 Unzen 3 Exagia – wie viel sie entsprechend kosten

Angenommen, du hast 1 Pfund Perlen, welches 100 Florin kostet, jeder Florin für 7 Hyperpyra, d. h. die 100 Florin für 700 Hyperpyra. Es will aber jemand von eben diesem einen Pfund 4 Unzen und 3 Exagia kaufen. Du aber suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra die 4 Unzen und 3 Exagia entsprechend kosten.

Der Autor rechnet folgendermaßen.

1 Pfund = 12 Unzen = 72 Exagia, 4 Unzen = 24 Exagia, 4 Unzen 3 Exagia = 27 Exagia; Dreisatz: 72 Exagia kosten 100 Florin – wie viel Florin kosten 27 Exagia?

$100 \cdot 27 = 2700$, $2700 : 72 = 37\frac{1}{2}$; Ergebnis: $37\frac{1}{2}$ Florin bzw. 37 Florin 3 Hyperpyra 10 Kukkia (1 Florin = 7 Hyperpyra, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia)

Angenommen, du suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra jedes Exagion von den

27 kostet, von denen du gefunden hast, dass sie $37\frac{1}{2}$ Florin kosten.

Rechnung: $(37\frac{1}{2} \text{ Florin}) : 27 = 1 \text{ Florin Rest (Zähler) } 10\frac{1}{2}, 10\frac{1}{2} \text{ Florin} = 73\frac{1}{2} \text{ Hyperpyra}, (73\frac{1}{2} \text{ Hyperpyra}) : 27 = 2 \text{ Hyperpyra Rest } 19\frac{1}{2}, 19\frac{1}{2} \text{ Hyperpyra} = 390 \text{ Kukkia}, (390 \text{ Kukkia}) : 27 = 14 \text{ Kukkia Rest } 12, 12 \text{ Kukkia} = 48 \text{ Turnesia (also: 1 Kukki} = 4 \text{ Turnesia)}, (48 \text{ Turnesia}) : 27 = 1\frac{21}{27} \text{ Turnesia}$

Ergebnis: 1 Florin 2 Hyperpyra 14 Kukkia $1\frac{21}{27}$ Turnesia (bleibt ungekürzt)

Eine andere Möglichkeit wäre gewesen, davon auszugehen, dass 72 Exagia Perlen 100 Florin kosten, und daraus den Preis für 1 Exagion zu bestimmen.

109

Wenn 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia 15 Kukkia Perlen

150 Florin 5 Hyperpyra 4 Kukkia 3 Turnesia kosten,

wie man wissen kann, wie viel 1 Pfund, 1 Unze, 1 Exagion, 1 Kukki kosten

Angenommen, du hast an Perlen 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia 15 Kukkia, die auch Karate genannt werden. Du hast diese, was wir sagten, für 150 Florin 5 Hyperpyra 4 Kukkia 3 Turnesia gekauft. Du suchst aber, wie man wissen kann, wie viel 1 Pfund und wie viel 1 Unze und wie viel 1 Exagion und wie viel 1 Karat entsprechend kosten. Jeder Florin hat den Wert von 7 Hyperpyra.

Der Autor stellt zunächst eine Tabelle auf: In der oberen Zeile steht das Perlengewicht, für das der Preis gegeben ist. In der unteren Zeile stehen – nach den obigen Gewichtseinheiten geordnet – 1 Pfund, 1 Unze und 1 Exagion, aber jeweils in die nächstkleinere Einheit umgewandelt.

Pfunde 2	Unzen 4	Exagia 5	Karate 15
Unzen 12	Exagia 6	Karate 24	

Dabei zeigt sich, dass 1 Exagion hier 24 Karat entspricht.

Jetzt werden 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia 15 Karat schrittweise in Karate umgewandelt, wobei die Tabelle als Hilfe geeignet ist: 2 Pfund 4 Unzen = $(2 \cdot 12 + 4)$ Unzen = 28 Unzen = 168 Exagia, 168 Exagia + 5 Exagia = 173 Exagia = 4152 Karat, 4152 Karat + 15 Karat = 4167 Karat. Diesen Wert soll man sich merken – so der Autor.

Anschließend stellt er eine analoge Tabelle für den gegebenen Preis der Perlen auf, die die anschließende Rechnung erleichtern soll:

Florin 150	Hyperpyra 5	Kukkia 4	Turnesia 3
Hyperpyra 7	Kukkia 20	Turnesia 4	

Jetzt werden 150 Florin 5 Hyperpyra 4 Kukkia 3 Turnesia schrittweise in Turnesia umgewandelt: 150 Florin 5 Hyperpyra = $(7 \cdot 150 + 5)$ Hyperpyra = 1055 Hyperpyra = 21100 Kukkia, 21100 Kukkia + 4 Kukkia = 21104 Kukkia = 84416 Turnesia, 84416 Turnesia + 3 Turnesia = 84419 Turnesia.

Es folgt die Division $(84419 \text{ Turnesia}) : 4167 = 20\frac{1079}{4167} \text{ Turnesia} = 5 \text{ Kukkia } \frac{1079}{4167} \text{ Turnesia}$, womit der Preis für 1 Karat Perlen bestimmt ist.

Danach soll der Preis für 1 Exagion, d. h. für 24 Karat, bestimmt werden.

Der Autor wählt den Dreisatz: 4167 Karat kosten 84419 Turnesia. Wie viel kosten 24 Karat?

$(84419 \text{ Turnesia}) \cdot 24 = 2026056 \text{ Turnesia}$, $2026056 \text{ Turnesia} : 4167 = 486 \frac{894}{4167} \text{ Turnesia} = 6 \text{ Hyperpyra } 1 \text{ Kukki } 2 \frac{894}{4167} \text{ Turnesia}$. Der Bruch hätte noch zu $\frac{298}{1389}$ gekürzt werden können. Geschickter wäre es gewesen, die Rechnung auf den Preis von 1 Karat zu beziehen, da man dann mit wesentlich kleineren Zahlen operieren kann.

Auch für Berechnung der Preise für 1 Unze und 1 Pfund verwendet der Autor die Dreisatzmethode, ohne aber den Ansatz neu zu formulieren. (4167 Karat kosten 84419 Turnesia. Wie viel kosten 144 Karat bzw. 1728 Karat?) Vielmehr gibt er im Text nur die Rechenschritte und die Ergebnisse an. Die Rechnungen selbst führt er nur in Diagrammen durch, die deshalb so überdimensional sind, weil er mit unnötig großen Zahlen operiert, die er wieder hätte vermeiden können, wenn er sich jeweils auf den Preis des gerade berechneten (nächstkleineren) Einheitsgewichts bezogen hätte. In den Diagrammen sind ihm, was nicht verwundern kann, etliche Zahlenschreibfehler unterlaufen, die aber keine schädlichen Auswirkungen haben.

Als Ergebnisse sind zu nennen:

1 Unze kostet 36 Hyperpyra 9 Kukkia $1 \frac{1197}{4167} \text{ Turnesia}$, 1 Pfund kostet 437 Hyperpyra 11 Kukkia $3 \frac{1863}{4167} \text{ Turnesia}$. Die Brüche hätten zu $\frac{133}{463}$ bzw. $\frac{207}{463}$ gekürzt werden können. Wie schon gelegentlich früher fällt auf, dass der Autor die Hyperpyra nicht (so weit wie möglich) in Florine verwandelt (36 Hyperpyra = 5 Florin 1 Hyperpyron, 437 Hyperpyra = 62 Florin 3 Hyperpyra).

Er weist außerdem noch darauf hin, dass man auch zuerst den Preis von 1 Pfund bestimmen und dann der Reihe nach *auf die gleiche Weise*, d. h. mit dem Dreisatz, die Preise von 1 Unze, 1 Exagion und 1 Karat berechnen kann.

Zusätzlich stellt er noch die Frage, wie viele Hyperpyra 1 Karat, 1 Exagion, 1 Unze und 1 Pfund zusammen kosten.

Dazu legt er eine Preistabelle an, wobei hierzu auf die Edition (fol 59^v) verwiesen werden kann, und addiert die einzelnen Posten, beginnend mit den Turnesia-Bruchteilen:

$1079 + 894 + 1197 + 1863 = 5033$, $5033 : 4167 = 1 \frac{866}{4167} \text{ (Turnesia)}$. Diesen Quotienten rundet er auf $1 \frac{1}{5} \text{ (Turnesia)}$. Zusammen mit den Turnesia-Anteilen 0, 2, 1, 3 der vier Einheitsgewichte erhält er (rund) $7 \frac{1}{5} \text{ Turnesia}$ bzw. 1 Kukki $3 \frac{1}{5} \text{ Turnesia}$. Die Kukkia-Anteile 5, 1, 9, 11 der Einheitsgewichte erhöhen sich daher auf 27 Kukkia bzw. 1 Hyperpyron 7 Kukkia. Die Hyperpyra-Anteile (0,) 6, 36, 437 ergeben mit dem Übertrag zusammen 480 Hyperpyra.

Der Gesamtpreis beträgt also ungefähr 480 Hyperpyra 7 Kukkia $3 \frac{1}{5} \text{ Turnesia}$, doch der Autor hat sich etwas verrechnet – er schreibt, auch im Diagramm, 6 Kukkia statt 7 Kukkia.

Wenn du aber zu wissen suchst, wie viel Hyperpyra für sich genommen die 2 Pfund und wie viel die 4 Unzen und wie viel die 5 Exagia und wie viel die 15 Karat kosten, kannst du dies mit der Dreisatzmethode erfahren, so wie du auch das 1 Pfund und 1 Unze und 1 Exagion gefunden hast.

Du kannst dies aber auch sehr leicht durch die Toleta erfahren.

Der Autor präsentiert eine Tabelle, in deren linken Teil die Preise von 1 Pfund, 1 Unze, 1 Exagion und 1 Karat von oben nach unten aufgelistet sind. Parallel dazu stehen im rechten Tabellenteil die Preise von 2 Pfund, 4 Unzen, 5 Exagia und 15 Karat, zu denen im Text eine ausführliche Rechnung durchgeführt wird. Der rechte Teil der Tabelle hat folgende Gestalt:

Pfunde	2	Hyp.	8 7 4	Kukkia	2 2	Turn.	6	Zähler	3 7 2 6
Unzen	4	Hyp.	1 4 4	Kukkia	3 6	Turn.	4	Zähler	4 7 8 8
Exagia	5	Hyp.	3 0	Kukkia	5	Turn.	1 0	Zähler	4 4 7 0
Karate	1 5			Kukkia	7 5	Turn.	0	Zähler	1 6 1 8 5
		Hyp.	7	Kukkia	6		7		2 9 1 6 9
		Hyp.	1 0 5 5	Kukkia	4	Turn.	3		~~1 4 4~~
		Florin 150	Hyp. 5	Kukkia	4	Turn.	3		~~2 9 1 6 9~~
									4167
								Turnesia	7

Die Preise für die Gewichte werden einfach durch entsprechende Vervielfachung der Maßzahlen der Geldwerte, bezogen auf die Preise der Einheitsgewichte, dargestellt. Die natürliche Fortsetzung der Rechnung, das Höherbündeln, fehlt auch im Text. Dem Autor geht es offenbar weniger um die Preisberechnung der einzelnen Posten als um die Berechnung des Preises für alle Posten zusammen, wie man auch im unteren Teil der Tabelle sieht. Die Erläuterungen dazu sind recht kurz gehalten. (Rechts unten dividiert er die Zählersumme 29169 durch den Nenner 4167, für die Turnesia ergibt sich 7 als Übertrag, für die Kukkia und für die Hyperpyra erhält man die Überträge 6 bzw. 7. Das Gesamtergebnis wird zweimal notiert – beim ersten Mal noch ohne Florin-Anteil.)

Das Ergebnis kommentiert der Autor wie folgt:

Und siehe, wie wir sagten, dass die 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia 15 Karat 150 Florin 5 Hyperpyra 4 Kukkia 3 Turnesia kosten, so hast du nun auch durch die Toleta gefunden, wie viele Hyperpyra jede Sorte von ihnen für sich kostet und wie viele zusammen. Denn nachdem du die Hyperpyra von ihnen allen und die Kukkia und die Turnesia und die Zähler addiert hast, ergaben sich wieder 150 Florin 5 Hyperpyra 4 Kukkia 3 Turnesia.

Und dies ist der Beweis, dass das Gesuchte richtig geworden ist.

Der Autor hat damit eine Umkehrfrage zur Aufgabe in der Kapitelüberschrift behandelt.

Abschließend diskutiert er an einigen hier vorgerechneten Beispielen, wie der Dreisatz und die Tolletrechnung als Lösungsmethoden eingesetzt werden können. Dabei räumt er keiner der beiden Methoden eine Präferenz ein.

Der Preis für 1 Pfund Perlen ist in Kap. 108 deutlich höher als in den Kapiteln 107 und 109 (vgl. den metrologischen Teil).

- 110 **Wie man wissen kann, wie viele Pfund Kupfer man den 30 Pfund Feinsilber zusetzen muss, damit jedes Pfund 9 Unzen hat, welches 12 Unzen hat.**

Das reinste Silber, das bei den Italienern "fein" genannt wird – es könnte auch jemand "vollkommen" sagen, denn dies bezeichnet "fein", – hat 12 Unzen, wie das feine und vollkommene Gold 24 Karat hat

Also angenommen, du hast 30 Pfund Feinsilber, jedes Pfund von 12 Unzen. Du willst das vollkommen reinste Pfund mit den 12 Unzen zu einem mit 9 Unzen machen. Du suchst zu wissen, wie viele Pfund Kupfer du zuzusetzen hast, was in der Goldschmiedekunst "Legierung" genannt wird, damit aus den 30 Pfund – das feinste Silber, das du hast – wird, dass jedes Pfund jeweils 9 Unzen hat, welches, wie wir sagten, 12 Unzen hat, und wenn der Zusatz des Kupfers noch hinzugefügt worden ist, wie viele Pfund die 30 Pfund reinsten und vollkommenen Silbers, das du hast, mehr werden.

Diese erste, sehr einfache Aufgabe zur Mischungsrechnung löst der Autor wie folgt:

30 Pfund = 360 Unzen, $360 \text{ Unzen} : 9 \text{ Unzen} = 40$, d. h. es entstehen 40 Pfund Silber, jedes Pfund mit dem Feingehalt 9 Unzen.

Der Kupferzusatz beträgt 10 Pfund.

Er führt noch eine Probe an, die auf der Identität $9 \cdot 40 = 12 \cdot 30 (= 360)$ beruht.

In einer zweiten Aufgabe sollen 30 Pfund Silber mit dem Feingehalt 11 Unzen durch Kupferzusatz zu Silber mit dem Feingehalt 9 Unzen legiert werden.

Zur Rechnung des Autors:

$(11 \text{ Unzen}) \cdot 30 = 330 \text{ Unzen Feinsilber}$, $330 \text{ Unzen} : 9 \text{ Unzen} = 36\frac{2}{3}$, d. h. es entstehen $36\frac{2}{3}$ Pfund bzw. 36 Pfund 8 Unzen mit dem Feingehalt 9 Unzen.

Der Kupferzusatz beträgt 6 Pfund 8 Unzen.

Probe: $(36 \text{ Pfund } 8 \text{ Unzen}) \cdot 9 = (30 \text{ Pfund}) \cdot 11$

3. Aufgabe:

Jetzt sollen 40 Pfund und 6 Unzen Silber ($40\frac{1}{2}$ Pfund Silber) mit dem Feingehalt 10 Unzen durch Kupferzusatz zu Silber mit dem Feingehalt $7\frac{1}{2}$ Unzen legiert werden.

Zur Rechnung:

40 Pfund haben hier 400 Unzen Feinsilber, 6 Unzen haben 5 Unzen Feinsilber, insgesamt sind es 405 Unzen Feinsilber; $405 : 7\frac{1}{2} = \frac{810}{2} : \frac{15}{2} = 810 : 15 = 54$, d. h. es entstehen 54 Pfund mit dem Feingehalt $7\frac{1}{2}$ Unzen.

Der Kupferzusatz beträgt $13\frac{1}{2}$ Pfund.

Probe: $54 \cdot 7\frac{1}{2} \text{ Unzen} = 40\frac{1}{2} \cdot 10 \text{ Unzen} (= 405 \text{ Unzen})$

Und umgekehrt. Angenommen, du willst die 54 Pfund, die jeweils $7\frac{1}{2}$ Unzen haben, diese als reine, was man in der Goldschmiedekunst "läutern" nennt, um fein zu werden, d. h. vollkommen, jedes Pfund zu je 12 Unzen, welches nun jeweils $7\frac{1}{2}$ Unzen hat.

Zur Rechnung:

54 Pfund haben 405 Unzen Feinsilber; statt $405 : 12$ rechnet nun der Autor im Haupttext $810 \text{ Halbe} : 24 \text{ Halbe}$ bzw. (unnötig erweitert) $810 : 24$, was ihm eine

Notiz am linken Rand von fol. 60^v wert ist, wo er auf die Vereinfachung $405:12$ hinweist. Ergebnis: $33\frac{3}{4}$, d. h. 54 Pfund mit $7\frac{1}{2}$ Unzen Feingehalt enthalten $33\frac{3}{4}$ Pfund (bzw. 33 Pfund 9 Unzen) Feinsilber; $54 \text{ Pfund} - 33 \text{ Pfund } 9 \text{ Unzen} = 20 \text{ Pfund } 3 \text{ Unzen}$.

Es schwanden im Schmelzofen 20 Pfund und 3 Unzen Kupfer.

Probe: $12 \cdot 33 + 9 = 54 \cdot 7\frac{1}{2} = 405$

Die Lösung dieser Aufgaben beruht letztlich darauf, dass bei konstantem Feinsilbergewicht die Zuordnung Metallgewicht $\rightarrow$ Feingehalt indirekt proportional ist.

111

Wie dies auch bei Gold nützlich ist

Also angenommen, du hast 100 Exagia Gold. Jedes Exagion hat nun gewöhnlich 24 Kukkia, die auch Karate genannt werden. Das Gold von 24 Kukkia ist rein. Du willst dies zu Schmuckgold machen, sodass jedes Exagion 22 Kukkia hat. Die Legierung und der Zusatz zum Gold, damit es geringere Karate erhält, geschieht mit Silber und nicht mit Kupfer. Du suchst nun, wie viele Exagia Silber du als Legierung zuzusetzen hast, damit es geschieht, dass die 100 Exagia, die jeweils 24 Kukkia haben, jedes Exagion jeweils 22 Kukkia hat, und wie viele Exagia Schmuckgold mit dem Zusatz und der Legierung des Silbers entstehen werden.

Zur Rechnung:

100 Exagia Feingold haben 2400 Karat, $2400 \text{ Karat} : 22 \text{ Karat} = 109\frac{1}{11}$, d. h. es entstehen $109\frac{1}{11}$ Exagia Schmuckgold mit dem Feingehalt 22 Karat, und $9\frac{1}{11}$ Exagia Silber sind zuzusetzen.

Probe: $22 \cdot 109\frac{1}{11} \text{ Karat} = (22 \cdot 109 + 2) \text{ Karat} = 24 \cdot 100 \text{ Karat}$

Und umgekehrt.

Aus $109\frac{1}{11}$ Exagia 22-karätigen Goldes soll nun Feingold geschmolzen werden, und es ist nach dem Silberschwund gefragt.

Dazu berechnet der Autor die Karatzahl ($109\frac{1}{11} \cdot 22 = 2400$) und dividiert durch 24.

Es ergeben sich wieder 100 Exagia Feingold, und $9\frac{1}{11}$ Exagia Silber sind geschwunden.

Die Probe des Autors hierzu ist zwar unvollständig ($100 \cdot 24 \text{ Kukkia} = 2400 \text{ Kukkia}$), aber nach der Aufgabe vorher auch unnötig.

112

**Wie man wissen kann,
wie viele Unzen jedes Pfund von den 40 Pfund haben wird –
das Silber, bei dem jedes Pfund von den 40 jeweils $11\frac{1}{2}$ Unzen hat,
wenn 6 Pfund Kupferlegierung zugesetzt werden**

Angenommen, du hast 40 Pfund Silber, jedes Pfund von $11\frac{1}{2}$ Unzen. Du willst aber 6 Pfund Kupferlegierung zusetzen, sodass es insgesamt 46 Pfund werden. Du suchst zu wissen, wie viel Unzen jedes Pfund von den 46 haben wird.

Lösung des Autors:

40 Pfund enthalten 460 Unzen Feinsilber, $(460 \text{ Unzen}) : 46 = 10 \text{ Unzen}$

Probe:

$(10 \text{ Unzen}) \cdot 46 = (11\frac{1}{2} \text{ Unzen}) \cdot 40 = 460 \text{ Unzen}$

Und umgekehrt. Angenommen, du hast 48 Pfund Silber. Als du dies in einen Schmelzofen warfst, schwand Kupfer, 18 Pfund, und es wurden die 48 Pfund zu 30 Pfund reinsten Silbers. Du suchst zu wissen, wie viele Unzen es vorher hatte, als es 48 Pfund waren.

Lösung des Autors:

30 Pfund Feinsilber sind 360 Feinunzen, $(360 \text{ Unzen}) : 48 = 7\frac{1}{2} \text{ Unzen}$

Probe: $48 \cdot 7\frac{1}{2} \text{ Unzen} = 30 \cdot 12 \text{ Unzen} = 360 \text{ Unzen}$

Der Autor schließt mit der Bemerkung, dass dies (gemeint ist die Rechenmethode) auch bei Gold Verwendung finden kann.

- 113 **Über die Goldarbeit, von der nicht bekannt war, wie viel Karat sie hatte**
Wenn man aber von ihr 5 Exagia nahm, entstanden nach einer Legierung
mit 10 Exagia Feingold zusammen 15 Exagia von je 18 Karat.
Du suchst aber zu wissen, wie viel Karat die Goldarbeit hatte,
von der dies nicht bekannt war.

Angenommen, jemand hat dir als Pfand 100 Exagia gegeben oder eine Menge von – so viel auch immer du sagst – mehr oder weniger Exagia. Du hast irgendeine Goldarbeit von 15 Exagia machen müssen. Du hast aber (nur) 10 Exagia Feingold von 24 Karat, und es fehlen dir 5 Exagia. Du hast aber diese 5 Exagia, welche dir fehlen, von den 100 Exagia genommen, die du als Pfand empfängst, und es sind 95 Exagia übrig geblieben. Du hast aber die 5 Exagia, welche du von den 100 Exagia genommen hast, mit den 10 Exagia vereinigt, die du hast, und es sind 15 Exagia geworden, jedes Exagion der 15 zu je 18 Karat. Nachdem die Arbeit entstanden war, die du hast machen müssen, hast du die 95 Exagia verloren, die du als Pfand empfangen hast. Du suchst zu wissen, wie viel Karat jedes Exagion der 95 hatte, die du verloren hast, um dem Besitzer den gerechten Wert zurückzugeben.

Der Autor überlegt folgendermaßen.

Die Legierung von 10 Exagia Feingold mit 5 Exagia aus dem Pfand ergeben 15 Exagia mit 18 Karat Feingehalt, sodass die 15 Exagia einen Feingoldanteil von $\frac{18}{24} \cdot 15 \text{ Exagia}$ haben, das sind $\frac{3}{4} \cdot 15 \text{ Exagia}$ bzw. $11\frac{1}{4} \text{ Exagia}$. Die 5 Exagia aus dem Pfand enthalten also $1\frac{1}{4} \text{ Exagia}$ Feingold. Mit dem Dreisatz, wie wir es gewöhnlich bei den Hyperpyra getan haben, bestimmt er nun den Feingehalt von 100 Exagia aus dem Pfand.

Ergebnis: 25 Exagia Feingold und 75 Exagia "Zusatz" (Silber) müssen dem, der das Pfand gegeben hat, zurückerstattet werden. (5 Exagia waren ja für die Goldarbeit verwendet worden und die restlichen 95 Exagia abhandengekommen. Dieser angebliche Verlust wirkt allerdings etwas konstruiert.)

Dieses Ergebnis begründet der Autor außerdem mit dem gleichen Anteil ($\frac{1}{4}$) von $1\frac{1}{4} \text{ Exagia}$ bezüglich 5 Exagia und von 25 Exagia bezüglich 100 Exagia.

Es folgen noch zwei Proben, bei denen jeweils in Karate umgerechnet wird.
(1 Exagion = 24 Karat)

1. Probe:

Die 5 Exagia (aus dem Pfand) enthalten 30 Karat Feingold, 1 Exagion enthält 6 Karat, 100 Exagia enthalten 600 Karat; ebenso haben 25 Exagia Feingold 600 Karat.

2. Probe:

Die 5 Exagia (aus dem Pfand) enthalten 30 Karat Feingold, 10 Exagia Feingold haben 240 Karat. 15 Exagia enthalten zusammen 270 Karat Feingold, 1 Exagion hat also 18 Karat.

Der Autor schließt mit der Bemerkung, dass man in entsprechender Weise auch die Unzen von Silber berechnen kann.

114 ***Über die 50 Pfund Silber, das in jedem Pfund 7 Unzen hat, – wie es (zu Silber) von je 9 Unzen werden kann, wenn ein Zusatz an Silber hinzugefügt wurde, das in jedem Pfund je 11 Unzen hat***

Angenommen, du hast 50 Pfund Silber, jedes Pfund hat 7 Unzen Feinsilber. Du willst aber dieses Silber dazu machen, dass jedes Pfund 9 Unzen Feinsilber hat – mit einer Legierung mit einem anderen Silber, das in jedem Pfund 11 Unzen hat. Du suchst nun zu wissen, wie viel Pfund Silber von jeweils 11 Unzen du zusetzen musst, damit die 50 Pfund, die jeweils 7 Unzen haben, (zu Silber) von jeweils 9 Unzen werden.

Du kannst dies so wissen. Suche zuerst, wie viele Unzen Silber den 50 Pfund zu jeweils 7 Unzen fehlen, um (zu Silber) von jeweils 9 Unzen zu werden: Es fehlen den 50 Pfund 100 Unzen, um (zu Silber) von jeweils 9 Unzen zu werden. Behalte diese 100 Unzen gesondert. Danach suche den Unterschied in Bezug auf das Größere auf, der von den 11 Unzen, die du als Legierung hinzuzufügen hast, gegenüber den 9 Unzen besteht, zu denen du die 50 Pfund machen willst. Es ist aber ein größerer (Unterschied) der 11 Unzen gegenüber den 9, nämlich 2 Unzen. Teile die 100 Unzen, die du gesondert behältst, durch diese 2 Unzen, und der Quotient davon ergibt 50 ... 50 Pfund Silber von jeweils 11 Unzen hast du nun hinzuzufügen, damit die 50 Pfund, die jeweils 7 Unzen haben, (Silber) zu jeweils 9 Unzen werden. Es entstehen zusammen 100 Pfund zu jeweils 9 Unzen.

Es handelt sich hier um eine typische, wenn auch sehr einfache Mischungsaufgabe, deren Lösung man durch eine naheliegende inhaltliche Überlegung sofort erhält: Da 9 das arithmetische Mittel von 7 und 11 ist, erzielt man den mittleren Feingehalt von 9 Unzen dadurch, dass man für die Legierung ebenso viele Pfund Silber vom Feingehalt 11 nimmt, wie vom Feingehalt 7 vorhanden sind.

Ist m_1 das Gewicht der 1. Sorte Silber (Einheit: Pfund) und k_1 ihr Feingehalt (Einheit: Unze pro Pfund), so hat nach Zugabe von m_2 (Einheit: Pfund) der 2. Sorte Silber mit dem Feingehalt k_2 die Legierung – nunmehr mit dem Gewicht $m_1 + m_2$ (Einheit: Pfund) – den Feingehalt

$k = \frac{m_1 k_1 + m_2 k_2}{m_1 + m_2}$ (Unzen pro Pfund), was zu $\frac{m_1}{m_2} = \frac{k_2 - k}{k - k_1}$ äquivalent ist.

(Üblicherweise wählt man k_1, k_2 so, dass $k_1 < k < k_2$ gilt.)

Die letzte Gleichung ist auch unter dem Namen "Mischungsformel" bekannt.

An ihr erkennt man das sog. Mischungskreuz: Die Gewichte (in anderen Sachzusammenhängen: die Mengen, Volumina u. a.) verhalten sich umgekehrt wie die Abweichungen ihrer Feingehalte (Anteile, Konzentrationen etc.) vom "mittleren" Feingehalt (vom "mittleren" Anteil, von der "mittleren" Konzentration etc.). In der vorliegenden Aufgabe ist (ohne Einheiten) $m_1 = 50$, $k_1 = 7$, $k = 9$, $k_2 = 11$, sodass in der 2. Gleichung Zähler und Nenner jeweils übereinstimmen.

Unser Autor hat also m_2 bestimmt, indem er zunächst m_1 mit $k - k_1$ multipliziert und danach durch $k_2 - k$ dividiert hat. Dieses Vorgehen ist nach der 2. Gleichung oben gerechtfertigt.

Es folgt wieder eine Probe:

50 Pfund Silber mit dem Feingehalt 7 Unzen ergeben 350 Unzen Feinsilber, 50 Pfund Silber mit dem Feingehalt 11 Unzen ergeben 550 Unzen Feinsilber. Zusammen enthalten die 100 Pfund Silber also 900 Unzen Feinsilber, sodass 1 Pfund Silber einen Feingehalt von 9 Unzen hat.

Und umgekehrt. Jetzt geht es um eine Aufgabe, bei der der Feingehalt von Silber durch eine Legierung verringert werden soll.

45 Pfund Silber mit einem Feingehalt von 10 Unzen sollen mit Silber legiert werden, das einen Feingehalt von $6\frac{1}{2}$ Unzen hat, sodass insgesamt Silber mit einem Feingehalt von 9 Unzen entsteht. Die Frage ist, wie viel Silber vom Feingehalt $6\frac{1}{2}$ Unzen dafür genommen werden muss.

Man kann nun folgende Bezeichnungen (siehe oben) wählen: $m_2 = 45$, $k_1 = 6\frac{1}{2}$, $k = 9$, $k_2 = 10$, und jetzt ist m_1 gesucht. Dann ergibt sich nach der obigen Gleichung rechts: $m_1 = 18$.

Der Autor berechnet, in unsere Formelsprache übertragen, zunächst $m_2(k_2 - k)$ und dividiert anschließend durch $k - k_1$, um m_1 zu bestimmen. Sein Vorgehen ist wieder korrekt. Er erwähnt noch, dass insgesamt 63 Pfund Silber mit dem Feingehalt von 9 Unzen entstanden sind.

Zu dieser Aufgabe gibt er eine ganz ähnliche Probe wie vorher an:

Insgesamt gibt es $(45 \cdot 10 + 18 \cdot 6\frac{1}{2})$ Unzen Feinsilber, das sind 567 Unzen. Diese verteilen sich auf 63 Pfund, sodass jedes Pfund einen Feingehalt von 9 Unzen hat.

In der Schlussbemerkung zu diesem Kapitel betont der Autor, dass diese Rechnungen auch bei Gold nützlich seien. Ohne dabei die Angaben zu präzisieren oder nähere Ausführungen zu machen, führt er als Beispiele an:

Legierung von Feingold (Frage nach der Menge) mit 16-karätigem Gold, sodass 22-karätiges Gold entsteht; Legierung von 16-karätigem oder anderem Gold (Frage nach der Menge) mit Feingold oder mit 23-karätigem Gold, sodass sich 22-karätiges Gold ergibt

115

**Über die verschiedenen Pfunde des Silbers, die beinhalten:
 Jedes Pfund hat 7 Unzen, jedes Pfund hat 8 Unzen,
 jedes Pfund hat 9 Unzen, jedes Pfund hat 10 Unzen.
 Wie kann man, wenn dies alles vereinigt worden ist, wissen,
 mit wie vielen Unzen jedes Pfund entsteht?**

In dieser Aufgabe werden erstmals mehr als zwei Edelmetallsorten miteinander legiert.

Dem folgenden Aufgabentext und einer zusätzlichen Tabelle des Autors entnimmt man, dass es sich um 40 Pfund zu je 7 Unzen, um 30 Pfund zu je 8 Unzen, um 60 Pfund zu je 9 Unzen und um 50 Pfund zu je 10 Unzen Feingehalt handelt.

Es ergeben sich $(40 + 30 + 60 + 50)$ Pfund mit $(280 + 240 + 540 + 500)$ Feinunzen, also 180 Pfund mit 1560 Feinunzen – das Resümee der oben erwähnten Tabelle –, sodass 1 Pfund Silber $8\frac{2}{3}$ Feinunzen bzw. 8 Unzen 4 Exagia Feinsilber enthält. (1 Unze = 6 Exagia)

Als "Probe" dient die Multiplikation $180 \cdot (8\frac{2}{3} \text{ Unzen}) = 1560 \text{ Unzen}$.

Allgemein gilt:

Seien $m_1, \dots, m_n$ n verschiedene Silbergewichte (in Pfund) mit den Feingehalten $k_1, \dots, k_n$ (in Unzen pro Pfund), so hat nach der Legierung 1 Pfund einen Feingehalt von

$$k = \frac{m_1 k_1 + \dots + m_n k_n}{m_1 + \dots + m_n} \text{ (in Unzen).}$$

Es folgt der Hinweis – ähnlich wie zum Abschluss der vorangegangenen Kapitel – dass man so auch mit verschiedenen Exagia von Goldarbeiten verfahren kann, die beispielsweise 23, 22, 20, 18 oder 16 Karat haben.

116

**Wie man wissen kann, wie viel Pfund Silber du von jeder Ordnung
 der jeweils 8 und 9 und 10 und 11 Unzen pro Pfund zu vereinigen hast,
 um 60 Pfund von jeweils $10\frac{1}{2}$ Unzen zu fertigen**

Angenommen, du hast Silber, das pro Pfund 8 Unzen hat. Du hast auch ein

1. Gesellschafter	2. Gesellsch.	3. Gesellsch.		4. Gesellsch.
zu 8 Unzen $\frac{1}{2}$ Unze	zu 9 Unzen $\frac{1}{2}$ Unze	zu 10 Unzen $\frac{1}{2}$ Unze	zu $10\frac{1}{2}$ Unzen 60 Pfund	zu 11 Unzen $4\frac{1}{2}$ Unzen

anderes von 9 Unzen pro Pfund und ein anderes von 10 Unzen pro Pfund und ein anderes von 11 Unzen pro Pfund. Du sollst aber 60 Pfund zu je $10\frac{1}{2}$ Unzen fertigen. Du suchst zu wissen, wie viel Pfund Silber du von jeder Ordnung der jeweils 8 und 9 und 10 und 11 Unzen zu vereinigen hast, um insgesamt 60 Pfund zu fertigen, jedes Pfund zu jeweils $10\frac{1}{2}$ Unzen.

Du kannst dies so wissen. Setze die verschiedenen Unzen der vier Sorten in eine Reihe ... Und die 11 Unzen sind größer als die $10\frac{1}{2}$ Unzen, zu denen du die

60 Pfund zu machen suchst, die übrigen aber ... sind kleiner als $10\frac{1}{2}$. Suche nun nach dem größeren Teil der 11 Unzen gegenüber den $10\frac{1}{2}$ Unzen: es ist $\frac{1}{2}$ Unze. Direkt unter die drei Reihen der kleineren Unzen, der 8, 9 und 10, setze dieselbe $\frac{1}{2}$ Unze ...

Suche auch den fehlenden Teil der 8 Unzen, damit sie $10\frac{1}{2}$ werden, der $2\frac{1}{2}$ Unzen ist. Suche auch den fehlenden Teil der 9 Unzen, damit sie $10\frac{1}{2}$ werden, der $1\frac{1}{2}$ Unzen ist. Suche auch den fehlenden Teil der 10 Unzen, damit sie $10\frac{1}{2}$ werden, der $\frac{1}{2}$ Unze ist. Addiere die drei fehlenden Teile von diesen, ... und es werden zusammen $4\frac{1}{2}$ Unzen. So wie du nun den überschüssigen Teil der 11 Unzen gegenüber den $10\frac{1}{2}$, der $\frac{1}{2}$ Unze ist, unter die Unzen gesetzt hast, die kleiner als $10\frac{1}{2}$ sind, so mache wechselweise das Gegenteil und setze direkt unter die 11 Unzen die $4\frac{1}{2}$ Unzen ...

Nachdem du dies getan hast, nimm an, die 4 verschiedenen Ordnungen davon seien 4 Gesellschafter, die 60 Pfund Silber zu verteilen haben.

Damit erklärt der Autor, wie die obige Tabelle zustande kommt.

Bei der folgenden Gesellschaftsrechnung setzt er voraus, dass die ersten drei Gesellschafter denselben Anteil erhalten, denn er rechnet mit dem Anteilverhältnis $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 4\frac{1}{2}$ (Summe: 6). Im Text und in einer weiteren Tabelle sind die Rechnungen näher ausgeführt. In dieser Tabelle findet man für den ersten, zweiten und dritten Gesellschafter jeweils die gleiche Rechnung $30 : 6 = 5$ (Pfund), wobei sich 30 aus $\frac{1}{2} \cdot 60$ ergibt, für den vierten Gesellschafter die Division $270 : 6 = 45$ (Pfund), wobei $270 = 4\frac{1}{2} \cdot 60$ ist.

Ergebnis: Dem ersten, zweiten und dritten Gesellschafter bzw. den Silbersorten mit 8, 9 und 10 Unzen Feingehalt kommen jeweils 5 Pfund zu, dem vierten Gesellschafter bzw. der Silbersorte mit 11 Unzen Feingehalt kommen 45 Pfund zu. Zur Kontrolle dient dem Autor folgende Rechnung:

$5 \cdot 8 \text{ Unzen} + 5 \cdot 9 \text{ Unzen} + 5 \cdot 10 \text{ Unzen} + 45 \cdot 11 \text{ Unzen} = 60 \text{ Pfund}$. Die Zwischenrechnung fehlt: $630 \text{ Unzen} = 60 \cdot 10\frac{1}{2} \text{ Unzen}$

Es folgt noch eine (weitere) Probe, die auch tabellarisch dargestellt wird:

5 Pfund mit 8 Unzen Feingehalt enthalten 40 Unzen Feinsilber, 5 Pfund mit 9 Unzen Feingehalt enthalten 45 Unzen Feinsilber, 5 Pfund mit 10 Unzen Feingehalt enthalten 50 Unzen Feinsilber, 45 Pfund mit 11 Unzen Feingehalt enthalten 495 Unzen Feinsilber. Insgesamt enthalten 60 Pfund Silber 630 Unzen Feinsilber, 1 Pfund also $10\frac{1}{2}$ Unzen Feinsilber.

Allgemein betrachtet seien m_1, m_2, m_3, m_4 die gesuchten Silbergewichte, k_1, k_2, k_3, k_4 die gegebenen Feingehalte und m das gegebene Gesamtgewicht mit dem gegebenen Feingehalt k . Dann gilt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= m \\ m_1 k_1 + m_2 k_2 + m_3 k_3 + m_4 k_4 &= mk. \end{aligned}$$

Es handelt sich um ein Problem der "unbestimmten Analytik", da das Gleichungssystem unterbestimmt ist (2 Gleichungen mit 4 Unbekannten).

In der vorliegenden Aufgabe teilen sich die gesuchten Silbergewichte in zwei Klassen auf: m_i mit $k_i < k$ ($i=1, 2, 3$) und m_4 mit $k_4 > k$. Mit $m' = m_1 + m_2 + m_3$

gilt jetzt nach der "Mischungsformel" (vgl. den Kommentar zu Kap. 114)

$$\frac{m'}{m_4} = \frac{k_4 - k}{k - k'}. \text{ Dabei ist } k' \text{ der Feingehalt von } m', \text{ und es gilt}$$

$$m_1 k_1 + m_2 k_2 + m_3 k_3 = m' k'.$$

Unser Autor ordnet nun – allgemein formuliert – jedem m_i ($i=1, 2, 3$) den Wert $k_4 - k$ zu. Daher liegt es nahe, die rechte Seite der aktuellen Mischungsformel

$$\text{mit 3 zu erweitern: } \frac{m'}{m_4} = \frac{3(k_4 - k)}{3(k - k')}$$

Der Nenner muss nun mit dem Wert $(k - k_1) + (k - k_2) + (k - k_3) = 3k - (k_1 + k_2 + k_3)$ übereinstimmen, den der Autor m_4 zuordnet. Dadurch erhält man $k' = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)$.

Wir kehren zur konkreten Aufgabe zurück, d. h. zu den Werten $m=60$, $k=10\frac{1}{2}$, $k_1=8$, $k_2=9$, $k_3=10$, $k'=9$, $k_4=11$. Weiterhin gilt $m' + m_4 = 60$ und nach der Mischungsformel $m' = \frac{1}{3}m_4$, woraus $m_4 = 45$ und $m' = m_1 + m_2 + m_3 = 15$ folgt. Darüber hinaus gilt $9(m_1 + m_2 + m_3) = 8m_1 + 9m_2 + 10m_3$ mit der Folge $m_1 = m_3$. Es ergibt sich also für die gesuchten Silbergewichte ein Lösungstripel $(m_1, 15 - 2m_1, m_1)$ mit unendlich vielen Lösungen. Daran zeigt sich insbesondere, dass das spezielle Lösungsrezept unseres Autors noch nicht die Gleichheit der Silbergewichte ($m_1 = m_2 = m_3 = 5$) erzwingt. Erst bei seiner Modellierung der Aufgabe als Gesellschaftsrechnung setzt er diese Gleichheit stillschweigend voraus.

In einer weiteren Aufgabe sollen Silbersorten mit jeweils 5, 6, 7, 8, 10 und 11 Unzen Feingehalt zu 100 Pfund Silber mit je 9 Unzen Feingehalt verschmolzen werden. Mit unseren Bezeichnungen gilt also $k_1=5$, $k_2=6$, $k_3=7$, $k_4=8$, $k_5=10$, $k_6=11$, $k=9$ und $m=100$. Gesucht werden $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$, wobei m_1, m_2, m_3, m_4 einen geringeren, m_5, m_6 einen höheren Feingehalt als den "Zielfeingehalt" k haben.

Analog zu seinem Vorgehen bei der vorherigen Aufgabe weist der Autor den Silbersorten m_1, m_2, m_3, m_4 einheitlich den Wert $(k_5 - k) + (k_6 - k) = k_5 + k_6 - 2k$ ($=3$) und den Silbersorten m_5, m_6 ebenso einheitlich den Wert $(k - k_1) + (k - k_2) + (k - k_3) + (k - k_4) = 4k - k_1 - k_2 - k_3 - k_4$ ($=10$) zu. Danach verbleiben für die m_i ($i=1, \dots, 6$) immer noch unendlich viele Möglichkeiten, wie man wieder leicht zeigen kann – man vergleiche hierzu die Besprechung des ersten Beispiels.

Der Autor interpretiert die vorliegende Aufgabe wieder als Gesellschaftsrechnung – unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ und $m_5 = m_6$ gilt: Das Anteilverhältnis ist jetzt $3:3:3:3:10:10$ (Summe: 32).

Ergebnis:

Dem ersten, zweiten, dritten und vierten Gesellschafter bzw. den Silbersorten mit den Feingehalten 5, 6, 7 und 8 Unzen kommen jeweils $9\frac{3}{8}$ Pfund, dem fünften und sechsten Gesellschafter bzw. den Silbersorten mit den Feingehalten 10 und 11 Unzen kommen jeweils $31\frac{1}{4}$ Pfund zu.

Seine Rechnungen illustriert der Autor wieder mit zwei Diagrammen: Im ersten geht es um die Zuordnung der Werte 3 und 10 zu den entsprechenden Silbersorten, im zweiten um die Gesellschaftsrechnung.

Es schließen sich "zwei Beweise" (Proben) an, die er ausführlich im Text beschreibt und außerdem noch in einer gemeinsamen Tabelle darstellt.

"1. Beweis": Die einzelnen Pfundzahlen werden addiert. Es kommen 100 Pfund heraus.

"2. Beweis": Die Feinunzen der Silbersorten werden berechnet und addiert. Es ergeben sich 900 Feinunzen und – nach Teilung durch 100 – der "Zielfeinge-halt" 9 (Unzen pro Pfund).

Allerdings liefert erst die Zusammenschau beider Rechnungen eine angemessene Probe für die vorliegende Aufgabe.

Danach erläutert der Autor in einem längeren Abschnitt, dass die Anteilberechnung mithilfe der Multiplikation durchzuführen sei, was von Unwissenden für falsch gehalten würde. Eines der Beispiele ist $\frac{3}{8}$ von 5 Unzen = $\frac{3}{8} \cdot 5$ Unzen. Offenbar hat er vergessen, dass er sich diesem Thema schon in Kapitel 49 gewidmet hatte. Eine Wiederholung erscheint unnötig und ist hier ohnehin fehl am Platz.

Wir kommen noch einmal auf das Lösungsrezept des Autors zurück, das er am Anfang verwendet hatte: die zwei verschiedenen Zuordnungen zu $m_1, \dots, m_4$ bzw. zu m_5, m_6 . Der Einfachheit halber sollen $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ sowie $m_5 = m_6$ vorausgesetzt werden, was die Anwendung der bereits mehrfach erwähnten Mischungsformel ermöglicht. Mit $m' = 4m_1$ und $m'' = 2m_5$ gilt $\frac{4m_1}{2m_5} = \frac{k'' - k}{k - k'}$.

Außerdem gelten die Gleichungen $4m_1 + 2m_5 = m$, $4m_1k' + 2m_5k'' = mk$ und $m_1(k_1 + \dots + k_4) + m_5(k_5 + k_6) = mk$. Daraus folgt $k' = \frac{1}{4}(k_1 + \dots + k_4)$, $k'' = \frac{1}{2}(k_5 + k_6)$, $k'' - k = \frac{1}{2}(k_5 + k_6 - 2k)$, $k - k' = \frac{1}{4}(4k - k_1 - k_2 - k_3 - k_4)$ und $\frac{m_1}{m_5} = \frac{k_5 + k_6 - 2k}{4k - k_1 - \dots - k_4}$.

Im letzten Term sind die Zuordnungsvorschriften des Autors wiederzufinden.

Mit den konkreten Werten der Aufgabe ergibt sich wieder $\frac{m_1}{m_5} = \frac{3}{10}$.

Diese Methode wurde schon durch Leonardo v. Pisa (1202) bekannt, und gut 50 Jahre nach dem Entstehen dieser Handschrift greift sie im deutschen Sprachbereich Widmann (1489, x vj^v–vii) wieder auf. Näheres ist TROPFKE (1980, 570 ff.) zu entnehmen.

Und anders.

Offenbar ist sich der Autor bewusst, dass die Aufgabe noch "erheblichen Spielraum" für weitere Lösungen lässt. Sie führt ja – modern gesprochen – auf ein System von 2 Gleichungen mit 6 Unbekannten, sodass sich unendlich viele Lösungen ergeben.

Nimm von den sechs verschiedenen Sorten, von denen wir sagten, dass sie zusammen 100 Pfund ergeben, 10 Pfund, das ist der zehnte Teil der 100 Pfund. Suche nun, wie viel Feinsilber die 10 Pfund haben müssen, damit jedes Pfund jeweils 9 Unzen erhält, wie du suchst, dass auch die 100 Pfund jeweils 9 Unzen erhalten ... Die 10 Pfund müssen nun 90 Feinsilber haben ... Nimm nun von den größeren und kleineren Pfunden, denen, die über den 9 und unter den 9 Unzen sind, d. h. kleiner als die 9 das Pfund der 5 Unzen, größer als die 9 das

Pfund der 11 Unzen, und es werden zusammen 2 Pfund, die 16 Unzen haben. Ebenso nimm auch die 2 Pfunde der 6 und 10 Unzen und addiere auch diese 2 Pfunde mit den vorherigen 2 Pfunden, und es werden zusammen 4 Pfund, die 32 Unzen haben. Ebenso nimm auch die 2 Pfunde der 7 und 8 Unzen, die 15 Unzen haben, und addiere auch diese mit den 4 Pfund, und es werden zusammen 6 Pfund, die 47 Unzen haben.

Es fehlen bis zu den 10 Pfund 4 Pfund und bis zu den 90 Unzen 43 Unzen. Nimm von den Pfunden mit den 11 Unzen 3: diese haben 33 Unzen. Nimm auch von den Pfunden mit den 10 Unzen 1 Pfund und addiere dieses mit den 3 Pfund, und es werden zusammen 4 Pfund, die 43 Unzen haben ...

Damit hat der Autor sein Ziel erreicht, 10 Pfund mit 90 Unzen Feinsilber zu erhalten. Im Text und auch in der folgenden Tabelle bilanziert er nun, wie viel Pfund er von jeder Sorte genommen hat, und rechnet das Ergebnis auf 100 Pfund hoch (Faktor 10).

4 Pfund zu je 11 Unzen	40 Pfund zu je 11 Unzen
2 Pfund zu je 10 Unzen	20 Pfund zu je 10 Unzen
1 Pfund zu je 8 Unzen	10 Pfund zu je 8 Unzen
1 Pfund zu je 7 Unzen	10 Pfund zu je 7 Unzen
1 Pfund zu je 6 Unzen	10 Pfund zu je 6 Unzen
1 Pfund zu je 5 Unzen	10 Pfund zu je 5 Unzen

zusammen 10 Pfund mit 90 Unzen; zusammen 100 Pfund mit 900 Unzen

Am rechten Rand von fol. 62^r findet sich eine Bemerkung des Autors, derzufolge man auch dann 10 Pfund nehmen soll – und nicht den zehnten Teil –, wenn man 50 oder 40 Pfund erreichen will. Er weist darauf hin, dass man von 10 auf 50 bzw. 40 leicht hochrechnen könne (Faktoren 5 bzw. 4).

Da man aber genauso gut von 5 auf 50 oder von 4 auf 40 schließen kann, bleibt die Bemerkung unverständlich, und der Autor relativiert sie dann auch an späterer Stelle (fol. 62^v).

Damit du aber einsiehst, dass nun, wenn auch die genommenen Pfunde der ersten und der zweiten Methode wechseln, dennoch auch die beiden Methoden wahr sind ...

Hiermit leitet der Autor eine Probe seiner "zweiten Methode" ein, die auch wieder tabellarisch dargestellt ist. Dazu werden die Feinunzen der einzelnen Sorten gemäß den gewählten Pfundzahlen berechnet und addiert: $(40 \cdot 11 + 20 \cdot 10 + 10 \cdot 8 + 10 \cdot 7 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 5)$ Unzen = 900 Unzen, bezogen auf 100 Pfund. Daher hat, wie verlangt, 1 Pfund einen Feingehalt von 9 Unzen.

Die "zweite Methode" ist ein Verfahren des sinnvollen Probierens, wobei auch die heuristische Strategie des Rückwärtsarbeitens (des Argumentierens von der "Zielposition" aus) eine Rolle spielt.

Im anschließenden Abschnitt behauptet der Autor, dass bei der vorliegenden (zweiten) Methode – im Unterschied zur ersten – nicht alle Pfundsorten berücksichtigt werden. Das trifft aber so strikt nicht zu, wie ja das aktuelle Beispiel gerade zeigt. Vielmehr kann es bei der zweiten Methode vorkommen, dass bestimmte Pfundsorten ausgelassen werden – so erhält man z. B. auch mit $m_1 = 0$, $m_2 = 10$, $m_3 = m_4 = 20$, $m_5 = 10$, $m_6 = 40$ eine ganzzahlige Lösung, die ebenfalls mithilfe der vorherigen Zehnteilung der Pfundsumme gewonnen werden kann. Bei dieser Zehnteilung werden nur Zehnerzahlen als Lösungen berücksichtigt, sofern man von vornherein nur mit ganzen Zahlen operiert. Dabei wäre z. B. die Lösung $m_1 = 8$, $m_2 = 9$, $m_3 = 10$, $m_4 = 11$, $m_5 = 34$, $m_6 = 28$ nicht aufzudecken.

In den folgenden Passagen wird das zweite Verfahren noch einmal allgemeiner beschrieben. Dabei geht es um die Wahl des 10. Teils der Summe der Pfunde, vor allem aber um die jeweilige Kombination einer Pfundsorte von unterdurchschnittlichem Feingehalt mit einer Sorte von überdurchschnittlichem Feingehalt. Dadurch entstehe *eine mittlere Größe ... ähnlich wie das Pfund, das du zu vereinigen suchst*.

Danach wird noch einmal auf die angeblich vorteilhafte Wahl von 10 Pfund bei einer Gesamtsumme von 60 Pfund verwiesen. Man könne aber auch den 10. Teil von 60 wählen. – Man wundert sich, dass der Autor in einem mathematisch doch recht anspruchsvollen Kapitel auf solche Belanglosigkeiten eingeht.

Wenn du es nun auf dieselbe Weise dieser beiden Methoden auch bei (Schmuck-)Gold machst, wirst du das Gesuchte richtig finden, sei es, dass du verschiedene Pfunde, sei es, dass du verschiedene Unzen, sei es, dass du verschiedene Exagia von (Schmuck-)Gold vereinigen willst: es ist nämlich dasselbe.

Es fällt auf, dass Mischungsrechnungen in Kontexten außerhalb der Metallurgie (z. B. Bierstärke, Bonität von Feldern, Getreide u. a.) fehlen. Erstaunlicherweise behandelt Schreiber B desselben Kodex (HUNGER/VOGEL [1963]) überhaupt keine Mischungsaufgaben; dagegen findet man im byzantinischen Rechenbuch des frühen 14. Jahrhunderts (VOGEL [1968]) mehrere Aufgaben dieser Art aus verschiedenen Bereichen.

Ende des ersten Buches

