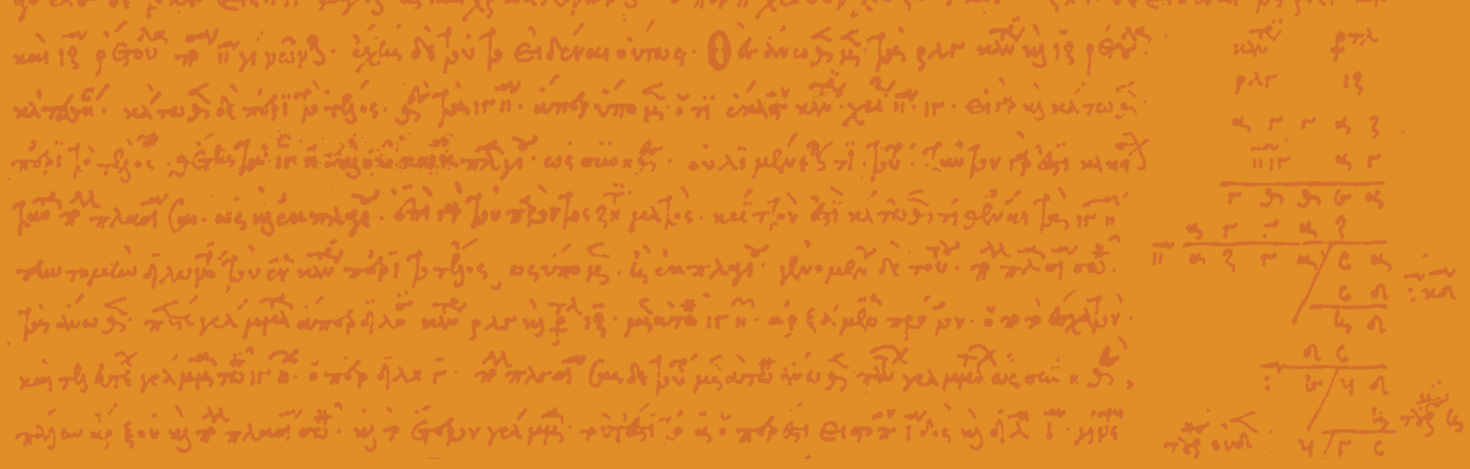


Die große Arithmetik

aus dem Codex Vind. phil. gr. 65

Eine anonyme Algorismusschrift aus der Endzeit
des Byzantinischen Reiches

Stefan Deschauer

Verlag der
Österreichischen Akademie
der Wissenschaften
ÖAW

Stefan Deschauer

DIE GROSSE ARITHMETIK AUS DEM CODEX VIND. PHIL. GR. 65

ÖSTERREICHISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
PHILOSOPHISCH-HISTORISCHE KLASSE
DENKSCHRIFTEN, 461. BAND

Veröffentlichungen zur Geschichte der Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin

Nr. 67

Verlag der
Österreichischen Akademie
der Wissenschaften

Wien 2014

ÖSTERREICHISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
PHILOSOPHISCH-HISTORISCHE KLASSE
DENKSCHRIFTEN, 461. BAND

Stefan Deschauer

Die große Arithmetik aus dem Codex Vind. phil. gr. 65

Eine anonyme Algorismusschrift aus der Endzeit des Byzantinischen Reiches

Textbeschreibung, Transkription, Teilübersetzung mit Kommentar,
Fachsprache, Vokabular, Metrologie

Verlag der
Österreichischen Akademie
der Wissenschaften
Wien 2014

Vorgelegt von w. M. Hermann Hunger in der Sitzung am 29. August 2013

Diese Publikation wurde einem anonymen, internationalen
Peer-Review-Verfahren unterzogen.

This publication has undergone the process of anonymous, international peer review.

Die verwendeten Papiersorten sind aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff hergestellt,
frei von säurebildenden Bestandteilen und alterungsbeständig.

Alle Rechte vorbehalten.

ISBN 978-3-7001-7533-9

Copyright © 2014 by
Österreichische Akademie der Wissenschaften
Wien

Druck und Bindung: Prime Rate kft., Budapest

Printed and bound in the EU

http://hw.oeaw.ac.at/7533-9
http://verlag.oeaw.ac.at

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort 7*

I Textbeschreibung 11*

II Transkription 1

III Teilübersetzung und Kommentar 187

IV Resümee 351

V Kurzübersicht über Inhalt und Methoden 355

VI Fachsprache 359

VII Vokabular 383

VIII Metrologie 399

IX Preise, Zinsen, Gewinne und Verluste, Leistungen 411

Literatur 415

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

fol. 17^{r}, Kap. 12: Die Jahre nach Christi Geburt 35*

fol. 43^{r}, Kap. 78: Preisberechnung von Gewichten mithilfe von Dezimalbrüchen 36*

VORWORT

Der Codex Vindobonensis phil. gr. 65 ist zweifellos eine der bedeutendsten mathematischen Handschriften der spätbyzantinischen Zeit. Gleichwohl wurde bisher nur ein kleinerer Teil (fol. 126^{v}–140^{r}), eine Sammlung von 100 Aufgaben, für die Wissenschaftsgeschichte erschlossen – vgl. HUNGER/VOGEL (1963). Zwar existiert inzwischen auch eine Edition des im Kodex ebenfalls enthaltenen großen systematischen Rechenbuchs (fol. 11^{r}–126^{r}) – vgl. CHALKU (2006) –, die aber nur in sehr beschränktem Rahmen für die weitere Forschung dienlich ist: Neben Mängeln in der Transkription, insbesondere bei der Wiedergabe der Sonderzeichen und der zahlreichen Diagramme sowie bei der Lesart einer bekannten Gewichtseinheit, vermisst man eine (Teil-)Übersetzung in eine verbreitete Wissenschaftssprache. Dies mag daran liegen, dass das Buch in einer griechischen Schriftenreihe erschienen ist und der Adressatenkreis (griechische Muttersprachler, Neogräzisten, Byzantinisten) den transkribierten Text weitgehend verstehen kann. Dem "normalen" Wissenschaftshistoriker hingegen bleibt dieser wichtige Text weiterhin verschlossen. Vor allem aber ist zu beklagen, dass die mathematischen und mathematikhistorischen Anmerkungen viel zu dürftig sind. Eine eingehende Analyse der Aufgaben und Methoden fehlt völlig.

Die hier vorgelegte Edition bietet einerseits eine Transkription, die sich der optischen Gestalt der Handschrift so weit wie möglich annähert. Dazu gehört eine möglichst authentische Wiedergabe der Sonderzeichen, an erster Stelle des Zeichens für die Null (υ), das quasi als Wahrzeichen des Rechenbuchs betrachtet werden darf. (Hierfür ein schlichtes u zu verwenden, ist weniger als ein Notbehelf.) Ebenso erscheint es als selbstverständlich, dass sämtliche Rechendiagramme trotz ihrer Vielzahl vollständig berücksichtigt, in der überlieferten Form – u. a. mit passender Anordnung der Ziffern gemäß ihrer Stellenwerte – präsentiert und an den vom Schreiber vorgesehenen Textstellen eingebunden werden.

Ein kritischer, womöglich auch angreifbarer Teil der hier vorgelegten Edition ist im Kapitel I (Textbeschreibung) der Abschnitt I. 2 (Schrift und Sprache – Grundsätze der Transkription). Als Mathematiker mit solider altsprachlicher Schulbildung, aber ohne Byzantinistikstudium, war ich auf kompetente Unterstützung angewiesen. Hier bin ich Herrn Univ.-Prof. Dr. Herbert Hunger (1914–2000) dankbar, der mir in den Achtziger- und frühen Neunzigerjahren die für die vorliegende Handschrift nötigen Grundzüge der Paläographie, der Kodikologie und der Sprachwissenschaft nahegebracht hat. Er hatte selbst Interesse an der mathematischen Thematik, zumal er Mitherausgeber der Aufgabensammlung im selben Kodex war – vgl. HUN-

GER/VOGEL (1963). Ich erinnere mich lebhaft an mehrere Aufenthalte bei ihm in der Wiener Postgasse und gedenke seiner in großer Dankbarkeit. Er hat mir, nachdem mich noch Prof. Dr. KURT VOGEL (1888–1985) auf die Handschrift aufmerksam gemacht hatte, ein Forschungsgebiet erschlossen, das mich seit vielen Jahren beglückend beschäftigt.

Aufgrund des erheblichen Aufwands, den eine interdisziplinäre Bearbeitung und Analyse des Textes mit sich bringt, habe ich mich in der hier vorgelegten Arbeit auf den arithmetischen Teil (einschließlich Kaufmannsarithmetik) beschränkt, den der Schreiber als "erstes Buch" bezeichnet (fol. 15^{r}–62^{v}). Dabei wurden aber auch Texte desselben Schreibers mit einbezogen – teilweise ediert, in jedem Fall aber vollständig besprochen –, die zwar außerhalb des eigentlichen Rechenbuchs stehen, aber ganz offensichtlich als Ergänzung, Vertiefung oder Korrektur dienen sollten (fol. 1^{v}–9^{v}, $142/1^{v}$–159^{v}). CHALKU (2006) hat diesen Appendix leider nicht berücksichtigt, und daher erhält der Leser ein unvollständiges, teilweise sogar ein falsches Bild vom mathematischen Kenntnisstand und den diesbezüglichen Fähigkeiten des anonymen Autors. (Das Kapitel 40 zum Kürzen von Brüchen ist ein besonders drastisches Beispiel.)

Im Anschluss an die Transkription (Kap. II) folgt eine Teilübersetzung und ein ausführlicher mathematischer Kommentar zu den Aufgaben und Methoden mit einer mathematikhistorischen Einordnung und Bewertung (Kap. III). Auf eine vollständige Übersetzung konnte ich sinnvollerweise verzichten, da der Schreibstil des byzantinischen Autors von überaus zahlreichen Redundanzen geprägt ist. Dies betrifft vor allem die Lösungsverfahren bei gleichartigen Aufgaben. Übersetzt wurden sämtliche Kapitelüberschriften und jeweils zumindest die Einstiegsaufgabe mit dem Lösungsverlauf sowie andere Aufgaben desselben Kapitels, falls sich hier die Lösungsmethoden ändern. Vollständig übersetzt habe ich die markanten Kapitel 1–7, 10, 14, 15, 21, 22, 33, 37, 38, 57, 71 und 107 ungeachtet ihrer Länge und der redundanten Formulierungen sowie (weitere) allgemeine, beispielunabhängige Methodenbeschreibungen. Aufgrund des überall lückenlosen Kommentars sollte der Leser auch in Kapiteln, in denen nur ausgewählte Passagen übersetzt sind, einen vollständigen inhaltlichen Einblick erhalten.

Im Übrigen ist der mathematische Kommentar in erster Linie für Leser ohne Mathematikstudium gedacht.

Generell habe ich mich für eine möglichst wörtliche Übersetzung entschieden, um dem Duktus des Schreibstils nahezukommen. Dabei stößt man natürlich dort an Grenzen, wo im Deutschen die Verständlichkeit leidet. Auch wenn ich versucht habe, dies zu vermeiden, muss der Leser häufig mit holperigen Formulierungen rechnen, die der gehobenen deutschen Sprache fremd sind.

In Kap. IV wird ein kurzes mathematisches und mathematikhistorisches Resümee gezogen, wobei auf Besonderheiten eingegangen werden soll (Glanzpunkte, interessante Aufgaben, fehlende Aufgabentypen, gravierende Fehler u. a.)

Kap. V bietet eine inhaltliche und methodische Kurzübersicht über den Text.

Kap. VI ist der Fachsprache gewidmet. Die deutsch-griechische Wortliste, die nach Sachgruppen geordnet ist, beleuchtet auch grammatische Besonderheiten (z. B. die für die Rechenoperationen verwendeten Verben, die verschiedene Präpositionen nach sich ziehen können).
Kap. VII bietet ergänzend ein griechisch-deutsches Vokabular in alphabetischer Reihenfolge, welches weit über den mathematischen Bereich hinausgeht.
Kap. VIII gibt die im Text explizit und implizit enthaltene Metrologie wieder und enthält auch einige Besonderheiten (z. B. das parallele Auftreten des Gold- und Silberhyperpyrons). Anhand von älterer metrologischer Standardliteratur habe ich versucht, die Maß- und Münzeinheiten und die betreffenden Relationen in die bekannte byzantinische Metrologie einzuordnen, wobei mir allerdings spezielle Kenntnisse fehlen.
Im Kap. IX werden alle Preise, Zinsen, Gewinne / Verluste und Leistungen registriert.
Den Abschluss der Arbeit bildet ein Literaturverzeichnis.

Die Stiftung Katholische Universität Eichstätt (heute: Eichstätt-Ingolstadt) hat das Projekt "Byzantinische Mathematik" zeitweise gefördert. Herr Prof. Dr. MENSO FOLKERTS (München) hat mich bei meinem Vorhaben stets moralisch unterstützt, insbesondere auch immer wieder ermutigt, die mehrmals — wegen vorrangiger fachdidaktischer Qualifizierungsarbeiten auch für längere Jahre — unterbrochene Arbeit "am Byzantiner" wieder aufzunehmen. Dafür möchte ich mich bei ihm herzlich bedanken. Herrn Dr. GÜNTER RUPRECHT und Herrn MARTIN PIETSCH (beide TU Dresden) danke ich für die technische Betreuung. Schließlich danke ich der Österreichischen Akademie der Wissenschaften für die Aufnahme des Bandes in die Denkschriften der philosophisch-historischen Klasse und dem Verlag für die sorgfältige Drucklegung.

Ich plane, auch das "zweite Buch" des anonymen Autors (fol. 62^{v}—126^{r}) mathematisch gründlich zu analysieren und für die Wissenschaftsgeschichte zu erschließen, wobei allerdings der sprachwissenschaftliche Anteil stärker in den Hintergrund treten soll.

Noch ein technischer Hinweis zu dieser Edition ist vonnöten.
Sie wurde noch in den Achtzigerjahren begonnen und mit einem für den ATARI entwickelten Textverarbeitungssystem (SIGNUM! 2) geschrieben. (Die Transkription war bereits im Jahre 1993 beendet.) Dieses System bot die Möglichkeit, sehr bequem auch längere griechische Texte zu schreiben sowie sehr flexibel und ohne großen Aufwand Sonderzeichen zu generieren. Nachträglich zeigt sich als Nachteil, dass es nicht mit dem Betriebssystem Microsoft Windows kompatibel ist. Immerhin können die SIGNUM-Dokumente mithilfe eines geeigneten Konverter-Programms in PDFs umgewandelt werden.

Dresden, im November 2013 Stefan Deschauer

I TEXTBESCHREIBUNG

1 Die Handschrift

Der Codex phil. gr. 65 ist eine der vielen griechischen Handschriften der Österreichischen Nationalbibliothek, die von Augerius von Busbeck (1522–1592) während seiner Tätigkeit (1555–1562) als Botschafter Kaiser Ferdinands I. am Hofe Sultan Suleimans I. ("des Prächtigen") in Konstantinopel erworben wurden; die entsprechende Eintragung findet sich auf fol. II^{r}.
Parallelhandschriften sind nicht bekannt – der Codex phil. gr. 65 ist wohl ein Unikat.
Die Handschrift umfasst 163 jeweils 36-zeilig beschriebene Blätter vom Format 297/300 x 210/212 mm, die sich wie folgt auf 21 Lagen verteilen: 1 Lage mit 14, 11 Lagen mit 8, 1 Lage mit 4, 7 Lagen mit 8 Blättern sowie 1 Lage mit nur einem Blatt (vgl. HUNGER 1961). Die Vermutung (ebda., S. 183), dass die Folios 153 ff. einst vor dem systematischen Rechenbuch (11^{r}–126^{r}) standen, beruht auf einem Missverständnis der marginalen Vor- und Rückverweise: Die Randnotizen ζήτει τὸ παρὸν σημεῖον ἔμπροθεν περὶ τὸ τέλος (τῆς βίβλου) auf fol. 29^{r} und fol. 31^{v} belegen, dass – in unsere Vorstellung übertragen – mit ἔμπροσθεν ein Verweis nach "hinten", demnach mit ὄπισθεν ein Verweis nach "vorne" gemeint ist. Auch auf den Seiten 6^{r}, 7^{r} und 8^{v} sind Querverweise zum systematischen Rechenbuch zu finden: In der Einleitung des auf fol. 6^{r} beginnenden Kapitels wird auf verschiedene Multiplikationsmethoden im Rechenbuch vorverwiesen (Πολλούς τινας καὶ διαφόρους τρόπους πολλ(α)πλασιασμῶν εὑρήσεις παρ' ἡμῖν δηλουμένους ...), ähnlich auch auf fol. 7^{r}, wo der Leser von der späteren Vorstellung der Siebenerprobe erfährt. Auf fol. 8^{v}/Z. 4 f. hingegen geht der Schreiber davon aus, dass dem Leser die Kapitel 17–20 des Rechenbuchs bereits bekannt sind (Ἐν τῷ ιζ͵ καὶ ιη͵ καὶ ιθ͵ καὶ κ͵ κεφαλαίῳ εἴρηται ...). Dieser widersprüchliche Befund in einem zusammenhängenden Textabschnitt (6^{r}–8^{v}) lässt jedenfalls nicht darauf schließen, dass die fraglichen Blätter falsch zusammengebunden worden wären.

Insgesamt ist der Kodex wie folgt aufgebaut.

1^{v}–9^{v}:	Ein "Vorspann" mit unnummerierten Kapiteln
1^{v}–2^{v}:	Die vollkommenen Zahlen nach Nikomachos
3:	leer
4^{r}–5^{v}:	10 als vollkommene Zahl nach Magentinos (Aristoteles-Kommentator), 7 als vollkommene Zahl, vollkommene Zahlen nach Nikomachos, Erklärung des dekadischen Positionssystems, Quersummen von Vielfachen von 9, Multiplikations- und Divisionstafel

6^r–7^r: Gittermultiplikation
7: Neunerprobe der Multiplikation
8: Neunerprobe der Division
8^v–9^v: Multiplikationen im Kopf
10: leer
11^r–14^r: Inhaltsverzeichnis (242 Kapitelüberschriften) zum nachfolgenden Rechenbuch (ed. Chalku 2006)
14^v leer
15^r–126^r: Ein systematisches Rechenbuch, das in zwei Teile gegliedert ist:
15^r–62^v: Kap. 1-116, das sog. erste Buch – *des.* τέλος τῆς πρώτης βίβλου
Kap. 1-2 ed. HEIBERG (1899)
Dieses "erste Buch" ist Gegenstand der vorliegenden Edition.
62^v–126^r: Das sog. zweite Buch – *inc.* Προοίμιον τῆς δευτέρας βίβλου – enthält insbesondere Wurzelberechnungen, Algebra (die italienische *cosa* in griechischer Terminologie) und Geometrie.
97^v: Die im Pinax angekündigte Kapitelüberschrift Nr. 164 wird durch eine andere ohne Nummerierung ersetzt.
103^v unten: Abbruch des Kapitels 184. Die im Pinax angekündigten Kapitel 185–200 fehlen ganz.
104^r oben: Rest von Kap. 201
118^r–123^v: Quadratwurzel-Tafeln, teilweise von HEIBERG (1899) ediert
126^v–140^r: Eine Aufgabensammlung von 2. Hand, ed. HUNGER/VOGEL 1963
140^v–$142/1^r$: leer
$142/1^v$–143^r: Bruchrechnungen mit Verweis auf Kap. 40 des Rechenbuchs – vom Schreiber gestrichen
143^v–145^v: Bruchrechnungen mit Verweis auf Kap. 40 des Rechenbuchs: Kürzen mithilfe des euklidischen Algorithmus
146^r: Zweierpotenzen von zweiter Hand
146^v–147^r: Die 64 fortschreitenden Verdopplungen beim Schachbrett, teilweise von HEIBERG ed.
147^v–152^r: 6 unnummerierte Kapitel über Wurzeln und Potenzen, Verweis auf Kap. 118 des Rechenbuchs
152^v: leer
153^r–$156/1^v$: Algebraisch gelöste Anwendungsaufgaben, Verweis auf Kap. 162 des Rechenbuchs
157^r–$157/1^r$: Weitere Aufgaben zur Algebra, Verweis auf Kap. 153 des Rechenbuchs
$157/1^v$: Zahlenrätsel mit Brüchen, Verweis auf Kap. 47 und Kap. 144 des Rechenbuchs
158: Addition von Brüchen, Verweis auf Kap. 43, 44, 135 des Rechenbuchs. Die untere Hälfte von 158^r ist gestrichen.
159^r: leer
159^v: Weitere Zahlenrätsel mit Brüchen, Verweis auf Kap. 142 des Rechenbuchs
160 (*ult.*): leer

Bemerkenswert ist, dass gerade in der 13. Lage, die aus nur 4 Blättern besteht, die erwähnten Kapitel ausfallen. Es liegt daher nahe anzunehmen, dass auch diese Lage ursprünglich 8 Blätter hatte, von denen vier verloren gegangen sind.
Schon HEIBERG (1899, S. 167) entdeckte, dass die Aufgabensammlung (126^{v}–140^{r}) flüchtiger und mit dunklerer Tinte geschrieben ist als das systematische Rechenbuch; auch wies er darauf hin, dass durchweg unterschiedliche Zeichen für die Null verwendet wurden – ч im Rechenbuch, · in der Aufgabensammlung. Dennoch gingen er sowie später HUNGER/VOGEL (1963, S. 9) davon aus, dass es sich in beiden Fällen um denselben anonymen Schreiber handeln dürfte: "Uns will ... die Verschiedenheit des Schreibgerätes als ausreichender Grund für gewisse Veränderungen der Schrift gegenüber dem ersten Rechenbuch erscheinen."
Nach der hier vorgelegten Edition der 1. Hälfte dieses Rechenbuchs kann die Frage nach der Zahl der Schreiber nunmehr viel sicherer beantwortet werden. Das Rechenbuch lässt, wie sich gerade an zahlreichen Fachbegriffen zeigt, starke italienische Einflüsse erkennen, die in der Aufgabensammlung in diesem Ausmaß nicht nachzuweisen sind; umgekehrt fehlt im Rechenbuch völlig der türkische Kontext, der in der Aufgabensammlung zweifelsfrei belegt ist – sie entstand unter türkischer Herrschaft, jedenfalls nach 1430, vermutlich in Thessalonike. Aber nicht nur das jeweilige Fachvokabular unterscheidet sich deutlich voneinander – auch die Rechenoperationen und die mathematischen Methoden differieren zum Teil erheblich: So werden z. B. die Dezimalbrüche nur in der Aufgabensammlung explizit eingeführt, Algebra hingegen ist nur im Rechenbuch zu finden. Darüber hinaus tendiert das Sprachniveau der Aufgabensammlung viel stärker zur Volkssprache hin. Auch die unterschiedlichen metrologischen Verhältnisse sind ein Hinweis darauf, dass doch zwei Schreiber am Werk waren.
Merkwürdig ist, dass der zweite Schreiber seine Aufgabensammlung mitten in der 15. Lage beginnt und sie mitten in der siebzehnten beendet. Auch hat er das Rechenbuch eingesehen, denn auf 31^{r}, 32, 51^{v} und 52^{r} finden sich von ihm stammende Randnotizen, Lösungen von Bruchrechenaufgaben, die im Haupttext teilweise anders behandelt worden sind, und Multiplikationen ohne Zusammenhang mit dem Haupttext. Die Hand des zweiten Schreibers ist insbesondere wieder an der punktförmigen Null zu erkennen.
Schließlich ist die Frage nach der Abfassungszeit des Rechenbuchs zu klären. Schon HUNGER (1961, S. 183) und HUNGER/VOGEL (1963, S. 9) hatten aufgrund von Wasserzeichen-Analysen das Jahr 1436 mit zur Diskussion gestellt. Es ist nun ein glücklicher Zufall, dass der Schreiber im 12. Kapitel (17^{r}) zur Anwendung der schriftlichen Multiplikation die Frage nach der Anzahl der Tage stellt, die seit Christi Geburt verflossen sind: Περὶ τοῦ πῶς ἔστι πολλ(α)πλασιάσαι τοὺς ἀπὸ Χριστοῦ γεννήσεως χρόνους, οἵτινές εἰσι **,αυλς΄**, μετὰ τῶν τξε΄ ἡμερῶν τοῦ χρόνου ... Zahlreiche eigenhändige Bearbeitungen des Rechenbuchtextes (Streichungen, Ergänzungen, Randbemerkungen und Querverweise) legen nahe, dass der Schreiber nicht einfach nur eine ältere Vorlage kopierte, sondern durchaus auch als Autor anzusprechen ist. Es kann daher als so gut wie sicher gelten, dass 1436 mit der Niederschrift des Rechenbuchs (zumindest) begonnen wurde.
Inzwischen ist über die Homepage der Österreichischen Nationalbibliothek ein vollständiges Digitalisat des Cod. phil. gr. 65 verfügbar.

2 Schrift und Sprache – Grundsätze der Transkription

Das Rechenbuch ist von geübter Hand in einer kleinen, schönen und regelmäßigen Schrift geschrieben. Zahlreiche Kürzungen, eng aneinander geschriebene Buchstaben und das weitgehende Fehlen von Absätzen – sogar bei Kapitelüberschriften – zeigen, dass der Schreiber viel Platz sparen wollte. Dennoch hat er sich um Übersichtlichkeit bemüht: Dem Rechenbuch stellt er einen Pinax, eine Liste von nummerierten Kapitelüberschriften, voran (fol. 11^{r}–14^{r}), und im Buch selbst sind die Kapitelnummern seitlich angegeben, die Überschriften in roter Tinte hervorgehoben. Ebenso weisen im Allgemeinen rote Initialen auf den Beginn eines Kapitels oder eines neuen Sinnabschnitts hin.

Die Orthographie des Textes ist, wie schon HEIBERG (1899, S. 163) bemerkte, "ganz verwildert", sodass ein diplomatischer Abdruck des handschriftlichen Wortlautes von vornherein nicht in Frage kam. In erster Linie sind die überreichlich vorhandenen Itazismen zu nennen. An der Phonetik orientierte inkorrekte Schreibweisen finden sich häufig bei Wörtern mit W- oder F-Laut und beim Auftreten von Nasalen vor π und φ. Auch zahlreiche Dentale sind *vice versa* falsch geschrieben (ϑ statt τ und umgekehrt) ebenso wie der O-Laut (ο statt ω und umgekehrt). Darüber hinaus ist die Akzentsetzung völlig unzuverlässig und kann nur in seltenen Fällen einen Anhaltspunkt für die Transkription geben. Diese Phänomene sind allerdings für byzantinische Texte der Gebrauchsliteratur im 15. Jahrhundert nichts Ungewöhnliches. Für Einzelheiten sei auf den Abschnitt 2.1 verwiesen – die dortigen Belegstellen sind diplomatisch wiedergegeben.

Das Sprachniveau des Textes ist mit gewissen Einschränkungen der Umgangssprache zuzuordnen. Umgangssprachliche byzantinische Texte zeichnen sich gegenüber den hochsprachlichen dadurch aus, dass sie sich mit dem Ziel einer besseren Verständlichkeit auf eine vereinfachte Grammatik beschränken und obsolete Wörter und Wortformen vermeiden. Hierbei sind insbesondere zu nennen: der Dativschwund (stattdessen Akkusativ), die Vermeidung des *genetivus absolutus*, der Verzicht auf den Optativ (Ersatz durch die anderen Modi), die Vermeidung von Perfekt und Plusquamperfekt, die Zulassung von Anakoluthen und Pleonasmen und Einsprengsel der Volkssprache entsprechend dem modernen griechischen Sprachgebrauch (vgl. HUNGER 1981, S. 22 f.).

Andererseits verwendet der Schreiber mitunter noch die hochsprachlichen grammatischen Formen und zeigt damit, dass er über eine entsprechende Schulbildung verfügt. Noch relativ häufig sind seine *genetivi absoluti*. Auch beim Dativ können wir eher ein Schwanken als einen Schwund feststellen. Hingegen sind die Perfektformen recht selten, und nur jeweils an einer Stelle kommt das Plusquamperfekt bzw. der Optativ vor.

Einzelheiten hierzu werden in den Abschnitten 2.2 bis 2.4 aufgeführt – die dortigen Belegstellen sind der Schreibweise in der Transkription entsprechend wiedergegeben.

2.1 Lautlehre

2.1.1 Itazismen

Einige Beispiele – zitiert nach Seitenzahl/Zeilenzahl oder Seitenzahl/Zeilenzahl des textkritischen Apparats (TA) in der Edition – belegen die bunte Vielfalt der betreffenden Schreibweisen:

ζειτῶν 20/29, Πίεισων 96/5 neben πίησων 99/9, πρὸς δίλοσεὶν 29/33 f. neben πρὸς δίλόσιν 31/13 f., εἰδᾶς 109/22 = οἶδας, ἠσόδου 26/34, οὐχι περ βένῃ 44/34 = οὐχ ὑπερβαίνει, πάλην 5/43, τηνα 37/38 neben meistens korrektem τινα 6/10, ἐνηγμάτων = αἰνιγμάτων 80/27, ἀμηρα 92/30 = ἄμοιρα, τίνην 3/5 = τοίνυν, πέφηκαι 4/24 = πέφυκε, ἴναι 46/11 neben häufigem εἶναι oder εἴναι 3/26, νιῶν 88/19 = νηῶν, κοίνμαν 86/TA 6 neben κοινημα 87/19 = κίνημα(ν), ὑτι 128/32 = ἤτοι, ἀριθμοιτικῆς 3/2, μέροι 3/4, ἀποδίξοις 8/8, διαμεροιζομενων 163/26 neben meistens korrektem διαμεριζομένων 41/22, -κοις 7/24 bei Zahladverbien neben -κις 7/19, μηριάδων 4/25, ὑπεῖν 20/42, ὑπερ 45/35 = εἴπερ, υπρόχειρος ... δεδίλοκαὶ μεταχειρισης 65/32, δυπλασιασον, δυς 65/11, οὐ καὶ χὴς 35/29 = οὐκ ἔχεις, οὐ καὶ πι 98/16 neben korrektem ἐπί in derselben Zeile, ἑ μαρτηρηαι 12/17 f. neben häufigem αἱ μαρτ(υ)ρίαι 10/14, δὲ τι μόνῶν 77/3 = δαιτυμόνων, δεκαδε 5/31

Die Itazismen werden in der Edition in der Regel stillschweigend beseitigt; nur einige besonders auffällige Formen und solche, die zu Missverständnissen Anlass geben könnten, habe ich im textkritischen Apparat vermerkt.

2.1.2 Schreibung des W-Lautes und des F-Lautes

Bei folgenden Verben auf -εύω und deren Ableitungen tritt in Anlehnung an die Aussprache die Schreibung -εβ auf:

παρασκεβάσι 3/24, πολ(ι)τὲβομένην 4/2 f. u. ö., περιττέβη 7/25 u. ö, περισσέβοσι 8/35 u. ö., πορεβομένων 91/13 u. ö., ὁδέβων 84/39 u. ö., πραγματέβεσθαι 122/20, ἀληθέβοσι 183/37

Umgekehrt steht -ευ statt -εβ bei ἕβδομος und Ableitungen:

εὐδομος 6/31 u. ö., εὐδομηκοστα 97/35 u. ö.

Die Schreibweise -ευ kann auch für -εφ stehen, und zwar bei ἐφικτόν sowie bei den Aorist-Formen der Verben φθάνω, διαφθάνω, φθείρω und διαφθείρω:

ευήκτὸν oder ευηκτὸν 27/2, 41/23, οὐ κεύθασὲ (sic) 3/15, οὐ κεύθασαν 97/1, εὐθαρίσαν (sic) 28/41, διεύθασας 44/28, διευθάρει 173/26 u. ö.

διαφθαρέν schreibt der Autor διαυθαρὲν 175/8 – vgl. auch das sonst nicht belegte Fremdwort aus dem Italienischen, ταυλέτα 109/30.

Bis auf das letzte Beispiel wurden die Formen in der Edition normalisiert und in den meisten Fällen im textkritischen Apparat vermerkt.

2.1.3 Gutturale

Bei einigen Wörtern mit doppeltem Guttural treten eigenwillige Schreibweisen auf:

ἐγκραφὼς 12/22 und ἐνγράφως 26/37, ἔγκιξα 69/6 u. ö. neben ἐγγιξα 72/10.11, σήνέγκης 55/23 u. ö. neben σύνὲγγις 10/7, ἀναγγεον 20/37 und αναυγκεον 20/36 bzw. αναυγκεα 92/28 u. ö. neben αναγκαῖον 3/26 sowie ἐπανανκαις 92/41

Der Autor schreibt manchmal χ statt κ und umgekehrt:
οὐχανόμοιος 15/20 = οὐκ ἀνόμοιος, ἐξάσχισας 92/39 = ἐξασκήσας, ἀρχεσθενταὶς 135/37, umgekehrt σκεδόγραφεὶν 109/30 = σχεδογράφειν.
Sämtliche Formen wurden normalisiert, zum Teil mit einem Vermerk im textkritischen Apparat.

2.1.4 Dentale

Zahlreiche Wörter werden mit θ anstelle mit τ geschrieben, manchmal finden sich auch beide Schreibweisen nebeneinander:
Wir finden durchweg μερισθής 27/10 u. o., πολλ(α)πλασιασθής 30/23 u. o., ἀπονέσθερα 92/37, ἀπονεσθέρως 93/4, πραγματευθής 101/23 u. o., δανησθης 128/16 u. ö. ähnlich, χονευθίριον 173/26 u. ö. ähnlich, παρογενέσθερα 95/14, προγενεσθέρων 103/37 u. ö. — im Unterschied zu δυσχερεστέρως, προχειρεστέρως, προχειρέστερον und προχειρέστατα (vgl. Abschnitt 2.2.3) —, ἔξεσθιν 12/27 und ähnlich 26/28, 46/13 neben sonst korrekter Schreibweise ἐστί, τελευθέας 14/36 neben τελευτέων 14/37 und σηνήσθανται 93/2 neben häufigen korrekten Formen von ἵστημι.
Bei ἐκθίναι 4/25 lässt sich nicht zweifelsfrei entscheiden, ob der Autor nicht doch ἐκθεῖναι (statt ἐκτεῖναι) meint.
Umgekehrt tritt stets ἐνταῦτα 78/12 u. o. (auch ohne Akzent) statt ἐνταῦθα auf. Eine entsprechende Verwechslung von τ und θ liegt auch den Schreibweisen μιξοῦ 135/38, ὁπιξεν 91/14 — neben ἔμπροσθεν in derselben Zeile —, ὁπιξορμητως 91/18 u. ö. und ὁπιξαπόδισε 130/31 zugrunde.
Die Formen wurden normalisiert, zum Teil mit einem Vermerk im textkritischen Apparat.

2.1.5 Liquidae

Assimilation unterbleibt bei συνλαμβάνειν 16/25.

2.1.6 Konsonantenverdopplung

Häufig ist eine eigentümliche Verdopplung von Konsonanten festzustellen — teilweise schwankt der Autor in seiner Schreibweise. So haben wir sehr oft τρίττος 4/19 neben seltenerem τρίτος 146/5, ebenso τέτταρτος 4/20 neben seltenerem τέταρτος 154/23. (Eine übliche Schreibweise hingegen ist ἔνναται 54/23.) Weitere Beispiele sind ἔννοσας 138/1 neben ἔνοσας 43/8 u. ö., ἔννουμενα 74/7.42 neben ἐνούμενα 55/12 u. ö. (und anderen korrekten Formen von ἐνόω) und εννούμενοι 74/20, ἐννααπὸμήναν 45/42, διειριμμένως 130/20 neben διειριμένως 130/25, και κριμμενον 135/24 = κεκριμένον, ἐννηττόμενος 80/27 = αἰνιττόμενος, ἐνν ἡμέραις 87/15 u. ö. neben ἐν ἡμέραις 88/37 u. ö.
Hingegen fehlt die Konsonantenverdopplung bei προριθεντων 92/27, προριθεντα 92/33 und κάναν 112/1 u. ö.
Die Formen wurden (bis auf das Längenmaß κάνα) normalisiert und teilweise im textkritischen Apparat vermerkt. Ansonsten vgl. in der Edition die Schreibweise von Wörtern mit zu tilgenden und zu ergänzenden Silben und Buchstaben mit Hilfe von eckigen bzw. spitzen Klammern.

2.1.7 Nasale vor π und φ

Neben seltenerem ἐμπόσες ἡμέρες 88/27 f. schreibt der Autor ἐν μπόσες ἡμέρες 85/7 u. ö. oder ἐν μπόσες ἡμέραις 89/20; ähnliche Formen in Anlehnung an die Volkssprache sind ἐμπροχείρω 4/22, ἐμφαντασήα 12/23 u. ö.

Die Aorist-Formen von συμφωνέω lauten σηνεμφόνισαν 80/36 und σηνεμφόνησαι 111/43. Ferner tritt bisweilen πένμπτον 4/21, πένμπτα 105/40 f. neben korrektem πέμπτον 5/22 u. o. auf.

Zur Transkription vgl. Abschnitt 2.1.6.

2.1.8 Schreibung des O-Lautes

Im Text tritt uns ein buntes Durcheinander bei Wörtern mit O-Laut entgegen: ο und ω werden sehr häufig miteinander verwechselt.

Allein auf den ersten Seiten finden wir z. B. πάντος 3/3 f., ἀφορόσι 3/8, γλότταν 3/22, όσαν 3/26 = ὡς ἂν, διλοτικὰς 4/25 neben δηλωτικός 4/14, ἀνὰγινόσκομεν 4/29, Πέρι τον 4/15, darüber hinaus φονὴς 26/41, das häufig wiederkehrende εν ταυτο 78/39 oder ἐνταὐτο 85/35 (= ἐν ταὐτῷ) und vieles mehr.

Das Beispiel πολούντως 80/26 zeigt zusätzlich auch die umgekehrte Schreibweise mit ω statt mit ο, die außerdem bei ὡς ἐστί 4/17 u. ö. = ὅς ἐστι, ὡστης 4/30 u. ö., τόπως 4/20 u. ö., πρωίσαται 4/32, παρωντα 5/11 u. ö., ἐν τὼς 12/17.18 neben ἐντὸς 8/7 u. ö., δώσεως 79/TA 6.7 und bei vielen anderen Wörtern zu finden ist. Die Imperative πολλ(α)πλασίασων 7/24 und μέρισων 27/41 werden durchweg mit ω geschrieben.

Die Formen wurden nur anfangs mit Vermerk, später stillschweigend normalisiert.

2.1.9 Verbformen mit auffälliger Lautung

Die *verba normalia* enden in der 3. Pers. Pl. des Ind. Präs. Akt. auf -οσι, z. B. ἐπέχοσι 4/21.

Die Formen wurden bewahrt und einmal am Anfang kommentiert.

Auch die Formen ἔννομενα 74/9.12 und ἔνομενα 59/28 zeigen eine Lautveränderung von ου zu ο – es sind aber Einzelfälle gegenüber den zahlreichen mit ου geschriebenen Formen von ἑνόω. (Vgl. auch αὐτο 33/22.29 statt αὐτοῦ, was aber beide Mal wohl nur auf eine Nachlässigkeit des Schreibers – siehe Abschnitt 2.4.4 – zurückzuführen ist. Umgekehrt kommt einmal versehentlich χρούνου 34/36 statt χρόνου vor.)

Bei den *verba contracta* auf -όω, stellenweise auch bei denen auf -έω, lautet die 3. Pers. Pl. des Ind. Präs. Akt. auf -ῶσι: z. B. δηλῶσι 5/43 u. o., πιῶσι 113/36, ἀριθμῶσι 129/31. Häufiger aber finden wir bei den Verben auf -έω die Bildung -όσι, z. B. ἀφορόσι 3/8 und sehr oft χοροσι 27/18.

Diese Formen habe ich in Anbetracht der unsicheren Schreibweise des O-Lautes (vgl. Abschnitt 2.1.8) stillschweigend einheitlich mit -ῶσι *wiedergegeben.*

Wechselnde Schreibweisen hat der Text bei den entsprechenden Passiv-Formen καλωνται 6/21, καλοῦνται 103/32 – im Unterschied zur einheitlichen Form οἰκειοῦνται 32/17 –, ähnlich bei ἐπιζητόμεν 6/37 (ἐπιζητῶμεν *in der Transkription*) und ἐρούμεν 4/14, ζητωντα 80/30, διλωντα 27/17, διλωντων 141/24.25 und διλουν-

των 141/22. Wir finden auch κινῶνται 88/23 neben κινουμενων 91/12. Eine Besonderheit stellt der Lautwechsel zwischen ω und ου bei πωλέω / πουλέω dar: So findet man πολὴ 80/28, πολη 113/25 u. ö. (πωλεῖ *in der Transkription*) und πολούντως 80/26 u. ö. (πωλοῦντος), aber stets πουλῶν 80/35, 112/10, 13 u. ö.
In der Edition wurden die wechselnden Formen mit ω *und* ου *beibehalten, nur bei* πωλέω / πουλέω *wurde auf die Formen von* πωλέω *vereinheitlicht.*
Die Aorist-Formen von κερδάω und χωρέω werden durchweg mit ε gebildet: ἐκέρδεσαν 38/11, ἐκέρδεσας 110/32, 111/9, ἐχόρεσαν 27/25, ἐχόρεσεν 28/26, χορέσας 51/33 – vgl. dagegen z. B. die stets mit η geschriebenen Formen ἐποίησας 111/11, κινήσας 85/1, ἐκίνησεν 85/3.
Die Formen von κερδάω *und* χωρέω *wurden im edierten Text beibehalten.*

2.1.10 Sonstiges

An einigen Textstellen finden wir merkwürdiges redundantes ε bzw. αι: ἀλλ᾽ ε ζ΄ ὄγδοα 55/1, ἀλλ᾽ε ρ΄ 73/4, αἱ ἓ ρ΄ λίτραι 109/20, 176/40, αἱ ἓ ρπ΄ λίτραι 178/1.2.5, πρὸσαἱ χάριν 175/19
ε *bzw.* αι *wurden in der Transkription jeweils kenntlich gemacht und eliminiert, die Formen* ἀλλ᾽ ε *durch* ἀλλὰ *ersetzt.*

2.2 Formenlehre

Soweit keine Bemerkung zur Transkription folgt, werden die Formen des Originals im Text beibehalten.

2.2.1 Genus

Verschiedene Substantive erscheinen – volkssprachlich bedingt – mit wechselnden Genera: Wir lesen ταῖς δυτικαῖς ... μέρεσι 3/16 neben τοῖς ἐπιζητουμένοις ... μέρεσι 3/7 f., οἱ ... ψῆφοι 61/12 f. neben τὰς ... ψήφους 60/25 f. u. ö., πᾶς ψῆφος 3/28 u. ö., ἀντὶ ἄλλου ψήφου 15/10 neben ἀντὶ ἄλλης τινὸς ψήφου 30/12, πᾶν ζητούμενον ἀριθμόν 22/17 f. u. ö., πᾶν ζητούμενον πολλ(α)πλασιασμὸν 14/7 f., (σ)χολεῖόν τινα 78/5, κινηθέντων νηῶν 90/5 u. ö. neben νῆαι ... κινηθεῖσαι 89/21, παγεωθεῖσα καὶ πλατυνθεῖσα ἡ μέθοδος 3/24 f. und ἐνωθεῖσαι αἱ ... λίτραι 184/22, δηλωθέντων μεταχειρίσεων 101/6 neben häufigem τῆς παρούσης μεταχειρίσεως 100/38 f., ἐπιπροσθέντος τῆς ἐπιβολῆς 172/12 u. ö. neben προστεθείσης δὲ ἐπιβολῆς 175/16 und anderes mehr.
Während die femininen Formen des Part. Aor. Pass. zurückgedrängt werden – der Genitiv Plural wird offenbar völlig vermieden –, tritt zuweilen eine feminine Deklination bei ansonsten zweiendigen Adjektiven auf, z. B. ἄνισαι 8/10, ὧσι ἀνόμοιαι αἱ ... μαρτυρίαι 46/1, διάφοραι δμάδαι 132/26, διάφοραι ξ΄ λίτραι 180/10 f. – vgl. διαφόρους ἰδέας 184/24 und andere Belegstellen mit zweiendigem διάφορος.
Eine weitere Merkwürdigkeit in diesem Zusammenhang ist das Relativpronomen ἥτις, das sich auf τόπος bezieht: 4/32, 4/34 u. ö. – korrektes ὅστις in Bezug auf τόπος kommt aber ebenfalls vor: 4/30, 4/36 u. ö.
Auch Kardinalzahlen und Zahlbuchstaben zeigen Schwankungen im Genus – vgl. Abschnitt 2.2.4.

2. 2. 2 Kasus

2. 2. 2. 1 Schluss-ν

Bei den Formen der Nomina, besonders im Nom. und Akk., beobachten wir ein häufiges Schwanken zwischen Endungen mit und ohne Schluss-ν.

Es treten die Formen ὅσο μεῖζο 6/12, μετ' ἐκεῖνο 38/32, μέρος ἐκεῖνο 41/31, ἄλλο τινὰ ἀριθμόν 14/42, ταύτη 3/24 statt ταύτην, ὅση 106/38 statt ὅσην, ἑκάστη 111/21 statt ἑκάστην, χάρτη 37/38 statt χάρτην, ἀνάπαλι 22/25 u. o., αὔξησι 45/26, πρὸς δήλωσι 38/23 u. o., εἰς ἀναπλήρωσι 78/2 und andere auf. Die meisten dieser Formen kommen aber auch mit Schluss-ν vor.

In der Transkription wurde das fehlende Schluss-ν in runden Klammern hinzugesetzt.

Umgekehrt findet man bei denselben Kasus anderer Nomina ein zusätzliches Schluss-ν: Beispiele hierzu sind εἰκόναν 5/3, 28 f. neben εἰκόνα 4/35, μῆναν 124/1 u. ö. neben μῆνα 124/33 u. ö., μάλαγμαν 173/33 u. ö. neben μάλαγμα 172/6, ζήτημαν 22/12 u. o., ὑπόδειγμαν 37/31 u. ö., κίνημαν 89/39, χάραγμαν 111/43 u. ö., χάλκωμαν 172/1. Fast durchgängig tritt ein Schluss-ν bei den Neutra auf -ι auf: μιλιούνιν 24/11, νοίκιν 78/6, μάλιν 111/39, μετάξιν 116/27, βηλάριν 120/15, μαργαριτάριν 165/21, ἀσήμιν 172/4. Ausnahmen sind die Maßeinheiten φλουρί 52/27 u. o., κουκκί 125/Diagramm u. ö., τουρνέσι 40/mittleres Diagramm u. ö., καντάρι 101/24 u. ö., κηντηνάρι 108/15.17 und δεκάρι 108/15 u. ö., die im Nominativ oder Akkusativ Sing. nur ohne Schluss-ν vorkommen, soweit man das an den abgekürzten Formen überhaupt erkennen kann — vgl. auch die Metrologie.

2. 2. 2. 2 Formen des Nom. und Akk. Fem.

Mitunter beobachtet man ein Vordringen der volkssprachlichen Nominalendungen auf -ες gegenüber -αι und -ας im Nom. bzw. Akk. Pl. Fem.; teilweise schwanken die Formen — sogar im selben Satz: κάνες 120/17, 121/12 neben häufigerem κάναι 120/17, 121/13. Beispiele für den Akkusativ sind εὗρες ... κάνες 117/16, ἔνωσον τὰς τέσσαρες ... δόσεις 129/20, ganz ähnlich 130/38 f., ἔνωσον τὰς τέσσαρες ὁμάδες 163/21, πόσες οὐγγίας ... ἔλαβεν καὶ πόσες κάνας (und hier nicht ... κάνες!) 114/27 sowie die häufig auftretende Form ἐν [μ]πόσες ἡμέρες 84/40, 85/7 oder ähnlich. Man könnte hierbei auch an echte Dative und Itazismus denken, was auch durch die Schreibweise ἐν μπόσες ἡμέραις 89/20 u. ö. eventuell nahegelegt wird. Ich glaube aber, dass der Schreiber im vorliegenden Fall eher den Dativ vermeidet und die volkssprachlichen Akkusativ-Formen meint, zumal πόσες als Akkusativ im Text gut belegt ist (s. o.).

Interessant ist, dass sich auch die Umkehrung der Entwicklung von -αι zu -ες im Nom. Pl. Fem. nachweisen lässt. Klassisch korrekte Formen auf -ες erhalten den Auslaut -αι, oder beide Formen konkurrieren miteinander. Es handelt sich um die Zahlsubstantive πεντάδαι 28/41, δεκάδαι 5/31 u. ö. mit der passenden Singularform δεκάδα 5/33 neben den deklinierten Formen von δεκάς, ἑκατοντάδαι 8/21 neben den Formen von ἑκατοντάς, χιλιάδαι 5/35.41 neben den Formen von χιλιάς, μυριάδαι 6/4.21 neben μυριάς 4/21, 5/18 und davon abgeleiteten Formen wie μυριάδος 5/33. (Der Akk. μυριάδαν 5/23.24 lässt sich

beiden Singularformen μυριάδα und μυριάς zuordnen – im letzteren Fall unterstellt man allerdings ein zusätzliches Schluss-ν.) Weitere Beispiele in diesem Zusammenhang sind ὁμάδαι 130/43 neben ὁμάς 130/42 u. ö. und ὁμάδος 131/30 u. ö., ψηφῖδαι 6/36 neben φηφῖδος 6/28 u. ö. und νῆαι 88/21, 89/21. Die klassischen Nominativ-Formen ὁμάδες, ψηφῖδες und νῆες kommen nicht vor, im Unterschied zu μῆνες 125/21, das mit μῆναι 125/12 konkurriert. Ungewöhnlich sind auch die beiden Komparative κρείττοναι 184/22 und χείροναι 178/30, ja sogar τιναί 89/21 und α(ι)τιναι 173/13 treten einmal neben sonst korrekten Formen auf.
Im Text wurden die wechselnden Formen der Substantive erhalten, die letzten vier Formen hingegen normalisiert; teilweise erfolgt noch ein Kommentar im textkritischen Apparat.

2. 2. 2. 3 Besondere Formen des Genitivs
Hier ist nur der Genitiv von μήν auffällig: μηνός 126/12, 127/7 u. ö. wechselt mit μήνου 125/12.33 u. ö.

2. 2. 3 Adverbien
Das Adverb des Komparativs zu δυσχερής lautet δυσχερεστέρως 26/31. Zu πρόχειρος finden sich die Adverbien προχειροτέρως 99/7, 141/23 u. ö., προχειρεστέρως 149/42, 159/16.21 und προχειρέστερον 154/16 für den Komparativ. Der Superlativ lautet προχειρέστατα 96/TA 3.

2. 2. 4 Buchstabenziffern und Zahlen
2. 2. 4. 1 Buchstabenziffern
Buchstabenziffern treten mit Artikeln im Singular oder im Plural auf, mitunter wechselt das Genus. Wir finden z. B. τὸ ϛ΄ 4/10 f. u. ö. oder τὸ οὐδέν 4/12 u. ö., τὸ α΄ 5/10 u. o. oder τὸ ἄλφα 4/8, τῶν ἄλφα 33/31, τὸ β΄ 4/28 u. o. oder τὸ βῆτα 4/9, τὰ β΄ 6/42 u. o., aber auch τῆς β΄ 6/29, ἡ θῆτα 7/32, τῆς θήτας 4/9 f., τῶν θ΄ 5/7.

2. 2. 4. 2 Kardinalzahlen
Einer, Zehner und Hunderter haben als Genus das Neutrum, z. B. τὸ ϛ΄ 8/26 u. o., τὸ α΄ 17/4 u. o., τὰ β΄ 9/14 u. o., τὰ λ΄ 143/28, τὰ ρν΄ 8/14, Tausender überwiegend das Femininum, z. B. αἱ ,κ΄ (sc. κ΄ χιλιάδαι) 143/29, τὰς ,ι,β΄ καὶ τνς΄ 19/35 – großenteils auch dann, wenn sie als Maßzahlen von Größen auftreten, die nicht feminin dekliniert werden. So finden wir z. B. τὰς δ α ϛ ε α ε΄ ⁝ (i. e. κουκκιά) 100/3 und zahlreiche andere ähnliche Formen, ja sogar τὰ α α γ θ ε΄ ⁞ (i. e. ὑπέρπυρα) καὶ ⁝ ϛ΄ γενόμεναι ⁝ β β ζ θ ϛ ϛ΄ καὶ μεριζόμεναι ... 96/29 f. (γενόμενα[ι] *bzw.* μεριζόμενα[ι] *transkribiert*); eines der weniger häufigen Gegenbeispiele hierzu ist τὰ ,ασλς΄ 19/2.
Die Zahl 1 lautet ausgeschrieben ἕνα 4/8 u. o., meistens nur in Verbindung mit einem Substantiv auch ἕν, z. B. ἓν γράμμα 44/23, ἓν σῶμα 59/13, hingegen ἕνα φλουρὶ ἢ ἕνα ζῷον 101/8. Die Genitive ἑνός 25/9 u. o. und μιᾶς 79/TA 6 u. ö. werden auch abgekürzt als $\overset{\circ\varsigma}{\alpha}$ (19^{r}/10 im Original) bzw. $\overset{\alpha\varsigma}{\circ}$ (59^{r}/30 im Original), in der Transkription aber einfach mit α΄ wiedergegeben – vgl.

16/29 bzw. 166/35.
Die Zahl 3 heißt ausgeschrieben τρία 4/18 u. o., selten τρεῖς 60/40. Die Zahl 4 ohne Verbindung mit einem Substantiv lautet τέσσερα 5/39 u. o., der Genitiv und Akkusativ aber stets τεσσάρων 5/39 f. u. o. bzw. τέσσαρας 5/4 u. o.
Vgl. auch Kap. VI, Abschnitt 2. 2.

2. 2. 5 Verbformen

Der Schreiber verwendet neben Formen des hochsprachlichen δίδωμι auch solche des umgangssprachlichen δίδω: So liest man einerseits δοῦναι 110/24, 113/26 u. ö., ἀποδοῦναι 122/20, ἐδόθη 115/27, δέδωκε 76/2 u. o., δέδωκαν 128/27, δεδωκώς 78/13 u. ö., δεδωκότων 78/27 u. ö., ἀπέδωκεν 135/34, 139/21 und ἀπέδωκαν 9/7, andererseits aber δίδει 113/30, δίδετε 78/6, δίδωσι 129/38.39 u. ö., ἐὰν δώσῃ (δώσϊ im Original) 78/2 u. ö., ὑπερδώσῃ 82/20, 83/14, ἀποδῶσαι 42/9 u. ö., ἀποδώσαντες 14/11 u. ö. und παραδώσαντες 26/36. An der Stelle 78/26 bleibt offen, ob der Autor klassisches διδόντες oder die neue Form δίδοντες meint.
Ebenso bunt ist das Nebeneinander der Formen von τίθημι und von θέτω: Als klassische Formen treten u. a. τιθέναι 101/38, τίθεμεν 5/19 u. ö., θέσθαι 44/8, τίθεσο 12/34.39, ἔθηκας 42/4 u. ö., προσέθηκας 43/16, προσθεῖναι 108/9 u. ö., προτ(ε)θέντων 106/40, ἐπιπροσθέντος 108/11, das sehr häufige θές 7/21, πρόσθες 25/3 u. ö., συντεθήκαμεν 37/32, ὑποτιθέμεθα 38/8, ὑποθείς 158/27, ὑποτεθήσομεν 38/9 sowie τεθειμένης 9/8, τεθειμένων 27/17 (aber häufiger die Ersatzformen für das Part. Perf. Pass., κείμενα 5/26 u. o., κείμεναι 5/35) auf. Ebenso finden wir die neuen Formen θέτειν 42/35, 44/38 u. ö., θέτεις 11/8.24, θέτε 41/28.30 (in unmittelbarer Nähe zu θές 41/33) und πρόσθετε 38/1.
Von εὑρίσκω kommen neben den starken auch schwache Aorist-Formen vor, z. B. εὕραμεν 82/44, 83/11 neben häufigem εὕρομεν 83/2. Das Futur Passiv lautet εὑρεθήσεται 24/12, 34/6.
Weitere bemerkenswerte Verbformen sind:
συνήλθωσαν 88/13 u. ö. statt συνῆλθον, ähnlich ἐξεπίπτοσι 114/4 statt ἐξέπιπτον; βούλεσαι 41/30, 106/39 neben βούλει 41/29 u. ö., ähnlich ζημιοῦσαι 111/14 statt ζημιοῖ;
κείτονται 59/TA 3 neben κεῖνται 33/34;
δηλεῖν 15/19, 16/12, 27/13 und ἐδήλει ἄν 71/14 neben den Formen von δηλόω, u. a. ἐδήλου ἄν 4/36 - 5/1, ähnlich ἵνα πάθειμεν 135/40 statt ἵνα πάθωμεν — vgl. auch die in Abschnitt 2. 1. 9 bereits genannten besonderen Formen von ἑνόω;
οἶδας 21/3 u. o. — εἶδας im Original geschrieben — neben seltenem οἶσθα (εἶσθα) 46/8;
ἵνα ἀποδίκτει 65/31 statt ἵνα ἀποδειχθῇ
Hier sei auch noch einmal auf die in Abschnitt 2. 1. 9 genannten Aorist-Formen von κερδάω und χωρέω hingewiesen.
πάθειμεν *und* ἀποδίκτει *wurden mit Vermerk im textkritischen Apparat normalisiert.*
Die Kopula εἶναι hat in der Regel noch die Rolle des Infinitivs, wie die zahlreichen Formen ἐστί und εἰσί belegen. Nur an einer Stelle (148/9) finden

wir das mit εἶναι gleichbedeutende ἔναι als Ersatz für ἐστί oder εἰσί.
Eine besondere Beachtung verdient die Augmentierung, die bei manchen Verben in Anlehnung an die Volkssprache vernachlässigt wird: Von ἑνόω, ἐρωτάω und ὀβελίζω finden wir durchweg die Formen ἕνωσας 14/3, 43/8, 80/10.11 u. ö., ἐρώτησεν 78/5 f., 80/28 und ὀβέλισας 35/37, von ἀγοράζω die Formen ἀγόρασεν 101/23, 105/15 u. ö., ἀγόρασες 166/28 (= ἀγόρασας), aber auch ἐγόρασεν 102/31 *(im Text zu* ἠγόρασεν *normalisiert).* Ebenfalls nicht augmentiert wird das mit Diphthong anlautende οἰκειόομαι (οἰκειώσατο 53/21 u. ö. statt ᾠκειώσατο).
Umgekehrt treten ἐπροσέθηκας 79/4 mit doppeltem Augment und die merkwürdige augmentierte Imperativform ὑπέθου 77/11, 78/12.20, 79/13 u. ö. auf. (Hingegen ist an den Stellen 77/20, 83/21 u. a. ὑπέθου die normale Aoristform der 2. Pers. Sing. Medium.)
Andere bemerkenswerte Imperative bilden κόπτω und ἀποδέω im Aorist: Wir finden das häufige κόψε 5/41.42 (nie κόψον) und ὀπισθαπόδησε 130/31, während die entsprechenden Imperative aller anderen Verben auf -ον lauten. An der Stelle 5/42 schreibt der Autor κόψε ... καὶ γράψον.
Des Weiteren hat ἄρχομαι als Imperativ Aorist stets ἄρξου 6/27, 13/16.21, 102/3 u. ö., der Imperativ Präsens ἄρχου 129/28 kommt sonst nur an wenigen Stellen vor.
Nur selten ist eine Vernachlässigung der Perfekt-Reduplikation festzustellen. Man findet nur die Formen γενήμεθα 92/34 und καματεμένον 113/28 *(jeweils mit Vermerk im textkritischen Apparat),* andererseits korrektes γέγονε 3/21, 9/9 u. ö.; das sehr häufige γένηται lässt sich wohl in allen Fällen als Form des Konjunktivs Aorist erklären – als Beispiele seien genannt: ὡς ἂν ... γένηται 92/37, ἐπάν ... γένηται 92/40, εἰ ... γένηται 15/5.7 (Verwechslung mit ἐάν), ὅσος γένηται ... ὅσα γένωνται 96/33.36 (Vernachlässigung von ἄν). Vgl. hierzu auch den Abschnitt 2. 3. 7.
Im Abschnitt 2. 1. 6 wurde bereits auf die Konsonantenverdopplung hingewiesen, die bei manchen Verbformen – darunter auch Perfekt-Bildungen – zu beobachten ist.

2. 3 Syntax

2. 3. 1 Kongruenz von Subjekt und Prädikat

Das Prädikat zu einem Subjekt im Neutrum Plural steht häufiger im Plural als im Singular, z. B.: τὰ ... σημεῖα δηλῶσι 5/5 f., ἐπεὶ δύο γράμματά εἰσι 6/1. Gegenbeispiele sind τὰ ὄντα ... ῥᾴδια ὑμῖν γενήσεται 27/6 f., περισσεύει ... κουκκιὰ μ΄ 78/4. Ein schönes Beispiel für schwankendes Prädikat ist die Kapitelüberschrift 71: Περὶ τοῦ πῶς τὰ ἐφεξῆς ῥηθησόμενα ζητήματα τῶν πρακτικῶν καὶ πολ(ι)τευομένων ἐστί, διὸ καὶ χρησιμώτερα τῶν προρ<ρ>ηθέντων εἰσί 92/26 f.
Gelegentlich wird auch ein Subjekt im Mask. oder Fem. Plural mit einem Prädikat im Singular verbunden: ἐπεὶ οὖν ἐστι ὅμοιοι οἱ δύο πολλ(α)πλασιασμοί 97/20, αἱ ε΄ δὲ οὐγγίαι ἐστὶ ἔλαττο τῶν θ΄ οὐγγιῶν οὐγγίας δ΄ 180/27.

2. 3. 1 Dative

Der Schwund des Dativs ist ein typisches Merkmal für Texte aus spätbyzan-

tinischer Zeit. In den Metaphrasen zu hochsprachlichen Werken lässt sich explizit feststellen, wo und wie der Autor den klassischen Dativ vermieden oder umgangen hat – vgl. HUNGER (1981, S. 158–164) und HUNGER/ŠEVČENKO (1986, S. 213–217).

Im vorliegenden Text kommen noch zahlreiche echte Dative vor – hier einige Beispiele: τοῖς ἐπιζητουμένοις ... μέρεσι 3/7 f., καὶ τῇ συναναστροφῇ καὶ πυκνῇ 3/18 f., ὑμῖν ἐν διαφόροις ὑποδείγμασι παραδηλώσαντες 12/27, ἐν ἐκείνῳ 15/18, das sehr häufige ἐν φαντασίᾳ μόνῃ 20/39, τῇ πείρᾳ 26/34, τοῖς βουλ(ο)μένοις 27/4, τὸ μέρος ἐκεῖνο, ᾧ βούλει διαμερίσαι ... τὰ μείζονα 41/31, τῷ πρώτῳ γράμματι 42/21 f., ὁδῷ προβαίνοντες ἐν τῷ οἰκείῳ τόπῳ 44/18, ἀνήκοντα τῷ τζακίσματι 53/27, ἀνήκοντα τῇ μεριστῇ 53/27 f., ὡς ἐν συντόμῳ εἰπεῖν 55/1, εὗρες αὐτοὺς τῷ ἀριθμῷ ὄντας λς΄ 77/42, ἐν ᾧ 123/22, ἐν διαφόροις μησὶ 128/20, τῇ ἀληθείᾳ 130/25, διαμερίζων αὐτοῖς 135/33, τῷ ἔχοντι 175/27

Doch schon von den ersten Seiten an hat der Autor den Dativ mitunter durch den Akkusativ ersetzt, z. B. ἔδειξεν ἡμᾶς προχειροτ(ά)την καὶ ἀσφαλῆ μέθοδον 3/14, ἡμᾶς ὁ χρόνος δῆλον τοῦτο ἐποίησε 3/22 f., ὥστε περιττεύειν σε ψήφους τινὰς 42/9. Dementsprechend neigt er auch dazu, εἰς c. acc. der Präposition ἐν c. dat. vorzuziehen, z. B. εἰς ... τόπον εὑρισκόμενον 4/32 u. o., εἰς τόπον ... ἵσταται 4/34, καθὼς εἰς τὸ ἑξῆς δηλώσομεν ἔτι τοῦτο σαφέστερον 29/11, ἔχει πλέον εἰς ... τὴν πρώτην θέσιν φλουριὰ ε΄ 82/7, διεφθάρη ... εἰς τὸ χωνευτήριον 173/26 u. ö.; einmal finden wir auch ἐν c. acc.: ἐν τὸ ... κατάστιχον 128/17 f. – vgl. auch Abschnitt 2. 3. 4.

Die Unsicherheiten zeigen sich besonders typisch an den Schwankungen zwischen Dativ und Akkusativ in Verbindung mit denselben Verben:

λανθάνουσα ταῖς δυτικαῖς ... μέρεσι 3/16 – ἐλάνθανε ... ἡμᾶς τοὺς τὴν Ἑλληνικὴν γλῶτταν ἐπισταμένους τὸ ... ἐγχείρημα 3/21 f.,

τί περιέρχεται τοῖς ,β΄ στρατιώταις 40/36 f. – τί περιέρχεται ἕκαστον τῶν ,β΄ στρατιωτῶν 39/37,

λείπονται αὐτοῖς κουκκιὰ λ΄ 78/14 – τὰ ... ς΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ λείπονται τὰ ξδ΄ ὑπέρπυρα πρὸς τὸ γενέσθαι ὑπέρπυρα ο΄ 58/37 f.,

δώσω σοι, ὅσα ἄν μοι ζητῇς 80/34 – ζητεῖ δὲ τὸν ἀγοράζοντα 82/18 f.

Teilweise wandelt der Schreiber seine eigenen Dativ-Konstruktionen an anderer Stelle so ab, dass der Dativ umgangen wird:

τῷ μεριστῇ συγκρινόμενον 29/3 – πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον 50/3,

Θὲς ... ἐν συγκρίσει 78/29 f. – γράψον σύνεγγυς 57/17,

τούτῳ οὖν τῷ τρόπῳ 140/26 – κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον 13/26, 157/31

Der falsche Gebrauch des Dativs bei ἑκάστη ἀποπληρώσει τῷ διαστήματι 90/7 f. und ἕκαστος ... περαιώσει τῷ διαστήματι 91/15 ist als Überkompensation zu sehen und belegt noch einmal die Unsicherheit des Autors.

2. 3. 3 Akkusative

Ein eigentümlicher Akkusativ tritt in der Wendung ὡς καὶ τὸν πρῶτον σύντροφον - τὰς η΄ δηλονότι οὐγγίας 179/24 f. (ganz ähnlich 181/12.13.19.20) auf. Offenbar ersetzt der Akkusativ hier eine Präpositionalkonstruktion ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου συντρόφου ... mit der gleichen Bedeutung ("wie beim ersten Gesellschafter ...").

2. 3. 4 Präpositionalkonstruktionen

Gelegentlich konstruiert der Schreiber Präpositionen mit einem Kasus, der hochsprachlich nicht korrekt ist – dazu einige Beispiele *(teilweise im textkritischen Apparat vermerkt).*

- ἀπό: ~ τὸ ε΄ 7/7, ~ τὸν ... τόπον 1 /21, ~ τὸ ϛ΄ 14/24 f., ~ τὰ ξδ΄ 73/5, ~ τὰ ρμδ΄ 73/6, ~ τὰς κ΄ ἡμέρας 88/15 (neben ~ τῶν λ΄ ἡμερῶν 88/14), ~ τῇ δεκάτῃ τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου) 129/14 u. ö.
- ἐκ: ~ τὸ ... ϛ΄ 35/14 (neben ~ τῶν ο΄ 35/15), ~ τὸν γεγονότα πολλ(α)πλασιασμόν 94/17 f.
- ἐν: ~ τὸ ... κατάστιχον 128/17 f. – vgl. auch Abschnitt 2. 3. 2
- ἐπί: ~ τὸν ... τόπον 5/30 u. ö. in der Bedeutung "bei", ~ τὸν διαμεριζόμενον ἀριθμόν 53/35 in der Bedeutung "von"
- μετά: ~ τὸ ϛ΄ 8/26 in der Bedeutung "mit", ~ τῶν ι΄ ἡμερῶν 86/15 in der Bedeutung "nach"
- μέχρι: ~ τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρ(ίου) 129/15
- πρό: ~ ι΄ ἡμέρας 86/TA 9

Insgesamt überwiegen aber die hochsprachlichen Konstruktionen.

2. 3. 5 Komparative

Die Komparative πλέων, ἔλαττων, μείζων und κρείττων werden außer mit Genitiv auch mit ἐκ oder – mit Ausnahme von κρείττων – mit ἐπί konstruiert. Dazu jeweils ein Beispiel:
πλέον τῶν 59/18 – πλέον (...) ἐκ 59/8 f., 78/25 – πλέον ... ἐπί 66/33 f.,
ἔλαττο(ν) ... τῶν 179/1 f. – ἔλαττο ἐκ 78/18 f. u. ö. – ἔλαττο ... ἐπί 66/40,
μείζονά ... τῶν 133/9 – μεῖζον ... ἐκ 66/7 u. ö. – μεῖζον ... ἐπί 65/4,
κρείττον<ες> τῶν 178/28 f. – κρεῖττον ... ἐκ 176/32

Bei πλέων, ἔλαττων, μείζων, κρείττων und χείρων tendiert der Schreiber zur Verwendung der adverbialen Formen in Fällen, wo deklinierte Adjektiv-Formen stehen müssten; es bleibt aber unklar, ob er Adverbien oder Neutra meint:
πόσαι λίτραι πλεῖο τῶν ,αφ΄ ἐγένοντο 110/31, αἱ ... οὐγγίαι ἐστὶ ἔλαττο τῶν ϑ΄ οὐγγιῶν 180/27 u. ä. öfter, ἡ ἄνω μεῖζο ὁμὰς τῆς ... ἔλαττο οὔσης ὁμάδος 134/35 f., αἱ ... οὐγγίαι εἰσὶ κρεῖττον 180/22 u. ä. öfter, τὰς ι΄ οὐγγίας, ἅς εἰσι χεῖρον αἱ ἔλαττον οὖσαι τῶν ϑ΄ οὐγγιῶν 180/35 und andere Beispiele mehr
Die auffälligen Formen wurden teilweise im textkritischen Apparat mit einer Bemerkung versehen.

2. 3. 6 Imperativ-Formen und Aktionsarten der Tempora

Bei der Fachsprache im Umkreis der schriftlichen Rechenverfahren fällt auf, dass der Imperativ der Verben entweder fast überall im Aorist oder fast überall im Präsens erscheint. Unterschiedliche Aktionsarten scheint der Schreiber dabei kaum berücksichtigt zu haben.

So finden wir generell ἔνωσον 7/30 u. sehr oft, ἄφελε 7/40 u. sehr oft, κόψε 5/41 u. o. sowie in überwiegender Mehrheit πολλ(α)πλασίασον 7/23 f. u. sehr oft, μέρισον 7/41 u. sehr oft, ποίησον 27/28 u. sehr oft, ὀβέλισον 27/26 u. o., λάβε 8/42 u. sehr oft. Nur sehr selten treten πολλ(α)πλασίαζε 13/17.26.27, 42/33, μέριζε 44/41, ποίει 44/22, ὀβέλιζε 37/41, 42/22, 44/8 und λάμβανε 13/11,

44/41 auf. Hingegen heißt es stets σκόπει 14/20 u. ö. und κράτει 14/22 u. o. (hier direkt neben λάβε).
Auch bei ἐκπίπτειν findet ein willkürlicher Tempuswechsel statt: Neben den Aorist-Formen ἐξέπεσον 111/14, 113/1 und ἐξέπεσεν 113/10 treten die Imperfekte ἐξέπιπτε 113/29, 116/33 und ἐξεπίπτοσι 114/4 auf.

2. 3. 7 Perfekt- und Plusquamperfekt-Formen

Die weitgehende Vermeidung oder Umgehung von Perfekt- und Plusquamperfekt-Formen in umgangssprachlichen Texten, die in byzantinischen Metaphrasen zu hochsprachlichen Werken eingehend untersucht wurde — vgl. HUNGER (1981, S. 169–172) und HUNGER/ŠEVČENKO (1986, S. 221–227) —, scheint auch für unser Rechenbuch typisch zu sein, wie die folgende, ziemlich vollständige Formenliste belegt. Wir finden außer den bereits erwähnten Formen von δίδωμι, τίθημι, γίνομαι und καματεύω — vgl. Abschnitt 2. 2. 5 — z. B. nur πέφυκε 4/24 u. ö., δεδήλωκε 65/32 u. ö., δεδηλώκαμεν 16/5.18 u. ö., νενοημένον 21/4, τετελεσμένον 37/32, μεμάθηκας 41/28, 108/4, συμβεβηκότος 42/2.24, σεσημειωμένα 44/10, διηρτημένα 65/7, ἀποδέδεικται 73/9, μεμονωμένους 73/33, συνημμένους 77/6, συμπεφωνημένου 78/4, σεσοφισμένως 80/26, εἴληφα 80/32, γεγράφαμεν 92/28, μεμειγμένη 93/15 f., προειρημένα 120/21 f., διειρημένως 130/25 u. ö., διειρημένας 130/39, κεκριμένον 135/24, λεληθότως 135/39, προσείληφε 135/39 sowie als einzige Plusquamperfekt-Form ἐγεγράφεσαν 92/29, während die Formen des Aorists bei Weitem dominieren.
In der Hochsprache würde man hier anstelle von ἐγεγράφεσαν das Passiv (ἐγέγραπτο oder γεγραμμένα ἦσαν) erwarten. In diesem Zusammenhang sei auch auf die merkwürdige Verwendung von εἰδώς in aktiver und passiver Bedeutung hingewiesen: Vgl. z. B. μὴ εἰδότες δὲ ἡμεῖς 78/10 mit τὸ μὴ εἰδὸς χρυσίον 175/18.

2. 3. 8 Modi und Tempora in Haupt- und Nebensätzen

Wegen der Itazismen und der wechselnden Schreibung der O-Laute ist bei vielen Konstruktionen nicht erkennbar, ob der Autor den Indikativ oder den Konjunktiv meint. In der Transkription wurde in solchen Fällen jeweils der Modus gewählt, der hochsprachlich vorgeschrieben ist oder — wie etwa der Konjunktiv als üblicher Ersatz für den Optativ — grammatisch korrekter erscheint; eindeutige Indikative und Konjunktive des Schreibers wurden natürlich belassen.
Die folgenden Angaben über die Modi sind auf der Grundlage dieses Transkriptionsgrundsatzes zu verstehen.
Der Potentialis wird im Hauptsatz in der Regel wechselweise mit Indikativ und Konjunktiv, im Nebensatz meistens mit Konjunktiv konstruiert: οὐκ ἂν ἔχῃς καλῶς καθορᾶν τὰς ψήφους 37/30, ἔχῃς ἂν καλῶς διαμερίσαι 46/17 f.; καλῶς ἂν καὶ διὰ τῶν τριῶν λέγεται 70/11; εἶπεν ἄν τις 140/34; τὸ ... ἔλαττο ... δικαίως ἂν λέγοιτο τζάκισμα 46/5 ist die einzige Optativ-Konstruktion im Text.
Beispiele für den Potentialis im Nebensatz sind ὡς ἂν εἴπῃ τις 29/1, 172/4 f. u. ö., ... ἢ ὅσων ἂν εἴπῃς πλειόνων ἢ ἐλαττόνων ἐξαγίων ποσότητα 175/19 f. und οὐκ εἶπον, ὅτι ἐσμὲν ἄν(θρωπ)οι τόσοι, ἀλλ' εἶπον, ὅτι ἡμεῖς ... ἐσόμεθα ἂν ἄν(θρωπ)οι ρ΄ 77/7 ff.

Allerdings vertritt ὅτι hier nur einen Doppelpunkt, wie folgende andere Sätze belegen: λέγομεν, ὅτι ἄφελε τόδε καὶ τόδε ... ὀβέλισον 37/31; ἀρξάμενος δὲ λέγειν, ὅτι πρόσθες τόδε καὶ ἄφελε τόδε ... 37/32 f.; τοῦτο δέ, ὅπερ εἴπομεν, ὅτι πρόσθες ϛ´ ... 43/11

Mit εἰ und ἐάν eingeleitete Konditionalsätze werden offenbar beliebig mit Indikativ oder Konjunktiv konstruiert, z. B. εἰ ... τελεσθῶσι 14/23, εἰ δὲ γένηται 15/7, εἰ διαιρεθῶσι 15/9 f., εἰ ... λάβῃς 44/8, εἰ ... εὑρεθῶσι 45/42 f., εἰ ... ὦσι 46/1; ἐὰν ... ὑπέσχετο 122/32.34

Die Konjunktionen ὁπόταν und ὅταν werden in der Regel mit dem Indikativ konstruiert: ὁπόταν ἐστὶ τὰ ῥέτουλα ... 108/1; ὅταν οὖν ἐστι τὸ κέρδος ... 158/2 in unmittelbarer Nachbarschaft zu ὅταν δὲ τὸ κέρδος ἔχει 158/3 f., weswegen in der Transkription nicht ἔχῃ gewählt wurde

Beim irrealen Satzgefüge tritt mitunter wieder ἐάν c. ind. auf: ἐὰν ... ὁ ... τόπος ... εἶχε δ´, ἐδήλου ἂν ... 6/12 f., ἐὰν δὲ ... ἦν τρία ... mit Präsens δηλῶσι ohne ἄν im Hauptsatz 5/26 f.

Auch bei mit εἰ konstruiertem Irrealis fehlt zuweilen ἄν: εἶχες ... ἀφελεῖν, εἰ τὰ ἄνωθεν ... ἦσαν ... 133/9 f.

Häufig steht beim Irrealis (der Gegenwart?) das Prädikat des Hauptsatzes im Aorist: εἰ μὲν ... ἦν θ´, ... ἔθηκας ἂν ... 27/11 ff., εἰ ... οὐκ ἐχώρει ..., ἔθηκας ἂν ... 28/15 ff., εἰ δὲ ... εἶχες ..., οὐκ ἂν ἀφεῖλες ... 33/6 f.

Hochsprachlich korrekt konstruierte Irreales sind z. B. εἰ δὲ ... εἶχε ϛ´, ἐδήλου ἂν ... 4/36–5/1 (ganz ähnlich 6/13) und εἰ δὲ ... ἔλαβες ..., ἐγένοντο ἂν ... 141/20.

Indefinite Konditionalsätze werden meistens mit κἄντε - κἄντε eingeleitet, das (ebenso wie das klassische εἴτε - εἴτε) disjunktive Bedeutung hat ("sei es, dass – sei es, dass" bzw. "ob – oder"). Der Modus dieser Sätze schwankt zwischen Indikativ und Konjunktiv: κἄντε β´ ἐστὶ κἄντε α´ 15/30 f., κἄντε ἐλάττω ἐστὶ κἄντε καὶ πλείω 22/18, κἄντε πρὸς τὸ μεῖζον ἀφορῶσι κἄντε πρὸς τὸ ἔλαττο 3/8, κἄντε εἰς ϛ´ καταλήξῃ, κἄντε ἔχῃ τι ἔλαττο τῶν ζ´ 15/16, κἄντε φλουριὰ διαμερίζῃς κἄντε ὑπέρπυρα κἄντε τι ἕτερον 53/11 f.

Auch der Modus in abhängigen Fragesätzen schwankt: Wir finden Περὶ τῆς τούτων μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως, ἐὰν καλῶς ἢ οὐ καλῶς ἐγένετο τὸ ζητούμενον 7/36 f. (Überschrift von Kap. 7), ähnlich 16/20 f., σκόπει ... καλῶς ..., τίνες ἂν ἀριθμοί εἰσι ἐπιστρεπτικοί 46/15 f., andererseits σκόπει, ποῦ ἂν ᾖ ὁ τῆς χιλ(ι)άδος τόπος 6/28, καὶ ἔνθα ἂν καταλήξωσι ... αἱ ... ἡμέραι, ... ἐκεῖσέ ἐστι ἡ ἀρχή 130/33 f.

Hingegen ziehen die mit ἄν verbundenen Temporalkonjunktionen ἐπάν, ἐπειδάν und μέχρις ἄν regelmäßig den Konjunktiv nach sich: ἐπὰν δὲ τελέσῃς ... 44/22, ἐπάν σοι γένηται ... 92/40, ἐπειδὰν σημανθῶσι ... 76/29, μέχρις ἂν οὕτως ποιῶν τελέσῃς ... 42/23, μέχρις ἂν ἔχῃς σχίσαι καὶ διαμερίσασθαι 50/15, μέχρις ἂν πληρώσῃς ... 130/32

Ein buntes Nebeneinander der Modi bieten aber wieder die Relativsätze mit ἄν. Beispiele für den Indikativ sind ὅσα ἂν ἕτερα ... μέρη πέφυκε γίνεσθαί ... 4/23 f., καὶ ὅσοι ἂν ἀριθμοὶ ... εἰσι ἐπιστρεπτικοί 46/17, ὅσα ἂν ... τὸ τζάκισμα ἔσχισας 50/11. In unmittelbarer Nähe zur letzten Belegstelle finden wir aber auch εἰς ὅσα ἂν μέρη σχίσῃς 50/14, und zahlreiche weitere konjunktivi-

sche Relativsätze, teilweise auch unter Vernachlässigung von ἄν, begegnen uns im Text, z. B. ὅσα ἂν ἄλλο ... ἔχῃς 13/7, ὅσα καὶ ᾖ 13/14 u. ö., ὅσος γένηται ... ὅσα γένωνται 96/33.36, καὶ ὅσαι λίτραι γένωνται 184/31 f. — vgl. auch den Abschnitt 2. 2. 5. (In diesem Zusammenhang sei noch einmal auf die eigenartige Konstruktion ... τόπος, ἥτις ... hingewiesen — vgl. Abschnitt 2. 2. 1.)

Sehr zahlreich sind die Satzkonstruktionen mit relativischer Angleichung, z. B. ... τῶν δηλωτικῶν ψήφων, ὧν ἐπιζητῶμεν εἰδεῖν 6/37, ... μετὰ τοῦ α΄, οὗ κρατεῖς 21/36. Bei einigen Relativsätzen besteht nun die Besonderheit darin, dass das Relativpronomen auch dann angeglichen wird, wenn es nicht Akkusativ-Objekt ist: μετὰ τῶν ἄνωθεν ε΄, ὧνπερ δηλῶσι ν΄ 8/18. Darüber hinaus kann das Relativpronomen sogar im Akkusativ des Bezugswortes stehen, z. B. ὡς πρὸς ... τὰς ἡμέρας, ἃς παρῆλθον 158/39.

2. 3. 9 Infinitiv-Konstruktionen, absoluter Nominativ

Der Nominativ mit Infinitiv (n. c. i.) tritt zuweilen an die Stelle des hochsprachlichen Akkusativs mit Infinitiv (a. c. i.) — dazu einige Beispiele: τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν κδ΄ φλουριῶν, ὧν ὑπέθου ἔχειν ὁ ἀγοράζων 80/42—81/1, fast genauso 81/8, ὁ μὲν ἀγοράζων εἴπομεν ἔχειν φλουριὰ κδ΄ 84/35, πόσας λίτρας χάλκωμαν χρὴ προσθεῖναι ... πρὸς τὸ γενέσθαι ἑκάστη λίτρα οὐγγιῶν ϑ΄ 172/1 f. (Überschrift zu Kap. 110), ποίησον ... τὰς ιβ΄ οὐγγίας, ἃς ζητεῖς γενέσθαι ἑκάστη λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν ιβ΄, μισὰς ... 173/18 ff., βούλ(ει) δὲ ποιῆσαι τοῦτο ἔχειν ἑκάστη λίτρα καθαρὸν ἀσήμιν οὐγγίας ϑ΄ 176/23.

Im folgenden Satz tritt der Infinitiv unvermittelt an die Stelle eines *verbum finitum*: δέδωκε γὰρ αὐτοῖς ... ὑπέρπυρα ... καὶ ἀρκεσθέντας ἔχειν (hochsprachlich: ἀρκεσθεὶς ἔχει) ἕκαστος αὐτῶν τὸ οἰκεῖον καὶ ἀνάλογον μέρος 135/36 f.

Ein absoluter Nominativ findet sich auf der ersten Seite: ἵνα δὲ μή ... παρασκευάσῃ ὁ χρόνος οὔπω καλῶς παγεωθεῖσα καὶ πλατυνθεῖσα ἡ μέθοδος ... 3/23 ff.

2. 3. 10 Partizipialkonstruktionen

Der Autor verwendet im Bemühen um eine gewählte Ausdrucksweise zahlreiche Satzkonstruktionen mit *participium coniunctum*. Einige wenige Beispiele sind οὕτω δὲ ποιῶν εὑρήσεις καλῶς ... 14/7, καὶ τὴν ἀρχὴν τούτου ἐπιζητῶν ὑπερέβης τὸ μέσον 37/34 f., Τοὺς ἐπιμερισμοὺς ... ὑποτιθέμενοι καὶ ... δηλώσαντες ... δέον ἡμῖν ἔδοξε εἶναι ... 41/23 ff., εἰ μὲν ὅλον λάβῃς μὴ ἔχων θέσθαι ἄνωθεν τούτου περισσόν ... 44/8, μὴ εἰδότες δὲ ἡμεῖς, πόσοι εἰσὶ οἱ ἐσθίοντες, πῶς ἔχομεν τούτους εἰδέναι; 77/9 f., μὴ οὖσα δὲ ταχείας κινήσεως κινεῖται ... 90/10, τοιαῦτα οὖν ὄντα καὶ ἀναγκαῖα καὶ χρήσιμα - ἐροῦμεν πάντα ἐντεῦθεν ἀρξάμενοι 93/3 ff., πολλ(α)πλασιάσας δὲ τοῦτο ... πάλιν ἄρξου ... 102/2 f., ... ἀλλὰ καὶ ... ιε΄ κουκκιῶν σῶμα ὑποθεὶς εἶναι τὸ τῆς νηώς ... εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον ... 158/27 f.

Besonders auffällig sind die in der Schrift-Koine nicht mehr gebräuchlichen zahlreichen *genitivi absoluti* im vorliegenden Text — hier eine Auswahl: καταληφθέντων δὲ τῶν τρόπων τῆς τούτων εὑρέσεως 26/32 f., τί περιέρχεται τοῖς ,β΄ στρατιώταις ἀκεραίων ὄντων τῶν π΄ τουρν(ε)σίων 40/36 f., εἰ δὲ ἀκεραίου ὄντος τοῦ τζακίσματος καὶ τοῦ μεριστοῦ οὐ δύνασαι κατανοῆσαι ... 50/7 f.,

προστεθέντων τῶν ν΄ ὑπερπύρων 51/20 f., ἐνωθέντων τούτων πάντων 56/10, προστιθεμένου δὲ τοῦ ἑνὸς ὀκτακαιδεκάτου 59/25, χρείας καταλαβούσης 86/20, ταχυτέρας τε οὔσης καὶ βραδυτέρας 89/20, αἰτίας εὐλόγου κωλούσης 89/23, ἐνωθέντων τῶν οἰκείων μερῶν 137/28, γενομένου δὲ τούτου 154/30, ἐπιπροσθέντος τῆς ἐπιβολῆς 172/12 u. ö., γενομένου δὲ τοῦ ἔργου 175/25, οὕτω δὲ γενομένου 177/42

2.4 Weitere stilistische Besonderheiten

2.4.1 Attizismen

Eine weitere stilistische Eigentümlichkeit des Autors ist der Gebrauch der attischen Formen von περισσεύειν und περισσός: Wir finden περιττεύειν 42/9, περιττεύει 7/25.41, 10/3 u. ö. neben häufigerem περισσεύει 8/32, 10/12, 12/2 u. o., περιττεύοσι 8/7, 10/4 neben häufigerem περισσεύοσι 8/35, 9/2, 10/6 u. o., περιττεῦον 16/14 f., 178/38 neben häufigerem περισσεῦον 16/16, 44/25, 60/11 u. ö., περιττεύοντα 131/36 neben περισσεύοντα 8/40, 13/3 u. ö., περιττόν 14/37, 44/9 und περιττά 101/5 neben περισσόν 14/18.30 u. ö. und ähnliche Formen.

2.4.2 Anakoluthe

Im krassen Gegensatz zu den Formen der hochsprachlichen Syntax und zu den Attizismen stehen aber die Anakoluthe, die dem Schreiber immer wieder unterlaufen. Stellvertretend für zahlreiche andere Beispiele seien genannt:
καὶ ἰδοὺ τὰ ιε΄ μετὰ τῶν ς΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα ... εὕρες, ὅτι γίνονται ς΄ 7/34 f., ὥσπερ γὰρ διαμεριζόμενα τὰ ωις΄ μετὰ τῶν ς΄ γίνεται ὁ τούτων τέλειος διαμερισμὸς ρλς΄ 30/16 f., μεριζόμενα δὲ τὰ π΄ ἐπὶ τοσούτων, ..., ζητεῖς εἰδέναι ... 40/38 ff., ἐνεργοῦντες δὲ οἱ τρεῖς τὸ ζητούμενον καλῶς ἂν καὶ διὰ τῶν τριῶν λέγεται 70/10 f., πόση γίνεται ἡ τούτων ποσότης ἀπαρχῆς μέχρι τέλους ἐν[ν]ούμενοι 73/34, καὶ ὁ μὲν πωλῶν εὕρες, ὅτι ἔχει φλουριὰ ις΄... 81/2, ... ὁ μὲν ιε΄, ὁ δὲ κε΄, ἃ καὶ ἑνώσας ἐγένοντο μ΄ 92/22, ,α΄ δὲ ἐκ τῶν ,α΄ ... ἀφελόμενος ἀπομένει οὐδέν 133/32, ... ἓν σῶμα γενόμενον ... ἔχεις εἰδέναι καλῶς ... 178/15 f.

2.4.3 Pleonasmen

Des Weiteren fallen die zahlreichen Pleonasmen auf, z. B. μέθοδός τε καὶ μεταχείρισις 3/2, τοῦ πρώτου μεγέθους καὶ τῆς τούτου ποσότητος 3/5, μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως 7/36 (Überschrift von Kap. 7), ἀριθμοί τε καὶ ψῆφοι 73/35, τὴν δεσπότην καὶ κύριον 86/20, διδάσκαλός τε καὶ ὁδηγὸς 92/36, ἡ δὲ ἐπιβολὴ καὶ προσθήκη 173/35, κουκκιῶν τε καὶ καράτων 173/35 f., καλῶς τε καὶ ἀληθῶς 8/9 f., ἴσαι καὶ ὅμοιαι 10/15, ὁμαλῶς καὶ ὁμοίως 88/23, πρόχειρος καὶ ῥᾳδία εὕρεσις 93/7 (Überschrift von Kap. 72), τὸ φίνον καὶ τέλειον μάλαγμα 172/6 (Überschrift von Kap. 110), ἀσήμιν καθαρόν τε καὶ τέλειον 172/7, διατεμνόμενά τε καὶ μεριζόμενα 3/4, διανέμων καὶ διαμερίζων 135/33, διαμερίζειν πάντα ἐπιμερισμόν 41/26, Περὶ τῶν ἐσθιόντων δαιτυμόνων 77/3 (Überschrift von Kap. 61), διὰ τὸ δέξασθαι λαβεῖν 112/3, 113/21, καὶ ὁ μὲν κινήσας ἤρξατο ὁδεύων ἔρχεσθαι πρὸς ἡμᾶς 85/1.

Auch δέ und καί werden gelegentlich pleonastisch verwendet, z. B. ζητεῖς δὲ εἰδέναι 38/12 u. o., τὰ δύο δὲ ἐφεξῆς δεύτερα γράμματα 39/13, καὶ περισσεύει καὶ α΄ 10/12 und ganz ähnlich 39/17–19, καὶ γὰρ καὶ ἀπὸ τῶν ϑ η΄ ἀπέμεινε ι΄ καὶ ἀπὸ τῶν β η΄ ἀπέμεινε ι΄ 15/39, καὶ ὅσος ἂν γένηται ὁ πολλ(α)πλασιασμὸς

... 45/15, ἐν ᾧ καὶ πόσον ἐστὶ τὸ χρονικὸν κέρδος ... 123/22.

2. 4. 4 Nachlässigkeiten bei der Niederschrift

Mitunter kann man den Schreiber einer auffälligen Nachlässigkeit bei der Niederschrift des Textes überführen: So schreibt er z. B. παρογενέστερα 95/14, meint aber zweifellos προγενέστερα. Hier liegt vielleicht ein Assoziationsfehler (~ παρόντα) vor, zumal das Wort παρογενέστερα lexikalisch nicht existiert. Ähnlich lässt sich die fehlerhafte Wendung διὰ πικύκλων (~ κύκλων) παραδειγμάτων 41/23 f. erklären, wo der Autor διὰ ποικίλων παραδειγμάτων schreiben wollte. Etwas anders liegen die Dinge bei der sinnwidrigen Verwendung von ὑπέρθου 86/28, 87/24.41 und ὑπέρθεσιν 88/16, wo jeweils ὑπέθου (vgl. z. B. 83/19) bzw. ὑπόθεσιν (vgl. θέσεις 82/2) gemeint ist.

An anderer Stelle (80/4) liest man ἐν τῇ πρώτῃ ἢ τὴν δευτέραν θέσιν, was ich zu ... τῇ δευτέρᾳ θέσει normalisiert habe. In 4/3 finden wir δηλοῦσαν, bezogen auf μέθοδον; es müsste aber δηλοῦντα in der Folge von ταὐτὰ (sc. σημεῖα) τὰ heißen. In ähnlicher Weise stößt man sich an der unpassenden Form des Partizips παραδηλώσαντες 6/16. Des Weiteren finden wir die Formulierungen ἄφελε τοῦτο (i. e. τὸ δεύτερον γράμμα) ἅπαξ, οὐχ ὅτι χωρεῖ ἅπαξ ἀφαιρεθῆναι ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτὸ ς΄... 33/21 f., ganz ähnlich 33/28 f., 35/24 f., und οὐκ ἔχεις οὖν ἀφελεῖν ἅπαξ τὰ ς΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν τοῦ ι΄ ὄντα ε΄ 35/29 f., ganz ähnlich 43/36 f., bei denen ich jeweils zu αὐτοῦ bzw. zu ὄντων normalisiert habe.

Einen unvermittelten Wechsel des Numerus der angesprochenen Person zeigt δέον ἡμῖν ἔδοξε εἶναι καὶ περιεκτικῶς ὑμῖν ἐκτιθέναι ..., πῶς ἄρα ἔχεις διαμερίζειν πάντα ἐπιμερισμόν ... 41/25 f.; ein ähnlicher Fall liegt bei πόσον ἐστὶ μείζων ἑκάστη μερὶς τῶν ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ 65/2 vor, wo der Schreiber das Bezugswort gewechselt hat (ἑκάστου sc. μέρους), ebenso bei διὰ τῆς μεταχειρίσεως τοῦ διὰ τῶν τριῶν 169/32 f., wo er offenbar an διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν dachte.

2. 4. 5 Feststehende Redewendungen

Einige feststehende Redewendungen kehren bei den Aufgabenstellungen, den Lösungen, den Bemerkungen zu den Lösungen, den Proben und den Beispielen häufig wieder und erleichtern dem Leser die inhaltliche Orientierung innerhalb der einzelnen Kapitel.

- zur Aufgabenstellung:
  ῎Εστω ὅτι ~ βούλ(ει) πολλ(α)πλασιάσαι ... 25/16, 60/16 u. ö., ~ βουλ(ει) μερίσαι ... 15/34, ~ βούλ(ει) διαμερίσαι ... 27/9, 52/11, 65/3, ζητεῖς ἀφελεῖν ... 57/9, ~ ζητεῖς λαβεῖν ... 63/10.19, ~ ζητεῖς εἰδέναι ... 59/8, 66/39 u. ö. und besonders häufig ~ ζητεῖς (εἰδέναι), πόσα γίνονται ... 16/27, 58/6, 74/21.30.41 u. o.
- zur Einleitung einer ähnlichen Aufgabe:
  ῎Ετερον τούτου ὅμοιον 67/22, 70/21, 71/22, 36 u. o.
- zur Einleitung einer Umkehraufgabe:
  Καὶ τὸ ἀνάπαλιν 60/4, 64/21, 72/12 u. o.
- zu Beginn einer Lösung:
  ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως 55/15, 56/13, 58/6 f. u. o.

- am Ende einer Lösung:
  καὶ ἰδοὺ (εὗρες, ὅτι) ... 7/10, 7/34, 8/28, 11/38 f. u. o.
- zu Beginn einer weiteren Lösungsmethode:
  Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί ... 41/14, 51/17, 52/39 u. o.
  Καὶ ἄλλως 61/11.29, 95/11 u. o.
- zu Beginn einer weiteren, vom Schreiber als leichter bezeichneten Lösungsmethode:
  Καὶ ἄλλως προχειροτέρως 55/23, 57/17, 99/7 u. o.
- zu Beginn einer anderen Lösungsmethode, bei der mit Geldwerten gerechnet wird:
  Ποιήσωμεν (ποίησον) τοῦτο καὶ διὰ τῆς κοινῆς καὶ πολιτευομένης μεταχειρίσεως 57/26, 65/31, 66/21
  Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί, ... ποίησον τοῦτο καὶ διὰ τῆς κοινῆς καὶ πολιτευομένης μεταχειρίσεως 55/33 f., 56/36 f.
  Ποίησον τοῦτο καὶ διὰ τῆς μεταχειρίσεως τῶν φλουριῶν 67/10
  Ἵνα δὲ σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, ποίησον τοῦτο καὶ διὰ τῆς κοινῆς μεταχειρίσεως τῶν φλουριῶν 68/1 f.
- zur Angabe der Bedingungen, unter denen die vorher beschriebene Lösungsmethode zum Ziel führt:
  καὶ ταῦτα μὲν οὕτως, ὁπόταν (ὅταν) ... 25/8.39, 123/1, 134/35
  καὶ τοῦτο γίνεται οὕτως, ὅταν ... 120/32
- als Hinweis darauf, dass eine Lösungsmethode aufgrund praktischer Erfahrung besser zu verstehen ist:
  ... ὡς εἰδέναι ἔχεις διὰ τῆς πείρας σαφέστερον 53/8 f., 184/17
- zur abschließenden Feststellung, dass die beschriebene Lösungsmethode auf Aufgaben gleichen oder ähnlichen Typs übertragbar ist:
  ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν (...) διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως (...) ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον 57/6 f., 70/2 f., 72/27 f. u. o.
- zur Einleitung einer Probe:
  ἡ δὲ ἀπόδειξις (καὶ μαρτυρία) ..., ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον, ἔστι αὕτη 7/38, 27/36 u. ö.
  ἡ δὲ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον, γίνεται ... 16/35 f.
  ἡ δὲ ἀπόδειξις (...), ὅτι ἐστὶ ὀρθὸν τὸ ζητούμενον, ἔστι αὕτη 70/16, 81/23
- zum Abschluss einer Probe:
  καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις (...), ὅτι ἐγένετο καλῶς ~ ὁ ἐξελθὼν (...) πολλ(α)πλασιασμός 10/15 f., 12/18 f., ~ ὁ τούτων διαμερισμός 28/10 f. und besonders häufig ~ τὸ ζητούμενον 73/29 f., 87/39 f., 92/22 f. u. o.
  καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ μαρτυρία, ὅτι ἐγένετο καλῶς ... 29/26 f.
- zu Beginn eines Beispiels:
  Ἵνα δὲ σαφέστερον ὑμῖν γένηται τὸ λεγόμενον, φέρε εἴπωμεν τοῦτο καὶ δι' ὑποδείγματος 4/26 f., 50/20 f. u. ö.
  Ἵνα δὲ γένηται σαφέστερον τὸ λεγόμενον, ἔστω ... 42/37, ganz ähnlich 66/6 u. ö.
- zu Beginn wichtiger Bemerkungen zur Lösungsmethode:
  Δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι ... 16/6, 46/3, 53/26 u. ö.

2.5 Allgemeine Hinweise zur Edition

2.5.1 Zur Gestaltung des Textes und des textkritischen Apparats

Kapitelüberschriften und -nummern sowie Überleitungen zu neuen wichtigen Abschnitten innerhalb eines Kapitels sind fett wiedergegeben, Zwischenüberschriften teilweise gesperrt gedruckt. Dies entspricht im Wesentlichen dem Textbild im Original, wo der Autor an den betreffenden Stellen rote Tinte verwendet hat.

Auch die Rechendiagramme habe ich, soweit es möglich war, an den passenden Stellen in den Text eingebunden.

Die Kapitelnummern des Originals sind abgekürzte Ordinalzahlen, z. B. $\overset{ον}{α}$ für πρῶτον (sc. κεφάλαιον); diese Ordinalzahlen wurden der Einfachheit halber mit Kardinalzahlen wiedergegeben.

Abweichend vom Original habe ich regelmäßig Absätze nach Sinnabschnitten eingeführt, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

Ohne Rücksicht auf die Eigenheiten und die Unzuverlässigkeit des Schreibers wurde eine sinnvolle Interpunktion eingeführt.

Bei der Groß- und Kleinschreibung habe ich mich im Großen und Ganzen an der Vorlage orientiert, nur bei den Volks- und Städtenamen Περσῶν 3/15, Λατίνων 3/17, Λατίνοις 6/22, 172/4, Λατινικῶς 109/29, Ἰταλικοῖς 3/17.21, Ἑλληνικὴν 3/22, Κωνσταντινουπόλεως 102/11 und bei Χριστοῦ 10/17 habe ich die Kleinschreibung des Autors aufgegeben. Umgekehrt wurde die Ziffer 3 (γ΄) stets kleingeschrieben, während der Autor hier im Unterschied zu allen anderen Ziffern generell die Großschreibung (Γ) wählt.

Im Rechenbuch werden nebeneinander das traditionelle milesische und das positionelle Zahlsystem mit griechischen Buchstabenziffern verwendet. Zur besseren Unterscheidung wurden bei mehrzifferigen Zahlen in positioneller Darstellung Leerzeichen gesetzt, in milesischer Darstellung hingegen nicht — vgl. z. B. die Schreibweisen α ε γ β΄ und ,αφλβ΄ 4/27 für die Zahl 1532. Dies entspricht in der Regel auch dem Schriftbild des Originals. Die Mischschreibweisen — z. B. τ ζ ε΄ 119/20, ,ϛψζα΄ 161/25 — habe ich im Text erhalten und im Apparat vermerkt.

Ansonsten war angesichts der teilweise eigenwilligen Schreibweise von Kardinalzahlen im Original eine Vereinheitlichung und Vereinfachung erforderlich: Über den Zahlbuchstaben deklinierbarer Zahlen tritt häufig die Flexionsendung auf, z. B. $\overset{ων}{κγ}$ 23/8, $\overset{αι}{,α}$ 108/14. Bei der traditionellen Schreibweise indeklinabler Zahlen wird gerne der Auslaut wiederholt, z. B. $\overset{ον}{ρ}$ 6/21, $\overset{α}{ρν}$ 8/13, $\overset{α}{ιβ}$ 9/12, bei längeren Zahlen am Ende einer Überstreichung, z. B. $\overline{τξε}^{ε}$ 34/34, $\overline{,αφξη}^{ω}$ 34/7. Daneben gibt es auch längere Zahlen mit Überstreichung, aber ohne Auslaut, und solche ohne Überstreichung. Die oben genannten Zahlen beispielsweise habe ich im Text stillschweigend in der vereinfachten Form κγ΄, ,α΄, ρ΄, ρν΄, ιβ΄, τξε΄ bzw. ,αφξη΄ wiedergegeben.

Bei den Brüchen mit Nennern zwischen 12 und 20 wurden die griechischen Bezeichnungen für die Nenner unabhängig von der Vorlage zusammengeschrieben, z. B. ϑ΄ ἑξακαιδέκατα 63/22, ιε΄ ἑπτακαιδέκατα 54/32, bei Nennern ab 20 hingegen wurde einheitlich — ebenfalls unabhängig vom Original — die Getrenntschreibung gewählt, z. B. ἕνα εἰκοστὸν πρῶτον 72/25, κε΄ τριακοστὰ

πέμπτα 54/34.

Der textkritische Apparat ist anfangs noch recht ausführlich gehalten, um den Leser in die Schreibgewohnheiten des Autors einzuführen. Ständig wiederkehrende sprachliche Phänomene (vgl. die Abschnitte 2. 1 – 2. 3) wurden später in der Regel nicht mehr kommentiert. Doch hielt ich es für geboten, manche sprachliche Besonderheiten wiederholt in den Apparat aufzunehmen, wenn sie zwischendurch länger nicht aufgetreten waren, z. B. ἄρξου] sic C 143/TA 2 nach ἄρξου] hic et aliubi pro ἄρξαι C 6/TA 1.

2. 5. 2 Kürzungen und Sigla

Sämtliche Kürzungen von normalen Wörtern wurden im Text aufgelöst, ungewöhnliche oder seltene Kürzungen sind zudem im Apparat vermerkt, z. B. $\overset{ου}{\chi\bar{υ}}$ 10/17 = Χριστοῦ, ἆι 13/12 = ἀριθμῶν, ὅπερ ῏ 33/5 = ὅπερ ἐστὶ, ganz ähnlich 36/25, $\overset{α}{\bar{ν}}$ 128/20 = ἰνδικτιῶνα. Den mit der Zahl δέκα zusammengesetzten Imperativ $\overset{α}{\bar{ι}}$πλασίασον 126/4 u. ö. = δεκαπλασίασον habe ich ebenfalls aufgelöst.

Bei der bunten Vielfalt der Abkürzungen von Zahlwörtern im Original war eine Normalisierung und Vereinfachung erforderlich. Die Kürzungen von Zahlsubstantiven wurden grundsätzlich aufgelöst, z. B. μονάδα statt $\overset{δα}{\bar{α}}$ 109/22, δεκάδος statt $\overset{α}{\bar{ι}}$δος 102/4 f., ἑκατοντάδας statt $\overset{ον}{\bar{ρ}}$ταδας 5/4, ἑκατοντάδα statt $\overset{δα}{\bar{ρ}}$ 109/22, χιλιάδος statt ,$\overset{ας}{\bar{αδ}}$ 11/33, χιλιάδα statt ,$\overset{δα}{\bar{α}}$ 109/22. Bei den Zahladverbien wurden die Kürzungen in vereinfachter Form übernommen, z. B. δ΄κις, ε΄κις 15/3 statt $\overset{α}{\bar{δ}}$κις, $\overset{α}{\bar{ε}}$κις, ,α΄κις 49/28 statt $\overset{α}{\bar{α}}$κις und ρ΄κις 97/40, 99/19 statt $\overset{ον}{\bar{ρ}}$τάκις (teilweise mit Vermerk im Apparat). Lediglich die Kürzungen $\overset{ης}{\bar{β}}$ 16/32 und $\overset{ης}{\bar{γ}}$ 11/11 wurden regelmäßig ohne Kommentar mit δίς bzw. τρίς aufgelöst. Abgekürzte Ordinalzahlen habe ich in den Diagrammen erhalten, z. B. $\overset{ος}{\bar{α}}$, $\overset{ας}{\bar{β}}$, $\overset{ος}{\bar{γ}}$ 149/Diagramme, im fortlaufenden Text aber generell ausgeschrieben, also etwa εἰκοστὸν πέμπτον μέρος 41/19 statt $\overset{ον}{\bar{κε}}$ μέρος, τῇ τριακοστῇ τρίτῃ ἡμέρᾳ 85/37.38.42 statt τὴ $\overset{η}{\bar{λγ}}$ ἡμέρα. Die Beispiele sind im Allgemeinen im Apparat vermerkt. Bei der Schreibweise der Brüche bin ich im Wesentlichen den wechselnden Formen und Kürzungen des Autors gefolgt, so bei $\frac{\alpha}{\beta}$ 53/31 und ϛ″ 32/16 für $\frac{1}{2}$, bei $\frac{\alpha}{\gamma}$ 53/33 und γ″ 53/25 für $\frac{1}{3}$ und bei den entsprechenden Varianten für $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$. Abkürzungen wie δ΄ $\overset{α}{\bar{ις}}$ κατα 66/14 f. habe ich natürlich mit δ΄ ἑξακαιδέκατα aufgelöst. Solche Fälle sind im Apparat vermerkt.

Kürzungen oder Sigla vom Maßeinheiten wurden im fortlaufenden Text ebenfalls stets aufgelöst und nur beim ersten Mal im Apparat vermerkt, z. B.: ὑπέρπυρα, ὑπέρπυρον etc. ubique notata ⸗, ⸗ 32/TA 1, κουκκιὰ] hic et passim ⸗ C 39/TA 1, φλουριά] hic et passim $\overset{α}{\bar{φ}}$ C 51/TA 1, οὐγγίαι] hic et passim $\overset{αι}{\bar{ογγ}}$ C 53/TA 1, λίτραι] hic et passim $\overset{αι}{\bar{λ}}$ C 100/TA 1, ῥέτουλα] hic et passim $\overset{τλ}{\bar{ρ}}$ C 102/TA 1, δεκάρι] $\overset{ω}{\bar{ι}}$ C 108/TA 2, χιλιάς] ,$\overset{ας}{\bar{α}}$ C 108/TA 2, μονάδα] $\overset{δα}{\bar{α}}$ C 109/TA 1, τουρν(ε)σ(ίων), τουρν(έ)σ(ια)] $\overset{νσ}{\bar{π}}$ hic et passim C 145/TA 1, ἐξάγιον, ἐξάγια] hic et aliubi $\overset{γ}{\bar{ξ}}$ vel $\overset{γ}{\bar{ξ}}$ C 165/TA 1. Eine Ausnahme habe ich – in Analogie zu den Zahladverbien – bei ιβ΄γγίν 110/30.35, 111/12 gemacht und die Auflösung δωδεκαουγγίν im Apparat vermerkt.

In den Rechendiagrammen hingegen wurden aus Platzgründen die Kürzungen

und Sigla für Maßeinheiten in der Regel beibehalten, teilweise in vereinfachter Form, z. B. ῆ, ⁝ 40/oberes Diagramm = ὑπέρπυρα bzw. κουκκιά, φ 52/oberes Diagramm = φλουριά, ₸ 68/unteres Diagramm oder ₸ν(έ)σι(α) 138/oberes Diagramm = τουρνέσια, ℔ 100/Diagramme = λίτραι, ρτλ 101/Diagramm = ῥέτουλα, ϭϭ 158/unteres Diagramm = ἡμέρας, ς̅ 165/unteres Diagramm = ἐξάγια, ο̅ 166/unteres Diagramm = οὐγγίαι. Auch die in den Diagrammen häufig auftretende Abkürzung τζ̅ 68/unteres Diagramm = τζάκισμα wurde beibehalten. Die Kürzungen in den Diagrammen sind nur gelegentlich aufgelöst, z. B. χιλιάς, δεκάρι 108/Diagramm, οὐγγίαι 115/mittleres Diagramm.

2. 5. 3 Zeichenerklärung für den Text und den kritischen Apparat

C	= Cod. Vind. phil. gr. 65
< >	= zu ergänzen
[ ]	= zu tilgen
( )	= vom Schreiber als selbstverständlich ausgelassene Silben oder Buchstaben
{ }	= vom Schreiber selbst getilgt
fol., f.	= folio
‖	= Ende einer Seite im Original
ϥ	= Null

Beispiele:

γί<νεται> 137/2, δέ<δωκεν> 146/4, τζα<κίσματα> 170/10

αἱ [ἐ] ρ΄ λίτραι 109/20, πρὸς[αι] χάριν 175/19, [ἐ]προσέθηκας 79/4

βούλ(ει) 6/24, πολλ(α)πλασίασον 7/23 f., μαρτ(υ)ρίας 12/22, ἀνάπ(α)λ(ιν) 100/36, die *nomina sacra* στ(αυ)ροειδῶς 16/42 - 17/1, ἄν(θρωπ)οι 51/4 und πν(ευμ)άτων 88/25 (vgl. auch χῦ̅ 10/17 = Χριστοῦ)

{χρήσασθαι ταύτην καὶ ἐπὶ ζῴων καὶ} 98/14, {αἱ δὲ ζ΄ οὐγγίαι ἐστὶ ἔλαττο τῶν θ΄ οὐγγίας β΄.} 180/28 f.

II TRANSKRIPTION

α **Προοίμιον** f. 15r

Ἡ τῆς ἀριθμητικῆς μέθοδός τε καὶ μεταχείρισις δύο κανόνας περιεκτικοὺς ἔχει καὶ οὐ πλείονας· τὰ μὲν ἐλάττονα πολλαπλασιαζόμενα γίνεσθαι μεῖζον τὸ ἀποτέλεσμα, ὅπερ ἦν πρότερον, τὰ δὲ μείζονα μέρη διατεμνόμενά τε καὶ μεριζόμενα ἐλάττονα πάντως γίνεσθαι τοῦ πρώτου μεγέθους καὶ τῆς τούτου ποσότητος. τοῦτο τοίνυν οὕτως ἔχοντος πολλοὶ μὲν πολλάκις μεθόδους προχειροτάτας καὶ ἀσφαλεῖς ἐπειράσαντο ἐξευρεῖν καὶ ἐπινοῆσαι, ὥστε ἀσφαλῶς ὁμοῦ καὶ προχείρως διερευνᾶν τοῖς ἐπιζητουμένοις αὐτῶν μέρεσι, κἄντε πρὸς τὸ μεῖζον ἀφορῶσι κἄντε πρὸς τὸ ἔλαττο. ἡ πεῖρα δὲ τῶν πραγμάτων καὶ ὁ μακρὸς χρόνος ὁ πάντα δυνάμενος ἐξευρεῖν μὲν καὶ ἐμφανίζειν τὰ μήπω ὄντα, τὰ ὄντα δὲ πάλιν λήθῃ παραδοῦναι καὶ ὑποκρύψαι δυνάμενος τὰ γενόμενα ὡς μὴ ὄντα, καθὼς καὶ σοφός τις λέγει

ἅπας ὁ μακρὸς κἀναρίθμητος χρόνος φύει τὰ κρυπτὰ
καὶ φανέντα κρύπτεται,

ἔδειξεν ἡμᾶς προχειροτ(ά)την καὶ ἀσφαλῆ μέθοδον, ἥτις εὑρίσκετο μὲν παρὰ τῶν πάντα καλῶς εἰδότων καὶ λίαν σοφωτάτων Περσῶν, πρὸς ἡμᾶς δὲ οὐκ ἔφθασε γενέσθαι γνώριμος αὕτη ἡ μέθοδος, ἀλλ᾽ ἐπὶ πολὺ λανθάνουσα ταῖς δυτικαῖς ἡμῶν μέρεσι τέως δήλη ἐγένετο πρός τινας τῶν ἀπὸ τοῖς Ἰταλικοῖς μέρεσι ὄντων Λατίνων· πρὸς ἐκείνους δὲ συναλλάξεως χάριν καὶ πραγματείας ἕνεκεν παραγενομένους καὶ τῇ συναναστροφῇ καὶ πυκνῇ τούτων ἐκεῖσε ἀφίξει παραγενομένους ἐγνωρίσθη καὶ δήλη ἐγένετο. οἶμαι δέ, ὅτι οὐ πλείους τῶν ἑκατὸν χρόνων εὑρέθη αὕτη ἡ μέθοδος καὶ γνώριμος γέγονε πρός τινας τῶν τοῖς Ἰταλικοῖς μέρεσι ὄντων, ἐλάνθανε δὲ πάλιν ἡμᾶς τοὺς τὴν Ἑλληνικὴν γλῶτταν ἐπισταμένους τὸ τῇδε ἐγχείρημα. νῦν δὲ καὶ ἡμᾶς ὁ χρόνος δῆλον τοῦτο ἐποίησε. ἵνα δὲ μή, ὡς ἤδη φθάσαντες εἴπομεν, λήθῃ παραδοῦναι πάλιν ἡμᾶς ταύτη(ν) παρασκευάσῃ ὁ πάντα δυνάμενος χρόνος οὕπω καλῶς ἐν ἡμῖν παγεωθεῖσα καὶ πλατυνθεῖσα ἡ μέθοδος, μᾶλλον δὲ καὶ ἄγνωστος τοῖς πολλοῖς ἔτι οὖσα, ἔδοξε ἡμῖν δίκαιον εἶναι καὶ ἀναγκαῖον μάλιστα διαγράψασθαι ταύτην, ὡς ἂν καὶ τοῖς μήπω εἰδόσι καὶ βουλ(ο)μένοις ταύτην μαθεῖν γνώριμος γένηται.

β **Περὶ τῶν δέκα σημείων, δι᾽ ὧν πᾶς ψῆφος γίνεται**

Δεῖ τοῦτο πρῶτον γινώσκειν, ὅτι αὕτη ἡ μέθοδός τε καὶ μεταχείρισις δέκα ψήφων μόνον σημεῖα χρᾶται καὶ οὐ πλείονα, μετὰ τῶν δέκα δὲ τούτων σημείων δυνάμεθα, εἰ δυνατόν ἐστι τὴν ἡμῶν φαντασίαν κατέχειν τὴν δηλουμένην ποσότητα, ἐξαριθμῆσαι ὡς

---

cap. 1 et 2 ed. Heiberg

3 μεῖζον] μείζων **C** 4 ὅπερ] **Heiberg ed.** ἤπερ μέρη] **hic et passim** μέροι **C** 4/5 πάντως] πάντος **C** 12/13 **Sophocles, Aias 646–647:** ἅπανθ᾽ ὁ μακρὸς κἀναρίθμητος χρόνος / φύει τ᾽ ἄδηλα καὶ φανέντα κρύπτεται 15 οὐκ ἔφθασε] οὐ κεύθασὲ **C** 16 ἐπὶ πολὺ] ἐπὶ πολλὰ **C** ταῖς δυτικαῖς ... μέρεσι] **sic C** 22 τῇδε] τίδε **C** 23 ἤδη] **hic et passim** εἴ δη **C** 24 παρασκευάσῃ] παρασκεβάσι **C** 26 ὡς ἂν] ὅσαν **C** 28 πᾶς ψῆφος] **sic C** 23/24 **Sophocles, Fragm. 954:** χρόνος πάντα ἐς λήθην ἄγει

εἰπεῖν καὶ τὴν ψάμμον αὐτήν· μέχρι τοσούτου προβαίνειν δύνανται ταῦτα τὰ δέκα σημεῖα. εἰσὶ δὲ τὰ δέκα ταῦτα σημεῖα ὅμοια, μᾶλλον δὲ ταὐτὰ τὰ τὴν κοινὴν καὶ πολ(ι)τευομένην δηλοῦσαν ἡμῖν μέθοδον μέχρι τῶν ἐννέα σημείων. τὸ δὲ δέκατον ἔχει σημεῖον, ὅπερ εἰώθαμεν γράφειν, ὅτε βουλόμεθα σημειώσασθαι οὐδέν· ἔστι δὲ τὸ παρὸν υ΄. ἵνα δὲ καὶ σαφέστερον ὑμῖν γένηται τὸ λεγόμενον, διαχαράττω σοι ταῦτα καὶ ἐκτίθεμαι, ὡς ὁρᾷς,

α΄ β΄ γ΄ δ΄ ε΄ ϛ΄ ζ΄ η΄ θ΄ υ΄

καὶ τὸ μὲν πρῶτον ἤγουν τὸ ἄλφα δηλοῖ ἕνα, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς κοινῆς καὶ πολιτευομένης μεθόδου οὕτως λαμβάνεται, τὸ δὲ βῆτα δηλοῖ δύο καὶ ἑξῆς ὁμοίως μέχρι τῆς θήτας, ἥτις δηλοῖ ἐννέα· τὸ δὲ ἐλάχιστον καὶ ἔσχατον πάντων σημεῖον, ὅπερ ἐστὶ τὸ παρὸν υ΄, οὐδὲν δύναται δηλῶσαι, ἀλλ᾽ ἔστι καὶ αὐτὸ μὲν δηλωτικὸν τῶν προτιθεμένων αὐτῷ σημείων, αὐτὸ δὲ καθ᾽ αὑτὸ τὸ υ΄ οὐ δύναται δηλῶσαί τι· τὸ γὰρ οὐδὲν οὐδενός ἐστι δηλωτικόν. διὸ καὶ οὐδὲν γράφεται· ἐν ᾧ γὰρ τόπῳ τὸ υ΄ εὑρίσκεται, οὐδενός ἐστι δηλωτικόν, καθὼς ἀκολούθως ἐροῦμεν σαφέστερον.

γ **Περὶ τῶν τῆς μονάδος τόπων δεκάδος τε καὶ ἑκατοντάδος καὶ χιλιάδος καὶ ὅσο ἄλλον ἐφεξῆς μεῖζον πέφυκε γίνεσθαί τε καὶ ὀνομάζεσθαι**

Ὁ πρῶτος τόπος, ὅς ἐστι ἡ τελευταία ψῆφος, δηλοῖ τὰς μονάδας, τουτέστι ἕνα καὶ δύο καὶ τρία μέχρι τῶν ἐννέα· ὁ δεύτερος δὲ τόπος δηλοῖ τὰς δεκάδας, τουτέστι ι΄ καὶ κ΄ καὶ λ΄ μέχρι τῶν ϛ΄· ὁ τρίτος δὲ τόπος δηλοῖ τὰς ἑκατοντάδας, τουτέστι ρ΄ καὶ σ΄ καὶ τ΄ μέχρι τῶν ϡ΄· ὁ τέταρτος δὲ τόπος δηλοῖ τὰς χιλιάδας, τουτέστι ,α΄ καὶ ,β΄ καὶ ,γ΄ μέχρι τῶν ,θ΄. αἱ γὰρ ,ι΄ ἐστὶ μυριὰς καὶ ἐπέχουσι τόπον πέ[ν]μπτον, καὶ ὡς ἐν προχείρῳ εἰπεῖν· οἱ τόποι ἐστὶ ἐκεῖνοι οἱ παραδηλοῦντες ἡμῖν τὰς μονάδας τε καὶ δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας καὶ χιλιάδας καὶ ὅσα ἂν ἕτερα μείζονα μέρη πέφυκε γίνεσθαί τε καὶ ὀνομάζεσθαι.

δ **Περὶ τοῦ πῶς ἔστι ἐκτεῖναι ψήφους δηλωτικὰς μέχρι χιλ(ι)άδων καὶ μυριάδων δεκάδας**

Ἵνα δὲ σαφέστερον ὑμῖν γένηται τὸ λεγόμενον, φέρε εἴπωμεν τοῦτο καὶ δι᾽ ὑποδείγματος. ἔστω ὅτι βούλ(ει) σημειώσασθαι ,αφλβ΄· θὲς οὖν ταύτας τὰς ψήφους α ε γ β΄, καὶ ἰδοὺ ταῦτα δηλῶσι, ἅπερ ζητεῖς. καὶ τὸ μὲν β΄ εὑρισκόμενον εἰς τὸν ἔσχατον τόπον, ὡς ἀκολούθως ἀναγινώσκομεν, πρῶτον δὲ μάλιστα τόπον, ὡς εἰώθαμεν ἀριθμεῖν ἐπὶ τῆς τῇδε μεταχειρίσεως, δηλοῖ δύο. εἰ δὲ ὁ αὐτὸς πρῶτος τόπος, ὅστις ‖ ἔχει τὸ β΄, εἶχεν ἂν γ΄, ἐδήλου τρία καὶ ἑξῆς ὁμοίως μέχρι τῆς θήτας, ἥτις δηλοῖ ἐννέα. τὸ δὲ γ΄, ὅπερ προΐσταται τῆς βήτας, εἰς δεύτερον τόπον εὑρισκόμενον, ἥτις ἐστὶ τόπος δεκάδος, δηλοῖ τριάκοντα· τρία γὰρ δηλοῖ τὸ γ΄ εἰς πρῶτον τόπον τῆς μονάδος εὑρισκόμενον. ἐπεὶ δὲ εἰς τόπον δεύτερον, ἥτις ἐστὶ τῆς δεκάδος, ἵσταται, δηλοῖ τρεῖς δεκάδας, τουτέστι λ΄· σῴζει γὰρ τὴν οἰκείαν εἰκόνα καὶ δηλοῖ τρία οὐ μονάδος, ἀλλὰ δεκάδος, τουτέστι λ΄. εἰ δὲ ὁ αὐτὸς δεύτερος τόπος, ὅστις ἔχει τὸ γ΄, εἶχε ϛ΄, ἐδή- f. 15v

---

1 δύνανται] δύνονται **C** 2/3 πολ(ι)τευομένην] πολτὲβομένην **C** 5 διαχαράττω σοι] διὰ χαράτο συ **C** 6 ἐκτίθεμαι] ἐκτίθειμοι **C** 14 δηλωτικόν] δηλωτικός **C** 15 τῶν ... τόπων] τὸν ... τόπου **C** 19 τρίτος] **hic et passim** τρίττος **C** 20 τέταρτος] **hic et passim** τέτταρτος **C** 21 ἐπέχουσι] **hic et passim pro** ἐπέχουσι **C** 22 ἐν προχείρῳ] ἐμπροχείρω **C** ἐστὶ] **ex corr. C** 25 ἐκτεῖναι] ἐκθίναι **C, fort.** ἐκθεῖναι 27 βούλ(ει)] **hic et passim** βουλ΄ **C** 28 δηλῶσι] **hic et passim pro** δηλοῦσι **C** 30 ὅστις] ὥστης **C** 32.34 **et aliubi** ἥτις] **sic C**

λου ἂν ἓξ δεκάδας, τουτέστι ξ΄, καὶ ἑξῆς ὁμοίως μέχρι τῆς θήτας, τουτέστι μέχρι τῶν ἐννέα, ἐδήλου ἂν ϛ΄. τὸ δὲ ε΄ δηλοῖ πέντε, ἀλλ᾽ ἐπεὶ εἰς τρίτον τόπον ἵσταται, σῴζει τὴν οἰκείαν εἰκόναν καὶ δηλοῖ πέντε ἑκατοντάδας, τουτέστι φ΄. εἰ δὲ ὁ αὐτὸς τρίτος τόπος εἶχεν δ΄, ἐδήλου ἂν τέσσαρας ἑκατοντάδας, τουτέστι υ΄. εἰ δὲ εἶχε ϛ΄, ἐδήλου ἂν χ΄, καὶ ἑξῆς ὁμοίως μέχρι τῶν ἐννέα, ἐδήλου ἂν ϡ΄. ὥσπερ γὰρ τὰ ἐν τῷ πρώτῳ τόπῳ, ἥτις ἐστὶ τῆς μονάδος, εὑρισκόμενα σημεῖα δηλῶσι μονάδας, τουτέστι α΄ β΄ γ΄ δ΄ ε΄ ϛ΄ μέχρι τῶν θ΄, οὕτως καὶ εἰς δεύτερον τόπον, ἥτις ἐστὶ τῶν δεκάδων, τὰ αὐτὰ σημεῖα εὑρισκόμενα ἐδήλου ἂν ι΄ κ΄ λ΄ μ΄ ν΄ ξ΄. τὰ αὐτὰ δὲ σημεῖα, τουτέστι τὸ α΄ β΄ γ΄ δ΄ ε΄ ϛ΄, εἰς τόπον τρίτον, ἥτις ἐστὶ τῆς ἑκατοντάδος, εὑρισκόμενα ἐδήλει ἂν ρ΄ σ΄ τ΄ υ΄ φ΄ χ΄. ὁ δὲ τέταρτος τόπος, ὅστις ἔχει τὸ α΄, τουτέστι τὰ παρόντα σημεῖα α ε γ β΄, ἅπερ δηλῶσι ,αφλβ΄, δηλοῖ μὲν τὸ α΄ ἕνα εἰς τόπον μονάδας εὑρισκόμενον, εἰς τόπον δὲ πάλ(ιν) δεύτερον, ἥτις ἐστὶ δεκάδος, εὑρισκόμενον τὸ α΄ δηλοῖ ι΄, εἰς τρίτον δὲ τόπον εὑρισκόμενον, ἥτις ἐστὶ ἑκατοντάδος, δηλοῖ ρ΄· νῦν δὲ εἰς τόπον τέταρτον εὑρισκόμενον, ἥτις ἐστὶ χιλιάδος, δηλοῖ ,α΄. ἐὰν δὲ εἰς τὸν αὐτὸν τέταρτον τόπον, ὃν ἐστι τὸ α΄, ἦν β΄, ἐπεὶ χιλ(ι)άδος τόπος ἐστί, ἐδήλου ἂν ,β΄· εἰς τὸν αὐτὸν δὲ τέταρτον τόπον τῆς χιλ(ι)άδος, ὅπερ ἂν εὑρεθῇ, τουτέστι γ΄ ἢ δ΄ ἢ ε΄ μέχρι τῶν θ΄, δηλῶσι ,γ΄ καὶ ,δ΄ καὶ ,ε΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως μέχρι τῶν ,θ΄. αἱ δὲ ,ι΄ ἐστὶ μία μυριὰς καὶ ἔχει λόγον πρὸς τὰ ,α΄, ὃν ἔχουσι τὰ ι΄ πρὸς τὸ α΄. καθὼς γὰρ τίθεμεν τὸ α΄ εἰς τόπον πρῶτον, ἥτις ἐστὶ τῆς μονάδος καὶ δηλοῖ ἕνα, ἐπὰν δὲ βουλ(ώ)μεθα σημειώσασθαι ι΄, τίθεμεν τὸ α΄ εἰς δεύτερον τόπον οὕτως κείμενον α ι΄ καὶ δηλοῖ ι΄. οὕτως εἰς τόπον τέταρτον εὑρισκόμενον τὸ α΄ δηλοῖ ,α΄. ἐπὰν δὲ βουλ(ώ)μεθα σημειώσαθαι δέκα χιλ(ι)άδας, τίθεμεν τὸ α΄ εἰς πέμπτον τόπον καὶ δηλοῖ δέκα μὲν χιλιάδας, μίαν δὲ μυριάδαν. ταὐτὸν γὰρ εἰπεῖν δέκα χιλ(ι)άδας καὶ μίαν μυριάδαν· σῴζει γὰρ τὸ α΄ τὴν ἰδίαν εἰκόναν καὶ δηλοῖ καὶ α΄ καὶ ι΄ καὶ ρ΄ καὶ ,α΄ καὶ μύρια εἰς τόπον πρῶτον καὶ δεύτερον καὶ τρίτον καὶ τέταρτον καὶ πέμπτον εὑρισκόμενον. ἐὰν δὲ εἰς πέμπτον τόπον ἦν τρία οὕτως κείμενα γ ι ι ι ι΄, τὰ γ΄ δηλῶσι ⟨γ΄⟩ καὶ λ΄ καὶ τ΄ καὶ ,γ΄ καὶ τρὶς μύρια εἰς πρῶτον τόπον καὶ δεύτερον καὶ τρίτον καὶ τέταρτον καὶ πέμπτον εὑρισκόμενα· σῴζει γὰρ τὴν ἰδίαν εἰκόναν πανταχοῦ εὑρισκόμενα. ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς δεκάδος τόπον εὑρισκόμενα τὰ γ΄ δηλῶσι λ΄, ἐπὶ δὲ τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον, ἥτις ἐστὶ τρίτος τόπος, εὑρισκόμενα τὰ γ΄ δηλῶσι τρεῖς ἑκατοντάδας, τουτέστι τ΄, ὥσπερ καὶ τρεῖς δεκάδαι ἐστὶ λ΄. ἐπὶ δὲ τὸν τέταρτον τόπον, ἥτις ἐστὶ χιλ(ι)άδος, εὑρισκόμενα τὰ γ΄ δηλῶσι τρεῖς χιλιάδας. ἐπὶ δὲ τὸν πέμπτον τόπον, ἥτις ἐστὶ δεκάδα χιλ(ι)άδος, ταὐτὸν δέ ἐστι μυριάδος τόπος, εὑρισκόμενα τὰ γ΄ δηλῶσι λ΄ χιλ(ι)άδας – ταὐτὸν δ᾽ εἰπεῖν τρεῖς μυριάδας καὶ λ΄ χιλ(ι)άδας –, ἅπερ λ΄ χιλ(ι)άδαι οὕτως κείμεναι γ ι ι ι ι΄ ἐστὶ ψῆφοι ἀριθμῶν πέντε. ἐπεὶ οὖν ὁ πρῶτος τόπος ἔχει σημεῖον ι΄, δηλοῖ οὐδέν· τὸ γὰρ οὐδέν, ὡς εἴπομεν, οὐδενός ἐστι δηλωτικόν. ὡσαύτως ἐπεὶ καὶ ὁ δέυτερος τόπος ἔχει ι΄, δηλοῖ οὐδέν· ὡσαύτως καὶ ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος, ἐπεὶ ἔχουσι ι΄, οὐδενός ἐστι δηλωτικοί. τοῦτο δὲ μόνον δηλῶσι ἡμῖν τὰ τέσσερα οὐδέν, ὅτι τὰ γ΄, ἅπερ ἐστὶ πρὸ τῶν τεσσάρων οὐδέν, εἰς τόπον πέμπτον εὑρισκόμενα δηλῶσι τρεῖς μυριάδας, ἅπερ ἐστὶ λ΄ χιλ(ι)άδαι. κόψε οὖν ἕνα ι΄ καὶ γράψον τέσσερα γράμματα γ ι ι ι΄. νῦν δέ, ἐπεὶ τέσσερα γράμματά εἰσι, τὰ γ΄ δηλῶσι ,γ΄. κόψε πάλιν ἕνα ι΄ καὶ γράψον τρία γράμματα γ ι ι΄. νῦν δέ, ἐπεὶ τρία γράμματά εἰσι, τὰ γ΄ δηλῶσι τ΄. κόψε πάλιν ἕνα ι΄

---

4 ἑκατοντάδας] ϙταδας **C** 10 ἐδήλει ἂν] **pro** ἐδήλου ἂν 11 ,αφλβ΄] ,αφ **C** 15 ὃν ἐστι **sic C** 39 πρὸ τῶν] πρωτων **C**

καὶ γράψον δύο γράμματα γ μ΄. νῦν δέ, ἐπεὶ δύο γράμματά εἰσι, τὰ γ΄ δηλῶσι λ΄. κόψε πάλιν καὶ τὸ ἕνα μ΄ καὶ γράψον μόνα τὰ γ΄. νῦν δὲ ἓν γράμμα ἐναπομεῖναν δηλοῖ τρία εἰς τόπον μονάδος εὑρισκόμενον. εἰ δὲ βούλει σημειώσασθαι τ΄ χιλ(ι)άδας, ἅπερ ἐστὶ λ΄ μυριάδαι, γράψον ἓξ γράμματα γ μ ͵μ μ μ΄, σημείωσαι δὲ τὸν τέταρτον τόπον τῆς χιλ(ι)άδος μετὰ κοκκίδος τινός. ἐπεὶ δὲ ἔχεις πρὸ τῆς χιλ(ι)άδος, ἥτις ἐστὶ ὁ τέταρτος τόπος, ὃν καὶ ἐσημειώσω μετὰ κοκκίδος, γράμματα δύο, ἀπὸ τῆς κοκκίδος μέχρι τοῦ γ΄ εἰσὶ γράμματα τρία καὶ τόποι τρεῖς. ὁ δὲ τρίτος τόπος, ὅστις ἔχει τὸ γ΄, ἔστι τόπος ἑκατοντάδος, ὥσπερ καὶ ὁ τέταρτος ὁ ἔχων τὴν κοκκίδα ἐστὶ χιλιάδος. τὸ γ΄ δέ, ἐπεὶ ἀπὸ τῆς κοκ<κ>ίδος ἐστὶ εἰς τόπον τρίτον, δηλοῖ τ΄ χιλ(ι)άδας, τουτέστι μυριάδας λ΄· καὶ ἰδοὺ τὸ μ΄, εἰ καὶ καθ᾽ αὑτὸ οὐ δηλοῖ τινα ψῆφον, ἀλλ᾽ ὅμως δηλωτικὸν ἡμῖν καὶ αἴτιον γίνεται δεκάδων τε καὶ ἑκατοντάδων, χιλ(ι)άδων τε καὶ μυριάδων καὶ ὅσο μεῖζο πέφυκε γίνεσθαι. ἐὰν δὲ ὁ αὐτὸς ἕκτος τόπος, ὅστις νῦν ἔχει γ΄, εἶχε δ΄, ἐδήλου ἂν τετρακοσίας χιλ(ι)άδας· εἰ δὲ εἶχε ε΄, ἐδήλου ἂν πεντακοσίας χιλ(ι)άδας καὶ ἑξῆς ὁμοίως μέχρι τῶν θ΄, ἐδήλου ἂν ͵θ΄ χιλ(ι)άδας.

ἱκανῶς δὲ οἶμαι τὰς ψήφους καὶ τοὺς τόπους τῶν δηλωτικῶν χιλ(ι)άδων τε καὶ μυριάδων παραδηλώσαντες πρὸς τὸν ὀξέως ἔχοντα ἐπιβαλέσθαι τῷ πράγματι· ἀναγκαῖον ὅμως, καὶ σαφέστερον ὑμῖν ἐκτιθέναι δι᾽ ὑποδειγμάτων τοὺς τόπους τῶν χιλ(ι)άδων τε καὶ μυριάδων καὶ ὅσο μεῖζο πέφυκε γίllνεσθαί τε καὶ ὀνομάζεσθαι, ὡς ἂν γνώριμοι γένωνται καὶ τοῖς μὴ δυναμένοις ὀξέως ἐπιβαλ(έσθαι). f. 16r

ε Περὶ τοῦ πῶς ἔστι ἐκτεῖναι ψήφους δηλωτικὰς μέχρι χιλ(ι)άδας χιλ(ι)άδων, ἅπερ παρὰ Λατίνοις καλῶνται μιλ(ι)ούνια, παρ᾽ ἡμῖν δὲ νοῶνται ρ΄ μυριάδαι

Ἀριθμός τις μέγιστος παρὰ Λατίνοις εὑρίσκεται, ὅστις παρ᾽ αὐτοῖς μὲν λέγεται μιλιούνιον, παρ᾽ ἡμῖν δὲ νοεῖται ρ΄ μυριάδαι, τουτέστι χίλ(ι)αι χιλ(ι)άδαι. ἔστω δέ, ὅτι σημειώσασθαι βούλ(ει) ιε΄ μιλ(ι)ούνια καὶ υλβ΄ χιλ(ι)άδας καὶ ωξζ΄· θὲς οὖν ταύτας τὰς ψήφους α ε δ γ β η ς ζ΄. αὗται οὖν αἱ ὀκτὼ ψῆφοι δηλοῦσι, ἅπερ ζητεῖς σημειώσασθαι. σημείωσαι δὲ τὸν τέταρτον τόπον τῆς χιλ(ι)άδος διὰ ψηφῖδός τινος. ἄρξου δὲ ἀπὸ τοῦ τετάρτου τόπου τῆς χιλ(ι)άδος, ἐφ᾽ οὗ καὶ τὴν ψηφῖδα ἄνωθεν ἔθηκας, καὶ σκόπει, ποῦ ἂν ᾖ ὁ τῆς χιλ(ι)άδος τόπος ἀπὸ τῆς ψηφῖδος ἀρξάμενος, τουτέστι ἀπὸ τοῦ παρόντος σημείου β΄. εὑρήσεις δέ, ὅτι τὸ ε΄ ἀπὸ τῆς β΄ ἐπέχει τόπον τέταρτον, τουτέστι χιλιάδος, καὶ σημείωσαι τὸ ε΄ διὰ δύο – ὡς ὁρᾷς – ψηφίδων. δηλοῖ δὲ ὁ ἕβδομος τόπος, ὅστις ἔχει τὸ ε΄, πέντε χιλ(ι)άδας χιλ(ι)άδων, τουτέστι πέντε μιλ(ι)ούνια. ἐὰν δὲ καὶ τρίτος τόπος χιλ(ι)άδος ὑπῆρχεν, τουτέστι πλεῖον τῶν δέκα ψήφων, ἐσημειώσω ἂν καὶ τὸν τρίτον τόπον τῆς χιλ(ι)άδος ἀπὸ τοῦ ε΄ ἀρξάμενος, ὅστις ἐστὶ ὁ δέκατος, διὰ τριῶν ψηφίδων, καὶ ἐδήλου ἂν ὁ τόπος ὁ ἔχων τὰς τρεῖς ψηφῖδας, τουτέστι ὁ δέκατος, χιλίας χιλιάδας χιλ(ι)άδων, τουτέστι ͵α΄ μιλ(ι)ούνια. αἱ γὰρ ψηφῖδαι δηλοποιοῦσαι τὰς χιλ(ι)άδας τῶν χιλ(ι)άδων σαφέστερον ἡμῖν παραδηλοῦσι τὴν ζητουμένην ποσότητα τῶν δηλωτικῶν ψήφων, ὧν ἐπιζητῶμεν εἰδεῖν.

αἱ δὲ ὀκτὼ αὗται ψῆφοι α ε δ γ β η ς ζ΄, ἃς καὶ ἄνωθεν ἔγραψας – τὰ μὲν ζ΄, ἐπεὶ εἰς πρῶτον τόπον τῆς μονάδος ἵσταται, δηλοῖ ἑπτά, τὰ δὲ ς΄, ἐπεὶ εἰς δεύτερον τόπον τῆς δεκάδος ἵσταται, δηλοῖ ξ΄, καὶ ἰδοὺ ταῦτα τὰ δύο γράμματα ς ζ΄ δηλοῦσι ξζ΄. τὰ δὲ η΄, ἐπεὶ εἰς τρίτον τόπον, ἥτις ἐστὶ τῆς ἑκατοντάδος, ἵσταται, δηλοῖ ω΄. διὰ γοῦν τῶν τριῶν τούτων η ς ζ΄ ἔχεις ωξζ΄. τὰ δὲ β΄, ἐπεὶ εἰς τέταρτον τόπον, ὅστις ἐστὶ χιλ(ι)άδος, εὑρίσκεται, δηλοῖ ͵β΄· ἔχεις διὰ τῶν δ΄ τούτων β η ς ζ΄

8/9 χιλιάδος] ͵ᾱδος C 27 ἄρξου] hic et aliubi pro ἄρξαι C

,βωξζ΄. τὰ δὲ γ΄, ἐπεὶ εἰς πέμπτον τόπον, ὅστις ἐστὶ μυριάδος, εὑρίσκεται, δηλοῖ τρεῖς μυριάδας, τουτέστι ,λ΄· ἔχεις διὰ τῶν ε΄ τούτων γ β η ς ζ΄ ,λ,βωξζ΄. τὰ δὲ δ΄, ἐπεὶ ἀπὸ τῶν β΄ ἐπέχει τρίτον τόπον, τουτέστι ἑκατοντάδος, δηλοῖ ,υ΄, ταὐτὸν γὰρ εἰπεῖν μ΄ μυριάδας· ἔχεις διὰ τῶν ἓξ τούτων δ γ β η ς ζ΄ ,υ,λ,βωξζ΄. τὰ δὲ ε΄ ἀπὸ τῆς β΄ ἐπέχει τόπον τέταρτον, ὅς ἐστι δηλωτικὸς χιλ(ι)άδας χιλ(ι)άδων, τουτέστι πέντε μιλ(ι)ούνια· ἔχεις διὰ τῶν ζ΄ τούτων ε δ γ β η ς ζ΄ μιλ(ι)ούνια ε΄ καὶ ,υ,λ,βωξζ΄. τὸ δὲ α΄ ἀπὸ τὸ ε΄, ὅπερ δηλοῖ πέντε μιλ(ι)ούνια, ἐπέχει τόπον δεύτερον, ὅς ἐστι δεκάδος, καὶ δηλοῖ δέκα μιλ(ι)ούνια. τὸ δὲ α΄ μετὰ τοῦ ε΄ οὕτως κείμενα α ε΄ δηλοῦσι ιε΄ μιλ(ι)ούνια. ἔχεις διὰ τῶν η΄ τούτων α ε δ γ β η ς ζ΄ μιλ(ι)ούνια ιε΄ καὶ ,υ,λ,β΄ καὶ ωξζ΄· καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι τὰ ὀκτὼ ταῦτα γράμματα δηλοῦσι, ὅνπερ ἐξαρχῆς ἐζήτησας ἐκτιθέναι ψῆφον.

ἔστι δὲ καὶ ἕτερος μείζων ἀριθμός, ὅστις καλεῖται λεγεών, τουτέστι χίλιαι χιλ(ι)άδαι χιλ(ι)άδων, ἅπερ ἐστὶ ,α΄ μιλ(ι)ούνια. ἔστω γὰρ ὅτι ζητεῖς σημειώσασθαι ιβ΄ λεγεῶνας καὶ ρν΄ μιλ(ι)ούνια καὶ ,φ,μ,γ΄ καὶ ψξη΄· θὲς οὖν ταύτας τὰς ψήφους α β α ε ε δ ζ ς η΄. αὗται αἱ ια΄ ψῆφοι δηλοῦσι, ἅπερ ζητεῖς σημειώσασθαι, τουτέστι λεγεῶνας ιβ΄ μιλ(ι)ούνια ρν΄ καὶ ,φ,μ,γ΄ καὶ ψξη΄.

ς Περὶ τοῦ πῶς ἔστι πολλ(α)πλασιάσαι δεκάδα μετὰ μονάδας, τουτέστι ιε΄ μετὰ τῶν ς΄

Καιρὸς ἤδη λοιπὸν πρὸς τὸ ἑξῆς προχωρῆσαι καὶ τῆς εἰς τὸν πολλ(α)πλασιασμὸν ὑποθέσεως ἅψασθαι. ἔστω ὅτι ζητεῖς ς΄κις ιε΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα πόσα γίνονται. δεῖ οὖν τοῦτο πρῶτον εἰδέναι, ὅτι σχῆμα ἔστι, ὅπερ εἰώθαμεν λέγειν δίπλευρον, δι' οὗ πᾶς πολλ(α)πλασιασμὸς γίνεται. ἔστι δὲ τὸ παρόν· θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ιε΄, ἐκ πλαγίου δὲ τὰ ς΄ οὕτως γὰρ ἐπὶ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως χρὴ ποιεῖν,

α ε
ϑ υ | ς
α
ς
ς

ἄνωθεν μὲν κεῖσθαι τὰ μείζονα, ἐκ πλαγίου δὲ τὰ ἐλάττονα. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἐκ πλαγίου ς΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν ε΄· ς΄κις οὖν ε΄ γίνονται λ΄, ἅπερ ἐστὶ δεκάδαι τρεῖς, καὶ ἐπεὶ οὐδὲν περιττεύει ἐκ τῶν λ΄, ὥστε εἶναι λβ΄ ἢ λγ΄, ἀλλὰ μόνον δεκάδων δηλωτικά ἐστι τὰ λ΄, κράτει παρὰ σεαυτῷ γ΄ ἀντὶ τῶν λ΄ καὶ θὲς εἰς τὸν τῆς μονάδος τόπον οὐδέν, ὅπερ ἐστὶ τὸ παρὸν σημεῖον υ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου ς΄ μετὰ τοῦ ἄνωθεν α΄, ὅπερ δηλοῖ δέκα· ς΄κις οὖν α΄ γίνονται ς΄, ἔστι δὲ ταῦτα δεκάδαι ς΄, τουτέστι ξ΄. ἕνωσον ταύτας τὰς ς΄ δεκάδας μετὰ τῶν γ΄ δεκάδων, ὧν παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς ἀντὶ τῶν λ΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ δεκάδαι ϑ΄. θὲς οὖν εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον, ὅστις ἐστὶ ὁ δεύτερος, τὰς ϑ΄ δεκάδας, καὶ ἰδοὺ ἡ ϑῆτα αὐτή, ἅπερ δηλοῖ ἐννέα εἰς τόπον μονάδος εὑρισκομένη, νῦν οὖσα εἰς δεύτερον τόπον, ἥτις ἐστὶ τῆς δεκάδος, δηλοῖ δεκάδας ϑ΄, τουτέστι ϙ΄. τὰ δὲ ϑ΄ μετὰ τοῦ υ΄ οὕτως κείμενα ϑ υ΄ δηλῶσι ϙ΄· καὶ ἰδοὺ τὰ ιε΄ μετὰ τῶν ς΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως εὗρες, ὅτι γίνονται ϙ΄.

ζ Περὶ τῆς τούτων μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως, ἐὰν καλῶς ἢ οὐ καλῶς ἐγένετο τὸ ζητούμενον

Ἡ δὲ ἀπόδειξις καὶ μαρτυρία τούτων, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον, ἔστι αὕτη. ζήτει πρῶτον, ὃν ἂν ἀριθμὸν ἄνωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς πολλ(α)πλασιάζῃς, ἥτις νῦν ἐστι α ε΄. ἄφελε τὰ α ε΄, ὁσάκις χωρεῖ, ἐπὶ τῶν ζ΄· δὶς οὖν ζ΄ γίνονται ιδ΄, περιττεύει || α΄ μέχρι τῶν ιε΄. μέρισον καὶ τὸ ἐκ πλαγίου, ὅπερ ἐστὶ ς΄, ἐπὶ τῶν ζ΄. ἐπεὶ δὲ τὰ ς΄ ἐστὶ ἔλαττο τῶν ζ΄, οὐ δύνανται διαμερισθῆναι ὑπὸ τῶν ζ΄ ἐλάττονα f. 16v

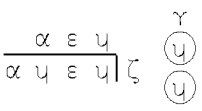
---

7 ἀπὸ τὸ ε΄] sic C pro ἀπὸ τοῦ ε΄ 39 ἥτις] sic C 41 ς΄, ἐπὶ τῶν] difficile lectu

ὄντα· μένοσι δὲ πάλιν ς΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ ταῦτα τὰ ς΄ τὰ ἐκ πλαγίου ὄντα μετὰ τοῦ α΄, ὅπερ ἀπέμεινεν ἐκ τῶν ιε΄· ς΄κις οὖν α΄ γίνονται ς΄. θὲς ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός, ὡς ὁρᾷς· (ς). μέρισον καὶ τὸν ἐξελθόντα τέλειον ἀριθμόν, τουτέστι τὰ παρόντα θ υ΄, ἅπερ δηλῶσι ς΄, ἐπὶ τῶν ζ΄. ἄφελε οὖν ἐκ τοῦ πρώτου γράμματος, τῆς θήτας δηλονότι, ζ΄ καὶ ἀπομένοσι β΄. τὰ β΄ ταῦτα μετὰ τοῦ ἐφεξῆς γράμματος, ὅπερ ἐστὶ υ΄, οὕτως κείμενα β υ΄ δηλῶσι κ΄. μέρισον καὶ ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄· δὶς οὖν ζ΄ γίνονται ιδ΄, περιττέυοσι καὶ ς΄ μέχρι τῶν κ΄. θὲς καὶ ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός· (ς). ἐπεὶ δὲ αἱ δύο τούτων ἀποδείξεις εὑρέθησαν ὅμοιαι ἔχουσα ἑκάστη σημεῖον τὰ ς΄, ὁ ἐξελθὼν τέλειος πολλ(α)πλασιασμός, τουτέστι τὰ θ υ΄, ἐξῆλθον καλῶς τε καὶ ἀληθῶς. εἰ δὲ εὑρίσκοντο ἄνισαι αἱ δύο τούτων ἀποδείξεις, ὥστε ἡ μὲν εἶναι ς΄, ἡ δὲ ἑτερόν τι σημεῖον ἀνόμοιον, ἦν ἂν καὶ τὰ ἐξελθόντα θ υ΄ οὐ καλῶς πολλ(α)πλασιαζόμενα.

η **Περὶ τοῦ πῶς ἔστι πολλ(α)πλασιάσαι ρν΄ μετὰ τῶν ζ΄**

Θὲς τὰ μὲν ρν΄ ὡς πλείονα ὄντα ἄνωθεν, τὰ δὲ ζ΄ ἐλάττονα ὄντα – θὲς ταῦτα ἐκ πλαγίου. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἐκ πλαγίου ζ΄ μετὰ τοῦ ἄνωθεν υ΄. ζ΄κις οὖν υ΄ πάλιν ἐστὶ υ΄. θὲς οὖν κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς μονάδος τόπον υ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου ζ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν ε΄, ὧνπερ δηλῶσι ν΄. ζ΄κις οὖν ε΄ γίνονται λε΄, καὶ τὰ μὲν ε΄ ἐστὶ πέντε δεκάδαι, τουτέστι ν΄. θὲς οὖν ε΄ εἰς δεύτερον τόπον, ἥτις ἐστὶ δεκάδος. κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ γ΄ ἀντὶ τῶν τ΄· τὰ γὰρ λ΄ τρεῖς ἑκατοντάδαι εἰσί, τουτέστι τ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου ζ΄ μετὰ τοῦ ἄνωθεν α΄, ὅπερ δηλοῖ ρ΄· ζ΄κις οὖν α΄ γίνονται ζ΄, τουτέστι ἑκατοντάδαι ζ΄, ἅπερ ἐστὶ ψ΄. ἕνωσον ταύτας τὰς ζ΄ ἑκατοντάδας μετὰ τῶν γ΄ ἑκατοντάδων, ὧν κρατεῖς παρὰ σεαυτῷ, καὶ γίνονται δέκα ἑκατοντάδαι, τουτέστι χίλια. θὲς οὖν υ΄ εἰς τρίτον τόπον, ὅς ἐστι ἑκατοντάδος· θὲς δὲ πάλιν τὸ α΄, ὅπερ δηλοῖ ,α΄, εἰς τέταρτον τόπον, ὅστις ἐστὶ χιλιάδος. τὸ δὲ α΄ μετὰ τὸ υ΄ οὕτως κείμενα α υ΄ δηλῶσι δέκα· νῦν δὲ εἰς τέταρτόν τε καὶ τρίτον τόπον εὑρισκόμενα δηλῶσι δέκα ἑκατοντάδας, ἅπερ ἐστὶ ,α΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ρν΄ μετὰ τῶν ζ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνεται ὁ τέλειος τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,αν΄.



θ **Περὶ τῆς τούτων μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως**

Λάβε τὰ ἄνωθεν δύο πρῶτα γράμματα, ἅπερ οὕτως κείμενα α ε΄ δηλῶσι ιε΄. μέρισον ταῦτα, ὁσάκις χωρῶσι, ἐπὶ τῶν ζ΄· δὶς οὖν ζ΄ γίνονται ιδ΄, περισσεύει καὶ α΄. τοῦτο δὲ πάλιν τὸ α΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς ἄνωθεν τρίτου γράμματος, ὅπερ δηλοῖ υ΄, οὕτως κείμενα α υ΄ δηλῶσι δέκα. ἄφελε καὶ ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄· χωρεῖ δὲ ἅπαξ τὰ ζ΄ εἰς τὰ δέκα, περισσεύοσι δὲ καὶ γ΄. θὲς οὖν τὰ γ΄ ταῦτα ἰδίως. μέρισον δὲ καὶ τὸ ἐκ πλαγίου, ὅπερ ἐστὶ ζ΄, ἐπὶ τῶν ζ΄· χωρεῖ δὲ ἅπαξ τὸ ζ΄ εἰς τὰ ζ΄ καὶ ἀπομένει υ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὸ υ΄ μετὰ τῶν γ΄, ὧν ἰδίως κρατεῖς. τρὶς οὖν υ΄ πάλιν ἐστὶ υ΄. εἰ δὲ τὰ δύο ταῦτα μέρη τῶν ἄνωθεν καὶ ἐκ πλαγίου, τουτέστι τὰ γ΄ καὶ υ΄, πολλ(α)πλασιαζόμενα ἐγένοντο ἂν δέκα ἢ εἴκοσ(ι), διεμέρισας καὶ ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄, καὶ τὰ περισσεύοντα κάτωθεν ὄντα τῶν ζ΄ – ἐκράτεις ἂν τοῦτο ἰδίως. νῦν δὲ τὰ γ΄ μετὰ τοῦ υ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα – ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμός ἐστι υ΄. θὲς τοῦτο ἐντὸς κύκλου τινός· (υ). λάβε δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ τελείου ἀριθμοῦ, οὗ εὗρες, ὅτι ἐστὶ

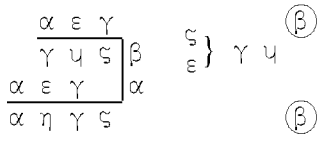
---

26 μετὰ τὸ υ΄] **sic C**

α υ ε υ΄, τὰ πρῶτα δύο γράμματα, ἅπερ οὕτως κείμενα α υ΄ δηλῶσι δέκα. ἄφελε ἅπαξ ζ΄ καὶ περισσεύοσι καὶ γ΄ μέχρι τῶν δέκα. τὰ γ΄ δὲ ταῦτα μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τρίτου γράμματος οὕτως κείμενα γ ε΄ δηλῶσι λε΄. μέρισον ταῦτα, ὁσάκις χωρῶσι, ἐπὶ τῶν ζ΄· χωρῶσι δὲ πεντάκις τὰ ζ΄ εἰς τὰ λε΄ καὶ ἀπομένει υ΄. τὸ δὲ υ΄ τοῦτο μετὰ τοῦ ἐφεξῆς ἐσχάτου γράμματος, ὅπερ ἐστὶ υ΄, οὕτως κείμενα υ υ΄ δηλῶσι πάλιν οὐδὲν καὶ οὐ δύνανται διαμερισθῆναι ἐπὶ τῶν ζ΄. θὲς οὖν ἐντὸς κύκλου τινὸς υ΄· ⓤ. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ τέλειος ἀριθμός, τουτέστι τὰ α υ ε υ΄ ἀπέδωκαν τελευταῖον σημεῖον τὸ υ΄, ὅπερ ἐστὶ ὅμοιον τῆς ἐντὸς κύκλου τεθειμένης πρώτης ἀποδείξεως, ἑκάστη τούτων ἀπόδειξις ἔχουσα σημεῖον ⓤ– δῆλον ἡμῖν γέγονε, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ ἡ μὲν ἦν ἂν σημεῖον ⓤ, ἡ δὲ ἄλλο τι σημεῖον ἀνόμοιον, ὁ ἐξελθὼν τέλειος πολλ(α)πλασιασμός, τουτέστι τὰ α υ ε υ΄, οὐ καλῶς ἂν ᾖ πολλ(α)πλασιαζόμενα.

ι Περὶ τοῦ πῶς ἔστι πολλ(α)πλασιάσαι ρνγ΄ μετὰ τῶν ιβ΄

Θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ρνγ΄ ὡς πλείονα ὄντα, ἐκ πλαγίου δὲ τὰ ιβ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἐκ πλαγίου β΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν γ΄· δὶς οὖν γ΄ γίνονται ς΄. θὲς οὖν κάτωθεν τῶν γ΄ εἰς τὸν τῆς μονάδος τόπον ς΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου β΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν ε΄, ὧν δηλῶσι ν΄· δὶς οὖν ε΄ γίνονται α υ΄. θὲς οὖν εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον υ΄, κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου β΄ μετὰ τοῦ ἄνωθεν α΄, ὅπερ δηλοῖ ρ΄· δὶς οὖν α΄ γίνονται β΄. ἕνωσον τὰ β΄ ταῦτα μετὰ τοῦ α΄, οὗ κρατεῖς ἰδίως ἀντὶ τῶν δέκα, καὶ γίνονται ὁμοῦ γ΄. ἔστι δὲ τὰ γ΄ ταῦτα τρεῖς ἑκατοντάδαι, τουτέστι τ΄. θὲς οὖν τὰ γ΄, ἅπερ δηλῶσι τ΄, κάτωθεν τοῦ α΄, τουτέστι εἰς τρίτον τόπον, ὅστις ἐστὶ ἑκατοντάδος· καὶ ἰδοὺ ἐτέλεσας τὸ ἐκ πλαγίου δεύτερον γράμμα, ὅπερ δηλοῖ β΄, μετὰ τῶν ἄνωθεν ρνγ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενον. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν καὶ τὸ ἐκ πλαγίου πρῶτον γράμμα, τουτέστι τὸ α΄, ὅπερ δηλοῖ δέκα, μετὰ τῶν ἄνωθεν γ΄ τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸν τῆς μονάδος τόπον· ‖ f. 17 r ἅπαξ οὖν γ΄ πάλιν ἐστὶ γ΄. τὰ δὲ γ΄ ταῦτα, ἐπεὶ δεκάδα πολλ(α)πλασιάζεις μετὰ μονάδος, ἔστι τρεῖς δεκάδαι, τουτέστι λ΄. πρόβηθι οὖν τὸν τῆς μονάδος τόπον καὶ θὲς γ΄ κάτωθεν εἰς δεύτερον τόπον, ἥτις ἐστὶ τῆς δεκάδας. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὸ ἐκ πλαγίου α΄, ὅπερ δηλοῖ δέκα, μετὰ τῶν ἄνωθεν ε΄, ὅπερ δηλοῖ ν· ἅπαξ οὖν ε΄ πάλιν ἐστὶ ε΄, τουτέστι πέντε ἑκατοντάδαι, ἅπερ ἐστὶ φ΄. θὲς οὖν ε΄ εἰς τρίτον μὲν τόπον τῶν ἄνωθεν γραμμάτων, εἰς δεύτερον δὲ τῶν γ΄, ὧν προέθηκας. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὸ ἐκ πλαγίου α΄, ὅπερ δηλοῖ δέκα, μετὰ τοῦ ἄνωθεν α΄, ὅπερ δηλοῖ ρ΄· ἅπαξ οὖν α΄ πάλιν ἐστὶ α΄. τοῦτο δὲ τὸ α΄ ἐστὶ ,α΄. θὲς οὖν α΄ εἰς τέταρτον μὲν τόπον τῶν ἄνωθεν γραμμάτων, εἰς τρίτον δὲ τῶν κάτωθεν δύο. καὶ ἰδοὺ ἐτέλεσας καὶ τὸ πρῶτον ἐκ πλαγίου γράμμα, ὅπερ δηλοῖ δέκα, μετὰ τῶν ἄνωθεν ρνγ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενον. ἕνωσον δὲ τὰς δύο ψήφους, ἃς ἀπετέλεσας, καὶ θὲς κάτωθεν τῆς ἑτέρας εὐθείας γραμμῆς εἰς τόπον πρῶτον, ὅστις ἐστὶ μονάδος, ς΄. θὲς δὲ πάλιν εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον, ὅστις ἐστὶ ὁ δεύτερος, γ΄. εἰς δὲ τὸν τρίτον τόπον, ὅστις ἐστὶ ἑκατοντάδος, θὲς η΄. εἰς δὲ τὸν τέταρτον τόπον, ὅστις ἐστὶ χιλιάδος, θὲς α΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι τὰ ρνγ΄ μετὰ τῶν ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται ,αωλς΄.



---

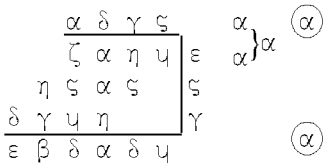
7 ἀπέδωκαν] ἀπέδοκαν **C pro** ἀπέδοσαν 10 ἄλλο τι] ἀλλ ὁτ τι **C** 25 ἐκ πλαγίου] ἐκ πλασιου **C** 27 πολλ(α)πλασιάζεις μετὰ **ex coni.: spatium complurium litt. miro modo corruptum**

ια Περὶ τῆς τούτων μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως

Λάβε τὰ ἄνωθεν δύο πρῶτα γράμματα, ἅπερ οὕτως κείμενα α ε΄ δηλῶσι ιε΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περιττεύει α΄. τὸ α΄ δὲ τοῦτο μετὰ τοῦ ἄνωθεν ἐφεξῆς τρίτου γράμματος οὕτως κείμενα α γ΄ δηλῶσι ιγ΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄, περιττεύοσι καὶ ς΄· θὲς ταῦτα ἰδίως. λάβε δὲ καὶ τὰ ἐκ πλαγίου δύο γράμματα, ἅπερ οὕτως κείμενα α β΄ δηλῶσι ιβ΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄, περισσεύοσι καὶ ε΄· θὲς καὶ ταῦτα τὰ ε΄ σύνεγγυς τῶν ς΄, ὧν κρατεῖς ἰδίως. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ς΄ μετὰ τῶν ε΄· ε΄κις οὖν ς΄ γίνονται λ΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄, περισσεύοσι καὶ β΄· θὲς ταῦτα ἐντὸς κύκλου· Ⓑ. λάβε δὲ τὰ πρῶτα δύο γράμματα τοῦ γεγονότος πολλ(α)πλασιασμοῦ τῶν α η γ ς΄, ἅπερ οὕτως κείμενα α η΄ δηλῶσι ιη΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄, περισσεύοσι καὶ δ΄. τὰ δὲ δ΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τρίτου γράμματος οὕτως κείμενα δ γ΄ δηλῶσι μγ΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει καὶ α΄. τὸ δὲ α΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τετάρτου γράμματος οὕτως κείμενα α ς΄ δηλῶσι ις΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄, περισσεύοσι καὶ β΄. θὲς ταῦτα ἐντὸς κύκλου· Ⓑ. καὶ ἰδοὺ ἐγένοντο αἱ μαρτ(υ)ρίαι τῶν δύο μερῶν ἴσαι καὶ ὅμοιαι, ἔχουσα ἑκάστη ἐντὸς κύκλου Ⓑ. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς ὁ ἐξελθὼν πολλ(α)πλασιασμός, ὅστις ἐστὶ ,αωλς΄.

ιβ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι πολλ(α)πλασιάσαι τοὺς ἀπὸ Χριστοῦ γεννήσεως χρόνους, οἵτινές εἰσι ,αυλς΄, μετὰ τῶν τξε΄ ἡμερῶν τοῦ χρόνου καὶ εἰδέναι, πόσαι ἡμέραι γίνονται

Θὲς τοὺς μὲν ,αυλς΄ χρόνους ἄνωθεν, ἐκ πλαγίου δὲ τὰς τξε΄ ἡμέρας, ἃς ἔχει ὁ χρόνος. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὸ ἐκ πλαγίου ἕσχατον γράμμα, ὅπερ ἐστὶ ε΄, μετὰ τοῦ ἄνωθεν τελευταίου γράμματος, ὅπερ ἐστὶ ς΄· ε΄κις οὖν ς΄ γίνονται γ μ΄. θὲς κάτωθεν τῶν ς΄ εἰς τὸν τῆς μονάδος τόπον μ΄, κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ γ΄ ἀντὶ τῶν λ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου ε΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν γ΄, ὧν δηλῶσι λ΄· ε΄κις οὖν γ΄ γίνονται ιε΄. ἕνωσον καὶ τὰ γ΄, ἅπερ ἰδίως παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται ιη΄. θὲς τὰ μὲν η΄ εἰς δεύτερον τόπον, ὅστις ἐστὶ δεκάδος, κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλ(ιν) τὰ ἐκ πλαγίου ε΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν δ΄, ὧν δηλῶσι υ΄· ε΄κις οὖν δ΄ γίνονται β μ΄. ἕνωσον καὶ τὸ α΄, ὅπερ ἰδίως παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς ἀντὶ τῶν δέκα, καὶ γίνονται ὁμοῦ β α΄. θὲς α΄ εἰς τρίτον τόπον, ἥτις ἐστὶ ἑκατοντάδος, κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου ε΄ μετὰ τοῦ ἄνωθεν α΄, ὅπερ δηλοῖ ,α΄· ε΄κις οὖν α΄ γίνονται ε΄, ἔστι δὲ ταῦτα ,ε΄. ἕνωσον καὶ τὰ β΄, ἅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ ζ΄, τουτέστι ,ζ΄. θὲς εἰς τέταρτον τόπον, ὅστις ἐστὶ χιλ(ι)άδος, ζ΄. καὶ ἰδοὺ ἐτέλεσας τὸ ἐκ πλαγίου ἕσχατον γράμμα, τουτέστι τὰ ε΄.



πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ ἐκ πλαγίου δεύτερον γράμμα, τουτέστι τὰ ς΄, μετὰ τῶν ἄνωθεν ς΄, ἅπερ ἐστὶ τελευταῖον τῶν ἄνωθεν τεσσάρων γραμμάτων· ς΄κις οὖν ς΄ γίνονται λς΄, καὶ ἐπεὶ δεκάδα μετὰ μονάδος ἐπολλ(α)πλασίασας, πρόβηθι τὸν τῆς μονάδος τόπον καὶ θὲς ς΄ κάτωθεν τῶν η΄, ὅστις ἐστὶ τόπος δεκάδος τῶν ἄνωθεν δηλονότι γραμμάτων. κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ γ΄ ἀντὶ τῶν λ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου ς΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν γ΄· ς΄κις οὖν γ΄ γίνονται ιη΄. ἕνωσον καὶ τὰ γ΄, ἅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται κα΄. θὲς α΄ εἰς τόπον δεκάδος

---

17 Χριστοῦ] $\overset{ου}{\chi\bar{υ}}$ **C**

ἀπὸ τῶν ς΄, ὧν προέθηκας, ἑκατοντάδος δὲ τῶν ἄνωθεν γραμ<μ>άτων. κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου ς΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν δ΄· ς΄κις οὖν δ΄ γίνονται κδ΄. ἕνωσον καὶ τὰ β΄, ἅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται κς΄. θὲς ς΄ εἰς τρίτον μὲν τόπον τῶν δύο γραμμάτων, ὧν προέθηκας, εἰς τέταρτον δὲ τῶν ἄνωθεν γραμμάτων. κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου ς΄ μετὰ τοῦ ἄνωθεν α΄· ς΄κις οὖν α΄ γίνονται ς΄. ἕν(ω)σον καὶ τὰ β΄, ἅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται η΄. θὲς ταῦτα εἰς τέταρτον μὲν τόπον, ὧν νῦν θέτεις γραμμάτων, εἰς πέμπτον δὲ τόπον τῶν ἄνωθεν, καὶ ἐτελέσθη καὶ τὸ ἐκ πλαγίου δεύτερον γράμμα.

πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὸ ἐκ πλαγίου πρῶτον γράμμα, τουτέστι τὰ γ΄, ἅπερ δηλῶσι τ΄, μετὰ τῶν ἄνωθεν ς΄, ὅπερ ἐστὶ ἔσχατον γράμμα· τρὶς οὖν ς΄ γίνονται ιη΄, καὶ ἐπεὶ νῦν ἑκατοντάδα πολλ(α)πλασιάζεις μετὰ μονάδος, τουτέστι τ΄ μετὰ τῶν ς΄, πρόβηθι τὸν τῆς δεκάδος τόπον καὶ θὲς τὰ μὲν η΄ εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον τῶν ἄνωθεν, || δεκάδος δὲ τῶν κάτωθεν. κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. f. 17^{v}
πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου γ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν γ΄· τρὶς οὖν γ΄ γίνονται θ΄. ἕν(ω)σον καὶ τὸ α΄, ὅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται α υ΄. θὲς υ΄ πρὸ τῶν η΄, τουτέστι εἰς τόπον χιλιάδος τῶν ἄνωθεν γραμμάτων. κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου γ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν δ΄· τρὶς οὖν δ΄ γίνονται ιβ΄. ἕνωσον καὶ τὸ α΄, ὅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται ιγ΄. θὲς γ΄ εἰς πέμπτον τόπον τῶν ἄνωθεν γραμμάτων. κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ἐκ πλαγίου γ΄ μετὰ τοῦ ἄνωθεν α΄· τρὶς οὖν α΄ γίνονται γ΄. ἕν(ω)σον καὶ τὸ α΄, ὅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται δ΄. θὲς ταῦτα τὰ δ΄ εἰς ἕκτον μὲν τόπον τῶν ἄνωθεν γραμμάτων, εἰς τέταρτον δὲ τῶν κάτωθεν, ὧν νῦν θέτεις. καὶ ἰδοὺ ἐτέλεσας τὰ ἐκ πλαγίου τρία γράμματα, ἅπερ δηλῶσι τξε΄, πολλ(α)πλασιάσας ταῦτα μετὰ τῶν ἄνωθεν ,αυλς΄. ἕν(ω)σον δὲ τὰς τρεῖς τούτων ἐξελθούσας ψήφους, ἃς ἀπετέλεσας, καὶ θὲς κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς μονάδος τόπον υ΄. ἕν(ω)σον τὰ η΄ καὶ ς΄ καὶ γί<ν>ονται ιδ΄. θὲς δ΄ εἰς τόπον δεύτερον, ὅστις ἐστὶ δεκάδος. κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. ἕνωσον δὲ τὸ α΄ καὶ α΄ καὶ η΄ καὶ α΄, ὅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ ια΄. θὲς κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τρίτον τόπον, ὅστις ἐστὶ ἑκατοντάδος, α΄. κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. ἕνωσον δὲ τὰ ζ΄ καὶ ς΄ καὶ α΄, ὅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ ιδ΄. θὲς κάτωθεν εἰς τόπον τέταρτον, ὅστις ἐστὶ τῆς χιλιάδος, δ΄. κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. ἕνωσον δὲ τὰ η΄ καὶ γ΄ καὶ α΄, ὅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ ιβ΄. θὲς κάτωθεν εἰς τόπον πέμπτον, ὅστις ἐστὶ μυριάδος, β΄. κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. ἕνωσον δὲ τὰ δ΄ καὶ α΄, ὅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ ε΄. θὲς ταῦτα κάτωθεν εἰς ἕκτον τόπον, ὅς ἐστι δεκάδα μὲν μυριάδος, ἑκατοντάδα δὲ χιλιάδος. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι οἱ ,αυλς΄ χρόνοι γίνονται ἡμέραι φκδ΄ χιλ(ι)άδαι καὶ ρμ΄ ἡμέραι.

ιγ Περὶ τῆς τούτων μαρτ(υ)ρίας καὶ ἀποδείξεως

Λάβε ἐκ τῶν ἄνωθεν γραμμάτων δύο πρῶτα γράμματα, ἅπερ οὕτως κείμενα α δ΄ δηλῶσι ιδ΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ ἀπομένει υ΄. τὸ δὲ υ΄ μετὰ τοῦ ἑφεξῆς τρίτου γράμματος οὕτως κείμενα υ γ΄ δηλῶσι γ΄. οὐκ ἔχεις οὖν μερίσαι τὰ γ΄ ἐπὶ

---

33 χιλιάδος] $\overset{\circ\varsigma}{\alpha\delta}$ **C** 43 οὐκ ἔχεις] οὐ και χής **C**

τῶν ζ΄, λάβε δὲ τὰ δύο ἐφεξῆς τελευταῖα γράμματα, ἅπερ οὕτως κείμενα γ ς΄ δηλῶσι λς΄· ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄, περισσεύει καὶ α΄ μέχρι τῶν λς΄. θὲς τὸ α΄ τοῦτο ἐκεῖσε ἰδίως. λάβε δὲ καὶ τὰ ἐκ πλαγίου πρῶτα δύο γράμματα, ἅπερ οὕτως κείμενα γ ς΄ δηλῶσι λς΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ ἀπομένει α΄. τοῦτο τὸ α΄ μετὰ τοῦ ἐκ πλαγίου τρίτου γράμματος οὕτως κείμενα ⟨α ε΄⟩ δηλῶσι ιε΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει καὶ α΄. θὲς τοῦτο ἐκεῖσε πλησίον, ἔνθα καὶ τὸ ἕτερον α΄ προέθηκας, καὶ πολλ(α)πλασίασον τὸ α΄ μετὰ τοῦ α΄· ἅπαξ οὖν α΄ πάλιν ἐστὶ α΄. θὲς οὖν τοῦτο ἐντὸς κύκλου· Ⓐ. λάβε δὲ τὰ πρῶτα δύο γράμματα τοῦ γεγονότος πολλ(α)πλασιασμοῦ τῶν ε β δ α δ ι΄, ἅπερ οὕτως κείμενα ε β΄ δηλῶσι νβ΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι καὶ γ΄ μέχρι τῶν νβ΄. τὰ δὲ γ΄ ταῦτα μετὰ τοῦ τρίτου γράμματος οὕτως κείμενα γ δ΄ δηλῶσι λδ΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι καὶ ς΄ μέχρι τῶν λδ΄. τὰ δὲ ς΄ ταῦτα μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τετάρτου γράμματος οὕτως κείμενα ς α΄ δηλῶσι ξα΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι καὶ ε΄ μέχρι τῶν ξα΄. τὰ δὲ ε΄ ταῦτα μετὰ τοῦ ἐφεξῆς πέμπτου γράμματος οὕτως κείμενα ε δ΄ δηλῶσι νδ΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι καὶ ε΄. ταῦτα τὰ ε΄ μετὰ τοῦ τελευταίου γράμματος οὕτως κείμενα ε ι΄ δηλῶσι ν΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄, περισσεύει καὶ α΄ μέχρι τῶν ν΄. θὲς τοῦτο ἐντὸς κύκλου· Ⓐ. καὶ ἰδοὺ ἐγένοντο αἱ μαρτυρίαι τῶν δύο μερῶν ἔχουσα ἑκάστη ἐντὸς κύκλου Ⓐ. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς ὁ ἐξελθὼν τέλειος πολλ(α)πλασιασμός, ὅστις ἐστὶ ε β δ α δ ι΄. εἰ δὲ ἡ μὲν εἶχε α΄, ἡ δὲ ἄλλον τινὰ ἀνόμοιον ψῆφον, οὐκ ἂν ἐγένετο καλῶς ὁ ἐξελθὼν τέλειος πολλ(α)πλασιασμός.

Τὰς μαρτ(υ)ρίας δὲ τούτων καὶ ἀποδείξεις, ἃς ἐγγράφως ὑποτιθέμεθα, ἀγράφως εἰώθαμεν ἐκτελεῖν ἐν φαντασίᾳ μόνῃ τὰς συζυγίας τῶν δύο γραμμάτων λαμβάνοντες καὶ ἐπὶ τῶν ζ΄ μερίζοντες, καθὼς τοῦτο διὰ τῶν ὑποτιθεμένων ὑποδειγμάτων ὁρᾶται σαφέστερον.

ιδ Περιεκτικῶς περὶ πάντων τῶν πολλαπλασιαζομένων μερῶν

Ἀρκούντως ὑμῖν ἐν διαφόροις ὑποδείγμασι παραδηλώσαντες, πῶς ἄρα ἔξεστιν πολλ(α)πλασιάζειν πρὸς ἄλληλα δύο τινὰ μέρη καὶ εἰδέναι ἀσφαλῶς καὶ προχείρως τὸν ἐξ αὐτῶν γενόμενον τέλειον πολλ(α)πλασιασμόν, δέον ἡμῖν ἔδοξε εἶναι, καὶ περιεκτικῶς ὑμῖν ἐκτιθέναι καὶ διαγράψασθαι, πῶς ἄρα ἔχεις πολλ(α)πλασιάζειν τοὺς παρατυχόντας δύο τινὰς ἀριθμοὺς τεχνικῶς διὰ τοῦ διπλεύρου σχήματος καὶ εἰδέναι ἀσφαλῶς καὶ προχείρως τὸν ἐξ αὐτῶν γενόμενον τέλειον πολλ(α)πλασιασμόν.

καὶ πρῶτον μέν, ὡς καὶ ἐν τοῖς ὑποδείγμασι εἴπομεν, τὸ μεῖζον μὲν μέρος τῶν δύο πολλ(α)πλασιαζομένων μερῶν ἄνωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς τίθεσο, ὅσον ἄρα καὶ ᾖ, ἐκ πλαγίου δὲ τὸ ἔλαττον, ὡς καὶ ἐν τοῖς ὑποδείγμασι ὁρᾶται τοῦτο σαφέστατα. ἔπειτα πολλ(α)πλασίασον τὸ ἐκ πλαγίου ἀνώτατον γράμμα, ὅπερ ἐστὶ μονάδος γράμμα, μετὰ τοῦ ἄνωθεν τελευταίου γράμματος, ὅπερ εἰς τόπον μονάδος εὑρίσκεται, καὶ τὸν ἐκ τούτων γενόμενον πολλ(α)πλασιασμόν – τὸν μὲν κάτωθεν τῆς δεκάδος ὄντα ἁπλὸν ἀριθμὸν εἰς τὸν τῆς μονάδος τόπον τίθεσο, ἀντὶ δὲ τῶν δεκάδων τοσαύτας μονάδας λάμβανε, τουτέστι α΄ ἀντὶ τῶν ι΄ καὶ β΄ ἀντὶ τῶν κ΄ καὶ γ΄ ἀντὶ τῶν λ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, καὶ κράτει ταύτας παρὰ σεαυτῷ. πολλ(α)πλασίαζε δὲ πάλιν μετὰ ‖ f. 18r τοῦ αὐτοῦ πλαγίου γράμματος τῆς μονάδος τὸ ἄνωθεν ὂν πρὸ τοῦ τελευταίου γράμ-

---

17 αἱ] ἑ **C** 22 ἐγγράφως] ἐγκραφὼς **C** 23 ἐν φαντασίᾳ] ἐμφαντασήα **hic et passim C** 27 ἔξεστιν] ἔξεσθιν **C** 39 ἁπλὸν] **sic C pro** ἁπλοῦν

ματος τὸ εἰς τόπον δεκάδος εὑρισκόμενον· καὶ τὸν ἐκ τούτων γενόμενον πολλ(α)πλασιασμὸν ἕνωσον μετὰ τῶν μονάδων, ὧν κρατεῖς ἰδίως ἀντὶ τῶν δεκάδων, καὶ τὰ μὲν ἐκ τῶν δεκάδων περισσεύοντα κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τόπον δεκάδος τίθεσο, ἀντὶ δὲ τῶν δεκάδων τοσαύτας μονάδας κράτει παρὰ σεαυτῷ. κατὰ τὸν ὅμοιον δὲ τρόπον πολλ(α)πλασίασον μετὰ τοῦ αὐτοῦ πλαγίου γράμματος τῆς μονάδος τὸ ἄνωθεν γράμμα τὸ εἰς τόπον ἑκατοντάδος εὑρισκόμενον, ὅστις ἐστὶ τρίτος. ὡσαύτως καὶ τὸ εἰς τέταρτον καὶ πέμπτον καὶ ὅσο ἂν ἄλλο ἄνωθεν ἔχῃς μέχρι καὶ τοῦ τελευταίου μὲν γράμματος ἀπὸ τοῦ τέλους, πρώτου δὲ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, πολλ(α)πλασίασον μετὰ τοῦ ἐκ πλαγίου ἀνωτάτου γράμματος τῆς μονάδος καὶ τίθεσο κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τοὺς οἰκείου<ς> τόπους ἀκολούθως τὰ ἔλαττον ὄντα τῶν δεκάδων, ἀντὶ δὲ τῶν δεκάδων τοσαύτας μονάδας λάμβανε καὶ κράτει ταύτας παρὰ σεαυτῷ· καὶ μετὰ τῶν πολλ(α)πλασιαζομένων ἀριθμῶν ἕνωσον τὰς μονάδας, ἃς ἀντὶ τῶν δεκάδων παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, μέχρις ἂν οὕτω ποιῶν τελέσῃς πάντα τὰ ἄνωθεν γράμματα, ὅσα καὶ ℩.

μετὰ δὲ τὸ τελέσαι τὸ ἐκ πλαγίου ἀνώτατον γράμμα τὸ εἰς τόπον μονάδος ἐγκείμενον μετὰ τῶν ἄνωθεν πάντων γραμμάτων πάλιν ἄρξου τὸ ἐκ πλαγίου κατωτέρω δεύτερον γράμμα, ὅπερ εἰς δεκάδος τόπον ἵσταται, καὶ πολλ(α)πλασίαζε τοῦτο μετὰ τῶν ἄνωθεν πάντων γραμμάτων, καθ' ὃν τρόπον καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου ἐποίησας. τὰς δὲ ἐπερχομένας ψήφους τῶν δεκάδων τε καὶ μονάδων – ἐπεὶ μετὰ τὸ ἐκ πλαγίου εἰς τόπον δεκάδος εὑρισκόμενον γράμμα πολλ(α)πλασιάζεις, πρόβηθι τὸν τῆς μονάδος τόπον καὶ ἄρξου γράφειν ταῦτα ἀπὸ τὸν τῆς δεκάδος τόπον, ὅς ἐστι ὁ δεύτερος, μέχρις ἂν ἀκολούθως οὕτως ποιῶν τελέσῃς τὸ ἐκ πλαγίου δεύτερον γράμμα τὸ εἰς τόπον δεκάδος εὑρισκόμενον μετὰ τῶν ἄνωθεν πάντων γραμμάτων, καθὼς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου οὕτως ἐποίησας.

ὡσαύτως δὲ πάλιν καὶ τὸ ἐκ πλαγίου τρίτον γράμμα, ὅπερ εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον ἵσταται, κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον μετὰ τῶν ἄνωθεν πάντων γραμμάτων πολλ(α)πλασίαζε, τὰς δὲ ἐξερχομένας μονάδας τε καὶ δεκάδας – ἐπεὶ μετὰ ἑκατοντάδος γράμμα πολλ(α)πλασιάζεις, πρόβηθι καὶ τὸν τῆς μονάδος τόπον καὶ τὸν τῆς δεκάδος καὶ ἄρξου ἀπὸ τοῦ τρίτου τόπου, ὅς ἐστι ἑκατοντάδος, γράφειν ταύτας ἀκολούθως, μέχρις ἂν τελέσῃς τὰ ἄνωθεν πάντα γράμματα.

ὡσαύτως ἐὰν ἐκ πλαγίου καὶ τέταρτον γράμμα ἔχῃς πολλ(α)πλασιάσαι μετὰ τῶν ἄνωθεν γραμμάτων· ἐπεὶ τὸ τέταρτον γράμμα ἐστὶ χιλιάδος, τὰς ἐπερχομένας μονάδας τε καὶ δεκάδας – πρόβηθι καὶ τὸν τῆς μονάδος τόπον καὶ τὸν τῆς δεκάδος καὶ τὸν τῆς ἑκατοντάδος καὶ ἄρξου γράφειν ταύτας ἀκολούθως ἀπὸ τοῦ τετάρτου τόπου, ὅς ἐστι τῆς χιλιάδος, μέχρις ἂν τελέσῃς πάντα τὰ ἄνωθεν γράμματα.

ἐὰν δὲ καὶ πέμπτον ἐκ πλαγίου γράμμα ἔχῃς πολλ(α)πλασιάσαι μετὰ τῶν ἄνωθεν γραμμάτων· τὰς ἐπερχομένας μονάδας τε καὶ δεκάδας – πρόβηθι τὸν τῆς μονάδος καὶ δεκάδος καὶ ἑκατοντάδος καὶ χιλ(ι)άδος τόπον καὶ ἄρξου γράφειν ταύτας ἀκολούθως ἀπὸ τοῦ πέμπτου τόπου, ὅς ἐστι μυριάδος, μέχρις ἂν τελέσῃς πάντα τὰ ἄνωθεν γράμματα.

μετὰ δὲ τὸ πολλ(α)πλασιάσαι τὰ ἐκ πλαγίου πάντα γράμματα μετὰ τῶν ἄνωθεν πάντων γραμμάτων ἕνωσον ταῦτα πάντα ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρξάμενος, ὅς ἐστι τόπος μονάδος, καὶ τὰς μὲν μονάδας, ἃς περισσεύοσι ἐκ τῶν δεκάδων, κάτωθεν τῆς ἑτέρας

---

3 κάτωθεν] κάκωθεν **C** 7 εἰς τέταρτον καὶ πέμπτον **sc.** τόπον 10 τὰ ἔλαττον ὄντα] **sic C** 12 ἀριθμῶν **ex coni.**] αἳ **C** 35 χιλιάδος] ˏαδ^{ος} **C**

εὐθείας γραμμῆς κατ᾽ εὐθεῖαν ἑκάστης τάξεως τίθεσο. ἀντὶ δὲ τῶν δεκάδων κράτει παρὰ σεαυτῷ τοσαύτας μονάδας. ἑνώσας δὲ τὰς μον(ά)δας, ἃς κρατεῖς ἀντὶ τῶν δεκάδων, μετὰ τῶν ἑτέρων ψήφων, ὧν οὔπω ἕνωσας, τὰς μὲν μονάδας τίθεσο κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν, ὧν ἀκολούθως ζητεῖς ψήφων, ἀντὶ δὲ τῶν δεκάδων τοσαύτας μονάδας κράτει παρὰ σεαυτῷ, μέχρις ἂν οὕτω ποιῶν ἑνώσῃς ἀκολούθως πάσας τὰς ψήφους αὐτῶν, ἃς ἐπολλ(α)πλασίασας· καὶ ποιήσεις ἕνα τέλειον ἀριθμὸν τὰς καταμέρος πολλ(α)πλασιασθείσας ψήφους αὐτῶν. οὕτω δὲ ποιῶν εὑρήσεις καλῶς πᾶν ζητούμενον πολλ(α)πλασιασμὸν δύο τινῶν ἀριθμῶν.

ιε

Περιεκτικῶς περὶ μαρτ(υ)ρίας καὶ ἀποδείξεως πάντων τῶν πολλ(α)πλασιαζομένων μερῶν

Τὴν εἰς τὸν πολλ(α)πλασιασμὸν μέθοδόν τε καὶ μεταχείρισιν ἀποδώσαντες φέρε λοιπὸν καὶ περὶ τῆς πάντων μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως σαφέστερον εἴπωμεν καὶ περιεκτικῶς ἐκδηλώσωμεν, πῶς ἄρα λαμβάνειν ἔχεις καλῶς τὰς μαρτυρίας πάντων τῶν ἐξελθόντων τελείων ἀριθμῶν.

ζήτει πρῶτον, ὃν ἀριθμὸν πολλ(α)πλασιάζεις ἄνωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς, καὶ λάμβανε ἐξ αὐτοῦ τὰ πρῶτα δύο γράμματα καὶ σκόπει, πόσα δηλῶσι. μέριζε δὲ τὰ δηλούμενα, ὁσάκις ἂν χωρῶσι, ἐπὶ τῶν ζ΄. καὶ εἰ μὲν ἐξέλθῃ τὸ τέλος τούτων μηδὲν ἔχοντα περισσὸν κάτωθεν τῶν ζ΄, ἀντὶ [ἀρι] ἀριθμοῦ τινος κράτει ι΄· εἰ δὲ περισσεύῃ ἀριθμὸς ἐλάττω<ν> τῶν ζ΄, κράτει τοῦτον. λάβε δὲ ἐφεξῆς ἀκολούθως καὶ ἕτερον γράμμα καὶ σκόπει τὰ δύο ταῦτα – τὸ ἐκ τῶν ζ΄ ἔλαττο δηλονότι καὶ ὅπερ ἄλλο προσέλαβες –, πόσα δηλῶσι, καὶ μέριζε ταῦτα πάλιν ἐπὶ τῶν ζ΄. καὶ εἰ μὲν περισσεύσῃ τι κάτωθεν τῶν ζ΄, κράτει τοῦτο καὶ λάβε πάλιν ἕτερον γράμμα ἐφεξῆς ἀκολούθως καὶ μέρισον ταῦτα πάλιν ἐπὶ τῶν ζ΄. εἰ δὲ τὰ δύο γράμματα τελεσθῶσι δι᾽ ὅλου οὐκ ἔχοντα ἔλαττόν τι τῶν ζ΄, ἀντὶ ἄλλου τινὸς ἀριθμοῦ κράτει ι΄, ὡς εἴπομεν. ἀπὸ δὲ τὸ ι΄ οὐ δύνασαι ἀφελεῖν ζ΄· ἄφες οὖν τὸ ι΄ ὡς ἄχρηστον καὶ λάβε ἐφεξῆς ἕτερα δύο γράμματα καὶ σκόπει, πόσα δηλῶσι, καὶ μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄. οὕτως δὲ ποιῶν ἀρξάμενος ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου γράμματος τέλεσον πάντα τῆς ἄνωθεν εὐθείας γραμμῆς μέχρι καὶ τοῦ τελευταίου γράμματος ‖ καὶ τέλος πάντων. εἰ μὲν περισ<σ>εύσῃ τι κάτωθεν τῶν ζ΄, γράψον τοῦτο ἰδίως. εἰ δὲ εἰς ἴσα ζ΄ καταλήξῃ τὸ τέλος αὐτῶν μηδὲν ἔχοντα περισσόν, ἀντὶ ἄλλου τινὸς ἀριθμοῦ γράψον ι΄. f. 18v

ἔπειτα καὶ ἐπὶ τῶν ἐκ πλαγίου τιθεμένων ἀριθμῶν τὰ ὅμοια ποίησον εἰς πάντα τὰ εὑρισκόμενα γράμματα, ἀρξάμενος ἀπὸ τῶν δύο γραμμάτων – τοῦ πρώτου δηλονότι καὶ τοῦ δευτέρου –, μέχρις ἂν τελέσῃς πάντα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι καὶ τοῦ τελευταίου, ἐπὶ τῶν ζ΄ διαμερίζων ταῦτα, καθὼς καὶ τὰ ἄνωθεν ὄντα τῆς εὐθείας γραμμῆς οὕτως εἴπομεν ποιεῖν, καὶ τέλος πάντων. εἰ μὲν περισ<σ>εύσῃ τι κάτωθεν τῶν ζ΄, γράψον τοῦτο πλησίον, οὗ ἔγραψας ἰδίως ἐκ τῆς τελευταίας συζυγίας τῶν ἄνωθεν τελευταίων δύο γραμμάτων. εἰ δὲ οὐκ ἔχοσι περιττὸν ἔλαττον τῶν ζ΄, ἀντὶ ἀριθμοῦ τινος γράψον ι΄.

τὰ ἐξελθόντα δὲ ἐκ τῶν ἄνωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ τῶν ἐκ πλαγίου τελευταῖα κάτωθεν τῶν ζ΄ δύο γράμματα, ἅπερ πλησίον ἰδίως εἴπομεν γράψαι – πολλ(α)πλασίασον τὰ δύο ἐξελθόντα μέρη αὐτῶν πρὸς ἄλληλα· καὶ εἰ μὲν τὸ μὲν μέρος ἔχει ι΄, τὸ δὲ ἄλλο τινὰ ἀριθμόν, τουτέστι ι΄ μετὰ γ΄ ἢ μετὰ δ΄ ἢ μετὰ ε΄, πολλ(α)πλασι-

---

3 ἕνωσας] **pro** ἥνωσας **hic et passim C** 7/8 πᾶν ... πολλ(α)πλασιασμὸν] **sic C 17.18.21/22.23 etc. εἰ c. coni.** 36 τελευταίας] τελευθέας **C**

αζόμενα πάλιν ι΄ γίνεται. εἰ δὲ τὸ μὲν ἔχει α΄, τὸ δὲ β΄ ἢ γ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, ἅπαξ β΄ πάλιν ἐστὶ β΄ καὶ ἅπαξ γ΄ πάλιν ἐστὶ γ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως. εἰ δὲ τὸ μέν ἐστι δ΄, τὸ δὲ ε΄, δ΄κις ε΄ γίνονται κ΄ καὶ ε΄κις ϛ΄ γίνονται λ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως. εἰ μὲν οὖν τὰ τελευταῖα κάτωθεν τῶν ζ΄ δύο γράμματα τῶν ἄνωθεν καὶ τῶν ἐκ πλαγίου πολλ(α)πλασιαζόμενα – ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γένηται ἐλάττων τῶν ζ΄, ὡς τὸ ἅπαξ τὰ β΄ πάλιν β΄ καὶ ἅπαξ τὰ γ΄ πάλιν γ΄ – θὲς ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός, ὡς ἐν τοῖς ὑποδείγμασί ἐστι κείμενον. εἰ δὲ γένηται πλέων τῶν ζ΄, ὡς τὸ δ΄κις ε΄ γίνονται κ΄ καὶ ε΄κις ϛ΄ γίνονται λ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, μέρισον καὶ ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν κάτωθεν τῶν ζ΄ – θὲς τοῦτο ἐντὸς κύκλου. εἰ δὲ ὅλα διαιρεθῶσι εἰς ζ΄ μηδὲν ἔχοντα περισσόν, ἀντὶ ἄλλου ψήφου γράψον ἐντὸς κύκλου ι΄.

ἔπειτα, ὡς ἐποίησας ἐπὶ τῶν ἄνωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ ἐπὶ τῶν πλαγίων γραμμάτων, μερίσας ταῦτα ἀνὰ δύο γραμμάτων ἐπὶ τῶν ζ΄, οὕτως καὶ ἐπὶ τὸν ἐξελθόντα τέλειον ἀριθμόν τὸν ἐκ τῶν δύο πολλ(α)πλασιασθέντα ποίησον κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον· καὶ μέρισον πάντα τὰ αὐτοῦ γράμματα ἀνὰ δύο ἐπὶ τῶν ζ΄ ἀπὸ τῶν πρώτων ἀρξάμενος μέχρι καὶ τοῦ τελευταίου γράμματος. τὸ δὲ ἔσχατον τούτων πάντων καὶ τελευταῖον, κἄντε εἰς ι΄ καταλήξῃ, κἄντε ἔχῃ τι ἔλαττο τῶν ζ΄ – χρὴ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον τὸ ἐκ τοῦ τελείου ἀριθμοῦ ἐξερχόμενον γράμμα ὥσπερ ἐκεῖνο, ὅπερ ἐντὸς κύκλου προὔθηκας. καὶ εἰ μὲν β΄ δηλοῖ ὁ ἐν ἐκείνῳ κείμενος ψῆφος, καὶ οὗτος β΄ χρὴ δηλεῖν. καὶ ὡς ἐν συντόμῳ εἰπεῖν· καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἐξελθόντων μερῶν τῶν ἐντὸς κύκλων ὄντων εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ὁμοίως ψῆφος δεῖ εἶναι καὶ οὐκ ἀνόμοιος καὶ διαφέρων εἷς ὑπὲρ τοῦ ἑτέρου. εἰ οὖν οὕτως ἔχοσι αἱ δύο μαρτυρίαι, ἤδη ἐγένετο καλῶς ὁ ἐξελθὼν τέλειος ἀριθμὸς ὁ ἐκ τῶν ἄνωθεν καὶ ἐκ τῶν πλαγίων πολλ(α)πλασιασθείς. εἰ δὲ ἡ μὲν ἔχει γ΄, ἡ δὲ δ΄, ἢ καὶ ἡ μὲν οὕτως, ἡ δὲ οὐχ οὕτως, διαφέρουσαι ἀλλήλων αἱ μαρτ(υ)ρίαι τούτων καὶ ἀποδείξεις, καὶ ὁ ἐξελθὼν τέλειος ἀριθμὸς οὐ καλῶς ἐγένετο πολλ(α)πλασιαζόμενος.

Χρὴ δὲ ὥς, ὅταν δύο τινὰ γράμματα βούλ(ῃ) συνάπτειν, πρὸς τὸ μερίζειν ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄· εἰ μὲν τὸ πρῶτον γράμμα κάτωθέν ἐστι τῶν ζ΄, τουτέστι ϛ΄ ἢ ε΄, λάβε καὶ τὸ ἀκόλουθον ἕτερον γράμμα καὶ τὸν ἐξ αὐτῶν δηλούμενον ἀριθμὸν ἐπὶ τῶν ζ΄ μέρισον· εἰ δὲ τὸ πρῶτον γράμμα δηλοῖ πλείω τῶν ζ΄, τουτέστι θ΄ ἢ καὶ η΄, ἄφελε ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ πρώτου γράμματος ἅπαξ ζ΄, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν – κἄντε β΄ ἐστὶ κἄντε α΄ – λάβε καὶ τὸ ἀκόλουθον ἐφεξῆς δεύτερον γράμμα καὶ ἕνωσον, ὅπερ ἀπέμεινε ἐκ τῶν θ΄ ἢ τῶν η΄, μετὰ τοῦ ἐφεξῆς ἀκολο<ύ>θου γράμματος καὶ μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄.

ἔστω γὰρ ὅτι βούλ(ει) μερίσαι ἐπὶ τῶν ζ΄ ταῦτα τὰ δύο γράμματα θ η΄, ἅπερ δηλῶσι ϙη΄. ιδ΄κις οὖν ζ΄ γίνονται ϙη΄, περισσεύει ι΄, καὶ ἰδοὺ ἐμέρισας δυσχερῶς τὰ θ η΄ ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ ἀπέμεινε ι΄. ἄφελε ἀπὸ τοῦ πρώτου γράμματος, ὅπερ ἐστὶ θ΄, ἅπαξ ζ΄ καὶ περισσεύοσι β΄· τὰ β΄ ταῦτα μετὰ τῶν η΄ οὕτως κείμενα β η΄ δηλῶσι κη΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄· δ΄κις οὖν ζ΄ γίνονται κη΄, ἀπομένει ι΄. καὶ ἰδοὺ νῦν ἀφεῖλες ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ προχειρότ(α)τα ἢ πρότερον, ὅτε ἦν θ η΄. καὶ γὰρ καὶ ἀπὸ τῶν θ η΄ ἀπέμεινε ι΄ καὶ ἀπὸ τῶν β η΄ ἀπέμεινε ι΄.

ὅταν οὖν τὸ πρῶτον γράμμα, ὃ ζητεῖς διαμερίσαι, ἐστὶ πλεῖο τῶν ζ΄ ἢ καὶ ζ΄, ἄφελε ἅπαξ ζ΄ ἐξ αὐτοῦ. καὶ εἰ μὲν πλεῖό ἐστι τῶν ζ΄, ὥστε ἐναπομεῖναί τι ἐξ αὐτοῦ, λάβε καὶ τὸ ἐφεξῆς ἀκόλουθον γράμμα καὶ ἕνωσον μετὰ τοῦ ἐναπομείναντος γράμματος

---

10 ἄλλου ψήφου] **sic C** ἐλάττων] ἔλαττο **C** 19 δηλεῖν] **pro** δηλοῦν **hic et passim C** 30 κἄντε ... ἐστὶ] **sic C**

κάτωθεν τῶν ζ΄ καὶ μέρισον τὰ δύο γράμματα ἐπὶ τῶν ζ΄, ὡς εἰώθαμεν ποιεῖν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων, ὧν προείπομεν. εἰ δ' ἔστι ζ΄ καὶ ἀφελόμενος ζ΄ ἀπομένει υ΄, πρόβηθι καὶ λάβε ἕτερα δύο γράμματα καὶ τὰ δηλούμενα ἐπὶ τῶν ζ΄ μέρισον, μέχρις ἂν οὕτω ποιῶν τελέσῃς πάντα τὰ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τοῦ τέλους γράμματα, καθὼς σαφέστερον ἄνωθεν δεδηλώκαμεν.

Δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, ὡς, ὅταν ἐπὶ τῶν ζ΄ δύο τινὰ γράμματα διαμερίζωμεν ἐν φαντασίᾳ μόνῃ, ἐν τῷ ἡμετέρῳ νῷ εἰώθαμεν διαμερίζειν ταῦτα οὕτως· ἀπὸ μὲν τῶν α δ΄ ἀπομένει υ΄, ἀπὸ δὲ τῶν α ε΄ περισσεύει α΄, ἀπὸ τῶν β υ΄ περισσεύοσι ς΄, ἀπὸ δὲ τῶν [τῶν] β α΄ περισσεύει υ΄, ἀπὸ τῶν β ε΄ ἔχεις δ΄, ἀπὸ δὲ τῶν β ζ΄ ἔχεις ς΄, ἀπὸ τῶν γ υ΄ ἔχεις β΄, ἀπὸ δὲ τῶν γ δ΄ ἔχεις ς΄, ἀπὸ τῶν δ υ΄ ἔχεις ε΄, ἀπὸ δὲ τῶν δ ε΄ ἔχεις γ΄, καὶ ἑξῆς ὁμοίως οὕτως || εἰώθαμεν διαμερίζειν μέχρι τῶν ξθ΄. οὐδὲ γὰρ ἐπὶ πλέον δύνανται δηλεῖν τὰ δύο διαμεριζόμενα ἐπὶ τῶν ζ΄ γράμματα, ἀλλὰ μέχρι τῶν ξθ΄ προβαίνει ὁ μείζων τούτων ἀριθμός. πειράσας γὰρ σμικρόν τι τῷ σῷ λογισμῷ, διὰ τῆς πείρας γενήσεταί σοι ἐπὶ πάντων τῶν ἀνὰ δύο γραμμάτων περιττεῦον κάτωθεν τῶν ζ΄ γνώριμον. οὐδὲ γὰρ ποσάκις διαμερίσαι ἔστι ἐπὶ τῶν ζ΄ ζητοῦμεν, τοῦτο γὰρ οὐδεμία ἡμῖν χρεία, ἀλλὰ μόνον τὸ περισσεῦον ἐκ τῶν δύο γραμμάτων κάτωθεν τῶν ζ΄ – τοῦτο ἡμῖν ἐστι χρεία εἰδέναι, καθὼς τὸ περὶ τούτου σαφέστερον δεδηλώκαμεν. πειράσας δὲ τῷ σῷ λογισμῷ διὰ τῆς πείρας εἰδέναι ἔχεις καλῶς τὰ ἐκ τῶν ζ΄ περισσεύοντα. εἰδὼς δὲ διὰ τῆς πείρας λαμβάνειν καλῶς τὰ ἐπὶ τῶν ζ΄ περισσεύοντα προχείρως ἔχεις λαμβάνειν τὰς μαρτυρίας τούτων καὶ ἀποδείξεις, ἐὰν καλῶς ἢ οὐ καλῶς ἐγένετο ὁ ἐξελθὼν ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν πολλ(α)πλασιασμός. f. 19r

ις Περὶ ἑτέρας μεταχειρίσεως πολλ(α)πλασιασμοῦ, ἥτις ὀνομάζεται οἶκος, ἐφ' ἧς καὶ η΄ μετὰ τῶν κα΄ πολλ(α)πλασιάζονται καὶ ἑξῆς ὁμοίως

Ἔστι δὲ καὶ ἑτέρα τις μεταχείρισις πολλ(α)πλασιασμοῦ, ἥτις ὀνομάζεται οἶκος διὰ τὸ τετραγωνικῶς συνλαμβάνειν τὰς ψήφους, καθὼς διὰ τῆς δηλωθησομένης μεταχειρίσεως εἰδέναι ἔχεις σαφέστερον.

ἔστω ὅτι ζητεῖς η΄ μετὰ τῶν κα΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα, πόσα γίνονται. θὲς ἄνωθεν μὲν εἰς τόπον μονάδος τὰ η΄, κάτωθεν δὲ θὲς τὰ κα΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ η΄ μετὰ τοῦ α΄· η΄κις οὖν α΄ γίνονται η΄. θὲς τὰ η΄ ταῦτα κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τόπον μονάδος. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ κάτωθεν β΄, ἅπερ δηλῶσι κ΄, μετὰ τῶν ἄνωθεν η΄· δὶς οὖν η΄ γίνονται ις΄. θὲς κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς μὲν τὸν δεύτερον τόπον, ὅς ἐστι δεκάδος, τὰ ς΄, εἰς δὲ τὸν τρίτον, ὅς ἐστι ἑκατοντάδος, ἀντὶ τῶν ι΄ θὲς α΄. καὶ ἰδοὺ τὰ η΄ μετὰ τῶν κα΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα πολλ(α)πλασιάζοσι ρξη΄. ἡ δὲ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον, γίνεται ὡς καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως, καθὼς τὸ περὶ ταύτης ἐκεῖσε σαφέστερον εἴπομεν.

η | α υ
β α | υ
α ς η

ιγ΄ μετὰ τῶν ιε΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ιγ΄, κάτωθεν δὲ τὰ ιε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν γ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ε΄· τρὶς οὖν ε΄ γίνονται ιε΄. θὲς κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς μονάδος τόπον τὰ ε΄·θὲς δὲ ἰδίως α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)–

α γ | α ς
α ε | α
α θ ε

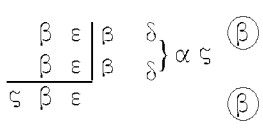
---

16 ἀλλὰ μόνον] **fortasse** ἄλλῃ μόνον 20/21 ἐὰν **c. ind.** 25 συνλαμβάνειν] **sic C pro** συλλαμβάνειν 35 ρξη΄] ρξς΄ **falso C**

ροειδῶς τὰ τέσσερα [γρά] γράμματα· ἅπαξ οὖν γ΄ πάλιν ἐστὶ γ΄ καὶ ἅπαξ ε΄ στ(αυ)-ροειδῶς πάλιν ἐστὶ ε΄. γ΄ δὲ καὶ ε΄ καὶ α΄, ὅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν δέκα ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ θ΄· θὲς ταῦτα κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὸ ἄνωθεν α΄ μετὰ τοῦ κάτωθεν α΄· ἅπαξ οὖν α΄ πάλιν ἐστὶ α΄. θὲς τοῦτο κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον. καὶ ἰδοὺ τὰ ιγ΄ μετὰ τῶν ιε΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα πολλ(α)πλασιάζοσι ρϛε΄.

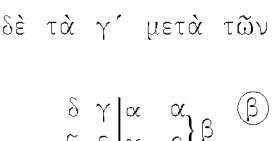
κε΄ μετὰ τῶν κε΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Θὲς ἄνωθεν μὲν κε΄, κάτωθεν δὲ πάλιν κε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν ε΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ε΄· ε΄κις οὖν ε΄ γίνονται κε΄. θὲς κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς ε΄, θὲς δὲ ἰδίως β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)-ροειδῶς τὰ ἄνωθεν καὶ κάτωθεν τέσσερα γράμματα· δὶς οὖν ε΄ γίνονται ι΄ καὶ πάλιν δὶς τὰ ε΄ στ(αυ)ροειδῶς γίνονται ι΄. ι΄ δὲ καὶ ι΄ καὶ β΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν κ΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ κβ΄. θὲς κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τόπον δεκά-δος β΄, θὲς δὲ ἰδίως β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν β΄ μετὰ τῶν κάτωθεν β΄· δὶς οὖν β΄ γίνονται δ΄. ἔνωσον καὶ τὰ β΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν κ΄ ἔθηκας, καὶ γίνονται ὁμοῦ ϛ΄. θὲς ταῦτα κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον. καὶ ἰδοὺ τὰ κε΄ μετὰ τῶν κε΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα πολλ(α)πλα-σιάζοσι χκε΄.



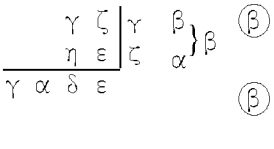
μγ΄ μετὰ τῶν ξε΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ μγ΄, κάτωθεν δὲ τὰ ξε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ γ΄ μετὰ τῶν ε΄· τρὶς οὖν ε΄ γίνονται ιε΄. θὲς κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς ε΄, θὲς δὲ ἰδίως α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. πολλ(α)πλασί-ασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ τέσσερα γράμματα· τρὶς οὖν ϛ΄ γίνον-ται ιη΄ καὶ δ΄κις ε΄ γίνονται κ΄. ιη΄ δὲ καὶ κ΄ καὶ α΄, ὅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν δέκα ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ λθ΄. θὲς κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον τὰ θ΄, θὲς δὲ ἰδίως γ΄ ἀντὶ τῶν λ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν δ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ϛ΄· δ΄κις οὖν ϛ΄ γίνονται κδ΄. ἔνωσον καὶ τὰ γ΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν λ΄ ἔθηκας, καὶ γίνονται ὁμοῦ κζ΄. θὲς ταῦτα κάτωθεν τῆς εὐθείας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος καὶ χιλιάδος τόπον. καὶ ἰδοὺ τὰ μγ΄ μετὰ τῶν ξε΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα πολλ(α)πλασιάζοσι ,βψϛε΄.



λζ΄ μετὰ τῶν πε΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ λζ΄, κάτωθεν δὲ τὰ πε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ζ΄ μετὰ τῶν ε΄· ε΄κις οὖν ζ΄ γίνονται λε΄. θὲς κάτωθεν ε΄, θὲς δὲ ἰδίως γ΄ ἀντὶ τῶν λ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ τέσ-σερα γράμματα· ζ΄κις οὖν η΄ γίνονται νϛ΄, τρὶς δὲ ε΄[κις] γίνονται ιε΄. νϛ΄ δὲ καὶ ιε΄ καὶ γ΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν λ΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ οδ΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς δεκά-δος τόπον δ΄, θὲς δὲ ἰδίως ζ΄ ἀντὶ τῶν ο΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν γ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν η΄· τρὶς οὖν η΄ γίνονται κδ΄. ἔνωσον καὶ τὰ ζ΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν ο΄ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ λα΄. θὲς ταῦτα κάτωθεν εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος καὶ χιλιάδος τόπον. καὶ ἰδοὺ τὰ λζ΄ μετὰ τῶν πε΄ || πολλ(α)πλασιαζόμενα πολλ(α)πλασι-άζοσι ,γρμε΄. f. 19^{v}



---

38 οδ΄] ζδ **C**

ιε΄ μετὰ τῶν ρκγ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ιε΄, κάτωθεν δὲ τὰ ρκγ΄. ἐπεὶ δὲ τὰ μὲν ἄνωθεν εἰσὶ γράμματα δύο, τὰ δὲ κάτωθεν εἰσὶ γράμματα τρία, θὲς πρὸ τῶν ιε΄ εἰς τρίτον τόπον, ὅς ἐστι ἑκατοντάδος, υ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ε΄ μετὰ τῶν γ΄· τρὶς οὖν ε΄ γίνονται ιε΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς μονάδος τόπον ε΄, θὲς δὲ ἰδίως α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ τέσσερα γράμματα· δὶς οὖν ε΄ γίνονται ι΄, ἅπαξ δὲ γ΄ στ(αυ)ροειδῶς πάλιν ἐστὶ γ΄. ι΄ δὲ καὶ γ΄ καὶ α΄, ὅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν δέκα ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ ιδ΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον δ΄, θὲς δὲ ἰδίως α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ δύο ἄκρα τῶν ἓξ γραμμάτων· ἅπαξ οὖν ε΄ πάλιν ἐστὶ ε΄, υ΄ δὲ τρὶς πάλιν ἐστὶ υ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ τῆς μέσης, τουτέστι τὰ κάτωθεν β΄ μετὰ τοῦ ἄνωθεν α΄· ἅπαξ οὖν β΄ πάλιν ἐστὶ β΄. ε΄ δὲ καὶ β΄ καὶ α΄, ὅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν δέκα ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ η΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον η΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὸ κάτωθεν α΄, ὅπερ δηλοῖ ρ΄, μετὰ τοῦ ἄνωθεν α΄, ὅπερ δηλοῖ ι΄· ἅπαξ οὖν α΄ πάλιν ἐστὶ α΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὸ ἄνωθεν υ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν β΄· υ΄ οὖν δὶς πάλιν ἐστὶ υ΄. πολλ(α)πλασίασον πάλιν τὸ υ΄ καὶ μετὰ τοῦ κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν α΄· ἅπαξ οὖν υ΄ πάλιν ἐστὶ υ΄. α΄ δὲ καὶ υ΄ καὶ υ΄ ὁμοῦ πάλιν ἐστὶ α΄. θὲς τοῦτο κάτωθεν εἰς τὸν τῆς χιλιάδος τόπον. καὶ ἰδοὺ τὰ ιε΄ μετὰ τῶν ρκγ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα πολλ(α)πλασιάζοσι ,αωμε΄.

ρκε΄ μετὰ τῶν σνζ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

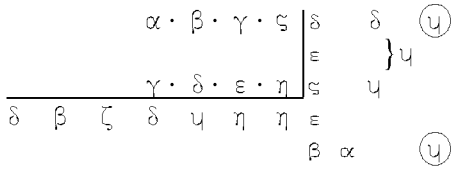
Θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ρκε΄, κάτωθεν δὲ τὰ σνζ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν ε΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ζ΄· ε΄κις οὖν ζ΄ γίνονται λε΄. θὲς κάτωθεν ε΄, θὲς δὲ ἰδίως γ΄ ἀντὶ τῶν λ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ τέσσερα γράμματα· ε΄κις οὖν ε΄ γίνονται κε΄, δὶς δὲ ζ΄ γίνονται ιδ΄. κε΄ δὲ καὶ ιδ΄ καὶ γ΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν λ΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ μβ΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον β΄, θὲς δὲ ἰδίως δ΄ ἀντὶ τῶν μ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ δύο ἄκρα τῶν ἓξ γραμμάτων· δὶς οὖν ε΄ γίνονται ι΄, ἅπαξ δὲ ζ΄ πάλιν ἐστὶ ζ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ τῆς μέσης· δὶς οὖν ε΄ γίνονται ι΄. ι΄ δὲ καὶ ζ΄ καὶ ι΄ καὶ δ΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν μ΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ λα΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον α΄, θὲς δὲ ἰδίως γ΄ ἀντὶ τῶν λ΄. σημείωσον δὲ τὰ ἄνωθεν ε΄ καὶ κάτωθεν ζ΄ ὡς ἀργὰ νῦν ὄντα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ τῆς μέσης καὶ τὰ τῆς ἀρχῆς τέσσερα γράμματα· δὶς οὖν β΄ γίνονται δ΄, ἅπαξ δὲ ε΄ πάλιν ἐστὶ ε΄. δ΄ δὲ καὶ ε΄ καὶ γ΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν λ΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ ιβ΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς χιλιάδος τόπον β΄, θὲς δὲ ἰδίως α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. σημείωσον δὲ τὰ τῆς μέσης β΄ καὶ ε΄ ὡς ἀργὰ ὄντα. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὸ ἄνωθεν α΄ μετὰ τῶν κάτωθεν β΄· ἅπαξ οὖν β΄ πάλιν ἐστὶ β΄. ἔνωσον καὶ τὸ α΄, ὅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν δέκα ἔθηκας, καὶ γίνονται ὁμοῦ γ΄. θὲς ταῦτα κάτωθεν εἰς πέμπτον τόπον, ὅς ἐστι μυριάδος. καὶ ἰδοὺ τὰ ρκε΄ μετὰ τῶν σνζ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα πολλ(α)πλασιάζοσι ,λ,β΄ καὶ ρκε΄.

---

12 **ad** μέσης **in sup. marg. fol. 19^{v}**: τὰ ἐν τῷ μέσῳ ὄντα δύο γράμματα 14 **ad** τόπον η΄ **in sinistro marg. fol. 19^{v}**: σημείωσαι δὲ τὰ ἄνωθεν ε΄ καὶ κάτωθεν γ΄ διὰ κοκκίδων ὡς ἀργὰ νῦν ὄντα 17 δὶς] β **C** 22 ρκε΄] ρκγ΄ **falso C** 33 σημείωσον] **fort.** σημείωσαι

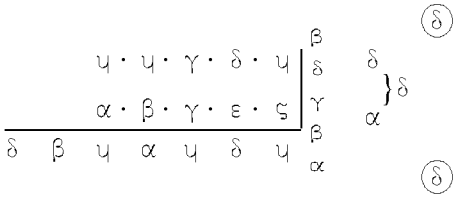
,ασλς΄ μετὰ τῶν ,γυνη΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ,ασλς΄, κάτωθεν δὲ τὰ ,γυνη΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ς΄ μετὰ τῶν η΄· ς΄κις οὖν η΄ γίνονται μη΄. θὲς κάτωθεν η΄, θὲς δὲ ἰδίως δ΄ ἀντὶ τῶν μ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ τέσσερα γράμματα· ε΄κις οὖν ς΄ γίνονται λ΄, τρὶς δὲ η΄ γίνονται κδ΄. λ΄ δὲ καὶ κδ΄ καὶ δ΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν μ΄ ἔθηκας, ὁμοῦ γίνονται νη΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον η΄, θὲς δὲ ἰδίως ε΄ ἀντὶ τῶν ν΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ ἄνωθεν ς΄ τῆς μονάδος μετὰ τῶν κάτωθεν δ΄ τῆς ἑκατοντάδος καὶ τὰ ἄνωθεν β΄ τῆς ἑκατοντάδος μετὰ τῶν κάτωθεν η΄ τῆς μονάδος· δ΄κις οὖν ς΄ γίνονται κδ΄, δὶς δὲ η΄ γίνονται ις΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ τῆς μέσης· τρὶς οὖν ε΄ γίνονται ιε΄. κδ΄ δὲ καὶ ις΄ καὶ ιε΄ καὶ ε΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν ν΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ ς υ΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον υ΄, θὲς δὲ ἰδίως ς΄ ἀντὶ τῶν ξ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ ἄκρα· τρὶς οὖν ς΄ γίνονται ιη΄, ἅπαξ δὲ η΄ πάλιν ἐστὶ η΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς καὶ τὰ τῆς μέσης τῶν δύο ἄκρων τέσσερα γράμματα· τρὶς οὖν δ΄ γίνονται ιβ΄, δὶς δὲ ε΄ γίνονται ι΄. ιη΄ δὲ καὶ η΄ καὶ ιβ΄ καὶ ι΄ καὶ ς΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν ξ΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ νδ΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς χιλιάδος τόπον δ΄, θὲς δὲ ἰδίως ε΄ ἀντὶ τῶν ν΄. σημείωσον δὲ τὰ ς΄ καὶ η΄ τελευταῖα γράμματα ὡς ἀργὰ ὄντα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ ἄκρα τῶν ἓξ γραμμάτων, ὧν ἀπέμειναν ἀσημείωτα· τρὶς οὖν γ΄ γίνονται θ΄, ἅπαξ δὲ ε΄ πάλιν ἐστὶ ε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ τῆς μέσης· δὶς οὖν δ΄ γίνονται η΄. θ΄ δὲ καὶ ε΄ καὶ η΄ καὶ ε΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν ν΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ κζ΄. θὲς κάτωθεν εἰς πέμπτον τόπον ζ΄, θὲς δὲ ἰδίως β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. σημείωσον δὲ τὰ γ΄ καὶ ε΄ ὡς ἀργὰ ὄντα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ ἐναπομείναντα τέσσερα γράμματα· δὶς οὖν γ΄ γίνονται ς΄, ἅπαξ δὲ δ΄ πάλιν ἐστὶ δ΄. ς΄ δὲ καὶ δ΄ καὶ β΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν κ΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ ιβ΄. θὲς κάτωθεν εἰς ἕκτον τόπον β΄, θὲς δὲ ἰδίως α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. σημείωσον δὲ τὰ β΄ καὶ δ΄ ὡς ἀργὰ ὄντα. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ πρῶτα δύο γράμματα, ἅπερ ἀπέμειναν ἀσημείωτα· ἅπαξ οὖν γ΄ πάλιν ἐστὶ γ΄. ἕνωσον καὶ τὸ α΄, ὅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν δέκα ἔθηκας, καὶ γίνονται ὁμοῦ δ΄. θὲς ταῦτα κάτωθεν εἰς τόπον ἕβδομον. καὶ ἰδοὺ τὰ ,ασλς΄ μετὰ τῶν ,γυνη΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα πολλ(α)πλασιάζοσ(ι) δ β ζ δ υ η η΄, ἅπερ ἐστὶ μιλ(ι)ούνια δ΄ καὶ ,σ,ο,δ΄ καὶ πη΄.



τμ΄ μετὰ τῶν ‖ ,ι,β΄ καὶ τνς΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα f. 20r

Θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ τμ΄, κάτωθεν δὲ τὰς ,ι,β΄ καὶ τνς΄. πρόσθες δὲ ἄνωθεν πρὸ τῶν γ δ υ΄ δύο υ΄ υ΄, ἵνα καὶ τὰ ἄνωθεν γένωνται πέντε γράμματα ὥσπερ καὶ τὰ κάτωθεν. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὸ υ΄ μετὰ τῶν ς΄· ς΄κις οὖν υ΄ πάλιν ἐστὶ υ΄. θὲς κάτωθεν υ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ τέσσερα γράμματα· δ΄κις οὖν ς΄ γίνονται κδ΄, ε΄κις δὲ υ΄ πάλιν ἐστὶ υ΄. κδ΄ δὲ καὶ υ΄ πάλιν ἐστὶ κδ΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον δ΄, θὲς δὲ ἰδίως β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ ἓξ γράμματα· τρὶς οὖν ς΄ γίνονται ιη΄, τρὶς δε υ΄



35 τὰς ,ι,β΄] sc. χιλιάδας 42 ἐστὶ κδ΄] ἐστὶ υ falso C

πάλιν ἐστὶ μ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ τῆς μέσης· δ΄κις οὖν ε΄ γίνονται κ΄, ιη΄ δὲ καὶ μ΄ καὶ κ΄ καὶ β΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν κ΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ δ μ΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον μ΄, θὲς δὲ ἰδίως δ΄ ἀντὶ τῶν μ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς ὀκτὼ γράμματα· μ΄ οὖν ς΄κις πάλιν ἐστὶ μ΄, δὶς δὲ μ΄ στ(αυ)ροειδῶς πάλιν ἐστὶ μ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς καὶ τὰ ἐν μέσῳ τέσσερα γράμματα· τρὶς οὖν ε΄ γίνονται ιε΄, τρὶς δὲ δ΄ γίνονται ιβ΄. μ΄ δὲ καὶ μ΄ καὶ ιε΄ καὶ ιβ΄ καὶ δ΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν μ΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ λα΄. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς χιλιάδος τόπον α΄, θὲς δὲ ἰδίως γ΄ ἀντὶ τῶν λ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ ἄκρα· ἅπαξ οὖν μ΄ πάλιν ἐστὶ μ΄, μ΄ δὲ ς΄κις πάλιν ἐστὶ μ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς καὶ τὰ ἐν μέσῳ ἓξ γράμματα. μ΄ οὖν ε΄κις πάλιν ἐστὶ μ΄, δὶς δὲ δ΄ γίνονται η΄, τὰ ἐν μέσῳ δὲ τούτων· τρὶς τὰ γ΄ γίνονται ϑ΄. μ΄ δὲ καὶ μ΄ καὶ μ΄ καὶ η΄ καὶ ϑ΄ καὶ γ΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν λ΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ β μ΄. θὲς κάτωθεν εἰς πέμπτον τόπον μ΄, θὲς δὲ ἰδίως β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. σημείωσον δὲ τὰ ἔσχατα δύο γράμματα, τὸ μ΄ καὶ ς΄, ὡς ἀργὰ ὄντα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ δύο ἄκρα τῶν ὀκτὼ γραμμάτων, ὧν ἀπέμειναν ἀσημείωτα· ἅπαξ οὖν δ΄ πάλιν ἐστὶ δ΄, μ΄ δὲ ε΄κις πάλιν ἐστὶ μ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς καὶ τὰ ἐν μέσῳ τέσσερα γράμματα· δὶς οὖν γ΄ γίνονται ς΄, μ΄ δὲ τρὶς πάλιν ἐστὶ μ΄. δ΄ δὲ καὶ μ΄ καὶ ς΄ καὶ μ΄ καὶ β΄, ἅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν κ΄ ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ ιβ΄. θὲς κάτωθεν εἰς ἕκτον τόπον β΄, θὲς δὲ ἰδίως α΄ ἀντὶ τῶν δέκα. σημείωσον δὲ τὰ δ΄ καὶ ε΄ ὡς ἀργὰ ὄντα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ ἓξ γράμματα, ἅπερ ἀπέμειναν ἀσημείωτα. ἅπαξ οὖν γ΄ πάλιν ἐστὶ γ΄, μ΄ δὲ τρὶς πάλιν ἐστὶ μ΄, ὡσαύτως καὶ τὰ ἐν μέσῳ αὐτῶν· μ΄ τὰ β΄ πάλιν ἐστὶ μ΄. γ΄ δὲ καὶ μ΄ καὶ μ΄ καὶ α΄, ὅπερ ἰδίως ἀντὶ τῶν δέκα ἔθηκας, γίνονται ὁμοῦ δ΄. θὲς ταῦτα κάτωθεν εἰς ἕβδομον τόπον. σημείωσον δὲ τὰ γ΄ καὶ γ΄ ὡς ἀργὰ ὄντα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ ἄνωθεν δύο μ μ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν α β΄. ἅπαξ οὖν μ΄ πάλιν ἐστὶ μ΄, μ΄ δὲ δὶς πάλιν ἐστὶ μ΄, ὡσαύτως καὶ τὰ δύο πρῶτα· μ΄ τὸ α΄ πάλιν ἐστὶ μ΄. ἐπεὶ δὲ ταῦτα πάντα πολλ(α)πλασιάζοσι μ΄, ἐτελειώθη μέχρι τούτου ὁ πολλ(α)πλασιασμὸς αὐτῶν, ὅς ἐστι δ β μ α μ δ μ΄, ἅπερ δηλῶσι μιλ(ι)ούνια δ΄ καὶ ,σ,α΄ καὶ μ΄.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον πολλ(α)πλασιασμόν, ὃν ἂν ἔχῃς ζητῶν – διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως, ἥτις λέγεται οἶκος, ἔχεις εἰδέναι τὸν ζητούμενον πολλ(α)πλασιασμόν, πόσος γίνεται. ἡ δὲ ἀπόδειξις τούτων πάντων, ὅτι ἐγένετο καλῶς ὁ ζητούμενος πολλ(α)πλασιασμός, ἔστι ὁμοία τῆς πρώτης μεταχειρίσεως.

ἔξεστιν οὖν ἡμῖν πολλ(α)πλασιάζειν καὶ μετὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως, ἥτις λέγεται τρίπλευρος, καὶ μετὰ τῆς παρούσης, ἥτις λέγεται οἶκος. σαφεστέρα δὲ οὖσα ἡ πρώτη μεταχείρισις τῆς παρούσης διὰ τῆς πρώτης μᾶλλον δεῖ πάντα πολλ(α)πλασιασμὸν ζητεῖν. παντα[τα]χοῦ γὰρ τὸ σαφὲς ἀναγκαῖον καὶ χρήσιμον, ἐνταῦθα δὲ μάλιστα τὴν σαφεστέραν καὶ πρόχειρον μεταχείρισιν ἀναγκαῖον ἐπιζητεῖν, ὡς ἂν δι᾽ αὐτῆς ἀσφαλῶς καὶ προχείρως τὸ ζητούμενον ἡμῖν γνώριμον γίνεσθαι.

ιζ Περὶ τοῦ ἐν φαντασίᾳ μόνῃ γενομένου πολλ(α)πλασιασμοῦ, ἐφ᾽ οὗ καὶ ιγ΄ μετὰ τῶν ιγ΄ πολλ(α)πλασιάζονται καὶ ἑξῆς ὁμοίως

Καιρὸς ἤδη λοιπὸν καὶ περὶ τοῦ ἐν φαντασίᾳ μόνῃ γενομένου πολλ(α)πλασιασμοῦ εἰπεῖν· εἰσὶ γὰρ πολλοὶ καὶ διάφοροι τρόποι δυνάμενοι πολλ(α)πλασιάσαι ἀγράφως ἐν

---

22 μ΄ τὰ β΄] **sic C** 34 τρίπλευρος] τρίπλευρον **C** 36 ἀναγκαῖον] ανανγκέον **C** ἐνταῦθα] **hic et aliubi** ἐν ταυτα **C** 37 ἀναγκαῖον] ἀναγγεον **C**

μόνῃ φαντασίᾳ καὶ δηλῶσαι ἡμῖν καλῶς τὸ ζητούμενον.
πρώτη δὲ μεταχείρισις ἀγράφου πολλ(α)πλασιασμοῦ, ἐν φαντασίᾳ δὲ μόνῃ γενομένου, ἐστὶ αὕτη. οἶδας τοίνυν καλῶς, ὅτι ι΄ μετὰ τῶν ι΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται ρ΄. ἔστω δὲ τοῦτο νενοημένον παρὰ σεαυτῷ, ὅτι ιγ΄ μετὰ τῶν ιγ΄ καὶ ιδ΄ μετὰ τῶν ιδ΄ καὶ ιγ΄ μετὰ τῶν ιβ΄ καὶ ιζ΄ μετὰ τῶν ιγ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως πολλ(α)πλασιαζόμενα αἱ τούτων δεκάδαι πολλ(α)πλασιάζοσι ρ΄.
ζητεῖς δὲ νῦν πολλ(α)πλασιάσαι ιγ΄ μετὰ τῶν ιγ΄. τὰ ι΄ δὲ μετὰ τῶν ι΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα, ὡς εἴπομεν, πολλ(α)πλασιάζοσι ρ΄. κράτει οὖν παρὰ σεαυτῷ ἕνεκεν τῶν δύο δεκάδων ρ΄. ἕνωσον δὲ τὰ γ΄ μετὰ τῶν γ΄ καὶ γίνονται ς΄. ἔστι δὲ ταῦτα δεκάδαι ς΄, τουτέστι ξ΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ρ΄ καὶ γίνονται ρξ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ γ΄ μετὰ τῶν γ΄· τρὶς οὖν γ΄ γίνονται θ΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ρξ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ρξθ΄. καὶ ἰδοὺ ἐν μόνῃ τῇ σῇ φαντασίᾳ ἀγράφως εὗρες, ὅτι ιγ΄ μετὰ τῶν ιγ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ρξθ΄.

ιδ΄ μετὰ τῶν ιδ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Τὰ ι΄ μετὰ τῶν ι΄ γίνονται ρ΄. ἕνωσον τὰ δ΄ μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται η΄, ἅπερ ἐστὶ π΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ρ΄ καὶ γίνονται ρπ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ δ΄ μετὰ τῶν δ΄· δ΄κις οὖν δ΄ γίνονται ις΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ρπ΄ καὶ γίνονται ρϛ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ τῇ σῇ φαντασίᾳ, ὅτι ιδ΄ μετὰ τῶν ιδ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα πολλ(α)πλασιάζοσι ρϛ΄.

ιγ΄ μετὰ τῶν ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Τὰ ι΄ μετὰ τῶν ι΄ γίνονται ρ΄. ‖ ἕνωσον τὰ γ΄ μετὰ τῶν β΄ καὶ γίνονται ε΄, ἅπερ ἐστὶ ν΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ρ΄ καὶ γίνονται ρν΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ γ΄ μετὰ τῶν β΄· τρὶς οὖν β΄ γίνονται ϛ΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ρν΄ καὶ γίνονται ρνϛ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ιγ΄ μετὰ τῶν ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται ρνϛ΄. f. 20v

ιζ΄ μετὰ τῶν ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Τὰ ι΄ μετὰ τῶν ι΄ γίνονται ρ΄. ἕνωσον τὰ ζ΄ μετὰ τῶν β΄ καὶ γίνονται θ΄, ἅπερ ἐστὶ ϙ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ρ΄ καὶ γίνονται ρϙ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ζ΄ μετὰ τῶν β΄· ζ΄κις οὖν β΄ γίνονται ιδ΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ρϙ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ σδ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ τῇ σῇ φαντασίᾳ, ὅτι ιζ΄ μετὰ τῶν ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται σδ΄.

ιη Περὶ τοῦ πῶς ἔστι καὶ ἄλλως πολλ(α)πλασιάσαι ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, οὐκ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, ἀλλὰ ἀπὸ τοῦ τέλους μᾶλλον ἀρξάμενος

ιζ΄ μετὰ τῶν ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Πολλ(α)πλασίασον τὰ β΄ μετὰ τῶν ζ΄· δὶς οὖν ζ΄ γίνονται ιδ΄. κράτει παρὰ σεαυτῷ δ΄, κράτει δὲ καὶ α΄ ἀντὶ τῶν ι΄. ἕνωσον τὰ β΄ μετὰ τῶν ζ΄ καὶ γίνονται θ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τοῦ α΄, οὗ κρατεῖς ἀντὶ τῶν ι΄. θ΄ οὖν καὶ α΄ γίνονται ι΄. πρόσθες ἀπὸ τῶν ἐκτὸς καὶ ἕτερα ι΄ καὶ γίνονται κ΄. δεκαπλασίασον ταῦτα καὶ γίνονται σ΄. ἕνωσον καὶ τὰ δ΄, ἅπερ ἰδίως κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ σδ΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως ἐν μόνῃ τῇ σῇ φαντασίᾳ ἀγράφως εὗρες, ὅτι ιζ΄ μετὰ τῶν ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται σδ΄, ὡς καὶ μετὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως οὕτως εὗρες.

ιϛ΄ μετὰ τῶν ιδ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Πολλ(α)πλασίασον τὰ δ΄ μετὰ τῶν ϛ΄· δ΄κις οὖν ϛ΄ γίνονται κδ΄. κράτει παρὰ σεαυτῷ δ΄, κράτει δὲ καὶ β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. ἕνωσον τὰ δ΄ καὶ ϛ΄ καὶ γίνονται ι΄.

---

3 οἶδας] εἴδὰς **C** 15.21.26 Τὰ ι΄ μετὰ τῶν ι΄ **sc.** πολλαπλασιαζόμενα

ἕνωσον καὶ τὰ β΄, ἅπερ κρατεῖς ἀντὶ τῶν κ΄, καὶ γίνονται ιβ΄. πρόσθες ἀπὸ τῶν ἐκτὸς καὶ ἕτερα ι΄ καὶ γίνονται κβ΄. δεκαπλασίασον ταῦτα καὶ γίνονται σκ΄. ἕνωσον καὶ τὰ δ΄, ἅπερ ἰδίως κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ σκδ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ις΄ μετὰ τῶν ιδ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται σκδ΄.

ιθ΄ μετὰ τῶν ιθ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Πολλ(α)πλασίασον τὰ θ΄ μετὰ τῶν θ΄· θ΄κις οὖν θ΄ γίνονται πα΄. κράτει παρὰ σεαυτῷ α΄, κράτει δὲ καὶ η΄ ἀντὶ τῶν π΄. ἕνωσον τὰ θ΄ μετὰ τῶν θ΄ καὶ γίνονται ιη΄. ἕνωσον καὶ τὰ η΄, ἅπερ κρατεῖς ἀντὶ τῶν π΄, καὶ γίνονται κς΄. πρόσθες ἀπὸ τῶν ἐκτὸς καὶ ἕτερα ι΄ καὶ γίνονται λς΄. δεκαπλασίασον ταῦτα καὶ γίνονται τξ΄. ἕνωσον καὶ τὸ α΄, ὅπερ ἰδίως κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ τξα΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ιθ΄ μετὰ τῶν ιθ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται τξα΄.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν· διὰ τῶν δύο τούτων μεταχειρίσεων ἔχεις εἰδέναι ἐν μόνῃ τῇ σῇ φαντασίᾳ ἀγράφως δύο τινὰς πολλ(α)πλασιαζομένους ἀριθμοὺς κάτωθεν ὄντα τῶν κ΄. ἄνωθεν δὲ ὄντα τῶν κ΄, ὡς τὰ κα΄ μετὰ τῶν κβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα καὶ ἑξῆς ὁμοίως, – οὐκ ἔχεις εἰδέναι καλῶς διὰ τῶν δύο τούτων μεταχειρίσεων τὸ ζητούμενον.

ιθ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι καὶ ἄλλως ἐν φαντασίᾳ μόνῃ πολλ(α)πλασιάσαι καλῶς πᾶν ζητούμενον ἀριθμόν, κἄντε ἐλάττω ἐστὶ κἄντε καὶ πλείω τῶν κ΄

ιε΄ μετὰ τῶν ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Πολλ(α)πλασίασον τὸ πρῶτον γράμμα τῶν α β΄, ὅπερ ἐστὶ α΄, μετὰ τῶν α ε΄· ἅπαξ οὖν α ε΄ πάλιν ἐστὶ α ε΄. πρόσθες καὶ υ΄ εἰς τὰ α ε΄ καὶ γίνονται α ε υ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τῶν α β΄, ὅπερ ἐστὶ β΄, μετὰ τῶν α ε΄· δὶς οὖν α ε΄ γίνονται γ υ΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν α ε υ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ α η υ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ιε΄ μετὰ τῶν ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται ρπ΄.

Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) πολλ(α)πλασίασον μετὰ τοῦ πρώτου γράμματος τῶν α ε΄, ὅπερ ἐστὶ α΄, τὰ α β΄· ἅπαξ οὖν α β΄ πάλιν ἐστὶ α β΄. πρόσθες υ΄ καὶ γίνονται α β υ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τῶν α ε΄, ὅπερ ἐστὶ ε΄, μετὰ τῶν α β΄· ε΄κις οὖν α β΄ γίνονται ς υ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν α β υ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν α η υ΄. καὶ ἰδοὺ ιβ΄ μετὰ τῶν ιε΄ καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) ιε΄ μετὰ τῶν ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα – διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως εὕρες ἀγράφως διὰ μόνης φαντασίας, ὅτι ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμός ἐστι ρπ΄.

ιγ΄ μετὰ τῶν ιθ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Πολλ(α)πλασίασον τὸ πρῶτον γράμμα τῶν α γ΄, ὅπερ ἐστὶ α΄, μετὰ τῶν α θ΄· ἅπαξ οὖν α θ΄ πάλιν ἐστὶ α θ΄. πρόσθες υ΄ καὶ γίνονται α θ υ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τῶν α γ΄, ὅπερ ἐστὶ γ΄, μετὰ τῶν α θ΄· τρὶς οὖν α θ΄ γίνονται ε ζ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν α θ υ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ β δ ζ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ιγ΄ μετὰ τῶν ιθ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται σμζ΄.

Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) πολλ(α)πλασίασον τὸ πρῶτον γράμμα τῶν α θ΄, ὅπερ ἐστὶ α΄, μετὰ τῶν α γ΄· ἅπαξ οὖν α γ΄ πάλιν ἐστὶ α γ΄. πρόσθες υ΄ καὶ γίνονται α γ υ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τῶν α θ΄, ὅπερ ἐστὶ θ΄, μετὰ τῶν α γ΄· θ΄κις οὖν α γ΄ γίνονται α α ζ΄. ἕν<ω>σον ταῦτα μετὰ τῶν α γ υ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν β δ ζ΄. καὶ ἰδοὺ ιγ΄ μετὰ τῶν ιθ΄ καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) ιθ΄ μετὰ τῶν ιγ΄

17/18 πᾶν ... ἀριθμόν] **sic C** 18 ἐλάττω **sc.** ἐλάττων πλείω **sc.** πλείων 31 ὁ τούτων] ουτων των **C**

πολλ(α)πλασιαζόμενα – διὰ μόνης φαντασίας εὕρες, ὅτι ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμός ἐστι σμζ΄.

κβ΄ μετὰ τῶν κγ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Πολλ(α)πλασίασον τὸ πρῶτον γράμμα τῶν β β΄, ὅπερ ἐστὶ β΄, μετὰ τῶν β γ΄· δὶς οὖν β γ΄ γίνονται δ ς΄. πρόσθες μ΄ καὶ γίνονται δ ς μ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τῶν β β΄, ὅπερ ἐστὶ πάλιν β΄, μετὰ τῶν β γ΄· δὶς οὖν β γ΄ γίνονται πάλιν δ ς΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν δ ς μ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ε μ ς΄. καὶ ἰδοὺ τὰ κβ΄ μετὰ τῶν κγ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται φς΄.

Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) πολλ(α)πλασίασον τὸ πρῶτον γράμμα τῶν β γ΄, ὅπερ ἐστὶ β΄, μετὰ τῶν β β΄· δὶς οὖν β β΄ γίνονται δ δ΄. πρόσθες μ΄ καὶ γίνονται δ δ μ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τῶν β γ΄, ὅπερ ἐστὶ γ΄, μετὰ τῶν β β΄· τρὶς οὖν β β΄ γίνονται ς ς΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν δ δ μ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν ε μ ς΄. καὶ ἰδοὺ κβ΄ μετὰ τῶν κγ΄ καὶ τὸ ἀνάπαλ(ιν) κγ΄ μετὰ τῶν κβ΄ πολλ(α)πλα||σιαζό- f. 21r
μενα – διὰ μόνης φαντασίας εὕρες, ὅτι ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμός ἐστι φς΄.

κγ΄ μετὰ τῶν λε΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Πολλ(α)πλασίασον τὸ πρῶτον γράμμα τῶν β γ΄, ὅπερ ἐστὶ β΄, μετὰ τῶν γ ε΄· δὶς οὖν γ ε΄ γίνονται ζ μ΄. πρόσθες μ΄ καὶ γίνονται ζ μ μ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τῶν β γ΄, ὅπερ ἐστὶ γ΄, μετὰ τῶν γ ε΄· τρὶς οὖν γ ε΄ γίνονται α α ε΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ζ μ μ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ η α ε΄. καὶ ἰδοὺ κγ΄ μετὰ τῶν λε΄ πολλαπλασιαζόμενα γίνονται ωιε΄. καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) πολλ(α)πλασιαζόμενα τὰ λε΄ μετὰ τῶν κγ΄ τῷ τρόπῳ τούτῳ εὕρες, ὅτι πάλιν γίνονται ωιε΄.

νγ΄ μετὰ τῶν ρκ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Πολλ(α)πλασίασον τὸ πρῶτον γράμμα τῶν ε γ΄, ὅπερ ἐστὶ ε΄, μετὰ τῶν α β μ΄· ε΄κις οὖν α β μ΄ γίνονται ς μ μ΄. πρόσθες μ΄ καὶ γίνονται ς μ μ μ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τῶν ε γ΄, ὅπερ ἐστὶ γ΄, μετὰ τῶν α β μ΄· τρὶς οὖν α β μ΄ γίνονται γ ς μ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ς μ μ μ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ς γ ς μ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ νγ΄ μετὰ τῶν ρκ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται ,ςτξ΄.

Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) πολλ(α)πλασίασον τὸ πρῶτον γράμμα τῶν α β μ΄, ὅπερ ἐστὶ α΄, μετὰ τῶν ε γ΄· ἅπαξ οὖν ε γ΄ πάλιν ἐστὶ ε γ΄. ἐπεὶ δὲ τὸ α΄, ὅπερ πολλ(α)πλασιάζεις τὰ ε γ΄, ἔστι ἑκατοντάδος καὶ οὐ δεκάδας, πρόσθες δύο μ΄μ΄ καὶ γίνονται ε γ μ μ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τῶν α β μ΄, ὅπερ ἐστὶ β΄, μετὰ τῶν ε γ΄· δὶς οὖν ε γ΄ γίνονται α μ ς΄. ἐπεὶ δὲ τὰ β΄, ἅπερ πολλ(α)πλασιάζεις τὰ ε γ΄, ἔστι δεκάδαι δύο, τουτέστι κ΄, πρόσθες ἕνα μ΄ καὶ γίνονται α μ ς μ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ε γ μ μ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν ς γ ς μ΄. καὶ ἰδοὺ νγ΄ μετὰ τῶν ρκ΄ καὶ ρκ΄ μετὰ τῶν νγ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα πολλ(α)πλασιάζοσι ἀμφότερα ,ςτξ΄.

ρλ΄ μετὰ τῶν ρν΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Πολλ(α)πλασίασον τὸ πρῶτον γράμμα τῶν α γ μ΄, ὅπερ ἐστὶ α΄, μετὰ τῶν α ε μ΄· ἅπαξ οὖν α ε μ΄ ἐστὶ πάλιν α ε μ΄. ἐπεὶ δὲ τὸ α΄ τὸ πολλ(α)πλασιάζον τὰ α ε μ΄ ἔστι ἑκατοντάδος, πρόσθες δύο μ΄μ΄ καὶ γίνονται α ε μ μ μ΄.πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τῶν α γ μ΄, ὅπερ ἐστὶ γ΄, μετὰ τῶν α ε μ΄· τρὶς οὖν α ε μ΄ γίνονται δ ε μ΄. ἐπεὶ δὲ τὰ γ΄ ἐστὶ δεκάδαι, τουτέστι λ΄, πρόσθες ἕνα μ΄ καὶ γίνονται δ ε μ μ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν α ε μ μ μ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ α ϑ ε μ μ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ρλ΄ μετὰ τῶν ρν΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται α ϑ ε μ μ΄, τουτέστι ,ι,ϑ΄

---

18 ααε΄] **error calculi, sc.** αμε΄ 19/20 **sequitur solutio falsa** ηαε΄ **nec non** ωιε΄ **pro** ημε΄ **et** ωε΄ 21 εὕρες] εὕρης **C** ωιε΄ **cf.** 20

καὶ φ΄. πολλ(α)πλασιαζόμενα δὲ καὶ τὰ ρν΄ μετὰ τῶν ρλ΄ τῷ τρόπῳ τούτῳ εὑρεθήσ<ε>ται πάλιν ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α θ ε μ μ΄.

,αρ΄ μετὰ τῶν ,ασ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Πολλ(α)πλασίασον τὸ πρῶτον γράμμα τῶν α α μ μ΄ μετὰ τῶν α β μ μ΄· ἅπαξ οὖν α β μ μ΄ πάλιν ἐστὶ α β μ μ΄. ἐπεὶ δὲ τὸ α΄ τὸ πολλ(α)πλασιάζον τὰ α β μ μ΄ ἐστὶ χιλιάδος, πρόσθες τρία μ΄μ΄μ΄ καὶ γίνονται α β μ μ μ μ μ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τῶν α α μ μ΄, ὅπερ ἐστὶ α΄, μετὰ τῶν α β μ μ΄· ἅπαξ οὖν α β μ μ΄ πάλιν ἐστὶ α β μ μ΄. ἐπεὶ δὲ τὸ α΄ τὸ πολλ(α)πλασιάζον τὰ α β μ μ΄ ἔστι ἑκατοντάδος, πρόσθες δύο μ΄μ΄ καὶ γίνονται α β μ μ μ μ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν α β μ ϻ μ μ μ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ α γ β ϻ μ μ μ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ,αρ΄ μετὰ τῶν ,ασ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται α γ β ϻ μ μ μ΄, τουτέστι α΄ μιλιούνιν καὶ ,τ,κ΄. πολλ(α)πλασιαζόμενα δὲ καὶ τὰ ,ασ΄ μετὰ τῶν ,αρ΄ τῷ τρόπῳ τούτῳ εὑρεθήσ<ε>ται πάλιν ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α γ β ϻ μ μ μ΄.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον πολλ(α)πλασιασμὸν δύο τινῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως – ἔχεις εἰδέναι ἀγράφως διὰ μόνης τῆς σῆς φαντασίας τὸν τούτων ζητούμενον πολλ(α)πλασιασμόν.

κ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι καὶ ἄλλως ἐν μόνῃ φαντασίᾳ πολλ(α)πλασιάζειν, ὅταν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχῃ μ΄ σημεῖον

μ΄ μετὰ τῶν μ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Τὰ μ΄ οὕτως τιθέμενα δ μ΄ ἔχοσι ἕνα μ΄. λάβε τὸ μ΄ παρὰ σεαυτῷ, λάβε δὲ καὶ ἐκ τῶν ἑτέρων δ μ΄ τὸ μ΄ καὶ κράτει δύο μ΄μ΄ παρὰ σεαυτῷ. τὰ δὲ δ΄, ἅπερ ἀπέμειναν ἐκ τῶν δ μ΄, μετὰ τῶν ἑτέρων δ΄, ὧν ἀπέμειναν ἐκ τῶν ἑτέρων δ μ΄, πολλ(α)πλασιαζόμενα ἀμφότερα – δ΄κις δ΄ γίνονται α ς΄. πρόσθες καὶ τὰ δύο μ΄μ΄, ἅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ α ς μ μ΄. καὶ ἰδοὺ εὕρες ἐν μόνῃ τῇ σῇ φαντασίᾳ, ὅτι τὰ μ΄ μετὰ τῶν μ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται ,αχ΄.

ρ΄ μετὰ τῶν σ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Τὰ μὲν ρ΄ οὕτως κείμενα α μ μ΄ ἔχοσι δύο μ΄μ΄, τὰ δὲ σ΄ οὕτως κείμενα β μ μ΄ ἔχοσι δύο μ΄μ΄. λάβε δὲ τῶν α μ μ΄ καὶ τῶν β μ μ΄ τὰ τέσσερα οὐδὲν μ΄μ΄μ΄μ΄ καὶ κράτει ταῦτα παρὰ σεαυτῷ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν α μ μ΄ ἀπομένει α΄, ἀπὸ δὲ τῶν β μ μ΄ ἀπομένοσι β΄. πολλ(α)πλασίασον τὸ α΄ μετὰ τῶν β΄· ἅπαξ οὖν β΄ πάλιν ἐστὶ β΄. πρόσθες καὶ τὰ τέσσερα μ΄μ΄μ΄μ΄, ἅπερ κρατεῖς παρὰ σεαυτῷ, καὶ γίνονται ὁμοῦ β μ μ μ μ΄, ἅπερ δηλῶσι ,κ΄. καὶ ἰδοὺ εὕρες ἐν μόνῃ τῇ σῇ φαντασίᾳ, ὅτι τὰ ρ΄ μετὰ τῶν σ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται β μ μ μ μ΄, τουτέστι ,κ΄.

τ΄ μετὰ τῶν ,β΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Τὰ μὲν τ΄ οὕτως κείμενα γ μ μ΄ ἔχοσι δύο μ΄μ΄, τὰ δὲ ,β΄ οὕτως κείμενα β μ μ μ΄ ἔχοσι τρία μ΄μ΄μ΄. λάβε οὖν τῶν γ μ μ΄ καὶ τῶν β μ μ μ΄ πέντε μ΄μ΄μ΄μ΄μ΄ καὶ κράτει ταῦτα παρὰ σεαυτῷ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν γ μ μ΄ ἀπομένοσι γ΄, ἀπὸ δὲ τῶν β μ μ μ΄ ἀπομένοσι β΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ γ΄ μετὰ τῶν β΄· τρὶς οὖν β΄ γίνονται ς΄. πρόσθες καὶ τὰ πέντε μ΄μ΄μ΄μ΄μ΄, ἅπερ κρατεῖς παρὰ σεαυτῷ, καὶ γίνονται γράμματα ἓξ, ἅπερ οὕτως κείμενα ς μ ϻ μ μ μ΄ χιλιάδας χ΄ δηλῶσι. καὶ ἰδοὺ εὕρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι τὰ τ΄ μετὰ τῶν ,β΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται χιλιάδαι χ΄.

,γ΄ μετὰ τῶν ,δ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Τὰ μὲν ,γ΄ οὕτως κείμενα γ μ μ μ΄ ἔχοσι τρία μ΄μ΄μ΄, τὰ δὲ ,δ΄ οὕτως κείμενα

---

11 μιλιούνιν] μ̣ὴ̣ούνην **C** 14 πᾶν ἕτερον πολλπλασιασμὸν] **sic C**

δ υ υ υ΄ ἔχοσι καὶ αὐτὰ τρία υ΄υ΄υ΄. λάβε οὖν τὰ ς΄ οὐδὲν || υ΄υ΄υ΄υ΄υ΄υ΄ καὶ f. 21^{v}
κράτει ταῦτα παρὰ σεαυτῷ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν ,γ΄ ἀπομένοσι γ΄, ἀπὸ δὲ τῶν ,δ΄ ἀπομένοσι δ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ γ΄ μετὰ τῶν δ΄· τρὶς οὖν δ΄ γίνονται α β΄. πρόσθες καὶ τὰ ς΄ οὐδὲν υ΄υ΄υ΄υ΄υ΄υ΄, ἅπερ κρατεῖς παρὰ σεαυτῷ, καὶ γίνονται ὁμοῦ α ϐ υ υ ὐ υ υ υ΄, ἅπερ δηλῶσι μιλιούνια ιβ΄, τουτέστι ιβ΄ χιλιάδας χιλιάδων. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι τὰ ,γ΄ μετὰ τῶν ,δ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται ιβ΄ χιλιάδαι χιλιάδων, τουτέστι ιβ΄ μιλιούνια.

καὶ ταῦτα μὲν οὕτως, ὁπόταν καὶ τὰ δύο πολλ(α)πλασιαζόμενα μέρη ἀμφότερα ἔχωσι ἀνὰ ἑνὸς γράμματος. εἰ δὲ τὸ μέν ἐστι ἄρτιος καὶ τέλειος ἀριθμὸς δεκάδος ἢ ἑκατοντάδος ἢ χιλιάδος ἢ μυριάδος καὶ ἑξῆς ὁμοίως, τὸ δέ ἐστι μεικτὸς καὶ ἀτελὴς ἀρι<ϑ>μός, ὥστε ἔχειν δεκάδα μετὰ μονάδος ὡς τὰ με΄ ἢ ἑκατοντάδα μετὰ δεκάδος ὡς τὰ σν΄ ἢ χιλιάδα μετὰ ἑκατοντάδος ὡς τὰ ,ατ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, τὸ μὲν διπλᾶς ἔχον τὰς σημασίας, τὸ δὲ εἰς ἓν πρῶτον γράμμα ἀναφερόμενον, ἔχεις καὶ τούτους πολλ(α)πλασιάσαι ἀγράφως ἐν μόνῃ τῇ σῇ φαντασίᾳ κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον καὶ εἰδέναι τὸν τούτων πολλ(α)πλασιασμόν, πόσος γίνεται.

ἔστω γὰρ ὅτι βούλ(ει) πολλ(α)πλασιάσαι λ΄ μετὰ τῶν με΄.

Τὰ μὲν λ΄ οὕτως κείμενα γ υ΄ ἔχοσι ἕνα υ΄, τὰ δὲ με΄ οὕτως κείμενα δ ε΄ οὐκ ἔχοσι υ΄. λάβε τοίνυν τὸ ἕνα υ΄ τῶν γ υ΄ καὶ κράτει τοῦτο παρὰ σεαυτῷ. ἀπομένοσι δὲ γ΄ ἀπὸ τῶν γ υ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ ε΄· τρὶς οὖν δ ε΄ γίνονται α γ ε΄. πρόσθες καὶ τὸ υ΄, ὅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ α γ ε υ΄, ἅπερ δηλῶσι ,ατν΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι τὰ λ΄ μετὰ τῶν με΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται ,ατν΄.

ρ΄ μετὰ τῶν σν΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Τὰ μὲν ρ΄ οὕτως κείμενα α υ υ΄ ἔχοσι δύο υ΄υ΄, τὰ δὲ σν΄ οὕτως κείμενα β ε υ΄ ἔχοσι ἕνα υ΄. λάβε ἀπὸ μὲν τῶν α υ υ΄ τὰ δύο υ΄υ΄, ἀπὸ δὲ τῶν β ε υ΄ τὸ ἕνα υ΄ καὶ κράτει παρὰ σεαυτῷ τρία υ΄υ΄υ΄. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν α υ υ΄ ἀπομένει α΄, ἀπὸ δὲ τῶν β ε υ΄ ἀπομένοσι β ε΄, ἅπερ δηλῶσι κε΄. πολλ(α)πλασίασον τὸ α΄ μετὰ τῶν β ε΄· ἅπαξ οὖν β ε΄ πάλιν ἐστὶ β ε΄. πρόσθες καὶ τὰ τρία υ΄υ΄υ΄, ἅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ β ἐ υ υ υ΄, ἅπερ δηλῶσι ,κ,ε΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι τὰ ρ΄ μετὰ τῶν σν΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται ,κ,ε΄.

σ΄ μετὰ τῶν ,ατ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Τὰ μὲν σ΄ οὕτως κείμενα β υ υ΄ ἔχοσι δύο υ΄υ΄, τὰ δὲ ,ατ΄ οὕτως κείμενα α γ υ υ΄ ἔχοσι καὶ αὐτὰ δύο υ΄υ΄. λάβε τῶν β υ υ΄ καὶ τῶν α γ υ υ΄ τέσσερα υ΄υ΄υ΄υ΄ καὶ κράτει ταῦτα παρὰ σεαυτῷ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν β υ υ΄ ἀπομένοσι β΄, ἀπὸ δὲ τῶν α γ υ υ΄ ἀπομένοσι α γ΄, ἅπερ δηλῶσι ιγ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ β΄ μετὰ τῶν α γ΄· δὶς οὖν α γ΄ γίνονται β ς΄. πρόσθες καὶ τὰ υ΄υ΄υ΄υ΄, ἅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ β ς ὐ υ υ υ΄, ἅπερ δηλῶσι σξ΄ χιλιάδας. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι σ΄ μετὰ τῶν ,ατ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται σξ΄ χιλ(ι)άδαι.

καὶ ταῦτα μὲν οὕτως, ὁπόταν τὰ δύο πολλ(α)πλασιαζόμενα μέρη – τὸ μέν ἐστι ἄρτιον εἰς ἓν πρῶτον γράμμα ἀναφερόμενον ὡς τὰ ρ΄ καὶ ,α΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, τὸ δὲ διπλᾶς ἔχον τὰς σημασίας ὡς τὰ με΄ καὶ σν΄ καὶ ,ατ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, καθὼς καὶ ἀνωτέρω εἴπομεν.

ὅταν δὲ ἀμφότερα καὶ τὰ δύο πολλ(α)πλασιαζόμενα μέρη διπλᾶς ἔχοσι σημασίας οὐκ ἔχοντα σημεῖον υ΄, ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γίνεται οὕτως.

ἔστω γὰρ ὅτι ζητεῖς πολλ(α)πλασιάσαι κγ΄ μετὰ τῶν λϑ΄.

Τὰ μὲν οὖν κγ΄ οὕτως κείμενα β γ΄, τὰ δὲ λϑ΄ οὕτως κείμενα γ ϑ΄ ἀμφότερα οὐκ

ἔχοσι μ΄. σκόπει οὖν τὸν ὄντα ἐγγυτέρω τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν πρὸς τὸ ἀπαρτίσαι τέλειον ἀριθμόν τε καὶ ἄρτιον εἰς ἓν πρῶτον γράμμα ἀναφερόμενον· καὶ τὰ μὲν κγ΄ ἀπολείπονται ζ΄ πρὸς τὸ γενέσθαι λ΄, ἅπερ ἐστὶ τέλειος ἀριθμός, τὰ δὲ λθ΄ λείπεται α΄ πρὸς τὸ γενέσθαι μ΄, ἅπερ ἐστὶ τέλειος ἀριθμός. καὶ ἰδοὺ τὰ λθ΄ ἐστὶ ἐγγυτέρω πρὸς τὸ γενέσθαι μ΄, τουτέστι τέλειος ἀριθμός. πρόσθες οὖν α΄ ἐπὶ τῶν λθ΄ καὶ γίνονται μ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα δ μ΄ ἔχοσι ἕνα μ΄. λάβε τὸ ἕνα μ΄ τῶν μ΄ καὶ κράτει τοῦτο παρὰ σεαυτῷ καὶ ἀπομένοσι καὶ δ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ κγ΄ μετὰ τῶν δ΄· δ΄κις οὖν β γ΄ γίνονται θ β΄. πρόσθες καὶ τὸ ἕνα μ΄, ὅπερ παρὰ σεαυτῷ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ θ β μ΄, ἅπερ δηλῶσι ͵ακ΄. ἐπεὶ οὖν προσέθηκας α΄ εἰς τὰ λθ΄ καὶ ἐγένοντο μ΄, ἄφελε ἅπαξ κγ΄ ἐκ τῶν ͵ακ΄ καὶ ἀπομένοσι ωςζ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι τὰ κγ΄ μετὰ τῶν λθ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται ωςζ΄.

ρο΄ μετὰ τῶν τπ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Τὰ τπ΄ ἐστὶ ἐγγυτέρω πρὸς τέλειον ἀριθμόν. πρόσθες οὖν β μ΄, ἵνα τὰ τπ΄ γίνωνται υ΄. καὶ τὰ μὲν υ΄ οὕτως κείμενα δ μ μ΄ ἔχοσι δύο μ΄μ΄, τὰ δὲ ρο΄ οὕτως κείμενα α ζ μ΄ ἔχοσι ἕνα μ΄. λάβε τοίνυν τὰ τρία μ΄μ΄μ΄ τῶν δ μ μ΄ δηλονότι καὶ τῶν α ζ μ΄ καὶ κράτει ταῦτα παρὰ σεαυτῷ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν δ μ μ΄ ἀπομένοσι δ΄, ἀπὸ δὲ τῶν α ζ μ΄ τὰ παρόντα δύο γράμματα α ζ΄, ἅπερ δηλῶσι ιζ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ α ζ΄ μετὰ τῶν δ΄· δ΄κις οὖν α ζ΄ γίνονται ς η΄. πρόσθες καὶ τὰ τρία μ΄μ΄μ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ς ἡ μ μ μ΄, ἅπερ δηλῶσι ξη΄ χιλιάδας. ἐπεὶ οὖν προσέθηκας β μ΄ ἐπὶ τῶν τπ΄ καὶ ἐγένοντο υ΄, ἄφελε β μ΄κις ρο΄ ἐκ τῶν ξη΄ χιλ(ι)άδων, ὧν ἐποίησας. ἔχεις δὲ ἀφελεῖν ταῦτα οὕτως. τὰ μὲν β μ΄ ἔχοσι ἕνα μ΄, τὰ δὲ α ζ μ΄ ἔχοσι ἕνα μ΄. κράτει οὖν δύο μ΄μ΄ παρὰ σεαυτῷ καὶ ἀπομένοσι β΄ καὶ α ζ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα· δὶς οὖν α ζ΄ γίνονται γ δ΄. πρόσθες καὶ τὰ δύο μ΄μ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ γ δ μ μ΄, ἅπερ δηλῶσι ,γυ΄. ἄφελε οὖν ,γυ΄ ἐκ τῶν ξη΄ χιλ(ι)άδων καὶ ἀπομένοσι ξδ΄ χιλιάδαι καὶ χ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι τὰ ρο΄ μετὰ τῶν τπ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται ξδ΄ χιλιάδαι καὶ χ΄.

Ἔξεστιν οὖν ὑμῖν καὶ ἐγγράφως καὶ ἀγράφως ἐν μόνῃ φανIIτασίᾳ πολλ(α)πλασιάζειν διὰ τῶν διαφόρων τούτων μεταχειρίσεων, ὧν ἐκτιθέμεθα, καὶ εἰδέναι καλῶς τὸν ἐκ δύο τινῶν ἀριθμῶν γενόμενον πολλ(α)πλασιασμόν. εἰ γὰρ καὶ δυσχερῶς μὲν τὰ τοιαῦτα γράφονται, δυσχερεστέρως δὲ μᾶλλον νοοῦνται, νοούμενα δ᾽ ὅμως ῥᾳδίως εὑρίσκονται. πᾶσα γὰρ τούτων δυσχέρεια ἐπὶ τῆς καταλήψεως γίνεται· καταληφθέντων δὲ τῶν τρόπων τῆς τούτων εὑρέσεως τῇ πείρᾳ διδάσκαλον χρώμενοι ῥᾳδίως εὑρίσκονται. f. 22r

κα **Περὶ τῆς εἰς τὸν διαμερισμὸν εἰσόδου, ἐφ᾽ ἧς καὶ ξ΄ μετὰ τῶν θ΄ διαμερίζονται καὶ ἑξῆς ὁμοίως**

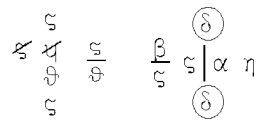
Τὸν τοῦ πολλ(α)πλασιασμοῦ ἤδη κανόνα ἱκανῶς παραδώσαντες, πῶς ἄρα ἔστι δύο τινὰ μέρη πρὸς ἄλληλα πολλαπλασιάζειν ἐγγράφως τε καὶ ἀγράφως ἐν μόνῃ φαντασίᾳ καὶ ποιεῖν γίνεσθαι μείζονα τὰ ἐλάττονα, φέρε εἴπωμεν καὶ πῶς ἔστι τὰ μείζονα διαμερ(ίζ)ειν, εἰς ὅσα ἂν μέρη βούλ(ῃ), καὶ ἐλάττονα ποιεῖν. τοῦτο δὲ δυσχερεστέρως πάνυ τοῦ πολλ(α)πλασιασμοῦ πέφυκε γίνεσθαι καὶ οὐδὲ ῥᾳδία καὶ ἱκανὴ ἡ δήλωσις τούτου διὰ χάρτης μόνον καὶ μέλανος, ἀλλὰ διὰ ζώσης μᾶλλον φωνῆς καὶ

---

27 ξδ΄ χιλιάδαι] $\overset{\eta\sigma}{\xi\delta}$ χιλιάδαι **C**, **i. e.** ἑξηκοντακαιτετράκις χιλιάδαι 28 ὑμῖν] **potius** ἡμῖν 33 διδάσκαλον] **sic C pro** διδασκάλῳ 37 ἐγγράφως] ἐνγράφως **C** 41 διὰ χάρτης **sic C**

πείρας τῆς προσηκούσης δήλη ὑμῖν μόλις γίνεται. πειράσωμαι δ᾽ ὅμως δι᾽ ὑποδειγμάτων διαφόρων, ὡς ἐφικτὸν ὑμῖν δηλῶσαι τὸν τρόπον τῆς τούτου μεταχειρίσεως. καὶ ὅπερ ἂν ἡμεῖς οὐ δυνησώμεθα δηλῶσαι ὑμᾶς, ὡς δυσχερὲς πάνυ καὶ πολ[λ]υγραφίας αἴτιον, παραχωρήσωμεν τῇ πείρᾳ τοῖς βουλ(ο)μένοις τοῦτο καλῶς εἰδεῖν γενέσθαι τούτων διδάσκαλος. αὕτη γὰρ αὐτὴ ἀληθὴς διδάσκαλος δυναμένη τὰ μηδ᾽ ὁπωσοῦν εὑρισκόμενα εἰς ἔργον δεῖξαι καὶ ἀναπλάσασθαι πολλῷ μᾶλλον τὰ ὄντα. καὶ διὰ τοσούτων ὑποδειγμάτων, ὧν ἔχομεν δεῖξαι, ῥᾳδία ὑμῖν γενήσεται ἡ διὰ τῆς πείρας κατάληψις τῶν οὐ δεδωκότων παρ᾽ ἡμῖν πρὸς ὑμᾶς.

Ἔστω τοίνυν ὅτι βούλ(ει) διαμερίσαι ξ΄ εἰ<ς> μέρη θ΄. θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ξ΄, κάτωθεν δὲ τὰ θ΄, ἅπερ θ΄ εἰώθαμεν καλεῖσθαι μεριστής· δι᾽ αὐτοῦ γὰρ μερίζονται τὰ ἄνωθεν πάντα, ὅσα καὶ ᾖ. εἰ μὲν οὖν τὸ πρῶτον ἄνωθεν γράμμα, ὅπερ ἐστὶ ς΄ καὶ δηλοῖ ξ΄, ἦν θ΄, ὥστε δηλεῖν Ϛ΄ εἰς τόπον δεκάδος εὑρισκόμενον, ἔθηκας ἂν τὰ κάτωθεν θ΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστής, οὐκ εἰς τόπον μονάδος, καθὼς νῦν ἐστι κείμενα, ἀλλ᾽ εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον, ὅς ἐστι κάτωθεν τῶν ς΄ τῶν δηλώντων ξ΄. ἐχώρει γὰρ ἀφαιρεθῆναι τὰ θ΄, ὁ μεριστής, εἰς τὰ ἄνωθεν αὐτοῦ ὄντα θ΄ τὰ δηλῶντα Ϛ΄. νῦν δὲ τὸ πρῶτον γράμμα ὂν ς΄– τεθειμένων κάτωθεν τούτου θ΄, οὐ χωρῶσι ἀφαιρεθῆναι τὰ θ΄ ἐκ τῶν ς΄ πλείονα ὄντα· διὸ καὶ τὸν τῆς δεκάδος τόπον ἐάσας προβαίνων ἀκολούθως θὲς τὰ θ΄, ἅπερ ἐστὶ ὁ μεριστὴς τῶν ξ΄, εἰς τόπον μονάδος, τουτέστι κάτωθεν τοῦ ι΄. τιθεμένων δὲ τῶν θ΄ κάτωθεν τοῦ ι΄ τὰ ς΄ ἐπέχουσι τόπον δεκάδος καὶ δηλῶσι ξ΄, ἀπὸ δὲ τῶν ξ΄ πολλάκις χωρῶσι ἀφαιρεθῆναι τὰ θ΄. ζήτει οὖν, ποσάκις χωρῶσι τὰ θ΄ εἰς τὰ ξ΄. ζ΄κις οὖν θ΄ γίνονται ς γ΄ καὶ οὐ χωρῶσι ζ΄κις τὰ θ΄ ἐπὶ τῶν ς ι΄. ς΄κις δὲ θ΄ γίνονται νδ΄, περισσεύοσι καὶ ς΄ μέχρι τῶν ξ΄. θὲς οὖν ς΄ κάτωθεν τῶν θ΄, ὧν ἔχεις μεριστὴν τῶν ξ΄, πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι ἑξάκις ἐχώρεσαν τὰ θ΄ ἐπὶ τῶν ξ΄. τὰ δὲ ς΄, ἅπερ περισσεύοσι ἐκ τῶν ξ΄ – θὲς ταῦτα ἄνωθεν τοῦ ι΄. ὀβέλισον δὲ τὰ ς΄, ἅπερ δηλῶσι ξ΄, ὡσαύτως καὶ τὸ ι΄· κατελήφθησαν γὰρ τὰ ς ι΄ καὶ ἐγένοντο ς΄ μερισταὶ καὶ ἀπέμειναν καὶ ς΄ τὰ ἄνωθεν τοῦ ι΄ κείμενα, ἅπερ εἰώθαμεν καλεῖν τζάκισμα. ποίησον οὖν κεραίαν γραμμὴν καὶ θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ς΄, ἅπερ ἐστὶ – ὡς εἴπομεν – τζάκισμα, κάτωθεν δὲ τὰ θ΄, ἅπερ ἐστὶ – ὡς εἴπομεν – μεριστής. καὶ ἰδοὺ εὕρες, ὅτι τὰ ξ΄ ὑπὸ τῶν θ΄ διαμεριζόμενα γίνονται μέρη ς΄, ἕκαστον μέρος ἔχον ἀνὰ ἐννέα. περισσεύοσι δὲ καὶ ς΄, ἅπερ ἔχοσι λόγον πρὸς τὰ θ΄ – τὸν μεριστὴν δηλονότι – δίμοιρον, τουτέστι δύο τρίτα ἑνὸς ἀκεραίου· δὶς γὰρ γ΄ γίνονται ς΄ καὶ τρὶς γ΄ γίνονται θ΄. μεριζόμενα δὲ τὰ ξ΄ ὑπὸ τῶν θ΄ γίνονται μέρη ς΄ καὶ δύο τρίτα ἑνὸς ἀκεραίου.



κβ Περὶ τῆς τούτων μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως

Ἡ δὲ ἀπόδειξις καὶ μαρτυρία αὐτῶν, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον, ἔστι αὕτη. ζήτει πρῶτον τὸ τζάκισμα, ὅπερ νῦν ἐστι ς΄, ὃ καὶ ἄνωθεν τῶν θ΄ ἔθηκας, καὶ ἄφελε τοῦτο ἐπὶ τῶν ζ΄, καθ᾽ ὃν τρόπον εἴπομεν καὶ ἐπὶ τοῦ πολλ(α)πλασιασμοῦ. ἐπεὶ δὲ νῦν ἔστι ἓν γράμμα καὶ οὐ πολλ<ὰ> καὶ οὐ δύνασαι μερίσαι τὰ ς΄ ὑπὸ τῶν ζ΄ ἐλάττονα ὄντα τῶν ζ΄, ποίησόν τινα σύμ<μ>ετρον κεραίαν γραμμὴν καὶ θὲς τὰ ς΄ ταῦτα περὶ τὸ τέλος τῆς κεραίας γραμμῆς. ἔπειτα μέρισον καὶ τὸν μεριστὴν τὰ θ΄ δηλονότι

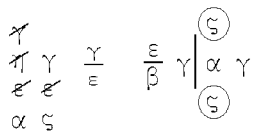
---

2 ἐφικτὸν ὑμῖν] εὐήκτὸν ἡμῖν **C** 10 μεριστής] **hic et passim** μερισθής **C** 14 οὐκ εἰς τόπον] οὐ χίσό πον **C** 19 προβαίνων] προβένον **C** 25 ἐχώρεσαν] **sic pro** ἐχώρησαν **hic et passim C**

ἐπὶ τῶν ζ΄. περισσεύοσι καὶ β΄ ἀπὸ τῶν θ΄. θὲς οὖν β΄ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς. ἔπειτα μέρισον καὶ τὸν ἐξελθόντα τέλειον διαμερισμόν, ὅστις νῦν ἐστι ς΄ τὰ κάτωθεν ὄντα τῶν θ΄, ἐπὶ τῶν ζ΄. ἐπεὶ δὲ ἓν γράμμα ἐστὶ ἔλαττο ὄντα τῶν ζ΄ καὶ οὐ δύναται μερισθῆναι ἐπὶ τῶν ζ΄, θὲς ς΄ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, τουτέστι κάτωθεν τῶν β΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν β΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ς΄· δὶς οὖν ς΄ γίνονται α β΄. ἕνωσον καὶ τὰ ἐκ πλαγίου ς΄, ἅπερ ἐστὶ τοῦ τζακίσματος, καὶ γίνονται ὁμοῦ α η΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι καὶ δ΄. θὲς ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός· Ⓓ. μέρισον καὶ τὸν πρῶτον ἀριθμόν, τουτέστι τὰ ς μ΄, ἐπὶ τῶν ζ΄· ἀπὸ γοῦν τῶν ς μ΄ περισσεύοσι δ΄. θὲς καὶ ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός· Ⓓ. καὶ ἰδοὺ εὑρέθησαν αἱ δύο μαρτυρίαι ἴσαι καὶ ὅμοιαι, ἔχουσα ἑκάστη ἐντὸς κύκλου Ⓓ. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις τούτων, ὅτι ἐγένετο καλῶς ὁ τούτων διαμερισμός. εἰ δὲ ἡ μὲν εἶχεν οὕτως, ἡ δὲ ἄλλως πως, διαφέρουσαι ἀλλήλων αἱ μαρτυllρίαι αὐτῶν, οὐκ ἂν **f. 22^{v}** ἐγένετο καλῶς ὁ τέλειος διαμερισμός, τουτέστι τὰ ς΄ καὶ δύο τρίτα ἑνὸς ἀκεραίου.

κγ **πγ΄ μετὰ τῶν ε΄ διαμεριζόμενα**

Θὲς τὰ μὲν πγ΄ ἄνωθεν, τὰ δὲ ε΄ κάτωθεν τῶν η΄. εἰ γὰρ οὐκ ἐχώρει ἐκβληθῆναι τὰ ε΄, ἅπερ νῦν ἐστι μεριστὴς τῶν πγ΄, ἐκ τοῦ πρώτου γράμματος, ὅπερ ἐστὶ η΄ καὶ δηλοῖ π΄, ἔθηκας ἂν τὰ ε΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστής, κάτωθεν τῶν γ΄, καθὼς οὕτως ἐποίησας ἐπὶ τῶν ξ΄, μερίζων ταῦτα διὰ τῶν θ΄. νῦν δέ, ἐπεὶ τὸ πρῶτον γράμμα ἐστὶ η΄, ὁ δὲ μεριστὴς ἐστι ε΄ καὶ δύνασαι ἀφελεῖν τὰ ε΄ ἐκ τῶν η΄, θὲς ε΄ – ὡς εἴπομεν – κάτωθεν τῶν η΄.



σκόπει οὖν, ποσάκις χωρῶσι τὰ ε΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστής, ἐπὶ τῶν ἄνωθεν τούτου η΄· καὶ ὁσάκις χωρῶσι τὰ ε΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστής, ἐπὶ τῶν ἄνωθεν η΄, τοσάκις γράψον κάτωθεν, ἢ ἅπαξ δηλονότι ἢ καὶ πολλ(ά)κις. νῦν δὲ ἅπαξ χωρῶσι τὰ ε΄ εἰς τὰ η΄. καὶ θὲς κάτωθεν τῶν ε΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστής, α΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι ὁ μεριστής, τὰ ε΄ δηλονότι, ἅπαξ ἐχώρεσεν εἰς τὰ ἄνωθεν η΄. τὰ δὲ γ΄, ἅπερ περισσεύοσι ἐκ τῶν η΄ – θὲς ταῦτα ἄνωθεν τῶν η΄. ὀβέλισον δὲ τὰ η΄, τουτέστι σημείωσον ταῦ<τα> ὡς ἀργὰ νῦν ὄντα καὶ ἀνενέργητα. πρόβηθι οὖν πάλιν εἰς τὸ ἕτερον γράμμα, ὅπερ δηλοῖ γ΄, καὶ θὲς κάτωθεν τούτου ἕτερον μεριστήν, τουτέστι πάλιν ε΄, ἅπερ ἔθηκας καὶ κάτωθεν τῶν η΄. ὀβέλισον δὲ καὶ τὸν πρῶτον μεριστήν, τὰ ε΄ τὰ ὑπὸ τῶν η΄ κείμενα ὡς ἀργὸν νῦν ὄντα καὶ ἀνενέργητον. τὰ ἄνωθεν οὖν τῶν η΄ κείμενα γ΄, ἅπερ ἐπερίσσευσαν ἐκ τῶν η΄, μετὰ τῶν ἐφεξῆς γ΄ οὕτως κείμενα γ γ΄ δηλῶσι λγ΄· τὰ μὲν γάρ ἐστι εἰ<ς> δεκάδος τόπον καὶ δηλῶσι λ΄, τὰ δὲ εἰς μονάδος καὶ δηλῶσι γ΄, τὰ δὲ δύο ὁμοῦ δηλῶσι λγ΄. ἄφελε οὖν πάλιν τὸν δεύτερον μεριστήν, τὰ ε΄ δηλονότι, ἅπερ ἔθηκας κάτωθεν τῶν γ΄, ὁσάκις ἂν χωρῶσι, ἐπὶ τῶν λγ΄· ς΄κις δὲ ε΄ γίνονται λ΄, περισσεύοσι καὶ γ΄ μέχρι τῶν λγ΄. θὲς ς΄ κάτωθεν τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, τουτέστι τῶν ε΄, πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι ς΄κις ἐχώρεσαν τὰ ε΄ ἐπὶ τῶν ἄνωθεν λγ΄. ἀπομένοσι δὲ καὶ γ΄ <μ>έχρι τῶν λγ΄. ἐπεὶ δὲ εὗρες, ὅτι ς΄κις ε΄ – ταὐτὸν γὰρ εἰπεῖν ε΄κις ς΄ – γίνονται λ΄, ἔθηκας δὲ κάτωθεν τοῦ δευτέρου μεριστοῦ ς΄. ὀβέλισον τὰ γ΄, ἅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῶν η΄ καὶ δηλῶσι λ΄· τὰ γὰρ λ΄ συνελήφθησαν καὶ ἐφθάρησαν γενόμενα ἓξ πεντάδαι. τὰ γ΄ δέ, ἅπ<ερ> ἐστὶ ἄνωθεν τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, τουτέστι τῶν ε΄ – ἄφες ταῦτα ἀσημείωτα· περισσεύοσι γὰρ ἐλάττω ὄντα τῶν

---

15 οὐκ ἐχώρει] οὐ καὶ χόρι **C** 25 ἅπερ] ὅπερ **C** 32 η΄] ε **falso C** 41 ἐφθάρησαν] εὐθαρίσαν **C**

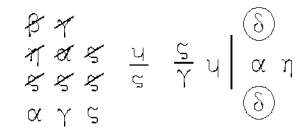
ε΄, ὅνπερ ἐστὶ μεριστής, καὶ καλῶνται τζάκισμα· τὸ γὰρ τζάκισμα, ὡς ἂν εἴπῃ τις, δηλωτικὴ φωνή ἐστι, ὅτι ἐναπελείφθη τι μέρος ἔλαττο τοῦ διαμερίζοντος σώματος, ὃ καὶ μεριστὴν ὀνομάζομεν. καὶ ἀπέμεινε τζάκισμα τῷ μεριστῇ συγκρινόμενον. ὀβέλισον δὲ καὶ τὸν δεύτερον μεριστήν, ἐπειδὴ κἀκεῖνος ἀργὸς νῦν ἐστι οὐκ ἔχων ἐφεξῆς τι πλέον διαμερίσασθαι. θὲς οὖν ἄνωθέν τινος κεραίας γραμμῆς τὰ γ΄, ἅπερ ἐκ τῶν λγ΄ ἀπέμειναν καί ἐστι τζάκισμα, κάτωθεν δὲ τῆς κεραίας γραμμῆς θὲς τὰ ε΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστής. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι τὰ πγ΄ μετὰ τῶν ε΄ διαμεριζόμενα – γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς τὰ παρόντα δύο γράμματα α ς΄, ἅπερ δηλῶσι ις΄, ἕκαστον μέρος τῶν ις΄ ἔχον ἀνὰ ε΄· ε΄κις γὰρ ις΄ γίνονται π΄ καὶ περισσεύοσι καὶ γ΄ τζάκισμα. τὰ δὲ γ΄ τὸ τζάκισμα πρὸς τὰ ε΄ τὸν μεριστὴν συγκρινόμενα ἔχοσι λόγον τριῶν πέμπτων, καθὼς εἰς τὸ ἑξῆς δηλώσομεν ἔτι τοῦτο σαφέστερον.

κδ Περὶ τῆς τούτων μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως

Θὲς τὸ τζάκισμα, τὰ γ΄ δηλονότι, ἅπερ ἔθηκας ἄνωθεν τῶν ε΄, περὶ τὸ τέλος τῆς κεραίας γραμμῆς. θὲς δὲ πάλιν ἄνωθεν τῆς κεραίας εὐθείας γραμμῆς τὸν μεριστήν, τουτέστι τὰ ε΄. ζήτει δὲ καὶ τὸν τέλειον διαμερισμόν, ὅ ἐστι τὰ παρόντα δύο γράμματα α ς΄ τὰ δηλοῦντα ις΄. καὶ μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι καὶ β΄. θὲς τὰ β΄ ταῦτα κάτωθεν τῶν ε΄ καὶ τῆς κεραίας εὐθείας γραμμῆς. καὶ πολλ(α)πλασίασον τὰ ἄνωθεν ε΄ μετὰ τῶν κάτωθεν β΄· δὶς οὖν ε΄ γίνονται ι΄. ἕνωσον καὶ τὸ τζάκισμα, τουτέστι τὰ γ΄, ἅπερ ἔθηκας περὶ τὸ τέλος τῆς κεραίας γραμμῆς, καὶ γίνονται ὁμοῦ ιγ΄. ἄφελε καὶ ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ ἀπομένοσι ς΄. θὲς ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός· Ⓢ. ζήτει δὲ καὶ τὸν πρῶτον ἀριθμόν, ὃν ἔθηκας πρὸς τὸ διαμερίσαι ἐπὶ τῶν ε΄, τουτέστι τὰ πγ΄, καὶ ἄφελε καὶ ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄. ἄφελε οὖν ἅπαξ ζ΄ ἐκ τοῦ πρώτου γράμματος, ὅπερ ἐστὶ η΄, καὶ ἀπομένει α΄. τὸ δὲ α΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς γράμματος οὕτως κείμενα α γ΄ δηλῶσι ιγ΄· ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι πάλιν ς΄. θὲς καὶ ταῦτα ἐντὸς κύκλου· Ⓢ. καὶ ἰδοὺ ἐγένοντο αἱ δύο μαρτυρίαι τούτων ἴσαι καὶ ὅμοιαι, ἔχουσα ἑκάστη ἐντὸς κύκλου ἀνὰ ς΄. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ μαρτυρία, ὅτι ἐγένετο καλῶς ὁ τούτων διαμερισμός. εἰ δὲ ἡ μὲν εἶχε ς΄, ἡ δὲ ἄλλον τινὰ ἀριθμόν, οὐκ ἂν ἐγένετο καλῶς ὁ τούτων διαμερισμός.

κε ωις΄ μετὰ τῶν ς΄ διαμεριζόμενα

Θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ωις΄, κάτωθεν δὲ τοῦ πρώτου γράμματος, ὅπερ ἐστὶ η΄, θὲς τὸν μεριστήν, τουτέστι τὰ ς΄. δύνασαι γὰρ ἀφελεῖν τὰ ς΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν η΄. ἄφελε οὖν ἅπαξ τὸν μεριστήν, ὅς ἐστι ς΄, ἐκ τῶν ἄνωθεν η΄ καὶ θὲς κάτωθεν τῶν η΄ καὶ τῶν ς΄ α΄ πρὸς δήλωσιν, ὅτι ἅπαξ ἐχώρεσαν τὰ ς΄ πρὸς τὰ η΄. περισσεύοσι καὶ β΄. θὲς τὰ β΄ ἄνωθεν τῶν η΄, ὀβέλισον δὲ καὶ τὰ η΄ καὶ τὰ ς΄ τὸν μεριστήν. θὲς οὖν πάλιν ἕτερον μεριστήν, ς΄ δηλονότι, κάτωθεν τοῦ α΄, ὅπερ δηλοῖ δέκα. τὰ β΄ δέ, ἅπερ ἔθηκας ἄνωθεν τῶν η΄, μετὰ τοῦ α΄, ὅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, τῶν ς΄ δηλονότι, οὕτως κείμενα β α΄ δηλῶσι κα΄. ‖ ἄφελε οὖν τὰ ς΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστής, ὁσάκις ἂν χωρῶσι, ἐπὶ τῶν ἄνωθεν κα΄· τρὶς οὖν ς΄ γίνονται ιη΄. θὲς κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, ὅς ἐστι ς΄, γ΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι τρὶς ἐχώρεσαν τὰ ς΄ πρὸς τὰ κα΄· τρὶς γὰρ ς΄ γίνονται ιη΄, περισσεύοσι καὶ γ΄ μέχρι τῶν κα΄. θὲς ἄνωθεν τῶν ς΄ καὶ τοῦ α΄ τὰ γ΄, ἅπερ περισσεύοσι. ὀβέλισον δὲ τὰ β΄, ἅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῶν η΄ καὶ δηλῶσι κ΄, ὡσαύτως ὀβέλισον καὶ τὸ α΄, ὅπερ ἐστὶ εἰς τόπον δεκάδος καὶ δηλοῖ δέκα, καὶ



f. 23r

τὰ κάτωθεν τούτου ς΄, ἅπερ ἐστὶ δεύτερος μεριστής. πρόβηθι οὖν δύο γράμματα καὶ θὲς εἰς τὸν τῆς μονάδος τόπον κάτωθεν τῶν ς΄ ἕτερον τρίτον μεριστήν, τουτέστι πάλιν ς΄. ἔστι οὖν ἄνωθεν τοῦ α΄ κείμενα γ΄ ἀσημείωτα, ἔστι καὶ ἄνωθεν τῶν ς΄, τοῦ τρίτου μεριστοῦ, πάλιν ς΄. τὰ ἄνωθεν οὖν γ΄ εἰς τόπον δεκάδος ἀπὸ τοῦ τρίτου μεριστοῦ λαμβανόμενα δηλῶσι λ΄, τὰ δὲ ς΄, ἅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῶν ς΄, μετὰ τῶν γ΄, ὧν δηλῶσι λ΄, οὕτως κείμενα γ ς΄ δηλῶσι λς΄. ἄφελε ταῦτα, ὁσάκις ἂν χωρῶσι, ἐπὶ τῶν ς΄· ς΄κις οὖν ς΄ γίνονται λς΄ καὶ ἀπομένει υ΄. θὲς οὖν κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τῶν ς΄, τουτέστι τοῦ τρίτου μεριστοῦ τοῦ εἰς τόπον μονάδος εὑρισκομένου, ς΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι ς΄κις ἐχώρεσαν τὰ ς΄, ὁ μεριστής, εἰς τὰ λς΄. ὀβέλισον δὲ τὰ γ΄, ἅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τοῦ α΄ καὶ δηλῶσι λ΄· ὀβέλισον δὲ καὶ τὰ ς΄ καὶ τὰ κάτωθεν ς΄, ἅπερ ἐστὶ τρίτος μεριστής. θὲς οὖν ἄνωθεν κεραίας τινὸς γραμμῆς υ΄, κάτωθεν δὲ ταύτης τὸν μεριστήν, τουτέστι ς΄. ἔχεις οὖν τζάκισμα ἀντὶ ἄλλης τινὸς ψήφου υ΄· οὐδὲ γὰρ περισσεύει τι ἐκ τῶν ωις΄ ὥστε ἐναπομεῖναι τζάκισμα, ἀλλὰ συνελήφθησαν πάντα καὶ ἐγένοντο μέρη ρλς΄, ἕκαστον μέρος τῶν ρλς΄ ἀνὰ ς΄. ς΄κις γὰρ ρλς΄ ωις΄ γίνονται.

ὥσπερ γὰρ διαμεριζόμενα τὰ ωις΄ μετὰ τῶν ς΄ γίνεται ὁ τούτων τέλειος διαμερισμὸς ρλς΄, οὕτως πάλιν πολλ(α)πλασιαζόμενα τὰ ρλς΄ μετὰ τῶν ς΄ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς εἰς τὴν προτέραν πάλιν ἀποκατάστασιν, τουτέστι ωις΄. ἐὰν γὰρ διαμερίσῃς ρ΄ μετὰ τῶν δ΄, γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κε΄. πολλ(α)πλασιαζόμενα δὲ τὰ κε΄ μετὰ τῶν δ΄ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς πάλιν ρ΄. καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) πολλ(α)πλασιαζόμενα τὰ κε΄ μετὰ τῶν δ΄ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ρ΄, μεριζόμενα δὲ τὰ ρ΄ μετὰ τῶν δ΄ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς πάλιν κε΄. ὁ γὰρ μεριστὴς γενόμενος πολλ(α)πλασιαστὴς τοῦ ἐξελθόντος τελείου διαμερισμοῦ ἐπιστρέφει πάλιν τὸν διαμερισμὸν εἰς τὴν προτέραν ἀποκατάστασιν, ὥσπερ καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) γενόμενος ὁ πολλ(α)πλασιαστὴς μεριστὴς τῶν πολλ(α)πλασιασθέντων ἐπιστρέφει τὸν πολλ(α)πλασιασμὸν εἰς τὴν προτέραν ἀποκατάστασιν.

κς Περὶ τῆς τούτων μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως

Θὲς τὸ τζάκισμα, ὅπερ ἔθηκας ἄνωθεν τῶν ς΄, ὧν ἔχεις μεριστήν, τουτέστι τὸ υ΄, περὶ τὸ τέλος τῆς ἑτέρας κεραίας γραμμῆς, ἄνωθεν δὲ ταύτης θὲς τὸν μεριστήν, τουτέστι τὰ ς΄. λάβε δὲ τὰ δύο πρῶτα γράμματα τοῦ τελείου διαμερισμοῦ τῶν ρλς΄ δηλονότι, ἅπερ οὕτως κείμενα α γ΄ δηλῶσι ιγ΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύουσι ς΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τρίτου γράμματος, ἅπερ οὕτως κείμενα ς ς΄ δηλῶσι ξς΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύουσι γ΄· θὲς ταῦτα κάτωθεν τῶν ς΄ καὶ τῆς ὧν ἔθηκας ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν ς΄ μετὰ τῶν κάτωθεν γ΄· τρὶς οὖν ς΄ γίνονται ιη΄. ἕνωσον καὶ τὸ υ΄, ὅπερ ἐστὶ περὶ τὸ τέλος τῆς κεραίας γραμμῆς, καὶ, ἐπεὶ υ΄ ἐστί, πάλιν ἐστὶ ιη΄. ἄφελε καὶ ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ ἀπομένουσι δ΄. θὲς ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός· (δ). λάβε δὲ καὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, οὗ ἐμέρισας, τουτέστι τῶν ωις΄, ὅπερ ἐστὶ η΄, καὶ ἄφελε ἅπαξ ζ΄ ἐξ αὐτοῦ, καὶ ἀπομένει α΄. ἕνωσον δὲ τοῦτο μετὰ τοῦ ἐφεξῆς δευτέρου γράμματος, ἅπερ οὕτως κείμενα α α΄ δηλῶσι ια΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄

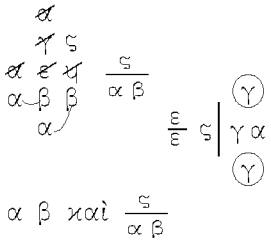
---

23 πολλ(α)πλασιαστὴς] **hic et ubique** πολλ(α)πλασιασθὴς **C** 33/34 κάτωθεν τῶν ς΄ καὶ τῆς ὧν ἔθηκας ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς] **textus corruptus hoc modo corrigi potest:** κάτωθεν τῶν ς΄, ὧν ἔθηκας ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, καὶ τῆς κεραίας γραμμῆς

καὶ ἀπομένοσι δ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τρίτου γράμματος, ἅπερ οὕτως κείμενα δ ς΄ δηλῶσι μς΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι δ΄. θὲς ταῦτα ἐντὸς κύκλου· (δ). καὶ ἰδοὺ ἐγένοντο αἱ δύο μαρτυρίαι αὐτῶν ὅμοιαι ἔχουσα ἑκάστη ἐντὸς κύκλου ἀνὰ δ΄. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς ὁ τέλειος διαμερισμός, τουτέστι τὰ ρλς΄.

κζ ρν΄ μετὰ τῶν ιβ΄ διαμεριζόμενα

Θὲς τὰ μὲν ρν΄ ἄνωθεν, τὰ ιβ΄ δέ, ἅπερ ἐστὶ μεριστής, – θὲς ταῦτα κάτωθεν τῶν πρώτων δύο γραμμάτων, ὧν δηλῶσι ιε΄. ἔστι δ᾽ ὅμως ρν΄ μετὰ τοῦ ι΄ οὕτως κείμενα α ε ι΄· χωρῶσι γὰρ ἀφαιρεθῆναι ὁ μεριστής, τὰ ιβ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτῶν ιε΄, διὸ καὶ κάτωθεν τῶν ιε΄ τὰ ιβ΄ ἔθηκας. ἄφελε οὖν τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ α΄, ἐκ τοῦ ἄνωθεν α΄, ὁσάκις ἂν χωρῇ· χωρεῖ δὲ ἅπαξ τὸ α΄ πρὸς τὸ ἄνωθεν α΄. θὲς οὖν κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν α΄ πρὸς δήλωσιν, ὅτι ἅπαξ ἀφεῖλες τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ α΄, ἐκ [τῶν] τοῦ πρώτου γράμματος τῶν ρν΄. ὀβέλισον δὲ τὸ ἄνωθεν πρῶτον γράμμα, ὅπερ ἐστὶ α΄ καὶ δηλοῖ ρ΄. ὀβέλισον καὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ α΄· ἔστι γὰρ νῦν τὰ δύο ἄλφα ἀργά. ἄφελε δὲ ἅπαξ τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ β΄, ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτοῦ ε΄. ὥσπερ γὰρ ἀφεῖλες ἅπαξ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, οὕτως καὶ τὸ δεύτερον γράμμα αὐτοῦ, ὅπερ ἐστὶ β΄, – ἄφελε τοῦτο ἅπαξ ἐκ τῶν ἄνωθεν ε΄· ἅπαξ οὖν β΄ πάλ(ιν) ἐστὶ β΄, περισσεύοσι καὶ γ΄ μέχρι τῶν ε΄. θὲς οὖν τὰ γ΄, ἅπερ περισσεύοσι, ἄνωθεν τῶν ε΄. ὀβέλισον δὲ τὰ ε΄ καὶ τὰ κάτωθεν τούτων β΄, ἅπερ ἐστὶ δεύτερον γράμμα τοῦ πρώτου μεριστοῦ. καὶ ἰδοὺ ἐτέλεσας τὸν πρῶτον μεριστήν.



α β καὶ $\frac{\varsigma}{\alpha\,\beta}$

πρόβηθι οὖν καὶ θὲς δεύτερον μεριστήν, τουτέστι πάλιν ιβ΄. ἄφελε οὖν τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ ‖ δευτέρου μεριστοῦ, τουτέστι τὸ α΄, ἐκ τῶν ἄνωθεν γ΄, ὧν ἔθηκας ἄνωθεν τῶν ε΄, ὁσάκις ἂν χωρῇ· ἴσως οὖν τὸ α΄ χωρεῖ τρὶς εἰς τὰ γ΄. ἂν γοῦν τὸ α΄ ἀφέλῃς τρίς, ἔλαβες ἐξακεραίου τὰ γ΄ καὶ οὐκ ἐναπελείφθη τι, ὥστε ἔχειν ἀφελέσθαι καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ β΄. ἄφελε οὖν τὸ α΄, ὅπερ ἐστὶ πρῶτον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, δὶς ἐκ τῶν ἄνωθεν τῶν ε΄ γ΄. ἀπομένει καὶ α΄. θὲς κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τοῦ πρώτου γράμματος τοῦ δευτέρου μεριστοῦ β΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι δὶς ἀφεῖλες τὸ α΄ ἐκ τῶν γ΄. ἄνωθεν δὲ τῶν γ΄ θὲς τὸ α΄, ὅπερ περισσεύει ἐκ τῶν γ΄· ἀφελόμενος γὰρ β΄ περισσεύει α΄. ὀβέλισον δὲ τὰ γ΄, ὀβέλισον δὲ καὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, τὸ α΄ δηλονότι. τὸ δὲ α΄, ὅπερ ἔθηκας ἄνωθεν τῶν γ΄, μετὰ τοῦ ι΄, ὅπερ ἐστὶ τελευταῖον τῶν τριῶν, ὧν δηλῶσι ρν΄, οὕτως κείμενα α ι΄ δηλῶσι δέκα. ἄφελ(ε) οὖν τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, τὰ β΄ δηλονότι, ἅπερ κάτωθεν τοῦ ι΄ εἰσι κείμενα, δὶς ἐκ τῶν α ι΄, καθὼς ἀφεῖλες δὶς καὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ αὐτοῦ μεριστοῦ, τουτέστι τὸ α΄, ἐκ τῶν γ΄. ὁσάκις γὰρ ἀφεῖλες τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, τοσαυτάκις καὶ τὸ δεύτερον γράμμα ἀφελεῖν ὀφείλεις. ἐπεὶ δὲ τὸ πρῶτον ἀφεῖλες δὶς ἐκ τῶν γ΄, ἄφελε δὶς καὶ τὸ δεύτερον, ὅπερ ἐστὶ β΄, ἐκ τῶν ἄνωθεν α ι΄· δὶς οὖν β΄ γίνονται δ΄, περισσεύοσι καὶ ς΄ μέχρι τῶν α ι΄. θὲς ἄνωθεν τοῦ ι΄ τὰ ς΄, ἅπερ περισσεύοσι f. 23^{v}

15/16 ὀβέλισον] ὀφέλησων **C** 28 ἐξακεραίου] ἐξὰκαὶρέου **C** οὐκ ἐναπελείφθη] οὐ καὶ ναπελῆφθἰ **C**

ἐκ τῶν α μ΄. ὀβέλισον δὲ τὸ α΄, ὅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῶν γ΄ καὶ δηλοῖ α μ΄. ὀβέλισον δὲ καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, τὰ β΄ δηλονότι, ἅπερ κάτωθεν τοῦ μ΄ εἰσι κείμενα.

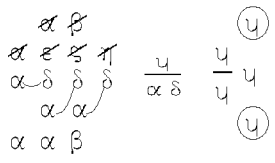
τὰ ς΄ δέ, ἅπερ ἔθηκας ἄνωθεν τοῦ μ΄ – ποίησόν τινα μετρίαν ἐγκάρσιον γραμμὴν καὶ θὲς ταῦτα ἄνωθεν· ἔστι γὰρ τζάκισμα. κάτωθεν δὲ τῶν ς΄ καὶ τῆς κεραίας γραμμῆς θὲς τὸν μεριστήν, τουτέστι τὰ ιβ΄. καὶ ἰδοὺ εὕρες, ὅτι τὰ ρν΄ μετὰ τῶν ιβ΄ διαμεριζόμενα γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς ιβ΄, ἀπομένει καὶ τζάκισμα ς΄. ἔχοσι δὲ λόγον τὰ ς΄ τὸ τζάκισμα πρὸς τὰ ιβ΄ τὸν μεριστὴν μισόν. καὶ ἰδοὺ ἐγένετο ὁ τέλειος διαμερισμὸς ιβ΄ς″. ἕκαστον δὲ τῶν ιβ΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ρν΄ πάλιν ιβ΄, καθὼς καὶ ὁ μεριστής ἐστι ιβ΄. ὅσος γάρ ἐστι ὁ μεριστὴς ὁ μερίζων, ὃν ἂν ἀριθμὸν ζητῇς διαμερίσαι, τοσαῦτα οἰκειοῦται ἐκ τοῦ ὅλου σώματος ἕκαστον μέρος τοῦ ἐξελθόντος τελείου διαμερισμοῦ· ὁ γὰρ τέλειος νῦν διαμερισμὸς τῶν ρν΄ μετὰ τῶν ιβ΄ διαμεριζόμενος ἐγένετο ιβ΄ς″. καθὼς οὖν εἴπομεν – ἕκαστον μέρος τῶν ιβ΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ρν΄ ιβ΄ –, καθώς ἐστι καὶ ὁ μεριστὴς ιβ΄· ιβ΄κις γὰρ ιβ΄ γίνονται ρμδ΄, λείπονται καὶ ς΄ μέχρι τῶν ρν΄. ἐπεὶ δὲ ἕκαστον τῶν ιβ΄ οἰκειοῦται ιβ΄, ἃ καὶ γίνονται ρμδ΄, τὸ ς″ οἰκειοῦται ς΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ρμδ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ρν΄. καὶ ἰδοὺ ἕκαστον τῶν ιβ΄ οἰκειοῦται ιβ΄, τουτέστι τὰ ιβ΄ς″ ὁμοῦ οἰκειοῦνται ρν΄.

κη Περὶ τῆς τούτων μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως

Θὲς τὸ τζάκισμα τὰ ς΄, ἅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, περὶ τὸ τέλος τῆς ἑτέρας κεραίας γραμμῆς. μέρισον δὲ ἐπὶ τῶν ζ΄ τὰ ιβ΄, τὸν μεριστήν, τὰ ὄντα κάτωθεν τοῦ τζακίσματος, τῶν ς΄, καὶ περισσεύοσι ε΄· θὲς ταῦτα ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς. μέρισον δὲ ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ τὸν τέλειον διαμερισμόν, ὅς ἐστι ιβ΄, καὶ περισσεύοσι πάλιν ε΄· θὲς ταῦτα κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν ε΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ε΄· ε΄κις οὖν ε΄ γίνονται κε΄. ἕνωσον καὶ τὰ ς΄ τοῦ τζακίσματος τὰ περὶ τὸ τέλος ὄντα τῆς κεραίας γραμμῆς καὶ γίνονται ὁμοῦ λα΄. ἄφελε καὶ ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι γ΄. θὲς ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός· (γ). λάβε δὲ τὰ πρῶτα δύο γράμμα<τα> τῶν ρν΄, ὧν ἐμέρισας μετὰ τῶν ιβ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα α ε΄ δηλῶσι ιε΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει καὶ α΄. τὸ δὲ α΄ τοῦτο μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τρίτου γράμματος οὕτως κείμενα α μ΄ δηλῶσι δέκα. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι καὶ γ΄. θὲς ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός· (γ). καὶ ἰδοὺ ἐγένοντο αἱ δύο μαρτυρίαι αὐτῶν ὅμοιαι, ἔχουσα ἑκάστη ἀνὰ γ΄. καὶ ἔστι ἀληθὴς ὁ ἐξελθὼν τέλειος διαμερισμός, τὰ ιβ΄ς″.

κθ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι διαμερίσαι ὑπέρπυρα ,αφξη΄ εἰς συντρόφους ιδ΄ καὶ εἰδέναι, πόσα οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν ἐκ τῶν ,αφξη΄ ὑπερπύρων

Ἔστω ὅτι σύντροφοί τινες ιδ΄ ἔχοσι διαμερίσασθαι ὑπέρπυρα ,αφξη΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, τί περιέρχεται ἕκαστον τῶν ιδ΄ συντρόφων οἰκεῖον μέρος ἐκ τῶν ,αφξη΄ ὑπερπύρων. θὲς οὖν τὰ μὲν ,αφξη΄ ὑπέρπυρα ἄνωθεν, κάτωθεν δὲ κατ᾽ εὐθεῖαν τῶν πρώτων δύο γραμμάτων θὲς τοὺς ιδ΄ συντρόφους, καὶ γὰρ οἱ ιδ΄ σύντροφοι ἐλάττονές εἰσι τῶν ἄνωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν δύο γραμμάτων, ὧν δηλῶσι ιε΄. ἄφελε οὖν τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ α΄, ἐκ τοῦ ἄνωθεν α΄, ὁσάκις ἂν χωρῇ· χωρεῖ δὲ ἅπαξ. θὲς



---

4 ἐγκάρσιον γραμμὴν] sic C 34/35 ὑπέρπυρα, ὑπερπύρων etc. ubique notata ,, ,, etc.

οὖν κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν α΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι ἅπαξ ἀφεῖλες τὸ α΄ ἐκ τοῦ ἄνωθεν α΄. ὀβέλισον δὲ τὸ ἄνωθεν α΄, ὅπερ δηλοῖ ὑπέρπυρα ,α΄. ὀβέλισον δὲ καὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ α΄ καὶ δηλοῖ δέκα. τὸ δεύτερον δὲ γράμμα τοῦ μεριστοῦ δηλοῖ δ΄. καθὼς οὖν ἀφεῖλες τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ ἅπαξ, οὕτως καὶ τὸ δεύτερον, ὅπερ ἐστὶ δ΄, ἅπαξ ἄφελε ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτο<ῦ> ε΄. ἴσως γὰρ οὐδὲ πλεῖο τοῦ ἅπαξ ἔχεις ἀφελεῖν τὰ δ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτῶν ε΄. εἰ δὲ καὶ πολλ(ά)κις ἀφελεῖν εἶχες τὰ δ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτῶν, οὐκ ἂν ἀφεῖλες πλέον τοῦ ἅπαξ, ἐπεὶ τὸ πρῶτον γράμμα ἅπαξ ἀφεῖλες αὐτό. ἀφελόμενος δὲ ἅπαξ δ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτῶν ε΄ περισσεύει καὶ α΄. θὲς τὸ α΄, ὅπερ περισσεύει ἐκ τῶν ε΄, ἄνωθεν τῶν ε΄. ὀβέλισον δὲ τὰ ε΄, ὀβέλισον δὲ καὶ τὸ δεύτερον || γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ δ΄. καὶ ἰδοὺ ἐτέλεσας τὸν πρῶτον μεριστήν. f. 24r

πρόβηθι οὖν πάλιν καὶ θὲς ἀκολούθως ἕτερον μεριστήν, τουτέστι τοὺς ιδ΄ πάλιν συντρόφους. ἄνωθεν οὖν κατ᾽ εὐθεῖαν τοῦ πρώτου γράμματος τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, ταὐτὸν γὰρ εἰπεῖν ἄνωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τῶν ε΄, ἔστι τὸ παρὸν γράμμα α΄ καὶ δηλοῖ ἕνα, ἐπεὶ ἄνωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τοῦ πρώτου γράμματος τοῦ δευτέρου μεριστοῦ ἐστι κείμενον. ἄφελε οὖν ἅπαξ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, τουτέστι τὸ α΄, ἐκ τοῦ ἄνωθεν τῶν ε΄ εὑρισκομένου α΄ καὶ ἀπομένει οὐδέν. θὲς α΄ κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τοῦ πρώτου γράμματος τοῦ δευτέρου μεριστοῦ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι ἅπαξ ἀφεῖλες αὐτὸ ἐκ τοῦ ἄνωθεν α΄. ὀβέλισον δὲ τὸ α΄, ὅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῶν ε΄. ὀβέλισον δὲ καὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ. τὸ δεύτερον δὲ γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ δ΄ – ἄφελε τοῦτο ἅπαξ, οὐχ ὅτι χωρεῖ ἅπαξ ἀφαιρεθῆναι ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτοῦ ς΄, ἀλλ᾽ ὅτι ἅπαξ ἀφεῖλες καὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ. ἀφελόμενος δὲ ἅπαξ δ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν ς΄ περισσεύοσι καὶ β΄. θὲς ἄνωθεν τῶν ς΄ τὰ β΄, ἅπερ περισσεύοσι. ὀβέλισον δὲ τὰ ς΄, ὀβέλισον δὲ καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, τουτέστι τὰ δ΄. καὶ ἰδοὺ ἐτέλεσας καὶ τὸν δεύτερον μεριστήν.

πρόβηθι πάλιν ἕτερον γράμμα καὶ θὲς τρίτον μεριστὴν ἔμπροσθεν, τουτέστι πάλιν τοὺς ιδ΄ συντρόφους. τὸ πρῶτον οὖν γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ ἐστι α΄. ἄφελε οὖν τοῦτο τὸ α΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτοῦ κατ᾽ εὐθεῖαν β΄, ὧν ἔθηκας ἄνωθεν τῶν ς΄, ὁσάκις ἂν χωρῇ· χωρεῖ δὲ τὸ α΄ δὶς εἰς τὰ β΄. καὶ θὲς κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν αὐτῶν ἔμπροσθεν τῶν δύο ἄλφα β΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι δὶς ἀφεῖλες τὸ α΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν β΄. ὀβέλισον δὲ τὰ ἄνωθεν τῶν ς΄ κείμενα β΄, ὀβέλισον καὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ, τουτέστι τὸ α΄. τὸ ἔσχατον δὲ γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ, δηλονότι τὰ δ΄, – ἄνωθεν τούτου κεῖνται η΄. ἐπεὶ δὲ δὶς ἀφεῖλες τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ, διὸ καὶ β΄ ἔθηκας κάτωθεν, τοσαυτάκις ἀφελεῖν ὀφείλεις καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ, δηλονότι τὰ δ΄, ἐκ τῶν ἄνωθεν η΄, οὐχ ὅτι δὶς μόνον χωρῶσι τὰ δ΄ πρὸς τὰ η΄, ἀλλ᾽ ὅτι εἰ καὶ πολλ(ά)κις ἀφελεῖν εἶχες τὰ δ΄ ἐκ τῶν η΄, οὐκ ἂν ἀφεῖλες πλεῖο τῶν δίς. ὁσάκις γὰρ ἀφεῖλες τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, κἄντε ἅπαξ κἄντε δὶς ἢ τρὶς ἢ δ΄κις καὶ ἑξῆς ὁμοίως, τοσαυτάκις ἀφελεῖν ὀφείλεις καὶ τὰ λοιπὰ γράμματα τοῦ αὐτοῦ μεριστοῦ. νῦν δέ, ἐπεὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ ἀφεῖλες δίς, διὸ καὶ β΄ κάτωθεν ἔθηκας, ἄφελε καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ, τὰ δ΄ δηλονότι, δὶς ἐκ τῶν ἄνωθεν η΄, καὶ ἀπομένει ι΄. ὀβέλισον τὰ η΄, ὀβέλισον δὲ καὶ τὰ δ΄, τὸ δεύτερον δηλονότι γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ. θὲς οὖν ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς ι΄ ἀντὶ τζακίσματος, ἐπεὶ τζάκισμα

---

5 ἐστὶ] ἰ **C** 6.38 πλεῖο] πλιω **C** 22.29 αὐτοῦ] αὐτο **C**

οὐκ ἀπέμεινε. θὲς δὲ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς τὸν μεριστήν, τουτέστι τοὺς ιδ΄ συντρόφους. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ἕκαστος τῶν ιδ΄ συντρόφων οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,αφξη΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα ριβ΄.

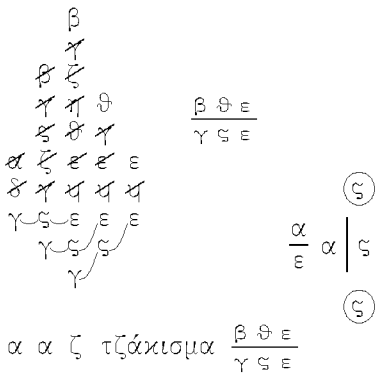
πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ριβ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ιδ΄ συντρόφων· ιδ΄κις οὖν ριβ΄ πάλιν γίνονται ὑπέρπυρα ,αφξη΄, ὡς τὸ πρότερον. μεριζόμενα δὲ πάλιν τὰ ,αφξη΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ριβ΄ ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς εὑρεθήσεται ιδ΄. ὥσπερ γὰρ τὰ ,αφξη΄ μετὰ τῶν ιδ΄ διαμεριζόμενα ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς ἐγένετο ριβ΄, οὕτως καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) μετὰ τῶν ριβ΄ διαμεριζόμενα τὰ ,αφξη΄ ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς εὑρεθήσεται ιδ΄. μεριζόμενα δὲ τὰ ,αφξη΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ιδ΄ συντρόφων ἐγένοντο μέρη ιδ΄, ἕκαστον μέρος τῶν ιδ΄ ἀνὰ ριβ΄· ριβ΄κις γὰρ ἐχώρεσαν τὰ ιδ΄ πρὸς τὰ ,αφξη΄ ὑπέρπυρα. ὁσάκις δὲ ἐχώρεσαν οἱ ιδ΄ σύντροφοι εἰς τὰ ,αφξη΄ ὑπέρπυρα, τοσαῦτα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν ιδ΄ συντρόφων. ἐχώρεσαν δὲ οἱ ιδ΄ σύντροφοι εἰς τὰ ,αφξη΄ ὑπέρπυρα ριβ΄κις, διὸ καὶ ἕκαστος αὐτῶν οἰκειοῦται ὑπέρπυρα ριβ΄. τζάκισμα δὲ οὐκ ἀπέμεινε τὸ τυχόν, ἀλλὰ συνελήφθησαν τὰ καθόλου ὑπέρπυρα εἰς τοὺς ιδ΄ συντρόφους καὶ ἀπέμεινε τζάκισμα ι΄, διὸ καὶ ἔθηκας ἄνωθεν μὲν τῆς κεραίας γραμμῆς ι΄, κάτωθεν δὲ τοὺς ιδ΄ συντρόφους, πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι οὐκ ἀπέμεινέ τι ἐκ τῶν ,αφξη΄ ὑπερπύρων.

λ Περὶ τῆς τούτων μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως

Θὲς τὸ τζάκισμα, ὅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς καὶ δηλοῖ ι΄, περὶ τὸ τέλος τῆς ἑτέρας κεραίας γραμμῆς. τὰ δύο δὲ τοῦ μεριστοῦ γράμματα δηλῶσι ιδ΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ ἀπομένει ι΄. θὲς ι΄ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς. τὰ δύο δὲ γράμματα τοῦ τελείου διαμερισμοῦ τῶν ριβ΄ οὕτως κείμενα α α΄ δηλῶσι ια΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ ἀπομένουσι δ΄. ταῦτα τὰ δ΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τρίτου γράμματος οὕτως κείμενα δ β΄ δηλῶσι μβ΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει ι΄. θὲς κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς ι΄. καὶ ἐπεὶ τὰ τρία γράμματα τὰ περὶ τὴν κεραίαν γραμμὴν κείμενα δηλῶσι ι΄, ἡ μαρτυρία τούτων πάλιν ἐστὶ ι΄. θὲς οὖν ἐντὸς κύκλου (ι). τὰ δύο δὲ πρῶτα γράμματα τῶν ,αφξη΄ ὑπερπύρων οὕτως κείμενα α ε΄ δηλῶσι ιε΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει α΄. τοῦτο τὸ α΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τρίτου γράμματος οὕτως κείμενα α ς΄ δηλῶσι ις΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύουσι β΄. ταῦτα τὰ β΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τετάρτου γράμματος οὕτως κείμενα β η΄ δηλῶσι κη΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει ι΄. θὲς ἐντὸς κύκλου (ι). καὶ ἰδοὺ ἐγένοντο αἱ δύο μαρτυρίαι αὐτῶν ὅμοιαι ἔχουσα ἑκάστη ἐντὸς κύκλου ι΄. καὶ ἔστι ἀληθὴς ὁ ἐξελθὼν τέλειος διαμερισμός, τουτέστι τὰ ριβ΄. ‖ f. 24[v]

λα Περὶ τοῦ πῶς ἔστι διαμερίσαι μγ΄ χιλιάδας ἡμέρας μετὰ τῶν τξε΄ ἡμερῶν ἑνὸς χρόνου καὶ εἰδέναι, πόσοι χρόνοι γίνονται

Θὲς τὰς μγ΄ χιλ(ι)άδας τὰς ἡμέρας ἄνωθεν, κάτωθεν δὲ τούτων θὲς ἑνὸς χρό[υ]νου ἡμέρας, τουτέστι τξε΄. ἔστι οὖν αὗται αἱ τξε΄ ἡμέραι ὁ μεριστής. τὸ πρῶτον οὖν γράμμα τοῦ μεριστοῦ ἐστὶ γ΄. ἄφελε δὲ τοῦτο ἐκ τῶν ἄνωθεν δ΄, ὁσάκις ἂν χωρῇ· χωρεῖ δὲ ἅπαξ. θὲς κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τοῦ πρώτου γράμματος τοῦ μεριστοῦ α΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι ἅπαξ ἀφεῖλες τὰ γ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν δ΄. περισσεύει καὶ α΄. θὲς τοῦτο ἄνωθεν τῶν δ΄. ὀβέλισον δὲ τὰ δ΄, ὀβέλισον δὲ καὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ γ΄. τὸ δεύτερον δὲ γράμμα τοῦ μεριστοῦ ἐστι ς΄. τὸ ἄνωθεν οὖν τῶν δ΄ κείμενον α΄ δηλοῖ ι΄· τὰ γὰρ ς΄ ἐστὶ εἰς τόπον δεύτερον. ἄφελε οὖν τὰ ς΄,



ἅπερ ἐστὶ δεύτερον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ἅπαξ ἐκ τῶν ι΄, καθὼς ἅπα<ξ> ἀφεῖλες καὶ τὸ πρῶτον γράμμα. ἔχεις οὖν ἅπαξ ς΄. πρό<σ>θες καὶ δ΄ μέχρι τῶν ι΄. ὀβέλισον δὲ τὸ α΄, ὅπ(ερ) ἐστὶ ἄνωθεν τῶν δ΄ καὶ δηλοῖ ι΄. ἐπεὶ οὖν προσέθηκας δ΄ εἰς τὸ ἅπαξ ς΄, ὥστε γενέσθαι ι΄, ἕνωσον ταῦτα τὰ δ΄ μετὰ τῶν γ΄, ὧν ἐστι ἄνωθεν τῶν ς΄, καὶ γίνονται ζ΄. θὲς οὖν ζ΄ ἄνωθεν τῶν γ΄. ὀβέλισον δὲ τὰ γ΄ τὰ κάτωθεν τῶν ζ΄, ὀβέλισον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ πρώτου μεριστοῦ, τὰ ς΄ δηλονότι. τὸ τρίτον δὲ γράμμα τοῦ πρώτου μεριστοῦ ἐστι ε΄. ἄφελε καὶ ταῦτα τὰ ε΄ ἅπαξ, καθὼς ἀφεῖλες ἅπαξ καὶ τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον γράμμα, τὰ γ΄ καὶ ς΄ δηλονότι. ἄνωθεν οὖν τῶν ε΄ ἐστὶ ψ΄· οὐκ ἔχεις οὖν ἀφελεῖν τὰ ε΄ ἐκ τὸ ἄνωθεν ψ΄. τὰ ἄνωθεν οὖν τῶν γ΄ κείμενα ζ΄ δηλῶσι ο΄, ἐπεὶ τὸ ε΄ ἐστὶ εἰς τόπον δεύτερον. ἄφελε οὖν ἐκ τῶν ο΄ δέκα καὶ ἀπομένοσι ξ΄. θὲς οὖν ἄνωθεν τῶν ζ΄ ς΄ ἀντὶ τῶν ξ΄. ὀβέλισον δὲ τὰ ζ΄. ἄφελε οὖν ἐκ τῶν δέκα, ὧν ἀφεῖλες ἐκ τῶν ο΄, ἅπαξ τὰ ε΄· περισσεύοσι καὶ ε΄ μέχρι τῶν δέκα. θὲς οὖν ἄνωθεν τοῦ ψ΄ τὰ ε΄, ἅπερ περισσεύοσι ἐκ τῶν δέκα. ὀβέλισον δὲ τὸ ψ΄ καὶ τὰ κάτωθεν αὐτοῦ ε΄, ἅπερ ἐστὶ τρίτον γράμμα τοῦ πρώτου μεριστοῦ. καὶ ἰδοὺ ἐτέλεσας τὸν πρῶτον μεριστήν.

α α ζ τζάκισμα $\frac{\beta\ \vartheta\ \varepsilon}{\gamma\ \varsigma\ \varepsilon}$

πρόβηθι οὖν ἕνα γράμμα καὶ θὲς ἕτερον μεριστήν, τουτέστι τὰς τξε΄ ἡμέρας. τὸ πρῶτον οὖν γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ ἐστι γ΄, ἄνωθεν δὲ τῶν ζ΄ εἰσὶ ς΄, καὶ χωρεῖ τὰ γ΄ δὶς εἰς τὰ ς΄. πλὴν ἐὰν ἀφέλῃς τὰ γ΄ δὶς ἐκ τῶν ς΄, ἀπομένει οὐδὲν καὶ οὐκ ἔχεις ἀφελεῖν τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ ς΄, δὶς ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτοῦ ε΄. ἄφελε οὖν τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ γ΄, ἅπαξ ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτῶν ς΄· περισσεύοσι καὶ γ΄ μέχρι τῶν ς΄. θὲς οὖν γ΄ ἄνωθεν τῶν ς΄. ὀβέλισον δὲ τὰ ς΄. κάτωθεν δὲ κατ᾽ εὐθεῖαν θὲς α΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι ἅπαξ ἀφεῖλες τὰ γ΄ ἐκ τῶν ς΄. ὀβέλισον δὲ καὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, τουτέστι τὰ γ΄. τὸ δεύτερον δὲ γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ ἐστι ς΄. οὐκ ἔχεις οὖν ἀφελεῖν ἅπαξ τὰ ς΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν τοῦ ψ΄ ὄντων ε΄. ἔστι δὲ ἄνωθεν τῶν ς΄ γ΄, δηλῶσι δὲ λ΄ ἐκ τοῦ δευτέρου γράμματος τοῦ δευτέρου μεριστοῦ. ἄφελε οὖν ἅπαξ ς΄ – πρόσθες καὶ δ΄, γίνονται δέκα. ὀβέλισον δὲ τὰ γ΄, ἅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῶν ς΄, καὶ θὲς ἄνωθεν τῶν γ΄ β΄. ἔχεις δὲ δ΄, ἅπερ ἐπερίσσευσαν ἐκ τῶν δέκα, ἔχεις καὶ ε΄ ἄνωθεν τοῦ ψ΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ϑ΄. θὲς οὖν ϑ΄ ἄνωθεν τῶν ε΄ καὶ ὀβέλισον τὰ ε΄. ὀβέλισον δὲ καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, τουτέστι τὰ ς΄. τὸ τρίτον δὲ γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ ἐστι ε΄, καὶ ἄφελε καὶ τοῦτο ἅπαξ. καὶ ἐπεὶ ἄνωθεν τούτου ἐστὶ ψ΄ – ἄνωθεν δὲ τῶν ε΄, ὧν ὀβέλισας, εἰσὶ κείμενα ϑ΄ καὶ δηλῶσι Ϛ΄, ἀφ᾽ οὗ τόπου ἵσταται τὸ τρίτον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ – οὐκ ἔχεις δὲ ἀφελεῖν ἅπαξ ε΄ ἐκ τοῦ ἄνωθεν ψ΄. ἄφελε ἅπαξ ε΄ – πρόσθες καὶ ε΄ καὶ γίνονται δέκα. ἄφελε οὖν ἐκ τῶν ϑ΄, ὧν δηλῶσι Ϛ΄, δέκα· ἀπομένοσι καὶ η΄. θὲς η΄ ἄνωθεν τῶν ϑ΄. ὀβέλισον δὲ τὰ ϑ΄, ὀβέλισον καὶ τὸ τρίτον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, τουτέστι τὰ ε΄. ὀβέλισον δὲ τὸ ψ΄, ὅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῶν ε΄. ἄνωθεν δὲ τοῦ ψ΄ θὲς τὰ ε΄, ἅπερ προσέθηκας καὶ ἐγένοντο δέκα, ἅπερ δέκα ἀφεῖλες ἐκ τῶν ϑ΄

---

14 ἐκ τὸ] **sic C** 25 αὐτοῦ] αὐτὸ **C** 29 οὐκ ἔχεις] οὐ καὶ χὴς **C** 30 ὄντων] ωντα **C** 37 ὀβέλισας] **pro** ὠβέλισας **C**

τῶν δηλώντων ϛ΄. καὶ ἰδοὺ ἐτέλεσας καὶ τὸν δεύτερον μεριστήν.
πρόβηθι οὖν πάλιν ἕνα γράμμα καὶ θὲς ἕτερον μεριστήν, τουτέστι τὰ τξε΄ ἡμέρας. τὸ πρῶτον οὖν γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ ἐστι γ΄, ἄνωθεν δὲ τούτων ἐστὶ δύο γράμματα οὕτως κείμενα $^{\beta}_{\eta}$ καὶ δηλῶσι κη΄. ἐὰν οὖν ἀφέλῃς τὰ γ΄, ἅπερ ἐστὶ πρῶτον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ, ὀκτάκις ἐκ τῶν ἄνωθεν κη΄ – η΄κις γ΄ γίνονται κδ΄, περισσεύοσι καὶ δ΄ μέχρι τῶν κη΄. τὰ δ΄ οὖν ταῦτα, ἅπερ περισσεύοσι, μετὰ τῶν ἐφεξῆς ε΄, ὧν ἄνωθέν ἐστι τοῦ δευτέρου ι΄, οὕτως κείμενα $^{\delta}_{\varepsilon}$ δηλῶσι με΄, καὶ ἐκ τῶν με΄ οὐ χωρεῖ ὀκτάκις ἀφαιρεθῆναι τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ ϛ΄. ὀκτάκις γὰρ ϛ΄ γίνονται μη΄ καὶ οὐ χωρεῖ ἀφαιρεθῆναι τὰ μη΄ ἐκ τῶν με΄. ἄφελε οὖν τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ, τὰ γ΄ δηλονότι, ζ΄κις ἐκ τῶν ἄνωθεν κη΄. ζ΄κις οὖν γ΄ γίνονται κα΄, περισσεύοσι καὶ ζ΄ μέχρι τῶν κη΄. καὶ ἐπεὶ ζ΄κις ἀφεῖλες τὰ γ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν κη΄, θὲς κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τῶν γ΄, ὅπερ ἐστὶ πρῶτον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ, ζ΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι ζ΄κις ‖ ἀφεῖλες τὰ γ΄ ἐκ f. 25^{r}
τῶν ἄνωθεν κη΄. τὰ δὲ ζ΄, ἅπερ περισσεύοσι ἐκ τῶν κη΄ – θὲς ταῦτα ἄνωθεν τῶν η΄. ὀβέλισον δὲ καὶ τὰ β΄, ἅπερ δηλῶσι κ΄, καὶ τὰ η΄, ἅπερ ἐστὶ κάτωθεν τῶν ζ΄. ὀβέλισον δὲ καὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ γ΄. τὸ δεύτερον δὲ γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ ἐστι ϛ΄, ἄνωθεν δὲ τούτων ἔστι δύο γράμματα οὕτως κείμενα $^{\zeta}_{\varepsilon}$ καὶ δηλῶσι οε΄. ἄφελε οὖν τὰ ϛ΄ ζ΄κις, καθὼς οὕτως ἀφεῖλες καὶ τὰ γ΄· ζ΄κις οὖν ϛ΄ γίνονται μβ΄. ἄφελε β΄ ἐκ τῶν ε΄, ὧν ἐστι ἄνωθεν τοῦ ι΄, περισσεύοσι καὶ γ΄. θὲς ἄνωθεν τῶν ε΄ τὰ γ΄, ἅπερ περισσεύοσι, ὀβέλισον δὲ τὰ ε΄. ἄφελε δὲ ἐκ τῶν ζ΄, ὧν δηλῶσι ο΄, τὰ δ΄, ἅπερ δηλῶσι μ΄, περισσεύοσι καὶ γ΄. ὀβέλισον τὰ ζ΄ καὶ θὲς ἄνωθεν τῶν ζ΄ τὰ γ΄, ἅπερ περισσεύοσι. ὀβέλισον δὲ καὶ τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ ϛ΄. τὸ δὲ τρίτον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ ἐστι ε΄. ἄφελε καὶ τοῦτο ζ΄κις· ζ΄κις δὲ ε΄ γίνονται λε΄. ἔστι δὲ ἄνωθεν τῶν ζ΄ γ΄, ἔστι δὲ καὶ γ΄ ἄνωθεν τοῦ ι΄ καὶ τῶν ε΄, ἔστι δὲ ἄνωθεν τῶν ε΄, ὅπερ ἐστὶ τρίτον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ, ι΄. τὰ τρία οὖν ταῦτα ἀσημείωτα γράμματα οὕτως κείμενα γ γ ι΄ δηλῶσι τλ΄, τὰ δύο δὲ τελευταῖα οὕτως κείμενα γ ι΄ δηλῶσι λ΄. οὐκ ἔχεις οὖν ἀφελεῖν τὰ λε΄ ἐκ τῶν δύο τελευταίων γραμμάτων τῶν δηλώντων λ΄. τὰ γ΄ οὖν, ἅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῶν ζ΄, δηλῶσι τ΄. ἄφελε οὖν α΄ ἐκ τῶν γ΄ καὶ ἀπομένοσι β΄. ὀβέλισον οὖν τὰ γ΄ καὶ θὲς β΄ ἄνωθεν τῶν γ΄. τὸ δὲ α΄, ὅπερ ἔλαβες, ἔστι ρ΄, ὥσπερ τὰ γ΄ ἔστι τ΄, τὰ δὲ ρ΄ ἐστὶ δεκάδαι ι΄. αἱ ι΄ οὖν δεκάδαι μετὰ τῶν γ΄, ὧν δηλῶσι λ΄, γίνονται δεκάδαι ιγ΄, τουτέστι ρλ΄. εἴπομεν δέ, ὅτι ζ΄κις ε΄ γίνονται λε΄. πρόσθες καὶ ε΄ καὶ γίνονται μ΄. θὲς οὖν τὰ ε΄, ἅπερ προσέθηκας καὶ ἐγένοντο μ΄, ἄνωθεν τοῦ τελευταίου ι΄, ὀβέλισον δὲ τὸ ι΄. ἄφελε δὲ ἀντὶ τῶν μ΄ δεκάδας δ΄ ἐκ τῶν ιγ΄ δεκάδων, ὧν εἴπομεν, ὅτι δηλῶσι ρλ΄, καὶ ἀπομένοσι δεκάδαι θ΄, τουτέστι ϛ΄. θὲς οὖν θ΄ ἄνωθεν τῶν γ΄. ὀβέλισον δὲ τὰ γ΄, ὀβέλισον καὶ τὰ ε΄, ἅπερ ἐστὶ τρίτον γράμμα τοῦ τρίτου μεριστοῦ.
ἀπέμειναν δὲ τὰ τρία ταῦτα γράμματα β θ ε΄ τζάκισμα, ἅπερ δηλῶσι σϛε΄. θὲς οὖν τὸ τζάκισμα τὰ β θ ε΄ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, κάτωθεν δὲ ταύτης θὲς τὸν μεριστήν, τὰς τξε΄ ἡμέρας τοῦ ἑνὸς χρόνου. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι αἱ μγ΄ χιλιάδαι ἡμέραι γίνονται χρόνοι ριζ΄, περισσεύοσι καὶ ἡμέραι σϛε΄ τζάκισμα τῶν τξε΄ ἡμερῶν τοῦ ἑνὸς χρόνου.

---

25 ὅπερ ἐστὶ] ὅπερι **C**

λβ Περὶ τῆς τούτων μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως

Τὸ τζάκισμα, ὅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, ἔχει οὕτως· β θ ε΄. τὰ πρῶτα οὖν δύο γράμματα οὕτως κείμενα β θ΄ δηλῶσι κθ΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει α΄. τὸ δὲ α΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς γράμματος οὕτως κείμενα α ε΄ δηλῶσι ιε΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει πάλιν α΄. θὲς α΄ περὶ τὸ τέλος τῆς κεραίας γραμμῆς.

ὁ δὲ μεριστὴς ἔχει οὕτως γ ς ε΄. τὰ πρῶτα οὖν δύο γράμματα οὕτως κείμενα γ ς΄ δηλῶσι λς΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει καὶ α΄. τὸ δὲ α΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς γράμματος οὕτως κείμενα α ε΄ δηλῶσι ιε΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει πάλιν α΄. θὲς α΄ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς.

ὁ τέλειος δὲ διαμερισμὸς ἔχει οὕτως α α ζ΄. τὰ πρῶτα οὖν δύο γράμματα οὕτως κείμενα α α΄ δηλῶσι ια΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύουσι δ΄. τὰ δὲ δ΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς γράμματος οὕτως κείμενα δ ζ΄ δηλῶσι μζ΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύουσι καὶ ε΄. θὲς ε΄ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς.

πολλ(α)πλασίασον δὲ τὸ ἄνωθεν α΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ε΄· ἅπαξ οὖν ε΄ πάλιν ἐστὶ ε΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τοῦ α΄, ὅπερ ἐστὶ περὶ τὸ τέλος τῆς κεραίας γραμμῆς, καὶ γίνονται ὁμοῦ ς΄. θὲς ς΄ ἐντὸς κύκλου τινός· (ς).

αἱ δὲ μγ΄ χιλιάδαι ἔχουσι οὕτως δ γ ϛ ϛ ϛ΄. τὰ πρῶτα οὖν δύο γράμματα οὕτως κείμενα δ γ΄ δηλῶσι μγ΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄, περισσεύει καὶ α΄. τὸ δὲ α΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τρίτου γράμματος κείμενα οὕτως α ϛ΄ δηλῶσι ι΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύουσι γ΄. τὰ δὲ γ΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τετάρτου γράμματος κείμενα οὕτως γ ϛ΄ δηλῶσι λ΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύουσι β΄. τὰ δὲ β΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς πέμπτου γράμματος κείμενα οὕτως β ϛ΄ δηλῶσι κ΄. ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύουσι ς΄. θὲς καὶ ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός· (ς). καὶ ἰδοὺ ἐγένοντο αἱ δύο μαρτυρίαι αὐτῶν ὅμοιαι ἔχουσα ἑκάστη ἐντὸς κύκλου ς΄. καὶ ἔστι ἀληθὴς ὁ ἐξελθὼν τέλειος διαμερισμός, τουτέστι τὰ ριζ΄.

λγ Περὶ τοῦ πῶς δεῖ ποιεῖν τὰς ἐκθέσεις τούτων ἰδίως. καὶ ὡς ἡ τέχνη διδάσκει ποιεῖν, οὕτως γὰρ ποιῶν κατανοήσεις καλῶς τὸ λεγόμενον

Τοῦτο ὡς ἐτέθη νῦν διὰ τῶν διαφόρων τούτων καὶ ποικίλων γραμμάτων, δυσχερὴς πάνυ ἐστὶ ἡ κατάληψις τούτου, καὶ οὐκ ἂν ἔχῃς καλῶς καθορᾶν τὰς ψήφους, ἃς καταμέρος λέγομεν, ὅτι ἄφελε τόδε καὶ τόδε πάλιν ὀβέλισον. νῦν γὰρ τὸ ὑπόδειγμαν τοῦτο, ὃ γράψαντες συντεθήκαμεν, ἐστὶ τετελεσμένον. ἀρξάμενος δὲ λέγειν, ὅτι πρόσθες τόδε καὶ ἄφελε τόδε, οὔπω τὸ πρῶτον γράμμα ζητῆσαι εἰδεῖν, ὡς ἡ τέχνη διδάσκει ὑμῖν, οἶδας τὸ πᾶν τελειούμενον, καὶ τὴν ἀρχὴν τούτου ἐπιζητῶν ὑπερέβης τὸ μέσον καὶ πρὸς τὸ τέλος ἤδη ἔφθασας τοῦ ζητήματος. καὶ τοῦτο οὐ μικρὰν ὑμῖν ποιεῖται ἀσάφειαν, μᾶλλον δὲ καὶ δυσχερεστάτην ἐργάζεται τὴν κατάληψιν. εἰ δὲ καλῶς εἰδέναι θέλεις καὶ ἐγροικῆσαι βούλ(ει) σαφέστερον, ὅσον σοι λέγει ἡ μέθοδος, θὲς ἰδίως εἰς χάρτη<ν> τινὰ τὰς μγ΄ χιλιάδας ἡμέρας, καθὼς κἀκεῖσε οὕτως εἰσὶ κείμεναι δ γ ϛ ϛ ϛ΄, κάτωθεν δὲ τούτων θὲς ἑνὸς χρόνου ἡμέρας, τουτέστι τξε΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστής. ἄρξου δὲ ἀναγινώσκειν τὴν μεταχείρισιν καὶ τοὺς διαμερισμοὺς αὐτῶν. καὶ ὡς ἡ μέθοδος διδάσκει ὑμῖν, οὕτως καὶ σὺ ἀρξάμενος ποιεῖς. καὶ ὀβέλιζε, ὅσα σοι ‖ ἡ μέθοδος διδάσκει ἀκολούθως, ἄφελε δὲ πάλιν, ὡς ἡ μέθοδός σοι διασημαίνε- f. 25^{v}

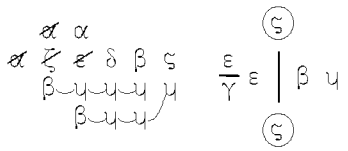
---

29 δυσχερὴς] δὴσχερνὴς **C** 34 οἶδας] εἰδὰς **C** 37 ἐγροικῆσαι] ἐγρικήσαι **C pro** ἀγροικῆσαι

ται, καὶ πρόσθετε πάλιν, ὅσα προσθεῖναι δεῖ, καθὼς καὶ τοῦτο δῆλον ὑμῖν γίνεται διὰ τῆς μεθόδου δηλούμενον. τοῦτο δὲ οὕτως ποιῶν ἀπαρχῆς ἄχρι τέλους εὑρήσεις καλῶς, ὅπερ εἰδέναι ζητεῖς, καὶ κατανοῆσαι ἔχεις σαφέστερον τοῦτο, ὅταν σὺ ἐξαρχῆς γράφων τοῦτο ποιῇς, ὡς ἡ μέθοδος καταμέρος διασημαίνεται, ἢ ἀπὸ μόνης θεωρίας τῶν διαφόρων καὶ ποικίλων γραμμάτων, ὧν ἐκτιθέμεθα. τοῦτο δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων πάντων, ὧν προείπομεν ποιῆσαι καλόν, οὐ μόνον δέ, ἀλλὰ καὶ ὧν ἔτι ἐροῦμεν εἰς τὸ ἑξῆς, κἂν τούτοις οὕτως ποιῶν, εὑρήσεις διὰ τῆς μεταχειρίσεως τῶν σῶν ἐκθέσεων καλῶς τοὺς διαμερισμούς, οὓς ἐν ὑποδείγμασι διαφόροις ὑποτιθέμεθά τε καὶ ἔτι ὑποτεθήσομεν ἐφεξῆς.

λδ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι διαμερίσαι ὑπέρπυρα ροε΄ χιλιάδας καὶ υκς΄ εἰς συντρόφους ,β΄

Ἔστω ὅτι στρατιῶται ,β΄ ἐκέρδεσαν ὑπέρπυρα ροε΄ χιλιάδας καὶ υκς΄ ὑπέρπυρα. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα περιέρχεται ἕκαστον τῶν ,β΄ στρατιωτῶν ἐκ τῶν δηλωθέντων ὑπερπύρων. θὲς οὖν τὰ ροε΄ χιλιάδας καὶ υκς΄ ἄνωθεν. ἐπεὶ δέ ἐστι τὸ πρῶτον γράμμα τῶν ,β΄ στρατιωτῶν β΄, τὸ δὲ πρῶτον γράμμα τῶν ὑπερπύρων ἐστὶ α΄ καὶ οὐ χωρῶσι ἀφαιρεθῆναι τὰ β΄ ἐκ τοῦ α΄, πρόβηθι ἕνα γράμμα καὶ θὲς τὸν μεριστήν, τοὺς ,β΄ δηλονότι στρατιώτας, κάτωθεν ὡς ὁρᾷς. τὸ πρῶτον οὖν γράμμα τοῦ μεριστοῦ ἐστι β΄, ἔστι δὲ ἄνωθεν αὐτοῦ δύο γράμματα οὕτως κείμενα α ζ΄, ἅπερ δηλῶσι ιζ΄.



η ζ τζάκισμα $\frac{\alpha\ \delta\ \beta\ \varsigma}{\beta\ \upsilon\ \upsilon\ \upsilon}$

ἄφελε οὖν τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ β΄, ὁσάκις ἂν χωρῇ, ἐκ τῶν ιζ΄· η΄κις οὖν β΄ γίνονται ις΄, περισσεύει α΄ μέχρι τῶν ιζ΄. θὲς οὖν κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν η΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι η΄κις ἀφεῖλες τὰ β΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν ιζ΄, ἄνωθεν δὲ τῶν ζ΄ θὲς τὸ α΄, ὅπερ περισσεύει ἐκ τῶν ιζ΄. ὀβέλισον δὲ τὸ πρῶτον γράμμα, ὅπερ ἐστὶ α΄, καὶ τὸ δεύτερον, ὅπερ ἐστὶ ζ΄, ὡς ἀργὰ ὄντα. ὁ δὲ μεριστής – τὸ μὲν πρῶτον αὐτοῦ γράμμα ἐστὶ β΄, τὰ δὲ λοιπὰ πάντα εἰσὶ υ΄. τὸ δὲ υ΄ μετὰ τῶν η΄, ὧν ἔθηκας κάτωθεν, – μὴ μόνον ἐὰν ἀφέλῃς η΄κις υ΄ πάλιν υ΄ γίνεται, ἀλλὰ καὶ μυριάκις υ΄ ἀφελόμενος οὐδὲν πλέον προσέφερες ἢ πάλιν υ΄· τὸ γὰρ υ΄ οὐδενός ἐστι αἴτιον, διὸ καὶ υ΄ γράφεται. τὸ δ᾽ αὐτὸ ἤττηαν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων πάντων υ΄, ὧν ἐφεξῆς ἐπὶ τῶν ,β΄ στρατιωτῶν εἰσι κείμενα. μὴ δυνάμενος οὖν ἀφελεῖν τι ἐκ τῶν τοσούτων υ΄, δι᾽ ἧς εἴπομεν αἰτίας, ὀβέλισον τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ β΄, ὡσαύτως καὶ πάντα τὰ μετ᾽ ἐκεῖνο τρία υ΄υ΄υ΄ – ὀβέλισον καὶ αὐτά. καὶ ἰδοὺ ἐτέλεσας τὸν πρῶτον μεριστήν.

πρόβηθι οὖν πάλιν ἕνα γράμμα καὶ θὲς ἕτερον μεριστήν. τὸ πρῶτον δὲ γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ ἐστι β΄, ἔστι δὲ ἄνωθεν αὐτοῦ δύο γράμματα οὕτως κείμενα $^{\alpha}\ \varepsilon$, ἅπερ δηλῶσι ιε΄. ἄφελε οὖν τὰ β΄, ὁσάκις ἂν χωρῶσι, ἐπὶ τῶν ιε΄· ζ΄κις οὖν β΄ γίνονται ιδ΄, περισσεύει καὶ α΄ μέχρι τῶν ιε΄. θὲς κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν ζ΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι ζ΄κις ἀφεῖλες τὰ β΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν ιε΄. ὀβέλισον δὲ τὸ α΄, ὅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῶν ζ΄, ὀβέλισον δὲ καὶ τὰ ε΄. θὲς οὖν ἄνωθεν τῶν ε΄ τὸ α΄, ὅπερ ἐκ τῶν ιε΄ ἐπερίσσευσε. ὀβέλισον δὲ καὶ τὰ τέσσερα γράμματα τοῦ μεριστοῦ, τὰ β΄ δηλονότι καὶ τὰ τρία υ΄υ΄υ΄, δι᾽ ἣν αἰτίαν προείπομεν· οὐδὲν γὰρ ὄντα οὐδὲν δύνασαι ἐξ αὐτῶν λαβεῖν. καὶ ἰδοὺ ἐτέλεσας καὶ τὸν δεύτερον μεριστήν.

---

9 ὑποτεθήσομεν] **sic pro** ὑποθήσομεν **C** 11 ἐκέρδεσαν] **sic pro** ἐκέρδησαν **C** 29 ἤττημαν] **lectio dubia**

περιέρχεται δέ, ὡς ὁρᾷς, διὰ τοῦ τελείου διαμερισμοῦ ἕκαστον τῶν ,β΄ στρατιωτῶν ὑπέρπυρα πζ΄, ἀπομένει καὶ τζάκισμα, ὅπερ καὶ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς ἐστι κείμενον. δηλοῖ δὲ τὸ τζάκισμα ,αυκς΄, ἔστι δὲ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἀπέμειναν ἐκ τῶν ροε΄ χιλ(ι)άδων ὑπερπύρων καὶ υκς΄. οἱ γὰρ στρατιῶται ,β΄ ὄντες οὐκ ἐδύναντο διαμερίσασθαι ὑπέρπυρα ,αυκς΄ ἐλάττω ὄντα τῶν ,β΄, διὸ καὶ ἐναπελείφθησαν τζάκισμα τῶν ,β΄ στρατιωτῶν, ὧν ἐστι μεριστὴς τῶν δηλωθέντων ὑπερπύρων.

μετὰ δὲ τὸ γενέσθαι τὴν μαρτυρίαν τε καὶ ἀπόδειξιν τούτων ἐροῦμεν καὶ περὶ τοῦ τζακίσματος τούτου, τίνα λόγον ἔχει καὶ πόσον ἕκαστος τῶν ,β΄ στρατιωτῶν οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,αυκς΄ ὑπερπύρων, ὧν νῦν ἔχοσι οἱ τοιοῦτοι ,β΄ στρατιῶται τζάκισμα.

λε Περὶ τῆς τούτων μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως

Τὸ τζάκισμα, ὅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, ἔχει οὕτως α δ β ς΄. τὰ πρῶτα οὖν δύο γράμματα οὕτως κείμενα α δ΄ δηλῶσι ιδ΄· ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει ι΄. τὰ δύο δὲ ἐφεξῆς δεύτερα γράμματα οὕτως κείμενα β ς΄ δηλῶσι κς΄· ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι καὶ ε΄. θὲς ε΄ περὶ τὸ τέλος τῆς κεραίας γραμμῆς.

ὁ δὲ μεριστὴς ἔχει οὕτως β ι ι ι΄. τὰ πρῶτα οὖν δύο γράμματα οὕτως κείμενα β ι΄ δηλῶσι κ΄· ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι καὶ ς΄. τὰ δὲ ς΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τρίτου γράμματος οὕτως κείμενα ς ι΄ δηλῶσι ξ΄· ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσ(ι) καὶ δ΄. τὰ δὲ δ΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τετάρτου γράμματος οὕτως κείμενα δ ι΄ δηλῶσι μ΄· ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι καὶ ε΄. θὲς ε΄ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς.

ὁ δὲ τέλειος διαμερισμὸς ἔχει οὕτως η ζ΄· ἄφελε οὖν ἅπαξ ζ΄ ἐκ τοῦ πρώτου γράμματος, ὅπερ ἐστὶ η΄, καὶ περισσεύει α΄. τὸ δὲ α΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς δευτέρου γράμματος οὕτως κείμενα α ζ΄ δηλῶσι ιζ΄· ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι γ΄. θὲς γ΄ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς.

πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν ε΄ καὶ κάτωθεν γ΄· τρὶς οὖν ε΄ γίνονται ιε΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ε΄, ὧν ἐστι περὶ τὸ τέλος τῆς κεραίας γραμμῆς, καὶ γίνονται ὁμοῦ κ΄· μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ || καὶ περισσεύοσι ς΄. θὲς οὖν ς΄ ἐντὸς κύκλου· ⓢ. f. 26^{r}

τὰ ἄνωθεν δὲ γράμματα τῶν ὑπερπύρων ἔχοσι οὕτως α ζ ε δ β ς΄. τὰ πρῶτα οὖν δύο γράμματα οὕτως κείμενα α ζ΄ δηλῶσι ιζ΄· ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύοσι καὶ γ΄. τὰ δὲ γ΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τρίτου γράμματος κείμενα οὕτως γ ε΄ δηλῶσι λε΄· ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ ἀπομένει ι΄. τὰ δὲ ἐφεξῆς δύο γράμματα οὕτως κείμενα δ β΄ δηλῶσι μβ΄· ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει πάλιν ι΄. τὸ δὲ τελευταῖον γράμμα, ὅπερ ἀπομένει, ἐστὶ ς΄. θὲς καὶ τοῦτο ἐντὸς κύκλου· ⓢ. καὶ ἰδοὺ ἐγένοντο αἱ δύο μαρτυρίαι αὐτῶν ὅμοιαι ἔχουσα ἑκάστη ἐντὸς κύκλου ς΄, καὶ ἔστι ἀληθὴς ὁ ἐξελθὼν τέλειος διαμερισμός, τουτέστι τὰ πζ΄.

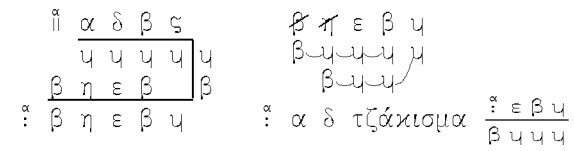
λς Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι, τί περιέρχεται ἕκαστον τῶν ,β΄ στρατιωτῶν ἐκ τῶν ,αυκς΄ ὑπερπύρων – τὸ τζάκισμα, ὅπερ ἀπέμεινε ἐκ τῶν ροε΄ χιλ(ι)άδων καὶ υκς΄ ὑπερπύρων

Οἱ ,β΄ στρατιῶται – ἕκαστος αὐτῶν οἰκειώσατο ἐκ τῶν ροε΄ χιλ(ι)άδων καὶ υκς΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα πζ΄, ἀπέμεινε δὲ καὶ τζάκισμα ,αυκς΄ ὑπέρπυρα. ἐπεὶ δὲ ἕκαστον ὑπέρπυρόν ἐστι κουκκιὰ κ΄, πολλ(α)πλασίασον τὰ ,αυκς΄ ὑπέρπυρα τοῦ τζακίσ-

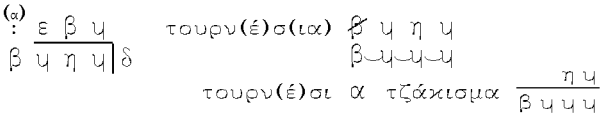
---

4 οὐκ ἐδύναντο] οὐ καὶ δινωντὰν **C** 42 κουκκιὰ] **hic et passim** ⁘ **C**

ματος μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα γράμματα β ἡ ε β υ΄, ἅπερ δηλῶσι ,κ,η΄ καὶ φκ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ,αυκς΄ ὑπέρπυρα γίνονται κουκκιὰ ,κ,η΄ καὶ φκ΄ κουκκιά. θὲς τὰς ,κ,η΄ καὶ φκ΄ κουκκιὰ ἄνωθεν, κάτωθεν δὲ κατ᾽ εὐθεῖαν θὲς μεριστήν, τοὺς ,β΄ στρατιώτας, οὓς καὶ ἐξαρχῆς ἐπὶ τῶν ὑπερπύρων εἶχες μεριστήν. ἄφελε δὲ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ β΄, ἅπαξ ἐκ τῶν ἄνωθεν β΄· οὐδὲ γὰρ ἐπὶ πλέον ἔχεις ἀφελεῖν τοῦτο. θὲς οὖν κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν α΄, καθότι ἅπαξ ἀφεῖλες τὰ β΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν β΄. ὀβέλισον δὲ τὰ ἄνωθεν β΄, ὀβέλισον δὲ καὶ τὰ τέσσερα γράμματα τοῦ μεριστοῦ ὡς οὐδὲν ὄντα, καθὼς καὶ πρότερον εἴπομεν.



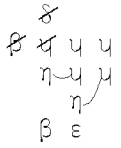
πρόβηθι οὖν ἕνα γράμμα καὶ θὲς ἕτερον μεριστήν, τουτέστι ,β΄. τὸ πρῶτον οὖν γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ ἐστι β΄. ἄφελε ταῦτα, ὁσάκις ἂν χωρῶσι εἰς τὰ ἄνωθεν αὐτῶν κείμενα η΄· δ΄κις οὖν β΄ γίνονται η΄. θὲς οὖν κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν δ΄, καθότι δ΄κις ἐχώρεσαν τὰ β΄ ἐπὶ τῶν ἄνωθεν η΄. ὀβέλισον δὲ τὰ η΄ καὶ τὰ τέσσερα γράμματα τοῦ μεριστοῦ. καὶ ἰδοὺ ἐγένετο ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς τὰ παρόντα δύο γράμματα α δ΄, ἅπερ δηλῶσι κουκκιὰ ιδ΄, ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ φκ΄. ἕκαστος οὖν τῶν ,β΄ στρατιωτῶν οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,αυκς΄ ὑπερπύρων, ὧν ἐποίησαν κουκκιὰ ,κ,η΄ καὶ φκ΄ κουκκιὰ, κουκκιὰ ιδ΄, περισσεύοσι ἔτι καὶ κουκκιὰ φκ΄.



ἐπεὶ δὲ ἕκαστον κουκκί ἐστι τουρνέσια δ΄, πολλ(α)πλασίασον τὰ φκ΄ κουκκιά, τὸ τζάκισμα, μετὰ τῶν δ΄ τουρνεσίων· δ΄κις οὖν φκ΄ γίνονται ,βπ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ φκ΄ κουκκιὰ γίνονται τουρν(έ)σι(α) ,βπ΄.

θὲς ἄνωθεν τὰ ,βπ΄ τουρν(έ)σι(α), κάτωθεν δὲ τοὺς ,β΄ συντρόφους, οὓς ἔχεις ἐξαρχῆς μεριστήν. ἄφελε οὖν τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ β΄, ἅπαξ ἐκ τῶν ἄνωθεν β΄, ἐπεὶ πλέον οὐ χωρεῖ ἀφαιρεθῆναι. θὲς οὖν κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν α΄, καθότι ἅπαξ ἀφεῖλες τὰ β΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν β΄. ὀβέλισον δὲ τὰ ἄνωθεν β΄ καὶ τὰ τέσσερα γράμματα τοῦ μεριστοῦ. καὶ ἰδοὺ ἐγένετο ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ι) α΄, ἀπομένει ἔτι καὶ τζάκισμα ἐλάχιστον τουρν(έ)σ(ια) π΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρον α΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ἐκ τῶν ροε΄ χιλιάδων καὶ υκς΄ ὑπερπύρων οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν ,β΄ στρατιωτῶν ὑπέρπυρα πζ΄ κουκκιὰ ιδ΄ τουρν(έ)σι α΄, περισσεύει ἔτι ἐλάχιστον τζάκισμα τουρν(έ)σ(ια) π΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρον α΄.

Ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ τῶν π΄ τουρν(ε)σίων τὸ τζάκισμα ζητῇς εἰδέναι, τί περιέρχεται τοῖς ,β΄ στρατιώταις ἀκεραίων ὄντων τῶν π΄ τουρνεσίων, οὐκ ἔχεις ἀποδοῦναι τὰ π΄ πρὸς τὰ ,β΄ κατὰ πολὺ ἐλάττω ὄντα. μεριζόμενα δὲ τὰ π΄ ἐπὶ τοσούτων, ὥστε γενέσθαι ,β΄ πρὸς τὸ λαβεῖν ἕκαστος τῶν ,β΄ πολ<λ>οστὸν μέρος ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου), ζητεῖς εἰδέναι, ποσάκις ἔστι διαμερίσαι ἕκαστον τῶν π΄ τουρν(ε)σίων πρὸς τὸ γενέσθαι τζακίσματα ,β΄. ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως· θὲς ἄνωθεν μὲν τοὺς ,β΄ στρατιώτας, κάτωθεν δὲ εἰς τόπον δεύτερον θὲς τὰ η υ΄ τουρν(έσια) μεριστήν. ἄφελε οὖν τὸ πρῶτον γράμμα τῶν π΄, ὅπερ ἐστὶ η΄, ὁσάκις ἂν χωρῇ, ἐπὶ τῶν ἄνωθεν κ΄· δὶς οὖν η΄ γίνονται ις΄,



---

5 τὰς ,κ,η΄] sc. χιλιάδας

περισσεύοσ(ι) καὶ δ΄ μέχρι τῶν κ΄. θὲς οὖν τὰ δ΄, ἅπερ περισσεύοσ(ι) ἐκ τῶν κ΄, ἄνωθεν τοῦ ψ΄. ὀβέλισον δὲ τὰ β΄, ἅπερ δηλῶσι κ΄, καὶ τὸ ψ΄, ὅπερ ἐστὶ κάτωθεν τῶν δ΄. ὀβέλισον δὲ καὶ τὰ η΄ καὶ τὸ ψ΄, τὰ δύο δηλονότι γράμματα τοῦ μεριστοῦ τῶν π΄. θὲς δὲ κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τῶν η΄ β΄, καθότι δὶς ἀφεῖλες τὰ η΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν κ΄. πρόβηθι οὖν καὶ θὲς ἕτερον μεριστήν, τουτέστι πάλιν τὰ π΄ τουρν(έ)σ(ι)α. ἄφελε οὖν τὰ η΄, ἅπερ ἐστὶ πρῶτον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ, ἐκ τῶν ἄνωθεν δ΄, ὧν δηλῶσι μ΄, ὁσάκις ἂν χωρῇ· ε΄κις οὖν η΄ γίνονται μ΄. θὲς οὖν κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν ε΄, καθότι ε΄κις ἐχώρεσαν τὰ η΄ ἐπὶ τῶν ἄνωθεν δ΄ τῶν δηλώντων μ΄. ὀβέλισον δὲ τὰ δ΄ τὰ δηλῶντα μ΄, ὡσαύτως ὀβέλισον καὶ τὰ δύο γράμματα τοῦ μεριστοῦ, τὰ η΄ δηλονότι καὶ ψ΄. καὶ ἰδοὺ ἐγένετο ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς κε΄ καὶ οὐκ ἀπέμεινέ τι τζάκισμα. ἕκαστος οὖν τῶν ,β΄ στρατιωτῶν οἰκειοῦται καὶ ἑνὸς ἀκεραίου τουρνεσίου εἰκοστὸν πέμπτον μέρος, καθὼς καὶ ὁ διαμερισμὸς τῶν ,β΄ μετὰ τῶν π΄ τουρν(ε)σίων ἐγένετο κε΄.

ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί, μέρισον ἕκαστον τῶν π΄ τουρν(ε)σίων εἰς μέρη κε΄, ταὐτὸν γάρ ἐστι πολλ(α)πλασίασον τὰ π΄ τουρν(έ)σ(ι)α μετὰ τῶν κε΄· κε΄κις οὖν π΄ γίνονται ,β΄. καὶ ἰδοὺ διατεμνόμενα τὰ π΄ εἰς μέρη κε΄ γίνονται ,β΄, καθώς ἐστι καὶ || οἱ στρατιῶται ,β΄. εὗρες οὖν προχείρως διὰ τῆς τέχνης μερίσας τοὺς ,β΄ στρατιώτας μετὰ τῶν π΄ τουρν(ε)σίων, ὅτι οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν εἰκοστὸν πέμπτον μέρος ἑνὸς τουρνεσίου καὶ ὅτι μεριζόμενα τὰ π΄ τουρν(έ)σια εἰς μέρη κε΄ γίνονται ,β΄, καθὼς καὶ οἱ στρατιῶταί εἰσι ,β΄.

		η	ψ	
	δ	ψ	ψ	ε
α	ϛ	ψ		β
β	ψ	ψ	ψ	

f. 26^{v}

λζ Περιεκτικῶς περὶ πάντων τῶν διαμεριζομένων μερῶν

Τοὺς ἐπιμερισμοὺς τῶν διαφόρων ζητημάτων ὑποτιθέμενοι καὶ ὡς ἐφικτὸν διὰ ποικίλων παραδειγμάτων δηλώσαντες, πῶς ἄρα ἔχεις διαμερίζειν τὰ μείζονα μέρη καὶ ἐλάττονα ποιεῖν, δέον ἡμῖν ἔδοξε εἶναι καὶ περιεκτικῶς ὑμῖν ἐκτιθέναι καὶ διαγράψασθαι, πῶς ἄρα ἔχεις διαμερίζειν πάντα ἐπιμερισμόν, εἰς ὅσα ἂν μέρη βούλῃ τοῦτον διαμερίσαι.

καὶ πρῶτον μὲν – ὡς οἶδας καὶ ἱκανῶς διὰ τῶν ὑποδειγμάτων μεμάθηκας – θέτε ἄνωθεν τὸ καθόλου σῶμα τῆς ζητουμένης ποσότητος, ἧς βούλει διαμερίσαι, εἰς ὅσα ἂν μέρη βούλεσαι. κάτωθεν δὲ τῆς καθόλου ταύτης ποσότητος θέτε τὸν μεριστήν, τουτέστι τὸ μέρος ἐκεῖνο, ᾧ βούλει διαμερίσαι ἐν αὐτῷ τὰ μείζονα πρὸς τὸ γενέσθαι ἐλάττονα. καὶ εἰ μὲν ἔχεις ἀφελεῖν τὸν μεριστὴν ἐκ τῶν ἄνωθεν πρώτων γραμμάτων, θὲς τοῦτον κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τοῦ ἄνωθεν πρώτου γράμματος. εἰ δ᾽ οὐ δύνασαι ἀφελεῖν τὸν μεριστὴν ἐκ τοῦ ἄνωθεν πρώτου γράμματος, πρόβηθι τὸ ἄνωθεν πρῶτον γράμμα καὶ θὲς τοῦτον κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τοῦ δευτέρου ἄνωθεν γράμματος.

σκόπει δὲ καλῶς, ποσάκις χωρεῖ ἀφαιρεθῆναι τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ ἐκ τοῦ ἄνωθεν αὐτοῦ γράμματος. καὶ εἰ μέν ἐστι ὁ μεριστὴς κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τοῦ ἄνωθεν πρώτου γράμματος, τὰ ἄνωθεν ὄντα τοῦ μεριστοῦ ἐστι ὅμοιά τε καὶ σύμφωνα, μονάδα μετὰ μονάδος καὶ δεκάδα μετὰ δεκάδος καὶ ἑξῆς ὁμοίως. εἰ δὲ ὁ μεριστής ἐστι κατ᾽ εὐθεῖαν κάτωθεν τοῦ δευτέρου ἄνωθεν γράμματος, τὸ ἄνωθεν πρῶτον γράμμα, ἐπεὶ ὁ μεριστής ἐστι εἰς τόπον δεύτερον, δηλοῖ δεκάδας καὶ οὐ μονάδας. ὁσάκις οὖν χωρεῖ ἀφαιρεθῆναι τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, κἂντε εἰς τόπον μονάδος κἂντε

---

17 ἐστι] ἔστι **C** 19 εἰκοστὸν πέμπτον] $\overset{ον}{κε}$ **C** 23 ἐφικτὸν] ευηκτὸν **C** 23/24 ποικίλων] πικύκλων **sic C** 28 οἶδας] εἰδᾶς **C**

εἰς δεκάδος ἐστί, ἐκ τῶν ἄνωθεν γραμμάτων ἢ γράμματος, ἅπαξ δηλονότι ἢ δὶς ἢ καὶ πολλάκις, καὶ τὰ λοιπὰ γράμματα τοῦ συμβεβηκότος μεριστοῦ, ὅσα καὶ ᾖ, τοσαυτάκις ἄφελε καὶ ταῦτα πάντα, ὁσάκις ἐχώρεσεν ἀφαιρεθῆναι τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ ἐκ τῶν ἄνωθεν γραμμάτων ἢ γράμματος, ἃ καὶ ἔθηκας κάτωθεν πρὸς δήλ(ω)σιν, ὅτι τοσαυτάκις ἀφεῖλες αὐτὸ ἐκ τῶν ἄνωθεν.

χρὴ δὲ καλῶς σκοπεῖν καὶ περιεργάζεσθαι οὕτως ἀφελεῖν τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὥστε μὴ συμπαραλαμβάνειν τὰς καθόλου ἄνωθεν ψήφους καὶ μὴ ἔχειν ἀφελεῖν τὰ λοιπὰ πάντα τοῦ μεριστοῦ γράμματα, ἀλλ᾽ οὕτως ἄφελε τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὥστε περιττεύειν σε ψήφους τινὰς πρὸς τὸ ἀποδῶσαι καὶ τὰ λοιπὰ πάντα τοῦ μεριστοῦ γράμματα, ὅσα καὶ ᾖ, ἱκανὰς ψήφους πρὸς τὸ ἀφελεῖν καὶ ταῦτα, ὡς καὶ τὸ πρῶτον γράμμα ἀφεῖλες τοῦ μεριστοῦ, ὃ καὶ κάτωθεν ἔθηκας εἰς δήλωσι(ν), ὅτι τοσαυτάκις ἀφεῖλες αὐτὸ ἐκ τῶν ἄνωθεν.

εἰ οὖν ὁ μεριστής ἐστι τρία γράμματα οὕτως κείμενα α ι ι΄ ἢ τέσσερα οὕτως κείμενα α ι ι ι΄, τὸ μὲν πρῶτον γράμμα ἔχει ψῆφόν τινα, τὰ δ᾽ ἐφεξῆς ἐστι οὐδέν, ἄφελε οὖν τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ ἐκ τῶν ἄνωθεν, ὁσάκις ἂν χωρῇ. τὰ δὲ λοιπά – ἐπεὶ οὐδέν ἐστι, οὐ δύνασαί τι ἀφελεῖν ἐκ τούτων. ὀβέλισον δὲ καὶ τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ καὶ τὰ λοιπὰ πάντα οὐδὲν ὡς ἀργὰ ὄντα καὶ ἀνενέργητα. πρόβηθι οὖν ἕνα γράμμα ἀκολούθως καὶ γράψον ἕτερον μεριστήν, ὃν καὶ πρότερον ἔγραψας. καὶ πάλιν ἄφελε, ὁσάκις ἂν χωρῇ, τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ δευτέρου μεριστοῦ ἐκ τῶν ἄνωθεν. καὶ θέτε ταῦτα κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν πρὸς δήλωσιν, ὅτι τοσαυτάκις ἀφεῖλες τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μερισ<τοῦ> ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτοῦ. τὰ δὲ λοιπὰ οὐδὲν σὺν τῷ πρώτῳ γράμματι – ὀβέλιζε ταῦτα. πρόβηθι οὖν πάλιν ἕνα γράμμα ἀκολούθως καὶ γράψον ἕτερον μεριστήν, μέχρις ἂν οὕτως ποιῶν τελέσῃς πάντα τὰ ἄνωθεν γράμματα μετὰ τοῦ συμβεβηκότος μεριστοῦ. τοῦτο δὲ οὕτως γίνεται, ὅταν τὸ μὲν πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ ἐστι δηλωτικόν τινος ἀριθμοῦ, τὰ δὲ λοιπὰ πάντα εἰσὶ οὐδέν.

εἰ δὲ ὁ μεριστής – τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον αὐτοῦ γράμμα, ἔστι δ᾽ ὁτὲ καὶ τὸ τρίτον καὶ τέταρτον καὶ πέμπτον, ἔχοσί τινας ψήφους δηλωτικάς, χρὴ – ὡς εἴπομεν ἄνωθεν –, ὁσάκις ἀφεῖλες τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ἃ καὶ [κα]κάτωθεν ἔγραψας, τοσαυτάκις καὶ τὰ λοιπὰ πάντα αὐτοῦ γράμματα ἀφελεῖν, ὡς καὶ τὸ πρῶτον ἀφεῖλες. ὅταν οὖν ἔστι ἄνωθεν δύο τινὰ γράμματα δεκάδος τε καὶ μονάδος καὶ δηλῶσι – ὡς ἂν εἴπῃ τις – μγ΄ ἢ καὶ ὡς ἄλλως ἔχοσι δηλῶσαι δεκάδα τε καὶ μονάδα, ζητεῖς δὲ ἀφελεῖν ἐκ τῶν ἄνωθεν δύο γραμμάτων τὸ πρῶτον γράμμα ἢ τὸ δεύτερον ἢ τὸ τρίτον τοῦ μεριστοῦ, πολλ(α)πλασίαζε τὸ γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἂν ζητῇς ἀφελεῖν ἐκ τῶν ἄνωθεν, ὁσάκις ἀφεῖλες καὶ τὸ πρῶτον, ἃ καὶ κάτωθεν εἰώθαμεν θέτειν πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι τοσαυτάκις ἐχώρεσε ἀφαιρεθῆναι τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτοῦ γραμμάτων ἢ γράμματος.

ἵνα δὲ γένηται σαφέστερον τὸ λεγόμενον, ἔστω ὅτι τὰ ἄνωθεν δύο γράμματα οὕτως κείμενα δ γ΄ δηλῶσι μγ΄, ἀφ᾽ οὗ τόπου ἵσταται τὸ τρίτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ. τὸ δὲ τρίτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ ἔστω ς΄. ἔστω δὲ ὅτι ἀφεῖλες τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἂν ἦν, δ΄κις ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτοῦ γραμμάτων ἢ γράμματος. ἔθηκας δὲ κάllτωθεν δ΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι δ΄κις ἀφεῖλες αὐτὸ ἐκ τῶν ἄνωθεν. ἀφεῖλες δὲ καὶ f. 27r
τὸ δεύτερον γράμμα τοῦ μεριστοῦ δ΄κις ὡς καὶ τὸ πρῶτον. ζητεῖς δὲ νῦν ἀφελεῖν δ΄κις καὶ τὸ τρίτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ ς΄, ἐκ τῶν ἄνωθεν αὐτῶν δύο γραμμάτων τῶν δηλώντων μγ΄, ὡς εἴπομεν. πολλ(α)πλασίασον οὖν τὰ ς΄, ἅπερ ἐστὶ

---

2 τοσαυτάκις] τὰ σαυτάκοις **C**

τρίτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, μετὰ τῶν δ΄, ὧν ἔθηκας κάτωθεν πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι δ΄κις ἀφεῖλες τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ ἐκ τῶν ἄνωθεν γραμμάτων. δ΄κις οὖν ς΄ γίνονται κδ΄. ἄφελε δὲ τὰ κδ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν μγ΄ οὕτως· πρόσθες ἐπὶ τῶν κδ΄, ὅσα ἂν λείπωνται πρὸς τὸ γενέσθαι δεκάδαι ἄνευ μονάδος, τουτέστι ς΄ πρὸς τὸ γενέσθαι λ΄. τὰ δὲ ς΄, ἅπερ προσέθηκας, ἔστι περισσότερα τῶν κδ΄, ὧν ἀφελεῖν ἐστι χρεία. ἕνωσον δὲ ταῦτα μετὰ τῶν γ΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἄνωθέν ἐστι μγ΄, καὶ γίνονται θ΄. θὲς οὖν ἄνωθεν τῶν γ΄ θ΄. ὀβέλισον δὲ τὰ γ΄. ἀπὸ δὲ τῶν δ΄, ὧν ἐστι εἰς τόπον δεκάδος καὶ δηλῶσι μ΄, ἄφελε τὰ λ΄, ἅπερ ἕνωσας ς΄ ἐπὶ τῶν κδ΄ καὶ ἐποίησας λ΄ τὰ κδ΄. τὰ δὲ λ΄ εἰσι γ΄ δεκάδαι. ἄφελε οὖν τρεῖς δεκάδας, τουτέστι λ΄, ἐκ τῶν δ΄ δεκάδων, ὧν δηλῶσι μ΄, καὶ περισσεύει ἔτι καὶ α΄ δεκάς. θὲς οὖν α΄ ἄνωθεν τῶν δ΄, τουτέστι μίαν δεκάδα. ὀβέλισον δὲ τὰ δ΄. τοῦτο δέ, ὅπερ εἴπομεν, ὅτι πρόσθες ς΄ ἐπὶ τῶν κδ΄ ὥστε γενέσθαι λ΄, γίνεται οὕτως, ὅταν οὐκ ἔχῃς ἀφελεῖν τὴν τελευταίαν ψῆφον τῶν κδ΄, ἥτις ἐστὶ δ΄, ἐκ τῆς τελευταίας ψήφου τῶν ἄνωθεν δύο γραμμάτων, ὧν δηλῶσι μγ΄· οὐ γὰρ χωρῶσι ἀφαιρεθῆναι τὰ δ΄ ἐκ τῶν γ΄.

εἰ δὲ τὰ ἄνωθεν δύο γράμματα, ἅπερ δηλῶσι μγ΄, ἦν ἂν μδ΄ ἢ καὶ με΄, οὐκ ἂν προσέθηκας ς΄ ἐπὶ τῶν κδ΄ ὥστε γενέσθαι λ΄, ἀλλὰ ἀφεῖλες τὰ δ΄, τὸ ἔσχατον γράμμα δηλονότι τῶν κδ΄, ἐκ τῶν ε΄, ἅπερ ἐστὶ ἔσχατον τῶν με΄. τὸ δὲ α΄, ὅπερ περισσεύει ἐκ τῶν ε΄ – ἔθηκας ἂν τὸ α΄ ἄνωθεν τῶν ε΄. ὀβελίσας δὲ τὰ ε΄ ἀφεῖλες δὲ πάλιν τὰ κ΄, ἅπερ ἐστὶ β΄ δεκάδαι, ἐκ τῶν ἄνωθεν μ΄, ἅπερ ἐστὶ δ΄ δεκάδαι, β΄ δεκάδας γράψας ἄνωθεν τῶν δ΄, ὀβελίσας τὰ δ΄, ἅπερ δηλῶσι μ΄. ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῶν ἄνωθεν πάντων γραμμάτων γίνεται οὕτως, ὅταν ἐξ αὐτῶν ἀφελεῖν βούλ(ῃ) πρῶτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ ἢ δεύτερον ἢ τρίτον καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

εἰ δὲ τὸ παρατυχὸν γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἂν ζητῇς ἀφελεῖν ἐκ τῶν ἄνωθεν δύο γραμμάτων τῆς μονάδος τε καὶ δεκάδος, οὐ χωρεῖ ἀφαιρεθῆναι – ἔστω γὰρ ὅτι δεύτερον ἢ τρίτον ἢ τέταρτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐστὶ ζ΄, ζητεῖς ἀφελεῖν η΄κις ἐκ τῶν ἄνωθεν δύο γραμμάτων, ὧν δηλῶσι νγ΄· ζ΄κις δὲ η΄ γίνονται νς΄ καὶ οὐ δύνασαι ἀφελεῖν τὰ νς΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν δύο γραμμάτων τῶν δηλώντων νγ΄. ἔστι δὲ ἄνωθεν εἰς τόπον ἑκατοντάδος γ΄ καὶ δηλῶσι τ΄, ἅπερ μετὰ τῶν νγ΄ δηλῶσι τνγ΄. ζητεῖς δὲ ἀφελεῖν νς΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν τνγ΄. ἄφελε οὖν ἐκ τῶν γ΄ τῶν δηλώντων τ΄ μίαν ἑκατοντάδα, τουτέστι α΄· τὸ γὰρ α΄ ἐστὶ ρ΄, ὥσπερ τὰ γ΄ ἐστὶ τ΄. ἀπομένοσι καὶ β΄, ἅπερ ἐστὶ σ΄. θὲς οὖν β΄ ἄνωθεν τῶν γ΄. ὀβέλισον δὲ τὰ γ΄, ἅπερ δηλῶσι τ΄. τὰ δὲ ρ΄, ἅπερ ἀφεῖλες ἐκ τῶν τ΄, δέκα δεκάδαι εἰσί· ἔστι καὶ ἕτεραι ε΄ δεκάδαι, αἵτινες δηλῶσι ν΄. τὰ δὲ ρ΄ καὶ ν΄ ἐστὶ δεκάδαι ιε΄. πρόσθες οὖν ἐπὶ τῶν νς΄, ὧν ζητεῖς ἀφελεῖν, δ΄, ἵνα γένωνται ξ΄, τουτέστι δεκάδαι ς΄. ἐπεὶ οὖν προσέθηκας δ΄, τὰ δ΄ περισσεύοσι πάντως ἐκ τῶν νς΄. ἕνωσον τὰ δ΄ μετὰ τῶν γ΄, ὧν ἐστι εἰς τόπον μονάδος καὶ δηλῶσι τρία, καὶ γίνονται ὁμοῦ ζ΄. θὲς ἄνωθεν τῶν γ΄ τῶν εἰς τόπον μονάδος ὄντων ζ΄, ὀβέλισον δὲ τὰ γ΄. ἄφελε δὲ τὰ ς΄ δεκάδας, τουτέστι τὰ ξ΄, ἐκ τῶν ιε΄ δεκάδων, ὧν δηλῶσι ρν΄, καὶ ἀπομένοσι ἔτι καὶ δεκάδαι θ΄, τουτέστι ϛ΄· ϛ΄ γὰρ καὶ ξ΄ ρν΄ ἐστί. ὀβέλισον δὲ καὶ τὰ ε΄, ἅπερ ἐστὶ εἰς τόπον δεκάδος καὶ δηλῶσι ν΄. ἄνωθεν δὲ τῶν ε΄, ὧν δηλῶσι ν΄, θὲς τὰ θ΄, ἅπερ δηλῶσι ϛ΄ εἰς τόπον δεκάδος κείμενα. τούτῳ οὖν τῷ τρόπῳ καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων ποιεῖν ἔχεις, ὁπόταν οὐκ ἔστι ἀφελεῖν ἐκ τῆς δεκάδος τε καὶ μονάδος τὸ γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἂν ἔχῃς ζητῶν ἀφελεῖν ἐκ τῶν ἄνωθεν γραμμάτων.

ἔστι δὲ ὅτι ὁ μεριστὴς ἔχει δ΄ καὶ ε΄ γράμματα καὶ δηλοῖ χιλιάδας καὶ μυριάδας.

---

8 ἕνωσας] **pro** ἥνωσας **hic et passim C** 33 αἵτινες] ἅτιναὶ **C** 37 ὄντων] ὄντα **C**

εἰ οὖν οὐκ ἔχεις ἀφελεῖν τὸ πρῶτον ἢ δεύτερον ἢ τρίτον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ὅπερ ἐπολλ(α)πλασίασας τοσαυτάκις, ὁσάκις καὶ τὸ πρῶτον ἀφεῖλες γράμμα τοῦ μεριστοῦ, ἐκ τῶν ἄνωθεν τῆς δεκάδος τε καὶ ἑκατοντάδος ψήφων, τουτέστι ἐκ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου καὶ τρίτου τόπου, ἀφ' οὗ τόπου ἵσταται τὸ ζητούμενον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, κόψε ἐκ τῶν ἄνωθεν τῆς χιλιάδος, ὅς ἐστι ὁ τέταρτος, καθ' ὃν τρόπον ἐποίησας καὶ ἐπὶ τῆς ἑκατοντάδος καὶ ἀφεῖλες τὸ πολλ(α)πλασιαζόμενον γράμμα τοῦ μεριστοῦ, τουτέστι τὰ νς΄ ἐκ τῶν τνγ΄, πάντα οὖν ὅσα ἐκ τῶν ἄνωθεν γραμμάτων ἀφέλῃς.

εἰ μὲν ὅλον λάβῃς μὴ ἔχων θέσθαι ἄνωθεν τούτου περισσόν, ὀβέλιζε τοῦτο. εἰ δὲ ἐναπομείνῃ τι περιττόν, θὲς τοῦτο ἄνωθεν τοῦ ὀβελισθέντος γράμματος ἀσημείωτον ὥστε ὁρᾶσθαι καλῶς, ποῖα μὲν κατελήφθησαν καὶ ἄχρηστά εἰσι καὶ σεσημειωμένα, ποῖα δὲ πάλιν γράμματα ἀσημείωτα ὄντα ἔτι ζητῶνται ἀφαιρεθῆναι καὶ αὐτά.

οὕτω δὲ ποιῶν ἀπαρχῆς, μέχρις ἂν τελέσῃς πάντα τὰ ἄνωθεν γράμματα, διαμερίζων ταῦτα μετὰ τοῦ παρατυχόντος μεριστοῦ, τὰ περὶ τὸ τέλος ἐναπομείναντα ἀσημείωτα δηλά ἐστι, ὅτι ἐναπέμειναν καὶ ἐγένοντο τζάκισμα. θέτε οὖν τὰ ἀσημείωτα γράμματα, ἅπερ ἀπέμειναν τζάκισμα, ἄνωθεν κεραίας τινὸς γραμμῆς, κάτωθεν δὲ ταύτης θέτε τὸν μεριστήν. καὶ σκόπει, τίνα λόγον ἔχει τὸ τζάκισμα πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον, τρίτον ἢ τέταρτον, καθὼς καὶ τὸν περὶ τοῦ τζακίσματος λόγον ἐροῦμεν ἔτι σαφέστερον ὁδῷ προβαίνοντες ἐν τῷ οἰκείῳ τόπῳ αὐτοῦ.

λη Περιεκτικῶς περὶ μαρτυρίας καὶ ἀποδείξεως πάντων τῶν διαμεριζομένων μερῶν

Φέρε λοιπὸν καὶ περιεκτικῶς περὶ τῆς μαρτυρίας πάντων καὶ ἀποδείξεως, ὧν μέλεις διαμερίζειν, εἴπωμεν, || πῶς ἄρα ἔχεις τοῦτο καλῶς ποιεῖν καὶ πάντων τὰς μαρτυρίας λαμβάνειν, ὡς ἡ τέχνη διδάσκει ἡμῖν. ποίει δὲ οὕτως· f. 27^{v}

τὸ τζάκισμα, ὅπερ εἰώθαμεν θέτειν ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, κἂντε ἓν γράμμα ἐστὶ κἂντε πλείονα, ὅσα καὶ ᾖ – εἰ μὲν πλεῖστα ἐστί, λάβε τὰ δύο πρῶτα γράμματα καὶ μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄. τὸ περισσεῦον δὲ μέρος κάτωθεν τῶν ζ΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς γράμματος ἕνωσον καὶ μέρισον πάλιν ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄, μέχρις ἂν οὕτω ποιῶν τελέσῃς πάντα τὰ τοῦ τζακίσματος γράμματα. ἐπὰν δὲ ἄλλο γράμμα οὐκ ἔχῃς τζακίσματος, ἀλλ' εἰ διέφθασας εἰς τὸ ἔσχατον τούτου γράμμα καὶ τελευταῖον, τὸ ἐναπομεῖναν κάτωθεν τῶν ζ΄ ἐκ τοῦ τελευταίου γράμματος – θὲς τοῦτο περὶ τὸ τέλος τῆς ἑτέρας κεραίας γραμμῆς. εἰ δὲ τὸ τζάκισμα οὐκ ἔχει πολλ(ὰ) καὶ διάφορα γράμματα, ἀλλ' ἔστι ἓν γράμμα – εἰ μὲν δηλοῖ τὸ ἓν γράμμα πλεῖο τῶν ζ΄, τουτέστι η΄ ἢ καὶ θ΄, ἄφελε ἅπαξ ζ΄ ἐξ αὐτοῦ, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν κάτωθεν τῶν ζ΄ – θὲς τοῦτο ἐκεῖσε περὶ τὸ τέλος τῆς ἑτέρας κεραίας γραμμῆς. εἰ δὲ τὸ ἓν γράμμα τοῦ τζακίσματος οὐχ ὑπερβαίνει ζ΄, ἀλλ' ἔστι ἔλαττο τῶν ζ΄, θὲς τοῦτο πάλιν ἐκεῖσε περὶ τὸ τέλος τῆς κεραίας γραμμῆς, καθώς ἐστι, ὡς ἔλαττο ὂν τῶν ζ΄. εἰ δ' οὐκ ἔστι τὸ ἓν γράμμα πλεῖο ἢ ἔλαττο τῶν ζ΄, ἔστι δὲ ζ΄, θὲς η΄ περὶ τὸ τέλος τῆς κεραίας γραμμῆς ἀντὶ ἄλλου τινὸς γράμματος· ἅπαξ γὰρ ἀφεῖλες ζ΄ ἐκ τῶν ζ΄ καὶ ἀπέμεινεν η΄. ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τοῦ μεριστοῦ, οὗ εἰώθαμεν θέτειν κάτωθεν τοῦ τζακίσματος καὶ τῆς κεραίας γραμμῆς, ποίησον. καὶ εἰ μὲν ὁ μεριστής ἐστι καὶ αὐτὸς γράμμα ἕν, ποίησον ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ τζακίσματος καὶ θὲς τὰ ἐλάττω ὄντα τῶν ζ΄ ἄνωθεν τῆς αὐτῆς δευτέρας κεραίας γραμμῆς. εἰ δὲ πλεῖστα ἐστὶ γράμματα, ἀνὰ δύο λάμβανε καὶ μέριζε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ μέχρι καὶ τοῦ τελευταίου γράμματος. ἐπὰν δὲ τελέσῃς πάντα τὰ τοῦ μεριστοῦ γράμματα οὕτως ποιῶν, τὸ ἐναπομεῖναν κάτωθεν τῶν ζ΄ – θὲς τοῦτο

---

28 διέφθασας] διεύθασας **C** 34 οὐχ ὑπερβαίνει] οὐχι περ βένη **C**

ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς.
ζήτει δὲ πάλιν καὶ τὸν τέλειον διαμερισμόν, καὶ εἰ μὲν ἓν γράμμα κἀκεῖνός ἐστι, καὶ ἐπὶ τούτου ὁμοίως ποίησον ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ τζακίσματος καὶ τοῦ μεριστοῦ, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν κάτωθεν τῶν ζ΄ – θὲς τοῦτο κάτωθεν τῆς αὐτῆς κεραίας γραμμῆς. εἰ δὲ πλεῖστα ἐστὶ γράμματα καὶ ὁ τέλειος διαμερισμός, ἀνὰ δύο λάμβανε καὶ μέριζε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ μέχρι τοῦ τελευταίου γράμματος τοῦ τελείου διαμερισμοῦ, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν κάτωθεν τῶν ζ΄ – θὲς τοῦτο κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς.
ἔπειτα πολλ(α)πλασίασον τὰ δύο γράμματα τὰ ἄνωθεν καὶ κάτωθεν ὄντα τῆς κεραίας γραμμῆς. καὶ εἰ μέν ἐστι τὸ ἄνωθεν ἢ τὸ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς α΄, τὸ δὲ ἕτερον γ΄, πολλ(α)πλασιαζόμενα ταῦτα ἅπαξ τὰ γ΄ πάλιν ἐστὶ γ΄ ἢ ἅπαξ τὰ δ΄ πάλιν ἐστὶ δ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως. εἰ δὲ τὸ ἄνωθεν ἢ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς γράμμα δηλοῖ πλέον ἑνός, καὶ τὸ μέν ἐστι β΄, τὸ δὲ γ΄, ἢ πάλιν τὸ μέν ἐστι γ΄, τὸ δὲ δ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, πολλ(α)πλασιαζόμενα τὰ δύο γράμματα δὶς τὰ γ΄ γίνονται ς΄ ἢ πάλιν τρὶς τὰ δ΄ γίνονται ιβ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως.
καὶ ὅσος ἂν γένηται ὁ πολλ(α)πλασιασμὸς τοῦ ἄνωθεν καὶ κάτωθεν γράμματος τῆς κεραίας γραμμῆς, ἕνωσον τοῦτον μετὰ τοῦ κειμένου τε καὶ εὑρισκομένου γράμματος περὶ τὸ τέλος τῆς αὐτῆς κεραίας γραμμῆς, ὅπερ ἐστὶ τοῦ τζακίσματος. καὶ ὅση ἂν γένηται ἡ ψῆφος τῶν τριῶν τούτων γραμμάτων – εἰ μὲν πλεῖο τῶν ζ΄ ἐστί, ἄφελε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν κάτωθεν τῶν ζ΄ – θὲς τοῦτο ἐντὸς κύκλου τινός. εἰ δὲ ὁ περισυναγμὸς τῶν τριῶν γραμμάτων, ὧν εἴπομεν, δηλοῖ ἐλάττω τῶν ζ΄, θὲς ταῦτα πάλιν ἐντὸς κύκλου τινός, ἐπεὶ ἐλάττονά εἰσι τῶν ζ΄. εἰ δὲ οὔτε πλείονά εἰσι τῶν ζ΄ οὔτε ἐλάττω, ἀλλ᾽ ἔστι ζ΄ ὁ περισυναγμὸς τῶν τριῶν γραμμάτων, ἄφελε ἅπαξ ζ΄ ἐκ τῶν ζ΄ καὶ ἀπομένει ι΄. θὲς οὖν ἀντὶ ἄλλου τινὸς γράμματος ἐντὸς κύκλου ι΄. ὅταν δὲ τύχῃ κείμενον ἄνωθεν ἢ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς ι΄, οὐ δύνασαι πολλ(α)πλασιάσαι τὸ ι΄ μετὰ ἑτέρου τινὸς γράμματος, ἐπεὶ τὸ πολλ(α)πλασιαζόμενον γράμμα μετὰ τοῦ ι΄ οὐκ ἐπιδέχεται αὔξησι(ν), ἀλλὰ μᾶλλον καὶ αὐτὸ ι΄ γίνεται. κἂντε οὖν τὰ δύο γράμματα τὰ ἄνωθεν καὶ κάτωθεν ὄντα τῆς κεραίας γραμμῆς ἐστι ι΄, κἂντε τὸ μέν ἐστι ι΄, τὸ δ᾽ ἕτερόν ἐστι δηλωτικόν τινος ἀριθμοῦ, ἀνενέργητα μένοσι, ὡς ι΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνεσθαι. λάμβανε δὲ μόνον τὸ περὶ τὸ τέλος τῆς κεραίας γραμμῆς κείμενον γράμμα, ὅπερ ἐστὶ τοῦ τζακίσματος, καὶ θὲς τοῦτο ἐντὸς κύκλου τινός. εἰ δὲ τὸ περὶ τὸ τέλος τῆς αὐτῆς κεραίας γραμμῆς κείμενον γράμμα ἐστὶ ι΄, ἄνωθεν δὲ καὶ κάτωθεν τῆς αὐτῆς κεραίας γραμμῆς εἰσι δηλωτικὰ δύο τινὰ γράμματα, πολλ(α)πλασίαζε ταῦτα, κἂντε ἅπαξ κἂντε πολλ(ά)κις ἔχῃς ταῦτα πολλ(α)πλασιάσαι. καὶ τὸν ἐκ τούτων γενόμενον πολλ(α)πλασιασμὸν ἐπὶ τῶν ζ΄ μέρισον, εἴπερ ἐστὶ πλεῖο τῶν ζ΄, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν κάτωθεν τῶν ζ΄ ἐντὸς κύκλου γράψον ὡς σύνηθες. ἔασον δὲ τὸ ι΄, ὅπερ ἐστὶ περὶ τὸ τέλος τῆς κεραίας γραμμῆς, ὡς οὐδὲν ὄντα.
μετὰ δὲ τὸ τελέσαι τὴν πρώτην ταύτην μαρτυρίαν, καθ᾽ ὃν τρόπον λέγομεν, ζήτει καὶ τὸν ἄνωθεν ἀριθμόν, ὃν εἰώθαμεν ἐξαρχῆς θέτειν πρὸς τὸ διαμερίσαι. καὶ ἐκ τούτου ἀνὰ δύο λάμβανε γράμματα καὶ τὰς δηλωτικὰς ψήφους αὐτῶν ἐπὶ τῶν ζ΄ μέριζε μέχρι καὶ τοῦ τελευταίου γράμματος, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων σαφέστερον δεδηλώκαμεν. τὸ ἐναπομεῖναν δὲ κάτωθεν τῶν ζ΄ – θὲς καὶ τοῦτο ἐντὸς κύκλου τινός. εἰ μὲν οὖν εὑρεθῶσι αἱ δύο μαρτυρίαι, ἃς ἔθηκας ἐντὸς κύκλων, ὅμοιαι, ἔστι ὀρθὸς ὁ ἐξελθὼν

---

20 ἐλάττω] vel ἔλαττο 26 αὔξησιν] αὐξεσι C 35 εἴπερ] ὑπερ C 37 ὄντα] sic pro ὂν C 42 ἐναπομεῖναν] ἐννααπὸμήναν C

τέλειος διαμερισμός, εἰ δὲ ὧσι ἀνόμοιαι αἱ δύο τούτων μαρτυρίαι, ἡ μὲν ἔχουσα οὕτως, ἡ δὲ ἄλλως πως, οὐ καλῶς ἤδη ἐγένετο ὁ τέλειος διαμερισμός.

δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, ὡς ἔλαττον χρὴ εἶναι πάντῃ τὸ τζάκισμα τῆς τοῦ μεριστοῦ δηλουμένης ποσότητος. διὰ γὰρ τοῦτο καὶ τζάκισμα λέγεται ὡς τοῦ μεριστοῦ ἔλαττο || f. 28r
ὄντα. τὸ γὰρ ἔλαττο τοῦ μείζονος δικαίως ἂν λέγοιτο τζάκισμα. διατμηθὲν γάρ, ὡς ἂν εἴπῃ τις, γέγονε τζάκισμα. εἰ μὲν οὖν τὸ τζάκισμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ μεριστοῦ, ἀληθῶς καὶ καλῶς ἐστι τζάκισμα. εἰ δὲ μεῖζόν ἐστι ἢ καταπάντα ἴσον καὶ ὅμοιον μηδὲν ὅλως τοῦ μεριστοῦ ἐλαττούμενον, καὶ αὖθις οὐ καλῶς – οἶσθα – γέγονε ὁ τέλειος διαμερισμός, ὃν ἐποίησας. μεταποιήσας δὲ πάλιν τὸν τούτων διαμερισμὸν εὑρήσεις πάντως ἔλαττο εἶναι τὸ τζάκισμα· οὐδὲ γὰρ ψευ<σ>θήσεται πώποτε τὸ μὴ ἄλλως ἐνδέχεσθαι εἶναι.

λθ **Περὶ τοῦ ἐν μόνῃ φαντασίᾳ γενομένου διαμερισμοῦ**

Μὴ μόνον δὲ ἐν μόνῃ φαντασίᾳ πολλ(α)πλασιάζειν ἔστι, ἀλλὰ καὶ διαμερίζειν ἔξεστιν, οὐκ ἐπὶ πάντων, ἀλλ' ἐξ ὧν ἔστι τῶν ἐνδεχομένων διαμερίσαι τῷ τρόπῳ τούτῳ.

σκόπει τοίνυν καλῶς οὐκ ἐπὶ τῶν διαμεριζομένων μειζόνων σωμάτων, ἀλλ' ἐπὶ τοῦ διαμερίζοντος, ὅπερ εἰώθαμεν καλεῖν μεριστήν, τίνες ἂν ἀριθμοί εἰσι ἐπιστρεπτικοί. καὶ ὅσοι ἂν ἀριθμοὶ τοῦ ζητουμένου μεριστοῦ εἰσι ἐπιστρεπτικοί, ἔχῃς ἂν καλῶς διαμερίσαι ἐν μόνῃ τῇ σῇ φαντασίᾳ ἀγράφως τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, ὅσοι δὲ οὐκ ἐπιστρέφοσι, οὐκ ἔχεις διαμερίσαι ἐν τῇ σῇ φαντασίᾳ. ἐπιστρεπτικοὺς δὲ ἀριθμοὺς λέγομεν τοὺς διττῶς πολλ(α)πλασιαζομένους καὶ πάλιν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπιστρέφοντας ὡς τὰ κα΄ – τρὶς γὰρ ζ΄ γίνονται κα΄ καὶ ζ΄κις γ΄ πάλιν γίνονται κα΄ – ἢ πάλιν ὡς τὰ κη΄ – δ΄κις γὰρ ζ΄ γίνονται κη΄ καὶ ζ΄κις δ΄ πάλιν γίνονται κη΄ – ἢ πάλιν ὡς τὰ λ΄ – ε΄κις γὰρ ς΄ γίνονται λ΄ καὶ ς΄κις ε΄ πάλιν γίνονται λ΄ – ἢ πάλιν ὡς τὰ ρ΄ – ε΄κις γὰρ κ΄ γίνονται ρ΄ καὶ κ΄κις ε΄ πάλιν γίνονται ρ΄ – καὶ ἑξῆς ὁμοίως πάντα ἄλλον ἐπιστρεπτικὸν ἀριθμὸν τῷ τρόπῳ τούτῳ διττῶς πολλ(α)πλασιαζόμενον. οἱ δὲ μήπω στρέφοντές εἰσι ὡς τὰ ια΄ καὶ ιζ΄ καὶ κγ΄ καὶ λα΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως. εἰσὶ γὰρ ἀμέριστοι καὶ ἀνυπόστροφοι ἀριθμοὶ καὶ οὐ δύνασαι δι' αὐτῶν διαμερίσαι τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, ὃν βούλ(ει) διαμερίσαι.

ρ΄ μετὰ τῶν ιη΄ διαμεριζόμενα

Τὰ ιη΄ ἐπιστρέφοσι· δὶς γὰρ θ΄ γίνονται ιη΄ καὶ θ΄κις β΄ πάλιν γίνονται ιη΄. μέρισον τὰ ρ΄ εἰς μέρη δύο, καθὼς γίνονται καὶ τὰ δὶς θ΄ ιη΄. μεριζόμενα δὲ τὰ ρ΄ εἰς μέρη δύο γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δύο ἀνὰ ν΄. μέρισον δὲ τὰ ν΄ μετὰ τῶν θ΄· ε΄κις οὖν θ΄ γίνονται με΄, ἀπομένοσι καὶ ε΄ τζάκισμα μέχρι τῶν ν΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ τῇ σῇ φαντασίᾳ, ὅτι τὰ ρ΄ μετὰ τῶν ιη΄ διαμεριζόμενα γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς ε΄, καθότι ε΄κις ἐχώρεσαν τὰ θ΄ ἐπὶ τῶν ν΄, καὶ ἀπομένει καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\varepsilon}{\theta}$.

ρκ΄ μετὰ τῶν ιη΄ διαμεριζόμενα

Μέρισον καὶ τὰ ρκ΄ εἰς μέρη δύο, καθὼς καὶ ἐπὶ τῶν ρ΄ οὕτως ἐποίησας, καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δύο ἀνὰ ξ΄. μέρισον δὲ τὰ ξ΄ μετὰ τῶν θ΄· ς΄κις οὖν θ΄ γίνονται νδ΄, ἀπομένοσι καὶ τζάκισμα ς΄ μέχρι τῶν ξ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ τῇ σῇ φαντασίᾳ, ὅτι τὰ ρκ΄ μετὰ τῶν ιη΄ διαμεριζόμενα γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς ς΄, καθότι ς΄κις ἐχώρεσαν τὰ θ΄ ἐπὶ τῶν ξ΄, καὶ ἀπομένει καὶ τὸ παρὸν

---

3 παντῃ] πανται **C** 5 λέγοιτο] λέγῖτο **C** 8 οἶσθα] εἶσθα **C** 13 ἔξεστιν] ἐξέσθιν **C**
20 διττῶς] δυτὼς **C** 26 μήπω στρέφοντες] μη``πο στρέφωνταις **C**

τζάκισμα $\frac{\varsigma}{\vartheta}$, τουτέστι τὰ ς΄, ἅπερ ἀπολείπονται τὰ νδ΄ πρὸς τὸ γενέσθαι ξ΄. τὰ δὲ ς΄ μετὰ τῶν ϑ΄ συγκρινόμενά ἐστι δύο τρίτα ἑνὸς ἀκεραίου.

Καὶ ἄλλως πάλιν τὰ ιη΄ ἐπιστρέφοσι καὶ οὕτως· τρὶς ς΄ γίνονται ιη΄ καὶ ς΄κις γ΄ πάλιν γίνονται ιη΄. μέρισον τὰ ρκ΄ εἰς μέρη γ΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν γ΄ ἀνὰ μ΄· τρὶς γὰρ μ΄ ρκ΄ γίνονται. μέρισον τὰ μ΄ μετὰ τῶν ς΄· ς΄κις οὖν ς΄ γίνονται λς΄, ἀπομένοσι καὶ δ΄ τζάκισμα μέχρι τῶν μ΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ τέλειος τούτων διαμερισμός ἐστι ς΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\delta}{\varsigma}$, ὅπερ ἔχει τοιοῦτον λόγον, ὃν ἔχοσι τὰ ς΄ πρὸς τὰ ϑ΄, τουτέστι δύο τρίτα ἑνὸς ἀκεραίου.

Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) μέρισον τὰ ρκ΄ εἰς μέρη ς΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν ς΄ ἀνὰ κ΄· ς΄κις γὰρ κ΄ ρκ΄ γίνονται. καὶ ὥσπερ ἐμέρισας τὰ ρκ΄ μετὰ τῶν γ΄ καὶ ἐγένοντο μ΄, ἐμέρισας δὲ τὰ μ΄ μετὰ τῶν ς΄, νῦν μερίσας τὰ ρκ΄ εἰς μέρη ς΄ καὶ ἐγένετο ἕκαστον ἕκτον ἀνὰ κ΄. μέρισον τὰ κ΄ μετὰ τῶν γ΄· ς΄κις οὖν γ΄ γίνονται ιη΄, περισσεύοσι καὶ β΄ τζάκισμα μέχρι τῶν κ΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ τέλειος τούτων διαμερισμός ἐστι ς΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\beta}{\gamma}$, ὅπερ ἔχει τοιοῦτον λόγον, ὃν ἔχοσι τὰ ς΄ πρὸς τὰ ϑ΄ καὶ τὰ δ΄ πρὸς τὰ ς΄, τουτέστι δύο τρίτα ἑνὸς ἀκεραίου.

τ΄ μετὰ τῶν κα΄ διαμεριζόμενα

Τὰ κα΄ ἐπιστρέφοσι· τρὶς γὰρ ζ΄ γίνονται κα΄ καὶ ζ΄κις γ΄ πάλιν γίνονται κα΄. μέρισον τὰ τ΄ εἰς μέρη γ΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν γ΄ ἀνὰ ρ΄. μέρισον τὰ ρ΄ μετὰ τῶν ζ΄· ιδ΄κις οὖν ζ΄ γίνονται ϛη΄, ἀπομένοσι καὶ β΄ τζάκισμα μέχρι τῶν ρ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ τέλειος διαμερισμὸς τῶν τ΄ μετὰ τῶν κα΄ ἐστὶ ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\zeta}$. καὶ γὰρ τοσαυτά<κις> ἐχώρεσαν τὰ ζ΄ πρὸς τὰ ρ΄.

τ΄ μετὰ τῶν κδ΄ διαμεριζόμενα

Τὰ κδ΄ ἐπιστρέφοσι· δὶς γὰρ ιβ΄ γίνονται κδ΄ καὶ ιβ΄κις β΄ πάλιν γίνονται κδ΄. μέρισον τὰ τ΄ εἰς μέρη δύο καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δύο ἀνὰ ρν΄. μέρισον τὰ ρν΄ μετὰ τῶν ιβ΄· ιβ΄κις οὖν ιβ΄ γίνονται ρμδ΄. χωρῶσι δὲ τὰ ιβ΄ εἰς τὰ ρν΄ ιβ΄κις καὶ ἀπομένοσι καὶ ς΄ τζάκισμα μέχρι τῶν ρν΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ τέλειος διαμερισμὸς τῶν τ΄ μετὰ τῶν κδ΄ ἐστὶ ιβ΄ καὶ $\frac{\varsigma}{\iota\beta}$, ἅπερ ἐστὶ μέρος μισὸν ἑνὸς ἀκεραίου, τουτέστι ιβ΄ς″.

Καὶ ἄλλως πάλιν μέρισον τὰ τ΄ εἰς μέρη ιβ΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν ιβ΄ ἀνὰ κε΄· ιβ΄κις γὰρ κε΄ τ΄ γίνονται. καὶ ὥσπερ ἐμέρισας τὰ τ΄ εἰς μέρη δύο || καὶ ἐγένετο ἕκαστον μέρος τῶν δύο ἀνὰ ρν΄, ἐμέρισας δὲ τὰ ρν΄ μετὰ τῶν ιβ΄, οὕτως καὶ νῦν τὸ ἀνάπαλι(ν) ποίησον. μερίσας γὰρ τὰ τ΄ εἰς μέρη ιβ΄ ἐγένετο ἕκαστον μέρος τῶν ιβ΄ ἀνὰ κε΄. μέρισον δὲ τὰ κε΄ μετὰ τῶν β΄· ιβ΄κις οὖν β΄ γίνονται κδ΄, περισσεύει καὶ α΄ τζάκισμα μέχρι τῶν κε΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὗρες, ὅτι ὁ τέλειος τούτων διαμερισμός ἐστι ιβ΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\alpha}{\beta}$, τουτέστι ιβ΄ς″. ὥσπερ γὰρ τὸ τζάκισμα, ὅπερ ἀπέμεινε, πρότερον ἦν $\frac{\varsigma}{\iota\beta}$, τὰ δὲ ς΄ πρὸς τὰ <ιβ΄> ἐστὶ μέρος μισόν, οὕτως καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\alpha}{\beta}$ – τὸ α΄ πρὸς τὰ β΄ μισὸν μέρος ἐστί. f. 28^{v}

Καὶ ἄλλως πάλιν τὰ κδ΄ ἐπιστρέφοσι καὶ οὕτως· δ΄κις ς΄ γίνονται κδ΄ καὶ ς΄κις δ΄ γίνονται πάλιν κδ΄. μέρισον τὰ τ΄ εἰς μέρη δ΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δ΄ ἀνὰ οε΄· δ΄κις γὰρ οε΄ τ΄ γίνονται. μέρισον τὰ οε΄ μετὰ τῶν ς΄· ιβ΄κις οὖν ς΄ γίνονται οβ΄, ἀπομένοσι καὶ γ΄ τζάκισμα μέχρι τῶν οε΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ τέλειος διαμερισμὸς τῶν τ΄ μετὰ τῶν κδ΄ ἐστὶ ιβ΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\chi}{\varsigma}$, τουτέστι ιβ΄ς″. τὰ γ΄ γὰρ πρὸς τὰ ς΄ μισὸν μέρος ἐστὶ ὥσπερ καὶ τὰ ς΄ πρὸς τὰ ιβ΄ καὶ τὸ α΄ πρὸς τὰ β΄.

Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) μέρισον τὰ τ΄ εἰς μέρη ς΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν ς΄ ἀνὰ

ν΄. μέρισον τὰ ν΄ μετὰ τῶν δ΄· ιβ΄κις οὖν δ΄ γίνονται μη΄, ἀπομένει καὶ β΄ τζάκισμα μέχρι τῶν ν΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὕρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ τέλειος διαμερισμὸς τῶν τ΄ μετὰ τῶν κδ΄ ἐστὶ ιβ΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\beta}{\delta}$, τουτέστι ιβ΄ς″. τὰ γὰρ β΄ πρὸς τὰ δ΄ μισὸν μέρος ἐστί.

υ΄ μετὰ τῶν λς΄ διαμεριζόμενα

Τὰ λς΄ ἐπιστρέφοσι· δὶς γὰρ ιη΄ γίνονται λς΄ καὶ ιη΄κις β΄ γίνονται πάλιν λς΄. μέρισον τὰ υ΄ εἰς μέρη δύο καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δύο ἀνὰ σ΄. μέρισον τὰ σ΄ μετὰ τῶν ιη΄· ια΄κις οὖν ιη΄ γίνονται ρϛη΄, ἀπομένει καὶ τζάκισμα β΄ μέχρι τῶν σ΄. καὶ ἰδοὺ εὕρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ τέλειος διαμερισμὸς τῶν υ΄ μετὰ τῶν λς΄ ἐστὶ ια΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\beta}{\iota\eta}$, ὅπερ δηλοῖ β΄ ὀκτακαιδέκατα.

Τὰ λς΄ ἐπιστρέφοσι καὶ οὕτως· τρὶς ιβ΄ γίνονται λς΄ καὶ ιβ΄κις γ΄ πάλιν γίνονται λς΄. οὐ δύνασαι οὖν μερίσαι εἰς μέρη γ΄ τὰ υ΄, ἀλλ᾽ οὐδὲ πάλιν εἰς μέρη ιβ΄ δύνασαι μερίσαι τὰ υ΄, διὸ οὐδὲ τὸν τέλειον διαμερισμὸν τῶν υ΄ μετὰ τῆς ἐπιστροφῆς τῶν γ΄ καὶ ιβ΄ τῶν πολλ(α)πλασιαζόντων τὰ λς΄ ἐναλλὰξ δύνασαι εὑρεῖν.

εἰ δὲ τὰ υ΄ ἦν ἂν χ΄, μέρισον τὰ χ΄ εἰς μέρη γ΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν τριῶν ἀνὰ σ΄. μέρισον δὲ τὰ σ΄ μετὰ τῶν ιβ΄· ις΄κις οὖν ιβ΄ γίνονται ρϛβ΄, ἀπομένει καὶ τζάκισμα η΄ μέχρι τῶν σ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ διαμερισμὸς τῶν χ΄ μετὰ τῶν λς΄ ἐστὶ ις΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\eta}{\iota\beta}$, ἅπερ ἐστὶ ις΄ καὶ δύο τρίτα ἑνὸς ἀκεραίου· δὶς γὰρ δ΄ γίνονται η΄ καὶ τρὶς δ΄ γίνονται ιβ΄.

Καὶ τὸ ἀνάπαλιν μέρισον τὰ χ΄ μετὰ τῶν ιβ΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν ιβ΄ ἀνὰ ν΄. μέρισον τὰ ν΄ μετὰ τῶν γ΄· ις΄κις οὖν γ΄ γίνονται μη΄, ἀπομένει καὶ τζάκισμα β΄ μέχρι τῶν ν΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὕρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ τέλειος διαμερισμὸς τῶν χ΄ μετὰ τῶν λς΄ ἐστὶ ις΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\beta}{\gamma}$, τουτέστι ις΄ καὶ δύο τρίτα ἑνὸς ἀκεραίου. τὰ γὰρ β΄ πρὸς τὰ γ΄ τοιοῦτον λόγον ἔχοσ(ι), ὃν ἔχοσι καὶ τὰ η΄ πρὸς τὰ ιβ΄.

Τὰ λς΄ ἐπιστρέφοσι καὶ οὕτως· ς΄κις ς΄ γίνονται λς΄ καὶ ς΄ ς΄κις πάλιν γίνονται λς΄. οὐ δύνασαι οὖν μερίσαι εἰς μέρη ς΄ τὰ υ΄, διὸ οὐδὲ τὸν διαμερισμὸν τῶν υ΄ δύνασαι εὑρεῖν μετὰ τῆς ἐπιστροφῆς τῶν ς΄.

μέρισον δὲ τὰ χ΄ εἰς μέρη ς΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν ς΄ ἀνὰ ρ΄. μέρισον τὰ ρ΄ μετὰ τῆς τῶν ς΄ τῆς δευτέρας δηλονότι ἐπιστροφῆς τῶν λς΄, ἧς εἴπομεν, ὅτι ς΄κις ς΄ γίνονται λς΄ καὶ ς΄ ς΄κις πάλιν γίνονται λς΄. μεριζόμενα δὲ τὰ ρ΄ μετὰ τῶν ς΄ ις΄κις ς΄ γίνονται ϛς΄, ἀπομένοσι καὶ δ΄ τζάκισμα μέχρι τῶν ρ΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὕρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ διαμερισμὸς τῶν χ΄ μετὰ τῶν λς΄ ἐστὶ ις΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\delta}{\varsigma}$, τουτέστι ις΄ καὶ δύο τρίτα ἑνὸς ἀκεραίου. ὃν γὰρ λόγον ἔχοσι τὰ η΄ πρὸς τὰ ιβ΄ καὶ τὰ β΄ πρὸς τὰ γ΄, τὸν αὐτὸν ἔχοσι καὶ τὰ δ΄ πρὸς τὰ ς΄.

,αυ΄ μετὰ τῶν ξδ΄ διαμεριζόμενα

Τὰ ξδ΄ ἐπιστρέφοσι· δὶς γὰρ λβ΄ γίνονται ξδ΄ καὶ λβ΄ δὶς πάλιν γίνονται ξδ΄. μέρισον τὰ ,αυ΄ εἰς μέρη δύο καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δύο ἀνὰ ψ΄. μέρισον τὰ ψ΄ μετὰ τῶν λβ΄· ι΄κις δὲ λβ΄ γίνονται τκ΄, κ΄κις δὲ λβ΄ γίνονται δὶς τκ΄, τουτέστι χμ΄. πρόσθες καὶ ἅπαξ λβ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ χοβ΄. κα΄κις οὖν λβ΄ γίνονται χοβ΄, ἀπομένοσι καὶ τζάκισμα κη΄ μέχρι τῶν ψ΄. καὶ ἰδοὺ εὕρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ τέλειος διαμερισμὸς τῶν ,αυ΄ μετὰ τῶν ξδ΄ ἐστὶ κα΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\kappa\eta}{\lambda\beta}$, τουτέστι κα΄ καὶ ζ΄ ὄγδοα ἑνὸς ἀκεραίου. δ΄κις γὰρ ζ΄ γίνονται κη΄ καὶ δ΄κις η΄ γίνονται λβ΄.

---

10 ὀκτακαιδέκατα] **vel** ὀκτὰ καὶ δέκατα 40 χοβ΄ **(bis)**] ψοβ **(bis) falso C**

Τὰ ξδ΄ ἐπιστρέφοσι καὶ οὕτως· δ΄κις ις΄ γίνονται ξδ΄ καὶ ις΄κις δ΄ γίνονται πάλιν ξδ΄. μέρισον τὰ ,αυ΄ εἰς μέρη δ΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δ΄ ἀνὰ τν΄. μέρισον τὰ τν΄ μετὰ τῶν ις΄· ι΄κις οὖν ις΄ γίνονται ρξ΄, κ΄κις οὖν ις΄ γίνονται δὶς ρξ΄, τουτέστι τκ΄. πρόσθες καὶ ἅπαξ ις΄ – ὁμοῦ τλς΄. κα΄κις οὖν ις΄ γίνονται τλς΄, ἀπομένει καὶ τζάκισμα ιδ΄ μέχρι τῶν τν΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ τέλειος διαμερισμὸς τῶν ,αυ΄ μετὰ τῶν ξδ΄ ἐστὶ κα΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\iota\delta}{\iota\varsigma}$, τουτέστι κα΄ καὶ ζ΄ ὄγδοα ἑνὸς ἀκεραίου. ὃν γὰρ λόγον ἔχουσι τὰ κη΄ πρὸς τὰ λβ΄, τὸν αὐτὸν ἔχουσι καὶ τὰ ιδ΄ πρὸς τὰ ις΄. δὶς γὰρ ιδ΄ γίνονται κη΄ καὶ δὶς ις΄ γίνονται λβ΄. καὶ ὃν λόγον ἔχουσι τὰ ιδ΄ πρὸς τὰ ις΄, τὸν αὐτὸν ἔχουσι καὶ τὰ ζ΄ πρὸς τὰ η΄. δὶς γὰρ ζ΄ γίνονται ιδ΄ καὶ δὶς η΄ γίνονται ις΄, καθὼς ἐροῦμεν τὸ περὶ τούτου σαφέστερον μετὰ τὸ ἀποδῶσαι τὸ παρὸν ζήτημα τοῦ ἐν φαντασίᾳ γενομένου διαμερισμοῦ.

Τὰ ξδ΄ ἐπιστρέφοσι καὶ οὕτως· η΄κις η΄ γίνονται ξδ΄ καὶ η΄ ὀκτάκις πάλιν γίνονται ξδ΄. μέρισον τὰ ,αυ΄ εἰς μέρη η΄ καὶ γίνεται ‖ ἕκαστον μέρος τῶν η΄ ἀνὰ ροε΄· f. 29^{r}
η΄κις γὰρ ροε΄ γίνονται ,αυ΄. μέρισον τὰ ροε΄ μετὰ τῶν η΄, ἐπεὶ καὶ ἡ δευτέρα ἐπιστροφή ἐστι η΄· η΄κις γὰρ η΄ γίνονται ξδ΄. τὰ δὲ ροε΄ μετὰ τῶν η΄ μεριζόμενα κα΄κις η΄ γίνονται ρξη΄· δ΄κις γὰρ κα΄ γίνονται πδ΄ καὶ η΄κις κα΄ γίνονται ρξη΄. καὶ ἰδοὺ κα΄κις η΄ γίνονται ρξη΄, περισσεύοσι καὶ ζ΄ τζάκισμα μέχρι τῶν ροε΄. εὗρες οὖν καὶ οὕτως ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ τέλειος διαμερισμὸς τῶν ,αυ΄ μετὰ τῶν ξδ΄ ἐστὶ κα΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\zeta}{\eta}$, τουτέστι κα΄ καὶ ζ΄ ὄγδοα ἑνὸς ἀκεραίου.

ρπ΄ χιλιάδαι μετὰ τῶν ρκ΄ διαμεριζόμεναι

Τὰ ρκ΄ ἐπιστρέφοσι· ς΄κις γὰρ κ΄ γίνονται ρκ΄ καὶ κ΄κις ς΄ πάλιν γίνονται ρκ΄. μέρισον τὰς ρπ΄ χιλιάδας εἰς μέρη κ΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν κ΄ ἀνὰ ,ϑ΄· κ΄κις γὰρ ,ϑ΄ γίνονται ρπ΄ χιλιάδαι. μέρισον τὰς ϑ΄ χιλιάδας μετὰ τῶν ς΄, τουτέστι εἰς μέρη ς΄, καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν ς΄ ἀνὰ ,αφ΄· ς΄κις γὰρ ,αφ΄ γίνονται ,ϑ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐν μόνῃ φαντασίᾳ, ὅτι ὁ τέλειος διαμερισμὸς τῶν ρπ΄ χιλιάδων μετὰ τῶν ρκ΄ ἐστὶ ,αφ΄, καθότι τὰ ς΄ πρὸς τὰ ,ϑ΄ τοσαυτάκις χωρῶσι, τουτέστι ,αφ΄κις. ,α΄κις γὰρ ς΄ γίνονται ,ς΄ καὶ φ΄κις ς΄ γίνονται ,γ΄, ,ς΄ δὲ καὶ ,γ΄ ὁμοῦ γίνονται ,ϑ΄. καὶ ὥσπερ χωρῶσι τὰ ς΄ πρὸς τὰ ,ϑ΄ ,αφ΄κις, οὕτως χωρῶσι καὶ τὰ ρκ΄ πρὸς τὰς ρπ΄ χιλ(ι)άδας. ὃν γὰρ λόγον ἔχουσι τὰ ς΄ πρὸς τὰ ,ϑ΄, τὸν αὐτὸν ἔχουσι καὶ τὰ ρκ΄ πρὸς τὰς ρπ΄ χιλ(ι)άδας.

Τὰ ρκ΄ ἐπιστρέφοσι καὶ οὕτως· ιβ΄κις ι΄ γίνονται ρκ΄ καὶ ι΄κις ιβ΄ πάλιν γίνονται ρκ΄. μέρισον τὰς ρπ΄ χιλ(ι)άδας εἰς μέρη ι΄ καὶ γίνεται ἑκάστη μερὶς τῶν ι΄ ἀνὰ ιη΄ χιλ(ι)άδας· ι΄κις γὰρ ιη΄ γίνονται ρπ΄. μέρισον τὰς ιη΄ χιλιάδας μετὰ τῶν ιβ΄, τουτέστι εἰς μέρη ιβ΄, καὶ οὕτως πάλιν ἑκάστη μερὶς τῶν ιβ΄ γίνεται ἀνὰ ,αφ΄· ιβ΄κις γὰρ ,αφ΄ γίνονται ιη΄ χιλιάδαι. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὗρες, ὅτι ὁ τέλειος διαμερισμὸς τῶν ρπ΄ χιλιάδων μετὰ τῶν ρκ΄ ἐστὶ ,αφ΄.

Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) μέρισον τὰς ρπ΄ χιλ(ι)άδας εἰς μέρη ιβ΄ καὶ γίνεται ἑκάστη μερὶς τῶν ιβ΄ ἀνὰ ιε΄ χιλιάδας· ιβ΄κις γὰρ ιε΄ γίνονται ρπ΄. μέρισον τὰς ιε΄ χιλ(ι)άδας μετὰ τῶν ι΄ καὶ γίνεται πάλιν ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς ,αφ΄· ι΄κις γὰρ ,αφ΄ ιε΄ χιλ(ι)άδαι γίνονται.

Ὡσαύτως καὶ πάντα ἕτερον ἐπιστρεπτικὸν ἀριθμὸν ἔχεις διαμερίζειν ἐν μόνῃ τῇ σῇ φαντασίᾳ διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως καὶ εἰδέναι καλῶς πάντα τέλειον διαμερισμόν, ὃν ἂν ζητῇς, πόσος γίνεται.

---

12 διαμερισμοῦ] πολλπλασιασμου **C** 29 ,αφ΄κις] ,αφ ἀκοις **C**

μ **Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι, τίνα λόγον ἔχει τὸ τζάκισμα πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον, ἀκέραιον ὄντα ἢ καὶ σχιζόμενον, τουτέστι διατμηθέν**

῎Οταν βούλῃ εἰδέναι, τίνα λόγον ἔχει τὸ τζάκισμα πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον, τρίτον δηλονότι ἢ τέταρτον ἢ καὶ ὡς ἄλλως ἔχει δηλῶσαι – εἰ μὲν δύνασαι κατανοῆσαι τοῦτο καλῶς, ὡς ὁρᾶται κείμενον ἄνωθεν τοῦ μεριστοῦ καὶ τῆς κεραίας γραμμῆς, τίνα λόγον ἔχει πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον, ἤδη ἔχεις καλῶς τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ ἀκεραίου ὄντος τοῦ τζακίσματος καὶ τοῦ μεριστοῦ οὐ δύνασαι κατανοῆσαι καλῶς, τίνα λόγον ἔχει τὸ τζάκισμα πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον, σχίσον τὸ τζάκισμα εἰς ἐλάχιστα μέρη. τὸ δὲ σχίσον – μέρισον βούλ(ε)ται – εἰς ἐλάχιστα μέρη οὕτως, ὥστε ἐνδέχεσθαι σχίσαι καὶ διαμερίσασθαι καὶ τὸν μεριστὴν εἰς τοσαῦτα μέρη, ὅσα ἂν καὶ τὸ τζάκισμα ἔσχισας. εἰ οὖν τὸ τζάκισμα ἔσχισας εἰς μέρη δέκα, καὶ τὸν μεριστὴν εἰς μέρη σχίσον δέκα. εἰ δὲ εἰς κ΄ ἢ καὶ λ΄ ἔσχισας τὸ τζάκισμα, καὶ τὸν μεριστὴν ὁμοίως εἰς κ΄ ἢ καὶ λ΄ μέρη σχίσον. καὶ ὡς ἐν συντόμῳ εἰπεῖν, εἰς ὅσα ἂν μέρη σχίσῃς τὸ τζάκισμα, εἰς τοσαῦτα μέρη σχίσον καὶ τὸν μεριστήν. τοῦτο δὲ ποίει οὕτως, μέχρις ἂν ἔχῃς σχίσαι καὶ διαμερίσασθαι τὸ τζάκισμα καὶ τὸν μεριστὴν εἰ<ς> τὸ ἐλάχιστον μέρος, ὅπερ ἐνδέχεται γενέσθαι. γενόμενα δὲ τὰ δύο αὐτῶν μέρη τοῦ τζακίσματος δηλονότι καὶ τοῦ μεριστοῦ εἰς τὸ ἐλάχιστον μέρος, καθ᾽ ὃν τρόπον λέγομεν, κατανοῆσαι ἔχεις σαφέστερον, τίνα λόγον ἔχει τὸ τζάκισμα πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον.

῞Ινα δὲ σαφέστερον ὑμῖν γένηται τὸ λεγόμενον, φέρε εἴπωμεν τοῦτο καὶ δι᾽ ὑποδείγματος. ἔστω ὅτι τὸ μὲν τζάκισμα, ὅπερ ἐστὶ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, δηλοῖ ρν΄, ὁ δὲ μεριστής, ὅστις ἐστὶ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, δηλοῖ σ΄. οὕτως οὖν, ὡς ἔστι κείμενα τὸ τζάκισμα καὶ ὁ μεριστής, καὶ μὴ σχιζομένων τούτων ῥᾳδίως ἂν ἔχῃς κατανοῆσαι, τίνα λόγον ἔχει τὸ τζάκισμα, ὅπερ ἐστὶ ρν΄, συγκρινόμενον μετὰ τοῦ μεριστοῦ, ὅστις ἐστὶ σ΄. τρὶς γὰρ ν΄ γίνονται ρν΄ καὶ δ΄κις ν΄ γίνονται σ΄, καὶ τὸ μὲν τζάκισμα ἔχει τρὶς ν΄, ὁ δὲ μεριστὴς ἔχει δ΄<κις> ν΄. γ΄ δὲ καὶ δ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\gamma}{\delta}$ δηλῶσι τρία τέταρτα. καὶ ἰδοὺ μὴ σχιζομένων τῶν δύο μερῶν – τοῦ τζακίσματος λέγω καὶ τοῦ μεριστοῦ – ἀκεραίων ὄντων εὕρες, ὅτι ἔχει τὸ τζάκισμα πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον τοιοῦτον λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ γ΄ πρὸς τὰ δ΄, τουτέστι τρία τέταρτα. ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι σχιζόμενα τὸ τζάκισμα καὶ ὁ μεριστὴς γίνονται τρία τέταρτα, καθὼς καὶ μὴ σχιζομένων αὐτῶν οὕτως εὗρες, σχίσον τὸ τζάκισμα τὰ ρν΄ εἰς μέρη ν΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν ν΄ ἀνὰ γ΄· θὲς ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς γ΄. σχίσον καὶ τὸν μεριστὴν τὰ σ΄ εἰς μέρη ν΄, καθὼς ἔσχισας καὶ τὸ τζάκισμα εἰς μέρη ν΄, καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν ν΄ ἀνὰ δ΄· θὲς κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς δ΄. καὶ ἰδοὺ ἐγένετο τὸ τζάκισμα σχιζόμενον εἰς τὸ ἐλάχιστον μέρος γ΄, ὅπερ ἦν πρότερον ρν΄, ὁ δὲ μεριστὴς δ΄, ὅστις ἦν πρότερον σ΄. ὃν γὰρ λόγον ἔχουσι τὰ γ΄ πρὸς τὰ δ΄, τὸν αὐτὸν ἔχουσι καὶ τὰ ρν΄ πρὸς τὰ σ΄, τουτέστι τρία τέταρτα. καὶ ἰδοὺ καὶ πρὸ τοῦ σχίσαι τὸ τζάκισμα καὶ τὸν μεριστὴν εὗρες, ὅτι ἔχει λόγον ‖ τὸ τζάκισμα πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον τρία τέταρτα, καὶ μετὰ τὸ σχίσαι ἀμφότερα τὰ δύο μέρη αὐτῶν εὗρες πάλιν, ὅτι ἐστὶ τρία τέταρτα. πολλ(ά)κις γὰρ ἀκεραίων ὄντων τοῦ τζακίσματος καὶ τοῦ μεριστοῦ οὐ δύνασαι κατανοῆσαι καλῶς, τίνα λόγον ἔχει τὸ τζάκισ<μα> πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον. σχιζόμενα δὲ τὰ δύο μέρη αὐτῶν εἰς τὸ ἐλάχιστον μέρος, καθὼς ἂν ἔχῃ δυνάμεως

f. 29^{v}

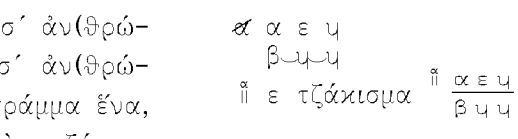
---

2 in dextro marg. fol. 29^{r}: ⊣ ζήτει τὸ παρὸν σημεῖον ἔμπροσθεν περὶ τὸ τέλος – cf. f. 142/1^{v}– f. 145^{v} extra hunc librum 43 δυνάμεως] δινάμαιος **C**

ταῦτα γενέσθαι, γενήσεταί σοι γνώριμος ὁ λόγος, ὃν ἔχει τὸ τζάκισμα πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον.

μα Περὶ τοῦ τίνα χρείαν ποιῶσι τὰ τρία τέταρτα τὸ τζάκισμα, ὅπερ ἀπέμεινε ἐκ τῶν ,αρν΄ ὑπερπύρων, ὧν διεμερίσαντο ἄν(θρωπ)οι σ΄

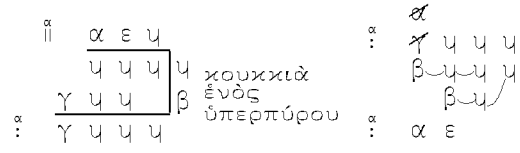
Ἵνα δὲ πάλιν ἴδῃς, τίνα χρείαν ποιῶσι τὰ τρία τέταρτα, ἅπερ εἴπομεν, ἔστω ὅτι ἄν(θρωπ)οι σ΄ ἔχοσι διαμερίσασθαι ὑπέρπυρα ,αρν΄. θὲς οὖν ἀνωθεν ὡς σύνηθες τὰ ,αρν΄ ὑπέρπυρα, κάτωθεν δὲ τοὺς σ΄ ἀν(θρώπ)ους. μέρισον δὲ τὰ ,αρν΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων, καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς γράμμα ἕνα, ὅπερ δηλοῖ ὑπέρπυρα ε΄, ἀπομένει καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\alpha\,\varepsilon\,\mu}{\beta\,\mu\,\mu}$. καὶ ἰδοὺ ἕκαστος τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,αρν΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα ε΄. τὸ δὲ τζάκισμα, ὅπερ ἀπέμεινε ἐκ τῶν ,αρν΄ ὑπερπύρων, τουτέστι τὰ ρν΄, ἔστι ὑπέρπυρα. ἔχοσι δὲ λόγον πρὸς τοὺς σ΄ ἀν(θρώπ)ους, τουτέστι τὸν μεριστήν, τρία τέταρτα, καθὼς προείπομεν. καὶ εἰ μὲν τὸ τζάκισμα ἦν ἂν σ΄, ὥσπερ ἐστὶ καὶ ὁ μεριστὴς σ΄, οἰκειώσατο ἂν ἕκαστος τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων ἀνὰ ὑπέρπυρα ς΄, τζάκισμα δὲ οὐκ ἂν ἦν τὸ τυχόν.



ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί – τὸ τζάκισμά ἐστι ὑπέρπυρα ρν΄, λείπονται καὶ ὑπέρπυρα ν΄ πρὸς τὸ γενέσθαι σ΄ – πρόσθες οὖν τὰ ν΄ ὑπέρπυρα ἐπὶ τῶν ,αρν΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,ασ΄. μέρισον τὰ ,ασ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων· ς΄κις οὖν σ΄ γίνονται ,ασ΄. καὶ ἰδοὺ, ὡς εἴπομεν, προστεθέντων τῶν ν΄ ὑπερπύρων, ὧν λείπονται τὸ τζάκισμα πρὸς τὸ γενέσθαι σ΄, ἐπὶ τῶν ,αρν΄ ὑπερπύρων καὶ γενόμενα ὑπέρπυρα ,ασ΄ οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων ὑπέρπυρα ς΄. νῦν δὲ ,αρν΄ ὑπέρπυρα ὄντα μετὰ τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων διαμεριζόμενα περιέρχεται ἕκαστον τῶν σ΄ ἀνὰ ὑπέρπυρα ε΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ρν΄, ἅπερ ἐστὶ τρία τέταρτα τῶν σ΄, ὧν ἔχεις μεριστήν.

λάβε τοίνυν καί σοι γ΄ τέταρτα ἑνὸς ὑπερπύρου. καὶ τὸ μὲν ἕνα ὑπέρπυρόν ἐστι κουκκιὰ κ΄, τὰ δὲ γ΄ τέταρτα τῶν κ΄ ἐστὶ κουκκιὰ ιε΄· τρὶς γὰρ ε΄ γίνονται ιε΄ καὶ δ΄κις ε΄ γίνονται κ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ἕκαστος τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων ἐκ τῶν ,αρν΄ ὑπερπύρων οἰκειοῦται ὑπέρπυρα ε΄ κουκκιὰ ιε΄. τοῦτό σοι ἐδήλωσε τὰ ρν΄ ὑπέρπυρα τὸ τζάκισμα, ὅτι ἕκαστος τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων οἰκειοῦται καὶ γ΄ τέταρτα ἑνὸς μεριστοῦ, ταῦτὸν δὲ εἰπεῖν ἑνὸς ὑπερπύρου γ΄ τέταρτα, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ιε΄. ὁσάκις γὰρ χωρεῖ ὁ μεριστὴς ἐπὶ τῶν διαμεριζομένων, κἄντε ὑπέρπυρά ἐστι κἄντε φλουριά, τοσαῦτα ὑπέρπυρα ἢ καὶ φλουριὰ οἰκειοῦται ἕκαστος. ε΄κις δὲ χωρέσας ὁ μεριστής, ὅστις ἐστὶ ἄν(θρωπ)οι σ΄, ἐπὶ τῶν ,αρν΄ ὑπερπύρων καὶ ε΄ ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος ἐκ τῶν ,αρν΄ ὑπερπύρων. ἀπομένει δὲ καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ρν΄. ἔστι δὲ ταῦτα γ΄ τέταρτα ἑνὸς ὑπερπύρου καὶ ἑνὸς μεριστοῦ· ταὐτὸν γάρ ἐστι. τὰ δὲ γ΄ τέταρτα τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου ἐστί, ὡς εἴπομεν, κουκκιὰ ιε΄.

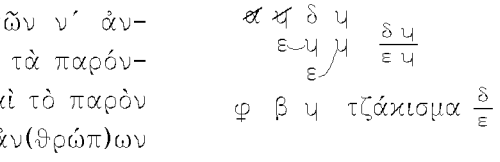
Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι ἕκαστος τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων οἰκειοῦται ἐκ τῶν ρν΄ ὑπερπύρων τοῦ τζακίσματος γ΄ τέταρτα ἑνὸς ὑπερπύρου, τουτέστι κουκκιὰ ιε΄, ποίησον τὰ ρν΄ ὑπέρπυρα τὸ τζάκισμα κουκκιά. ἔχεις δὲ ποιῆσαι προχείρως κουκκιὰ τὰ ρν΄ ὑπέρπυρα οὕτως· θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ρν΄ ὑπέρπυρα, ἐκ πλαγίου δὲ ἑνὸς



32 φλουριά] **hic et passim** ϕ̈ **C** 33 χωρέσας] **sic pro** χωρήσας **C**

ὑπερπύρου κουκκιά, τουτέστι κ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ρν΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ἐκ πλαγίου κουκκιῶν κ΄, ὡς εἰώθαμεν ποιεῖν ἐπὶ τοῦ πολλ(α)πλασιασμοῦ, καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ,γ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ρν΄ ὑπέρπυρα γίνονται κουκκιὰ ,γ΄. θὲς οὖν ἄνωθεν τὰ ,γ΄ κουκκιά, κάτωθεν δὲ θὲς μεριστὴν τοὺς σ΄ ἀν(θρώπ)ους. καὶ μέρισον τὰ ,γ΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς τὰ παρόντα δύο γράμματα α ε΄, ἅπερ δηλῶσι ιε΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ἐκ τοῦ τζακίσματος τῶν ρν΄ ὑπερπύρων, ὧν ἐποίησαν κουκκιὰ ,γ΄, οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων κουκκιὰ ιε΄, τουτέστι γ΄ τέταρτα ἑνὸς ὑπερπύρου, καθὼς καὶ ἀπὸ μόνης τῆς συγκρίσεως τῶν ρν΄ ὑπερπύρων τοῦ τζακίσματος μετὰ τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων, ὧν ἔχεις μεριστήν, εὗρες οὕτως.

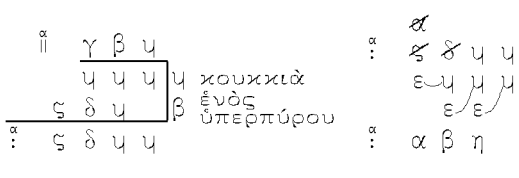
Ἔστω δὲ πάλιν, ὅτι βούλ(ει) διαμερίσαι φλουριὰ ,αμ΄ εἰς ἀν(θρώπ)ους ν΄ καὶ εἰδέναι, τί οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν ν΄ ἀν(θρώπ)ων ἐκ τῶν ,αμ΄ φλουριῶν. θὲς οὖν ἄνωθεν τὰ ,αμ΄ φλουριά, κάτωθεν δὲ μεριστὴν θὲς τοὺς ν΄ ἀν(θρώπ)ους. μέρισον δὲ τὰ ,αμ΄ φλουριὰ μετὰ τῶν ν΄ ἀν(θρώπ)ων, καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς τὰ παρόντα δύο γράμματα β υ΄, ἅπερ δηλῶσι κ΄, ἀπομένει καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\delta\ \upsilon}{\varepsilon\ \upsilon}$. καὶ ἰδοὺ οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν ν΄ ἀν(θρώπ)ων ἐκ τῶν ,αμ΄ φλουριῶν φλουριὰ κ΄. τὸ δὲ τζάκισμα, ὅπερ ἀπέμεινε, ἔστι φλουριὰ μ΄. ἔχει δὲ τὸ τζάκισμα τὰ μ΄ φλουριὰ πρὸς τοὺς ν΄ ἀν(θρώπ)ους τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον, ὃν λόγον ἔχουσι τὰ δ΄ πρὸς τὰ ε΄, τουτέστι τέσσερα πέμπτα. σχίσον γὰρ τὰ μ΄ φλουριὰ εἰς μέρη δέκα καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δέκα ἀνὰ δ΄· σχίσον καὶ τοὺς ν΄ ἀν(θρώπ)ους εἰς μέρη δέκα, καθὼς ἔσχισας οὕτως καὶ τὰ μ΄ φλουριὰ τὸ τζάκισμα, καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δέκα ἀνὰ ε΄. θὲς οὖν ἄνωθεν ἀντὶ τῶν μ΄ φλουριῶν τὸ τζάκισμα δ΄, κάτωθεν δὲ ἀντὶ τῶν ν΄ ἀν(θρώπ)ων τὸν μεριστὴν ε΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\delta}{\varepsilon}$ ἔχουσι τοιοῦτον λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ τὰ μ΄ πρὸς τὰ ν΄, τουτέστι τέσσερα πέμπτα. οἰκειοῦται δὲ ἕκαστος τῶν ν΄ ἀν(θρώπ)ων ἐκ τῶν ,αμ΄ φλουριῶν φλουριὰ κ΄ καὶ τέσσερα πέμπτα ἑνὸς φλουριοῦ.



φ β υ τζάκισμα $\frac{\delta}{\varepsilon}$

τὰ δὲ τέσσερα πέμπτα τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ – λάβε τὰ οὕτως· ἔστω ὅτι ἕκαστον φλουρὶ χρήζει ὑπέρπυρα η΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρξ΄. μέρισον τὰ ρξ΄ κουκκιὰ εἰς μέρη ε΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν ε΄ ἀνὰ κουκκιὰ λβ΄· ε΄κις γὰρ λβ΄ ρξ΄ γίνονται. τὸ πέμπτον οὖν μέρος τῶν ρξ΄ ἐστὶ λβ΄. λάβε δὲ δ΄κις λβ΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρκη΄· τοῦτο γὰρ ἐστι, ὅπερ λέγομεν, δ΄ πέμπτα ἑνὸς φλουριοῦ. καὶ ἰδοὺ οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν ν΄ ἀν(θρώπ)ων ἐκ τῶν ,αμ΄ φλουριῶν φλουριὰ κ΄ καὶ κουκκιὰ ρκη΄, ἅπερ ἐστὶ δ΄ πέμπτα ἑνὸς φλουριοῦ, τουτέστι φλουριὰ κ΄ ὑπέρπυρα ς΄ κουκκιὰ η΄. ‖ τοῦτο ἐδήλωσε ἡμῖν τὸ τζάκισμα, ὅτι ἀπὸ μὲν τῶν ,α΄ φλουριῶν οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν ν΄ ἀν(θρώπ)ων φλουριὰ κ΄, ἀπὸ δὲ τῶν μ΄ φλουριῶν – τὸ τζάκισμα – οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν ν΄ ἀνὰ κουκκιὰ ρκη΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ς΄ κουκκιὰ η΄. ὥσπερ γὰρ τὰ μ΄ φλουριά ἐστι δ΄ πέμπτα τῶν ν΄ ἀν(θρώπ)ων, οὕτως οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν ν΄ δ΄ πέμπτα ἑνὸς φλουριοῦ, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρξ΄. f. 30r

Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί, καθὼς δηλοῖ τὸ τζάκισμα καὶ ὁ μεριστής, ποίησον τὰ μ΄ φλουριά, τὸ τζάκισμα, ὑπέρπυρα. ἐπεὶ δὲ εἴπομεν, ὅτι ἕκαστον φλουρὶ ἔστω ὅτι χρήζει ὑπέρπυρα η΄, η΄κις μ΄ γίνονται τκ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ τκ΄ ὑπέρπυρα τῶν μ΄ φλουριῶν μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου,



36 κουκκιὰ ρκη΄] ωνρκη C

καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,ϛυ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ μ΄ φλουριὰ γίνονται κουκκιὰ ,ϛυ΄. μέρισον τὰ ,ϛυ΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν ν΄ ἀν(θρώπ)ων καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς τὰ παρόντα τρία γράμματα α β η΄, ἅπερ δηλῶσι ρκη΄. καὶ ἰδού, ὡς εἴπομεν, οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν ν΄ ἀν(θρώπ)ων ἐκ τῶν μ΄ φλουριῶν – τὸ τζάκισμα, ὅπερ ἐποίησεν κουκκιὰ ,ϛυ΄, – δ΄ πέμπτα ἑνὸς φλουριοῦ, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρκη΄, τουτέστι ὑπέρπυρα ϛ΄ κουκκιὰ η΄.

τοῦτο ἡμῖν δύναται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων πάντων ποιῆσαι τὸ τζάκισμα· δηλωτικὸν γάρ ἐστι ἀναλογούσης ποσότητος μετὰ τοῦ μεριστοῦ συγκρινόμενον, ὡς εἰδέναι ἔχεις διὰ τῆς πείρας σαφέστερον. ὃν γὰρ λόγον ἔχει τὸ τζάκισμα πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ἕκαστον μέρος τοῦ μεριστοῦ, τουτέστι ἕκαστος τῶν σ΄ ἀν(θρώπ)ων ἢ τῶν ν΄ ἀν(θρώπ)ων, ὧν ἂν ἔχῃς μεριστήν, κἄντε φλουριὰ διαμερίζῃς κἄντε ὑπέρπυρα κἄντε τι ἕτερον, τρίτον δηλονότι ἢ τέταρτον ἢ καὶ ὡς ἄλλως ἔχοσι δηλῶσαι τὸ τζάκισμα μετὰ τοῦ μεριστοῦ συγκρινόμενον. τὸ δὲ τρίτον ἢ τέταρτόν ἐστι μέρος ἑνὸς φλουριοῦ ἢ ἑνὸς ὑπερπύρου ἢ τοῦ εἴδους ἐκείνου καὶ τῆς ποσότητος, ἧς μερίζεις. πᾶν γὰρ εἶδος, ὅπερ ζητεῖς διαμερίσαι, εἰς ὅσα ἂν μέρη βούλ(ῃ), κἄντε φλουριά ἐστι κἄντε ὑπέρπυρα κἄντε λίτραι εἰσὶ κἄντε οὐγγίαι ἢ ἄλλον τι ἕτερον – ὃν λόγον ἔχει τὸ τζάκισμα πρὸς τὸν μεριστὴν συγκρινόμενον, τρίτον δηλονότι ἢ τέταρτον, λάβε τὸ αὐτὸ μέρος ἐκ τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ ἢ ἐκ τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου, οὗ ζητεῖς διαμερίσαι. καὶ ἔστι καὶ τοῦτο τὸ τρίτον ἢ τέταρτον, ὅπερ προσέθηκας ἐκ τῆς δηλώσεως τοῦ τζακίσματος, προσθ(ή)κη τοῦ μέρους ἐκείνου, οὗπερ ἂν ἔχῃ καὶ τὰ φλουριὰ ἢ τὰ ὑπέρπυρα ἢ πᾶν ἕτερον εἶδος, ὅπερ ἂν ζητῇς διαμερίσαι, ὃ οἰκειώσατο ἕκαστος τοῦ μεριστοῦ ἐκ τῆς διαμεριζομένης ποσότητος, ἧς ἂν ζητῇς διαμερίσαι, εἰς ὅσα ἂν μέρη βούλεσαι.

μβ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι δηλῶσαι, τίνα λόγον ἔχει τὸ τζάκισμα μετὰ τοῦ μεριστοῦ συγκρινόμενον, γ″ ἢ δ″ ἢ ε″, καὶ ποῖα σημεῖα τίθεμεν

Δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, τίνα σημεῖα γραμμάτων εἰώθαμεν θέτειν ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς ἀνήκοντα τῷ τζακίσματι, τίνα δὲ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς ἀνήκοντα τῷ μεριστῇ πρὸς τὸ δηλῶσαι γ″ ἢ δ″ ἢ ε″ ἢ καὶ ὡς ἄλλως δηλῶσαι ἔχει τὸ τζάκισμα μετὰ τοῦ μεριστοῦ συγκρινόμενον.

ὅτε οὖν ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς ἐστι τζάκισμα α΄, κάτωθεν δὲ ὁ μεριστής ἐστι β΄ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha}{\beta}$, δηλοῖ τὸ τζάκισμα μισὸν μέρος ἑνὸς ἀκεραίου· τὸ γὰρ α΄ μισόν ἐστι τῶν β΄. ὅτε δέ ἐστι ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς α΄, κάτωθεν δὲ γ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha}{\gamma}$, δηλοῖ τὸ τζάκισμα ἕνα τρίτον ἑνὸς ἀκεραίου. ὁ γὰρ μεριστής, ὅστις ἐστὶ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, ἔστι τὸ ἀκέραιον σῶμα. ὁσάκις γὰρ χωρεῖ ἀφαιρεθῆναι ὁ μεριστὴς ἐπὶ τὸν διαμεριζόμενον ἀριθμόν, ὃν ἂν διαμερίζῃς, τοσαῦτα ἀκέραια γίνεται ὁ τέλειος διαμερισμός. ὅτε δὲ πάλιν ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς ἐστι α΄, κάτωθεν δὲ δ΄ κείμενα οὕτως $\frac{\alpha}{\delta}$, δηλοῖ τὸ τζάκισμα ἕνα τέταρτον ἑνὸς ἀκεραίου, ἄνωθεν πάλιν α΄, κάτωθεν δὲ ϛ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha}{\varsigma}$ δηλοῖ ἕνα ἕκτον, ἄνωθεν μὲν α΄, κάτωθεν δὲ ι΄ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha}{\alpha\,\iota}$ δηλοῖ ἕνα δέκατον, ἄνωθεν μὲν α΄, κάτωθεν δὲ ιβ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha}{\alpha\,\beta}$ δηλοῖ ἕνα δωδέκατον καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

εἰ δὲ ἄνωθεν μέν ἐστι β΄, κάτωθεν δὲ γ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\beta}{\gamma}$ δηλοῖ δύο τρίτα, ἄνωθεν μὲν β΄, κάτωθεν δὲ δ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\beta}{\delta}$ δηλοῖ δύο τέταρτα· τὰ δὲ δύο τέταρτά ἐστι μισόν, καθώς ἐστι μισὸν τὰ β΄ πρὸς τὰ δ΄. ἄνωθεν μὲν β΄, κάτωθεν δὲ ε΄ οὕτως

---

16 οὐγγίαι] **hic et passim** $o^{\alpha\iota}_{\Gamma\Gamma}$ **C**

κείμενα $\frac{\beta}{\varepsilon}$ δηλοῖ δύο πέμπτα, ἄνωθεν μὲν β΄, κάτωθεν δὲ ς΄ οὕτως κείμενα $\frac{\beta}{\varsigma}$ δηλοῖ δύο ἕκτα. δύο δὲ ἕκτα ἐστὶ τρίτον μέρος τοῦ ὅλου σώματος, καθὼς καὶ τὰ β΄ πρὸς τὰ ς΄ ἐστὶ τρίτον μέρος. ἄνωθεν μὲν β΄, κάτωθεν δὲ ιβ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\beta}{\alpha\,\beta}$ δηλοῖ δύο δωδέκατα, ὅπερ ἐστὶ ἕνα ἕκτον· σχίσον γὰρ τὰ ἄνωθεν β΄ καὶ ἀπομένει α΄, σχίσον καὶ τὰ κάτωθεν ιβ΄ εἰς δύο καὶ γίνεται ἕκαστον τῶν δύο ἀνὰ ς΄. α΄ δὲ καὶ ς΄ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha}{\varsigma}$ δηλοῖ ἕνα ἕκτον.

εἰ δὲ ἄνωθεν μέν ἐστι γ΄, κάτωθεν δὲ δ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\gamma}{\delta}$ δηλοῖ τρία τέταρτα, ἄνωθεν μὲν γ΄, κάτωθεν δὲ ε΄ οὕτως κείμενα $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ δηλοῖ τρία πέμπτα, ἄνωθεν μὲν γ΄, κάτωθεν δὲ ς΄ οὕτως κείμενα $\frac{\gamma}{\varsigma}$ δηλοῖ τρία ἕκτα. τὰ δὲ τρία ἕκτα ἐστὶ μισόν, καθὼς καὶ τὰ γ΄ πρὸς τὰ ς΄ ἐστὶ μισόν. ἄνωθεν μὲν γ΄, κάτωθεν δὲ ζ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\gamma}{\zeta}$ δηλοῖ τρία ἕβδομα καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

εἰ δὲ ἄνωθεν μέν ἐστι δ΄, κάτωθεν δὲ ε΄ οὕτως κείμενα $\frac{\delta}{\varepsilon}$ δηλοῖ τέσσερα πέμπτα, ἄνωθεν μὲν δ΄, κάτωθεν δὲ ς΄ οὕτως κείμενα $\frac{\delta}{\varsigma}$ δηλοῖ τέσσερα ἕκτα. τὰ δὲ τέσσερα ἕκτα ἐστὶ δύο τρίτα· σχιζόμενα γὰρ τὰ δ΄ καὶ ς΄ γίνονται β΄ καὶ γ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\beta}{\gamma}$ δηλῶσι δύο τρίτα. ἄνωθεν μὲν πάλιν δ΄, κάτωθεν δὲ ζ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\delta}{\zeta}$ δηλοῖ τέσσερα ἕβδομα καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

εἰ δὲ ἄνωθεν μέν ἐστι ε΄, κάτωθεν δὲ ς΄ οὕτως κείμενα $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ δηλοῖ πέντε ἕκτα, ἄνωθεν μὲν ε΄, κάτωθεν δὲ ζ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ δηλοῖ πέντε ἕβδομα καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

εἰ δὲ [ἄνω] ἄνωθεν μέν ἐστι ς΄, κάτωθεν δὲ ζ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\varsigma}{\zeta}$ δηλοῖ ἓξ ἕβδομα, ἄνωθεν μὲν ς΄, κάτωθεν δὲ η΄ οὕτως κείμενα $\frac{\varsigma}{\eta}$ δηλοῖ ἓξ ὄγδοα. τὰ δὲ ἓξ ὄγδοά ἐστι τρία τέταρτα· σχιζόμενα γὰρ τὰ ς΄ καὶ η΄ γίνονται γ΄ καὶ δ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\gamma}{\delta}$ δηλῶσι τρία τέταρτα. ἄνωθεν μὲν πάλιν ς΄, κάτωθεν δὲ θ΄ οὕτως ‖ κείμενα $\frac{\varsigma}{\vartheta}$ **f. 30^{v}** δηλοῖ ἓξ ἔννατα. τὰ δὲ ἓξ ἐννατά ἐστι δύο τρίτα· σχίσον γὰρ τὰ ς΄ καὶ θ΄ εἰς μέρη τρία, καὶ τὰ μὲν ς΄ γίνονται β΄, τὰ δὲ θ΄ γίνονται γ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\beta}{\gamma}$ δηλῶσι δύο τρίτα. ἄνωθεν μὲν πάλιν ς΄, κάτωθεν δὲ ι΄ οὕτως κείμενα $\frac{\varsigma}{\alpha\,\iota}$ δηλοῖ ἓξ δέκατα. τὰ δὲ ἓξ δεκατά ἐστι τρία πέμπτα· σχιζόμενα γὰρ τὰ ς΄ καὶ ι΄ γίνονται γ΄ καὶ ε΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ δηλῶσι τρία πέμπτα. ἄνωθεν μὲν ς΄, κάτωθεν δὲ ια΄ οὕτως κείμενα $\frac{\varsigma}{\alpha\,\alpha}$ δηλοῖ ἓξ ἑνδέκατα καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

εἰ δὲ ἄνωθεν μέν ἐστι ζ΄, κάτωθεν δὲ η΄ οὕτως κείμενα $\frac{\zeta}{\eta}$ δηλοῖ ἑπτὰ ὄγδοα καὶ ἑξῆς ὁμοίως. ἄνωθεν μὲν πάλ<ιν> η΄, κάτωθεν δὲ θ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\eta}{\vartheta}$ δηλοῖ ὀκτὼ ἔννατα καὶ ἑξῆς ὁμοίως. ἄνωθεν μὲν ιε΄, κάτωθεν δὲ ιζ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha\,\varepsilon}{\alpha\,\zeta}$ δηλοῖ ιε΄ ἑπτακαιδέκατα. ἄνωθεν μὲν κγ΄, κάτωθεν δὲ λε΄ οὕτως κείμενα $\frac{\beta\,\gamma}{\gamma\,\varepsilon}$ δηλοῖ κγ΄ τριακοστὰ πέμπτα, ἄνωθεν μὲν πάλιν κε΄, κάτωθεν δὲ πάλιν λε΄ οὕτως κείμενα $\frac{\beta\,\varepsilon}{\gamma\,\varepsilon}$ δηλοῖ κε΄ τριακοστὰ πέμπτα. τὰ δὲ κε΄ τριακοστὰ πέμπτα ἐστὶ ε΄ ἕβδομα· σχιζόμενα γὰρ τὰ κε΄ καὶ λε΄ εἰς μέρη πέντε τὰ μὲν κε΄ γίνονται ε΄, τὰ δὲ λε΄ γίνονται ζ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ ἔχοσι τοιοῦτον λόγον, ὃν ἔχοσι καὶ τὰ κε΄ πρὸς τὰ λε΄, τουτέστι πέντε ἕβδομα. ταὐτὸν γάρ ἐστι κε΄ τριακοστὰ πέμπτα καὶ ε΄ ἕβδομα.

τὸ δ᾽ αὐτὸ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων πάντων γίνεται μέχρι ἑκατοντάδων καὶ χιλιάδων τζακίσματος καὶ μεριστοῦ. τὸ ἄνωθεν γὰρ γράμμα τοῦ τζακίσματος καὶ τὸ κάτωθεν τοῦ μεριστοῦ, κἄντε ἀνὰ ἑνὸς γράμματός εἰσι κείμενα κἄντε καὶ ἀνὰ πλείστων γραμμάτων – ὅτε τὸ μὲν ἄνωθέν ἐστι γ΄, τὸ δὲ κάτωθεν δ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\gamma}{\delta}$, οὐκ ἔχεις εἰπεῖν τρία τέσσερα – ἀσήμως γὰρ φωνεῖ τε καὶ ἀχρήστως – ἀλλ᾽ ἔχεις εἰπεῖν τρία τέταρτα. ἄλλ᾽ οὐδὲ πάλιν ἄνωθεν μὲν ζ΄, κάτωθεν δὲ η΄ οὕτως κείμενα $\frac{\zeta}{\eta}$ ἔχεις

---

32 ἑπτακαιδέκατα] ἑπτα καὶ δέκατα **C sic pro** ἕβδομα καὶ δέκατα – **similiter alia ordinalia composita**

εἰπεῖν ἑπτὰ ὀκτώ, ἀλλὰ ζ΄ ὄγδοα. καὶ ὡς ἐν συντόμῳ εἰπεῖν· καθὼς ἂν δηλῶσι τὰ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς γράμματα, κἄντε ἕνα ἐστὶ κἄντε καὶ πλείονα, τουτέστι α΄ ἢ β΄ ἢ γ΄ ἢ δ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως ἢ πάλιν ια΄ ἢ ιβ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, μετὰ τῶν [κάτων] κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς γραμμάτων ἢ γράμματος, γ΄ δηλονότι ἢ δ΄ ἢ ε΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως ἢ καὶ ιγ΄ καὶ ιδ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως – καθὼς ἂν δηλῶσι τὰ δύο γράμματα τὰ ἄνω καὶ κάτω τῆς κεραίας γραμμῆς, τὴν αὐτὴν ἀποτελῶσι ποσότητα, τουτέστι β΄ καὶ δ΄ ἐστὶ δύο τέταρτα, γ΄ δὲ καὶ ε΄ ἐστὶ τρία πέμπτα, ε΄ δὲ καὶ ζ΄ ἐστὶ πέντε ἕβδομα, ιβ΄ δὲ καὶ ιε΄ ἐστὶ δώδεκα πεντακαιδέκατα καὶ ἑξῆς ὁμοίως. αὐτὰ γὰρ τὰ ἄνωθεν καὶ κάτωθεν γράμματα μόνα δηλῶσι, τίνα ἂν ἔχωμεν ταῦτα ἀποκαλεῖσθαι φωνὴν καὶ πόσου μέρους ἐστὶ ταῦτα δηλωτικὰ ἑκάτερα συγκρινόμενα.

μγ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι ἑνῶσαι δύο τζακίσματα, τουτέστι $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, καὶ εἰδέναι, πόσα γίνονται ἑνούμενα τὰ δύο μέρη αὐτῶν

Ἔστω ὅτι ἐκ δύο τινῶν διαμερισμῶν ἐναπέμειναν τζακίσματα δύο, τὸ μὲν $\frac{\beta}{\gamma}$, τὸ δὲ $\frac{\gamma}{\delta}$. ζητεῖς δὲ ἑνῶσαι ταῦτα καὶ εἰδέναι, πόσα ἀκέραια γίνονται τὰ δύο μέρη αὐτῶν ἑνωθέντων. ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. πολλ(α)πλασίασον τὰς δύο κάτωθεν ψήφους, τουτέστι τὰ γ΄ καὶ δ΄· τρὶς οὖν δ΄ γίνονται ιβ΄ καί ἐστι ταῦτα ἓν σῶμα τῶν δύο μερῶν. δι᾽ αὐτῶν γὰρ τῶν ιβ΄ λαμβάνονται τὰ $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. λάβε γὰρ τὰ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν ιβ΄, ἅπερ ἐστὶ η΄. λάβε καὶ τὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν ιβ΄, ἅπερ ἐστὶ θ΄. ἕνωσον δὲ τὰ η΄ μετὰ τῶν θ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ιζ΄. μέρισ[ισ]ον δὲ τὰ ιζ΄ μετὰ τοῦ σώματος τῶν ιβ΄, καὶ ὁσάκις χωρῶσι τὰ ιβ΄ πρὸς τὰ ιζ΄, τοσαῦ<τα> ἀκέραια γίνονται. χωρῶσι δὲ τὰ ιβ΄ ἐπὶ τῶν ιζ΄ ἅπαξ, περισσεύοσι καὶ ε΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\varepsilon}{\alpha\,\beta}$ δηλῶσι ε΄ δωδέκατα. καὶ ἰδοὺ ἑνούμενα τὰ $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ γίνονται τὰ δύο μέρη αὐτῶν ἀκέραιον α΄ καὶ $\frac{\varepsilon}{\alpha\,\beta}$ ἑνὸς ἀκεραίου. Καὶ ἄλλως προχειροτέρως. γράψον τὰ $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ σύνεγγυς καὶ πάλιν πολ-(λ)απλασίασον τὰ δύο κάτωθεν γράμματα τὰ γ΄ δηλονότι καὶ δ΄· τρὶς οὖν δ΄ γίνονται ιβ΄, ἅπερ ἐστί, ὡς εἴπομεν, ἓν σῶμα τῶν δύο μερῶν. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ ἄνωθεν β΄ μετὰ τῶν κάτωθεν δ΄ στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλάξ· δὶς οὖν δ΄ γίνονται η΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ ἄνωθεν γ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν γ΄ στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλάξ· τρὶς οὖν γ΄ γίνονται θ΄. ἕνωσον τὰ η΄ μετὰ τῶν θ΄ καὶ πάλιν γίνονται, ὡς τὸ πρότερον, ιζ΄. μέρισον πάλιν τὰ ιζ΄ μετὰ τοῦ σώματος τῶν ιβ΄, ὁσάκις ἂν χωρῶσι· ἅπαξ οὖν ιβ΄ χωρέσαν ἐπὶ τῶν ιζ΄ ἐστὶ ἀκέραιον α΄, ἀπομένει καὶ τζάκισμα $\frac{\varepsilon}{\alpha\,\beta}$. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὗρες, ὅτι ἑνούμενα τὰ $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ γίνεται ἀκέραιον α΄ καὶ $\frac{\varepsilon}{\alpha\,\beta}$.

$\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\gamma}{\delta}$

Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί, ὡς ἡ μεταχείρισις αὐτὴ προχείρως διασημαίνεται, ποίησον τοῦτο καὶ διὰ τῆς κοινῆς καὶ πολ(ι)τευομένης μεταχειρίσεως. ἔστω γὰρ ὅτι διεμέρισας φλουριά τινα καὶ ἀπέμεινε τζάκισμα $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς φλουριοῦ. ὡσαύτως διεμέρισας καὶ ἕτερα φλουριὰ καὶ ἀπέμεινε τζάκισμα $\frac{\gamma}{\delta}$ ἑνὸς φλουριοῦ. ἕκαστον δὲ φλουρὶ ἔστω ὅτι χρῄζει ὑπέρπυρα ς΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρκ΄. τὰ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν ρκ΄ κουκκιῶν ἐστι κουκκιὰ π΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα δ΄. τὰ δὲ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν ρκ΄ κουκκιῶν ἐστι κουκκιὰ ς΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα δ΄ κουκκιὰ ι΄. ἕνωσον τὰ δ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς φλουριοῦ, μετὰ τῶν δ΄ ὑπερπύρων καὶ κουκκιῶν ι΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ἑνὸς φλουριοῦ, καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα η΄ κουκκιὰ ι΄. ἐπεὶ δὲ εἴπομεν, ὅτι ἕκαστον φλουρὶ ἔστω ὅτι χρῄζει ὑπέρπυρα ς΄,

---

1 ἀλλὰ] ἀλλ᾽ ε **sic C** 13 **in sinistro marg. fol. 30^{v}:** ℳ ζήτει τὸ παρὸν περὶ τὸ τέλος τῆς βίβλου – **cf. cap. 162 libri qui dicitur secundus atque fol. 153^{r} – fol. 156/1^{v}, fol. 158$^{r/v}$ extra librum** 23 σύνεγγυς] σήνέγκης **hic et passim C**

ἄφελε ἅπαξ ὑπέρπυρα ς΄ ὑπὲρ ἑνὸς φλουριοῦ. ἔχεις οὖν φλουρὶ α΄, ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα β΄ κουκκιὰ ι΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\varepsilon}{\alpha\,\beta}$ τῶν ς΄ ὑπερπύρων, ὧν χρῄζει τὸ φλουρί. τὸ γὰρ δωδέκατον μέρος τῶν ρκ΄ κουκκιῶν ἐστι κουκκιὰ ι΄· ιβ΄κις γὰρ ι΄ ρκ΄ γίνονται. ε΄ δὲ δωδέκατα, τουτέστι ε΄κις κουκκιὰ ι΄, γίνονται κουκκιὰ ν΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα β΄ κουκκιὰ ι΄. καὶ ἰδοὺ καὶ διὰ τῆς κοινῆς ταύτης καὶ πολ(ι)τευομένης μεταχειρίσεως εὕρες, ὅτι ἑνωθέντων τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα η΄ κουκκιὰ ι΄, ἅπερ ἐστὶ φλουρὶ α΄ καὶ $\frac{\varepsilon}{\alpha\,\beta}$ ἑνὸς φλουριοῦ, τουτέστι ὑπέρπυρα β΄ κουκκιὰ ι΄.

μδ **Περὶ τοῦ πῶς ἔστι ἑνῶσαι τέσσερα διάφορα τζακίσματα, τουτέστι $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\frac{\delta}{\varepsilon}$ καὶ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$, καὶ εἰδέναι ἑνωθέντων τούτων πάντων, πόσα ἀκέραια γίνονται**

Ἔστω ὅτι ἐκ διαφόρων τεσσάρων διαμερισμῶν ‖ ἐναπέμειναν τὰ τέσσερα ἀνόμοια ταῦτα τζακίσματα $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\frac{\delta}{\varepsilon}$ καὶ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$. ζητεῖς δὲ ἑνῶσαι ταῦτα καὶ εἰδέναι, πόσα ἀκέραια γίνονται τὰ τέσσερα μέρη αὐτῶν ἑνωθέντων. ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. πολλ(α)πλασίασον πρῶτον τὰ δύο κάτωθεν γράμματα, τὰ γ΄ δηλονότι καὶ δ΄· γ΄ οὖν δ΄κις γίνονται ιβ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ιβ΄ μετὰ τοῦ κάτωθεν γράμματος τοῦ τρίτου τζακίσματος, ὅπερ ἐστὶ ε΄· ιβ΄κις οὖν ε΄ γίνονται ξ΄. πολλαπλασίασον δὲ τὰ ξ΄ μετὰ τοῦ κάτωθεν γράμματος τοῦ τετάρτου τζακίσματος, ὅπερ ἐστὶ ς΄· ξ΄κις οὖν ς΄ γίνονται τξ΄. ταῦτα δὲ τὰ τξ΄ ἐστὶ ἓν σῶμα τῶν τεσσάρων τζακισμάτων, δι᾽ οὗ λαμβάνονται τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν.

λάβε οὖν τὰ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν τξ΄, ἅπερ ἐστὶ σμ΄. λάβε καὶ τὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν τξ΄, ἅπερ ἐστὶ σο΄. λάβε καὶ τὰ $\frac{\delta}{\varepsilon}$ τῶν τξ΄, ἅπερ ἐστὶ σπη΄. λάβε καὶ τὰ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ τῶν τξ΄, ἅπερ ἐστὶ τ΄. ἕνωσον δὲ τὰ σμ΄ καὶ σο΄ καὶ σπη΄ καὶ τ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ,αϛη΄. μέρισον ταῦτα τὰ ,αϛη΄ μετὰ τῶν τξ΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ ἓν σῶμα τῶν τεσσάρων τζακισμάτων, ἅπερ νῦν ἔχοσι λόγον μεριστοῦ. ὁσάκις δὲ χωρῶσι τὰ τξ΄ ἐπὶ τῶν ,αϛη΄, τοσαῦτα ἀκέραια γίνονται. τὸ δὲ ἐναπομεῖναν μέρος ἐστὶ τζάκισμα συγκρινόμενον μετὰ τοῦ μεριστοῦ, ὅστις ἐστὶ τξ΄. τρὶς οὖν τξ΄ γίνονται ,απ΄, ἀπομένει καὶ τζάκισμα ιη΄. καὶ ἰδοὺ ὁ διαμερισμὸς τῶν ,αϛη΄ μετὰ τῶν τξ΄ ἐστὶ ἀκέραια γ΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\alpha\,\eta}{\gamma\,\varsigma\,\iota\eta}$. οὕτως οὖν, ὡς ὁρᾶται, τὸ τζάκισμα δηλοῖ ιη΄ τριακοσιοστὰ ἑξηκοστά. σχίσον δὲ τὰ ιη΄ εἰς μέρη ιη΄ καὶ γίνεται ἕκαστον αὐτῶν μέρος α΄. σχίσον καὶ τὰ τξ΄ εἰς μέρη ιη΄ καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος κ΄· ιη΄κις γὰρ κ΄ τξ΄ γίνονται. α΄ δὲ καὶ κ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha}{\beta\,\iota\eta}$ δηλῶσι ἕνα εἰκοστόν· ὃν γὰρ λόγον ἔχοσι τὰ ιη΄ πρὸς τὰ τξ΄, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὸ α΄ πρὸς τὰ κ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ τέσσερα τζακίσματα ἑνούμενα γίνονται ἀκέραια γ΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\alpha}{\beta\,\iota\eta}$, ὅπερ ἐστὶ ἕνα εἰκοστὸν ἑνὸς ἀκεραίου.

α α α γ ϛ η γ ϛ ιη γ καὶ $\frac{\alpha\,\eta}{\gamma\,\varsigma\,\iota\eta}$	β δ ιη β ζ ιη β η η γ ιη ιη α ιη ϑ η

Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί, ὡς ἡ μεταχείρισις αὐτὴ προχείρως διασημαίνεται, ποίησον τοῦτο καὶ διὰ τῆς κοινῆς καὶ πολιτευομένης μεταχειρίσεως. ἔστω γὰρ ἕκαστον φλουρὶ ὑπέρπυρα ς΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρκ΄. τὰ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν ς΄ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρα δ΄. τὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν ς΄ ὑπερπύρων, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρκ΄, ἔστι κουκκιὰ ϛ΄, τουτέστι ὑπέρπυρα δ΄ κουκκιὰ ι΄. τὰ $\frac{\delta}{\varepsilon}$ τῶν ρκ΄ κουκκιῶν ἐστι κουκκιὰ ϛς΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα δ΄ κουκκιὰ ις΄. τὰ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ τῶν ρκ΄ κουκκιῶν ἐστι κουκκιὰ

‖ δ	
$^{(\alpha)}_{\|}$ δ $^{(\alpha)}_{:}$ ι	
$^{(\alpha)}_{\|}$ δ $^{(\alpha)}_{:}$ ις	
$^{(\alpha)}_{\|}$ ε	
ὁμοῦ ‖ η ⁝ ς	

3 δωδέκατον] $\overset{\alpha}{\iota\beta}$ του **C** 14 γ΄ οὖν] $\overset{\eta\varsigma}{\Gamma}$ οὖν **C, hic nota non pro** τρὶς οὖν, **sed pro** τρεῖς οὖν **adhibita**

ρ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ε΄. ἕνωσον ταῦτα πάντα καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ιη΄ κουκκιὰ ς΄. ἐπεὶ δὲ εἴπομεν, ὅτι ἕκαστον φλουρὶ χρῄζει ὑπέρπυρα ς΄, τὰ ιη΄ ὑπέρπυρα γίνονται φλουριὰ γ΄. τὰ δὲ ς΄ κουκκιά ἐστι ἕνα εἰκοστὸν τῶν ρκ΄ κουκκιῶν· ς΄κις γὰρ κ΄ ρκ΄ γίνονται. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὗρες, ὅτι τὰ τέσσερα τζακίσματα γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ γ΄ καὶ κουκκιὰ ς΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\beta\,\mu}$.

ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν διαφόρων ἀνομοίων τζακισμάτων διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

με **Περὶ τοῦ πῶς ἔστι ἀφελεῖν $\frac{\beta}{\gamma}$ ἐκ τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ εἰδέναι τὸ ἐναπομένον, πόσον ἐστί**

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς ἀφελεῖν $\frac{\beta}{\gamma}$ ἐκ τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ εἰδέναι τὸ ἐναπομένον μέρος, πόσον ἐστί. πολλ(α)πλασίασον τὰ κάτωθεν δύο ψήφους, τουτέστι τὰ γ΄ καὶ δ΄, καθὼς καὶ πρότερον οὕτως ἐποίησας· τρὶς οὖν δ΄ γίνονται ιβ΄. ἔστι δὲ ταῦ<τα> ἓν σῶμα τῶν δύο μερῶν. λάβε δὲ πάλιν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν ιβ΄, ἅπερ ἐστὶ η΄. λάβε καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν ιβ΄, ἅπερ ἐστὶ ϑ΄. ἄφελε τὰ η΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, ἐκ τῶν ϑ΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\gamma}{\delta}$· περισσεύει καὶ α΄ μέχρι τῶν ϑ΄. τὸ δὲ α΄, ὅπερ περισσεύει, μετὰ τῶν ιβ΄ οὕτως κείμενον $\frac{\alpha}{\alpha\,\beta}$ δηλοῖ ἕνα δωδέκατον. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ἀφαιρουμένων τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ ἐκ τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ τὸ ἐναπομένον ἐστὶ ἕνα δωδέκατον ἑνὸς ἀκεραίου.

Καὶ ἄλλως προχειροτέρως. γράψον σύνεγγυς τὰ $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, καθὼς καὶ πρότερον οὕτως ἐποίησας, καὶ πάλιν πολλ(α)πλασίασον τὰ δύο κάτωθεν γράμματα, τὰ γ΄ δηλονότι καὶ δ΄· τρεῖς οὖν δ΄κις γίνονται ιβ΄, ἅπερ ἐστὶ ἓν σῶμα τῶν δύο μερῶν. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν β΄ μετὰ τῶν κάτωθεν δ΄ στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλάξ· δὶς οὖν δ΄ γίνονται η΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ κάτωθεν γ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν γ΄ ἐναλλάξ· τρὶς οὖν γ΄ γίνονται ϑ΄. ἄφελε δὲ τὰ η΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, ἐκ τῶν ϑ΄, ὧν ἐστι $\frac{\gamma}{\delta}$, καὶ περισσεύει καὶ α΄ μέχρι τῶν ϑ΄. τὸ δὲ α΄ μετὰ τῶν ιβ΄ οὕτως κείμενον $\frac{\alpha}{\alpha\,\beta}$ δηλοῖ ἕνα δωδέκατον. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως ἀφαιρουμένων τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ ἐκ τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ ἐναπομένει ἔτι καὶ ἕνα δωδέκατον ἑνὸς ἀκεραίου.

$\frac{\beta}{\gamma} \times \frac{\gamma}{\delta}$

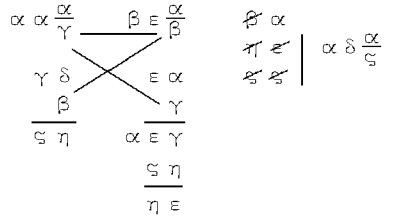
Ποίησον τοῦτο καὶ διὰ τῆς κοινῆς καὶ πολιτευομένης μεταχειρίσεως. τὸ α΄ φλουρί, ὡς εἴπομεν, χρῄζει ὑπέρπυρα ς΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρκ΄. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν ρκ΄ κουκκιῶν ἐστι κουκκιὰ π΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα δ΄. τὰ δὲ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν ρκ΄ κουκκιῶν ἐστι κουκκιὰ ς΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα δ΄ κουκκιὰ ι΄. ἄφελε οὖν τὰ δ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, ἐκ τῶν δ΄ ὑπερπύρων καὶ κουκκιῶν ι΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, καὶ περισσεύοσι ἔτι καὶ κουκκιὰ ι΄. τὰ δὲ κουκκιὰ ι΄ ἐστὶ ἕνα δωδέκατον τῶν ρκ΄ κουκκιῶν· ι΄κις γὰρ ιβ΄ ρκ΄ γίνονται. καὶ ἰδοὺ καὶ διὰ κοινῆς καὶ πολ(ι)τευομένης ταύτης μεταχειρίσεως εὗρες, ὅτι

---

5 $\frac{\alpha}{\beta\,\mu}$] **sc.** ἑνὸς φλουριοῦ

8 **ad titulum huius capitis in inf. marg. fol. 31^{r} scriptum (cf. f. 126^{v} – f. 140^{r} ed. HUNGER/VOGEL 1963):**

ὀφειλμὸς τζακισμάτων



13. 23 $\frac{\beta}{\gamma}$ **sc.** τῶν ιβ΄ 13. 23 $\frac{\gamma}{\delta}$ **sc.** τῶν ιβ΄ 15 ἐναπομένον] ενναπομενον **C** 21 δὶς οὖν δ΄] $\overset{\eta\varsigma}{\beta}$ οὖν $\overset{\alpha}{\delta}$κοις **C** 29 $\frac{\beta}{\gamma}$ **sc.** τῶν ρκ΄ ὑπερπύρων 30 $\frac{\gamma}{\delta}$ **sc.** τῶν ρκ΄ ὑπερπύρων

ἀφαιρουμένων $\frac{\beta}{\gamma}$ ἐκ τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ ἀπομένοσι κουκκιὰ ι΄, ἅπερ ἐστὶ ἕνα δωδέκατον τῶν ρκ΄ κουκκιῶν, τουτέστι τῶν ς΄ ὑπερπύρων, ὧν χρῄζει φλουρὶ α΄.
ὡσαύτως καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημα, κἂντε ἑνῶσαι βούλ(ῃ) κἂντε ἀφελεῖν, διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

μς **Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι τὰ $\frac{\zeta}{\eta}$, πόσα $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ γίνονται**

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι τὰ $\frac{\zeta}{\eta}$, πόσα $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ γίνονται. ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως· γράψον ταῦτα σύνεγγυς, πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν ζ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ε΄ στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλάξ· ζ΄κις οὖν ε΄ γίνονται λε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὸ ἄνωθεν α΄ μετὰ τῶν κάτωθεν η΄ στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλάξ· ἅπαξ οὖν η΄ πάλιν ἐστὶ η΄. καὶ τὰ μὲν λε΄ ἐστὶ σῶμα, τὰ δὲ η΄ ἐστὶ μεριστὴς τοῦ σώματος || τῶν λε΄. μέρισον δὲ τὰ λε΄ μετὰ τοῦ μεριστοῦ, τουτέστι μετὰ τῶν η΄, καὶ ὁσάκις χωρῶσι τὰ η΄ πρὸς τὰ λε΄, τοσαῦτα $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ποιῶσι τὰ $\frac{\zeta}{\eta}$. τὰ δὲ η΄ πρὸς τὰ λε΄ χωρῶσι δ΄κις· δ΄κις γὰρ η΄ γίνονται λβ΄. ἀπομένοσι καὶ γ΄ τζάκισμα, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\gamma}{\eta}$ δηλῶσι τρία ὄγδοα. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\zeta}{\eta}$ γίνονται πέμπτα δ΄ καὶ τρία ὄγδοα ἑνὸς πέμπτου.

$\frac{\zeta}{\eta} \times \frac{\alpha}{\varepsilon}$

γ
ϛ ε
η

δ καὶ $\frac{\gamma}{\eta}$

f. 31^{v}

Δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, ὅτι ἕκαστον τῶν $\frac{\zeta}{\eta}$ ἐστὶ ἔλαττον τοῦ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ καὶ τοσοῦτον ἔλαττο, ὅσον ἐστὶ τὰ $\frac{\gamma}{\eta}$ τοῦ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$. ἑνωθέντος γὰρ τοῦ ἑνὸς ὀγδόου μετὰ τῶν τριῶν ὀγδόων τοῦ ἑνὸς πέμπτου γίνονται τὰ δύο ἑνούμενα, ὅσον ἐστὶ ἕκαστον μέρος τοῦ ἑνὸς πέμπτου.

Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι τὰ $\frac{\zeta}{\eta}$ γίνονται πέμπτα δ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\eta}$ ἑνὸς πέμπτου καὶ ὅτι ἑνωθέντος $\frac{\alpha}{\eta}$ μετὰ τῶν $\frac{\gamma}{\eta}$ τοῦ ἑνὸς πέμπτου γίνονται τὰ δύο ταῦτα ἑνούμενα, ὅσον ἐστὶ ἕκαστον μέρος τοῦ ἑνὸς πέμπτου, φέρε ποιήσωμεν τοῦτο διὰ τῆς κοινῆς καὶ πολ(ι)τευομένης μεταχειρίσεως. ἔστω σῶμα ἓν ὑπέρπυρα π΄. τὰ $\frac{\zeta}{\eta}$ τῶν π΄ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρα ο΄· τὸ γὰρ ἕνα ὄγδοον τῶν π΄ ἐστὶ ὑπέρπυρα ι΄, τὰ δὲ $\frac{\zeta}{\eta}$ ἐστὶ ζ΄κις ὑπέρπυρα ι΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ο΄. τὰ δὲ ο΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\zeta}{\eta}$ τῶν π΄ ὑπερπύρων – λέγει ἡμῖν ἡ πρόχειρος μεταχείρισις, ὅτι γίνονται πέμπτα δ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\eta}$ τοῦ ἑνὸς πέμπτου.
τὸ πέμπτον δὲ τῶν π΄ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρα ις΄· ε΄κις γὰρ ις΄ π΄ γίνονται. τὰ δὲ δ΄ πέμπτα ἐστὶ δ΄κις ὑπέρπυρα ις΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ξδ΄. λείπονται καὶ ὑπέρπυρα ς΄ μέχρι τῶν ο΄ ὑπερπύρων, ὧν εἴπομεν, ὅτι τὰ $\frac{\zeta}{\eta}$ τῶν π΄ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρα ο΄. τὰ δὲ ς΄ ὑπέρπυρα πρὸς τὰ ις΄ ὑπέρπυρα τοῦ ἑνὸς πέμπτου ἔχοσι λόγον, ὃν ἔχοσ(ι) τὰ γ΄ πρὸς τὰ η΄. σχιζόμενα γὰρ τὰ ς΄ καὶ τὰ ις΄ γίνονται γ΄ καὶ η΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\gamma}{\eta}$ δηλῶσι τρία ὄγδοα τῶν ις΄ ὑπερπύρων, ὧν οἰκειοῦται ἕκαστον πέμπτον ἐκ τῶν π΄ ὑπερπύρων. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\zeta}{\eta}$ τῶν π΄ ὑπερπύρων, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ο΄, γίνονται πέμπτα δ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\eta}$ ἑνὸς πέμπτου, ὡς καὶ διὰ τῆς προχείρου μεταχειρίσεως εὕρομεν οὕτως.
ζήτει τὸ $\frac{\alpha}{\eta}$ τῶν π΄ ὑπερπύρων· τὸ δὲ ἕνα ὄγδοον τῶν π΄ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρα ι΄, καθὼς καὶ τὰ $\frac{\zeta}{\eta}$ ἐστὶ ὑπέρπυρα ο΄. τὰ δὲ ς΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ λείπονται τὰ ξδ΄ ὑπέρπυρα πρὸς τὸ γενέσθαι ὑπέρπυρα ο΄, ἔστι $\frac{\gamma}{\eta}$ τῶν ις΄ ὑπερπύρων, ὧν εἴπομεν, ὅτι οἰκειοῦται τὸ ἕνα πέμπτον ἐκ τῶν π΄ ὑπερπύρων. ἕνωσον δὲ τὸ $\frac{\alpha}{\eta}$, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ι΄, μετὰ τῶν $\frac{\gamma}{\eta}$, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ς΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ις΄, καθώς ἐστι καὶ τὸ ἕνα πέμπτον ὑπέρπυρα ις΄. καὶ ἰδού, καθὼς εἴπομεν, τὸ $\frac{\alpha}{\eta}$ ἐστὶ ἔλαττο τοῦ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, ὅσον ἐστὶ τὰ $\frac{\gamma}{\eta}$ τοῦ ἑνὸς πέμπτου. ἑνωθέντος γὰρ τοῦ $\frac{\alpha}{\eta}$ καὶ τῶν $\frac{\gamma}{\eta}$

---

18 ὀγδόου] ἑβδόμου **C falso** 20.36.39.41.42 $\frac{\alpha}{\eta}$] $\frac{\alpha}{\zeta}$ **C** 36 ὄγδοον] ἕβδομον **C iterum falso** 40 $\frac{\gamma}{\eta}$] τοῦ ἑνὸς πέμπτου **supplendum**

τοῦ ἑνὸς πέμπτου γίνεται, ὅσον ἐστὶ τὸ ἕνα πέμπτον, ὡς εἴπομεν ἄνωθεν.
ὡσαύτως καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης προχείρου μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι, καὶ τὰ $\frac{\delta}{\varepsilon}$, πόσα $\frac{\alpha}{\delta}$ γίνονται, καὶ τὰ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$, πόσα $\frac{\alpha}{\gamma}$ γίνονται, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. ἔχεις δὲ εἰδέναι, καὶ πόσον μέρος λείπεται τὸ $\frac{\text{Ϛ}}{\varepsilon}$ πρὸς τὸ γενέσθαι $\frac{\alpha}{\delta}$ καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\varsigma}$ πρὸς τὸ γενέσθαι $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

μζ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι, ποῖόν ἐστι πλέον, τὰ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ ἢ τὰ $\frac{\eta}{\phi}$, καὶ πῶς ἔστι προσθεῖναι ἐπὶ τῶν $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$, ὅσον λείπεται γενέσθαι $\frac{\eta}{\phi}$

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι, ποῖόν ἐστι πλέον, τὰ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ ἢ τὰ $\frac{\eta}{\phi}$, καὶ πόσον ἐστὶ πλέον τὸ ὑπερέχον μέρος ἐκ τοῦ ἐλλείποντος. προστιθέμενον δὲ τὸ ὑπερέχον ἐπὶ τοῦ ἐλλείποντος γενήσεται τὸ ἐλλεῖπον, ὅσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπερέχον.
ἔχεις δὲ ταῦτα μεταχειρίσασθαι οὕτως. γράψον τὰ σχήματα αὐτῶν σύνεγγυς. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς κάτωθεν δύο ψήφους, τὰ ϛ΄ δηλονότι καὶ τὰ θ΄· ϛ΄κις οὖν θ΄ γίνονται νδ΄. ἔστι δὲ ταῦ<τα> ἓν σῶμα τῶν δύο μερῶν, δι᾽ οὗ τὰ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ καὶ τὰ $\frac{\eta}{\phi}$ λαμβάνονται. λάβε δὲ τὰ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ τῶν νδ΄, ἅπερ ἐστὶ με΄· τὸ γὰρ ἕκτον τῶν νδ΄ ἐστὶ θ΄, ε΄κις δὲ θ΄ με΄ γίνονται. λάβε καὶ τὰ $\frac{\eta}{\phi}$ τῶν νδ΄, ἅπερ ἐστὶ μη΄· τὸ γὰρ ἔνατον τῶν νδ΄ ἐστὶ ϛ΄, η΄κις δὲ ϛ΄ μη΄ γίνονται. ἔστι δὲ τὰ $\frac{\eta}{\phi}$ τῶν νδ΄ μη΄, τὰ δὲ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ τῶν νδ΄ ἐστὶ με΄. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\eta}{\phi}$ ἐστὶ πλείω γ΄ πεντηκοστὰ τέταρτα ἐκ τῶν $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$. τὰ γὰρ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ ἐστὶ με΄, τὰ δὲ $\frac{\eta}{\phi}$ ἐστὶ μη΄, τουτέστι γ΄ πλέον τῶν με΄ τῶν ἐπέχοντα λόγον $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$. τὰ δὲ γ΄, ἅπερ ἔχουσι πλείω τὰ μη΄ ἐκ τῶν με΄, τουτέστι τὰ $\frac{\eta}{\phi}$ ἐκ τῶν $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$, συγκρινόμενα μετὰ τῶν νδ΄ ἔχουσι λόγον, ὃν ἔχει τὸ α΄ πρὸς τὰ ιη΄, τουτέστι ἕνα ὀκτακαιδέκατον. σχίσον γὰρ τὰ γ΄ εἰς μέρη τρία καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν τριῶν ἀνὰ α΄, σχίσον καὶ τὰ νδ΄ εἰς μέρη τρία καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν τριῶν ἀνὰ ιη΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha}{\text{ιη}}$ δηλῶσι ἕνα ὀκτακαιδέκατον ἑνὸς ἀκεραίου σώματος. καὶ ἰδοὺ εὕρες, ὅτι τὰ $\frac{\eta}{\phi}$ ἐστὶ πλείω τῶν $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$. εὗρες δέ, ὅτι ἐστὶ πλείω τὰ $\frac{\eta}{\phi}$ ἐκ τῶν $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ $\frac{\alpha}{\text{ιη}}$ ἑνὸς ἀκεραίου σώματος. προστιθεμένου δὲ τοῦ ἑνὸς ὀκτακαιδεκάτου, ταὐτὸν δ᾽ εἰπεῖν τῶν γ΄ πεντηκοστῶν τετάρτων, ἐπὶ τῶν $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ γενήσονται τὰ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$, ὅσον ἐστὶ καὶ τὰ $\frac{\eta}{\phi}$.

$\frac{\varepsilon}{\varsigma} \times \frac{\eta}{\phi}$

εἰ βούλ(ει) δὲ εἰδέναι τὰ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ καὶ $\frac{\eta}{\phi}$ ἑνο<ύ>μενα τὰ δύο μέρη αὐτῶν, πόσα ἀκέραια γίνονται, ἕνωσον τὰ με΄, ἅπερ οἰκειοῦνται τὰ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ ἐκ τῶν νδ΄, μετὰ τῶν μη΄, ὧν οἰκειοῦνται τὰ $\frac{\eta}{\phi}$ ἐκ τῶν νδ΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ Ϛγ΄. μέρισον τὰ Ϛγ΄ μετὰ τῶν νδ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς α΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\gamma\,\phi}{\varepsilon\,\delta}$, ὅπερ δηλοῖ λθ΄ πεντηκοστὰ τέταρτα. τὰ δὲ λθ΄ πεντηκοστὰ τέταρτα ἔχουσι λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ τὰ ιγ΄ πρὸς τὰ ιη΄, τουτέστι ιγ΄ ὀκτακαιδέκατα. σχίσον γὰρ τὰ λθ΄ εἰς μέρη τρία καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν τριῶν ἀνὰ ιγ΄, σχίσον καὶ τὰ νδ΄ εἰς μέρη τρία

γ
φ $\frac{\gamma\,\phi}{\varepsilon\,\delta}$
δ
ε

α καὶ $\frac{\alpha\,\gamma}{\alpha\,\eta}$

---

in sinistro marg. fol. 31^{v} de capitibus 45, 46, 47: τὰ παρόντα τρία κεφάλαια, τὸ με΄ καὶ μϛ΄ καὶ μζ΄ καὶ τὸ ἔχον τὸ παρὸν σημεῖον ℭ, γράψον ταῦτα πρὸ τοῦ ρμδ΄ κεφαλαίου **(cf. librum qui dicitur secundus)**· ἐνταῦτα **(sic!)** γὰρ οὐ κεῖτονται χρησίμως.
in sinistro marg. fol. 31^{v} ad titulum cap. 47: ℭ ζήτει τὸ παρὸν σημεῖον ἔμπροσθεν περὶ τὸ τέλος τῆς βίβλου

17 post με΄ **in sinistro marg. fol. 31^{v}:** καὶ ἄλλως· πολλ(α)πλασίασον τὰ ἄνωθεν ε΄ μετὰ τῶν κάτωθεν θ΄ ἐναλλάξ· ε΄κις οὖν θ΄ γίνονται με΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ κάτωθεν ϛ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν η΄ ἐναλλάξ· ϛ΄κις οὖν η΄ γίνονται μη΄.

26 τῶν γ΄ πεντηκοστῶν τετάρτων] τῶν $^{\omega\nu}\gamma^{\omega\nu}$ νδ **C** **32/33** πεντηκοστὰ τέταρτα] $^{\alpha}$νδ **C**

καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν τριῶν ἀνὰ ιη΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\iota\gamma}{\iota\eta}$ δηλῶσι ιγ΄ ὀκτακαιδέκατα ἑνὸς ἀκεραίου. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ καὶ $\frac{\eta}{\phi}$ ἑνούμενα γίνονται ἀκέραιον α΄ καὶ $\frac{\iota\gamma}{\iota\eta}$ ἑνὸς ἀκεραίου.

Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν). ἔστω ὅτι ζητεῖς ἀφελεῖν ἐκ τῶν $\frac{\eta}{\phi}$ τὸ περισσότερον τῶν $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$. καὶ πάλιν πολλ(α)πλασίασον τὰ δύο κάτωθεν γράμματα, τὰ ς΄ καὶ θ΄ δηλονότι· ς΄κις οὖν θ΄ γίνονται νδ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ ἐναλλὰξ τὰ ἄνωθεν || ε΄ μετὰ τῶν f. 32^{r}
κάτωθεν θ΄· ε΄κις οὖν θ΄ γίνονται με΄. καὶ τὰ κάτωθεν ς΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν η΄ ἐναλλάξ· ς΄κις οὖν η΄ γίνονται μη΄. καὶ τὰ μὲν με΄ ἐστὶ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$, τὰ δὲ μη΄ ἐστὶ $\frac{\eta}{\phi}$. ἄφελε οὖν τὰ γ΄, ἅπερ περισσεύοσι ἐκ τῶν μη΄, καὶ ἀπομένοσι με΄. τὰ δὲ γ΄ ἐστὶ ἕνα ὀκτακαιδέκατον. ἄφελε δὲ $\frac{\alpha}{\iota\eta}$ ἐκ τῶν $\frac{\eta}{\phi}$ καὶ ἀπομένοσι με΄, τουτέστι $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$. καὶ ἰδοὺ ἀφεῖλες τὸ περισσεῦον τῶν $\frac{\eta}{\phi}$, ὅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\iota\eta}$ ἑνὸς ἀκεραίου.

ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὰ δηλωθέντα ζητήματα.

μη

Περὶ τοῦ πῶς ἔστι πολλ(α)πλασιάσαι $\frac{\alpha}{\beta}$ μετὰ $\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μετὰ $\frac{\alpha}{\gamma}$, καὶ β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ μετὰ $\frac{\beta}{\gamma}$, καὶ β΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ μετὰ γ΄ καὶ $\frac{\delta}{\varepsilon}$, καὶ ἑξῆς ὁμοίως

Ἔστω ὅτι βούλ(ει) πολλ(α)πλασιάσαι $\frac{\alpha}{\beta}$ μετὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ εἰδέναι ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμός, πόσος γίνεται. καὶ πρῶτον δεῖ τοῦτο εἰδέναι, ὅτι πᾶν τζάκισμα ἔλαττόν ἐστι ἑνὸς ἀκεραίου, διὸ καὶ τζάκισμα λέγεται. ἐπεὶ δὲ πᾶν τζάκισμα ἔλαττόν ἐστι ἑνὸς ἀκεραίου, τζάκισμα μετὰ τζακίσματος πολλ(α)πλασιαζόμενον ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς οὐκ αὔξεται, ἀλλὰ ἐλαττοῦται μάλιστα. πολλ(α)πλασιαζόμενον γὰρ $\frac{\alpha}{\beta}$ μετὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γίνεται $\frac{\alpha}{\delta}$, καὶ γὰρ $\frac{\alpha}{\beta}$κις $\frac{\alpha}{\beta}$, ταὐτὸν γὰρ εἰπεῖν τὸ ἥμισυ τοῦ μισοῦ, ἔστι $\frac{\alpha}{\delta}$. πολλ(α)πλασιαζόμενον δὲ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ – $\frac{\alpha}{\gamma}$κις $\frac{\alpha}{\gamma}$, ταὐτὸν γὰρ εἰπεῖν τὸ τρίτον τοῦ τρίτου, ἔστι $\frac{\alpha}{\phi}$. ὁ δὲ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τεχνικῶς γίνεται οὕτως.

Θὲς τὸ μισὸν μετὰ τοῦ μισοῦ σύνεγγυς $\frac{\alpha}{\beta}$ $\frac{\alpha}{\beta}$. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς ἄνωθεν δύο ψήφους· ἅπαξ οὖν α΄ πάλιν ἐστὶ α΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰς κάτωθεν δύο ψήφους· δὶς οὖν β΄ γίνονται δ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha}{\delta}$ δηλῶσι ἕνα τέταρτον.

$\frac{\alpha}{\gamma}$ μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Θὲς τὸ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ σύνεγγυς. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς ἄνωθεν δύο ψήφους· ἅπαξ οὖν α΄ πάλιν ἐστὶ α΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰς κάτωθεν δύο ψήφους· τρὶς οὖν γ΄ γίνονται θ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha}{\phi}$ δηλῶσι ἕνα ἔννατον. καὶ ἰδοὺ πολλ(α)πλασιαζόμενον $\frac{\alpha}{\beta}$ μετὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ἐλαττούμενος γίνεται $\frac{\alpha}{\delta}$, πολλ(α)πλασιαζόμενον δὲ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ἐλαττούμενος γίνεται $\frac{\alpha}{\phi}$.

$\frac{\alpha}{\gamma}$ μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\delta}$ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Πολλ(α)πλασίασον τὰς ἄνωθεν δύο ψήφους· ἅπαξ οὖν α΄ πάλιν ἐστὶ α΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰς κάτωθεν δύο ψήφους· γ΄ οὖν δ΄κις γίνονται ιβ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha}{\alpha\,\beta}$ δηλῶσι ἕνα δωδέκατον. καὶ ἰδοὺ τὸ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\delta}$ πολλ(α)πλασιαζόμενα ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ἐλαττούμενος γίνεται ἕνα δωδέκατον ἑνὸς ἀκεραίου.

$\frac{\gamma}{\delta}$ μετὰ $\frac{\delta}{\varepsilon}$ πολλ(α)πλασιαζόμενα

Πολλ(α)πλασίασον τὰς ἄνωθεν δύο ψήφους· τρεῖς οὖν δ΄κις γίνονται ιβ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰς κάτωθεν δύο ψήφους· δ΄κις οὖν ε΄ γίνονται κ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha\,\beta}{\beta\,\eta}$ δηλῶσι ιβ΄ εἰκοστά. σχιζόμενα δὲ γίνονται $\frac{\varsigma}{\alpha\,\eta}$, σχιζόμενα δὲ πάλιν τὰ ς΄ δέκατα γίνονται $\frac{\gamma}{\varepsilon}$. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ μετὰ τῶν $\frac{\delta}{\varepsilon}$ πολλ(α)πλασιαζόμενα ὁ τούτων πολ-

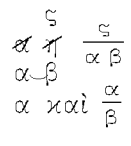
---

40 τρεῖς] τρὶς **C**

λ(α)πλασιασμὸς ἐλαττούμενος γίνεται $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ἑνὸς ἀκεραίου.

β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ μετὰ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ πολλ(α)πλασιαζόμενα

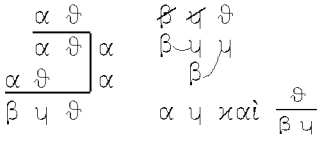
Πολλ(α)πλασίασον τὰ β΄ ἀκέραια μετὰ τῶν κάτωθεν δ΄· δ΄κις οὖν β΄ γίνονται η΄. πρόσθες καὶ τὸ ἄνωθεν α΄ καὶ γίνονται θ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ θ΄ μετὰ τῶν β΄ τῶν ἄνωθεν τῶν γ΄· δὶς οὖν θ΄ γίνονται ιη΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰς κάτωθεν δύο ψήφους τῶν τζακισμάτων· δ΄κις οὖν γ΄ γίνονται ιβ΄. μέρισον τὰ ιη΄ μετὰ τῶν ιβ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς α΄ καὶ τζάκισμα ς΄ δωδέκατα. τὰ δὲ ς΄ δωδέκατα ἔχοσι λόγον τοιοῦτον, ὃν ἔχει τὸ α΄ πρὸς τὰ β΄, τουτέστι μισόν. καὶ ἰδοὺ τὰ β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ μετὰ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α΄ς″.



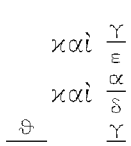
Καὶ ἄλλως. πολλ(α)πλασίασον τὰ β΄ ἀκέραια μετὰ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$· δὶς οὖν $\frac{\beta}{\gamma}$ γίνονται $\frac{\delta}{\gamma}$, ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\delta}$ μετὰ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$. οἱ ἄνωθεν οὖν δύο ψῆφοι – ἅπαξ β΄ πάλιν ἐστὶ β΄, οἱ κάτωθεν δὲ ψῆφοι – δ΄κις γ΄ γίνονται ιβ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\beta}{\alpha\,\beta}$ δηλῶσι β΄ δωδέκατα, σχιζόμενα δὲ γίνονται $\frac{\alpha}{\varsigma}$. ἕνωσον τὸ $\frac{\alpha}{\varsigma}$ μετὰ τοῦ α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ταὐτὸν γὰρ εἰπεῖν μετὰ τοῦ α΄ καὶ $\frac{\beta}{\varsigma}$, καὶ γίνονται ὁμοῦ α΄ καὶ $\frac{\gamma}{\varsigma}$, ἅπερ ἐστὶ α΄$\frac{\alpha}{\beta}$. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως ἐγένετο ὁ πολλ(α)πλασιασμὸς τούτων α΄ς″.

β΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ μετὰ τῶν γ΄ καὶ $\frac{\delta}{\varepsilon}$ πολλ(α)πλασιαζόμενα

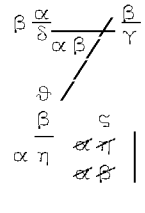
Πολλ(α)πλασίασον τὰ β΄ ἀκέραια μετὰ τῶν δ΄ τῶν κάτωθεν ὄντων τῶν γ΄· δ΄κις οὖν β΄ γίνονται η΄. πρόσθες καὶ τὰ ἄνωθεν γ΄ καὶ γίνονται ια΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ γ΄ ἀκέραια μετὰ τῶν ε΄ τῶν κάτωθεν ὄντων τῶν δ΄· ε΄κις οὖν γ΄ γίνονται ιε΄. πρόσθες καὶ τὰ ἄνωθεν δ΄ καὶ γίνονται ιθ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ιθ΄ μετὰ τῶν ια΄· ια΄κις οὖν ιθ΄ γίνονται σθ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰς κάτωθεν δύο ψήφους τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ τῶν $\frac{\delta}{\varepsilon}$· δ΄κις οὖν ε΄ γίνονται κ΄. μέρισον τὰ σθ΄ μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς α μ΄ καὶ $\frac{\vartheta}{\beta\,\mu}$. καὶ ἰδοὺ τὰ β΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ μετὰ τῶν γ΄ καὶ $\frac{\delta}{\varepsilon}$ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α μ΄ καὶ $\frac{\vartheta}{\beta\,\mu}$.



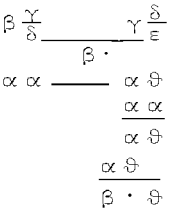
Καὶ ἄλλως. πολλ(α)πλασίασον τὰ β΄ ἀκέραια μετὰ τῶν γ΄ ἀκεραίων· δὶς οὖν γ΄ γίνονται ς΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ β΄ ἀκέραια καὶ μετὰ τῶν $\frac{\delta}{\varepsilon}$· δὶς οὖν $\frac{\delta}{\varepsilon}$ γίνονται $\frac{\eta}{\varepsilon}$, ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α΄ καὶ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ μετὰ τῶν γ΄ ἀκεραίων· $\frac{\gamma}{\delta}$ οὖν τρὶς γίνονται $\frac{\vartheta}{\delta}$, ἅπερ ἐστὶ ἀκέραια β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ μετὰ τῶν $\frac{\delta}{\varepsilon}$· τρὶς οὖν δ΄ γίνονται ιβ΄ καὶ δ΄κις ε΄ γίνονται κ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\alpha\,\beta}{\beta\,\mu}$ δηλῶσι ιβ΄ εἰκοστά, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$. ἐπεὶ δὲ τὰ τρία τζακίσματά εἰσι ἀνόμοια $\frac{\gamma}{\varepsilon}\ \frac{\alpha}{\delta}\ \frac{\gamma}{\varepsilon}$ ὁμοῦ α μ καὶ $\frac{\vartheta}{\beta\,\mu}$ καὶ οὐ δύνασαι ἑνῶσαι ταῦτα, θὲς τὰ σχήματα αὐτῶν σύνεγγυς. καὶ ὥσπερ εἰώθαμεν ποιεῖν ἐπὶ τῶν συμβεβηκότων διαφόρων τζακισμάτων, οὕτως καὶ νῦν ποίησον. πολλ(α)-

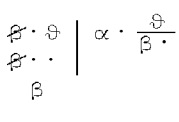


2.18 eaedem multiplicationes in inf. marg. fol. 32^{r} velociter exaratae exstant:

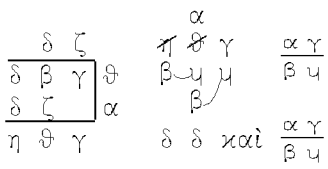


ἤγουν α ς″





πλασίασον γὰρ τὰς κάτωθεν δύο πρώτας ψήφους, τὰ ε΄ δηλονότι καὶ δ΄ ε΄κις οὖν δ΄ γίνονται κ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ κ΄ μετὰ τῆς κάτωθεν ψήφου τοῦ τρίτου || τζακίσματος, τουτέστι μετὰ τῶν ε΄· κ΄κις οὖν ε΄ γίνονται ρ΄. τὰ δὲ ρ΄ ἐστὶ ἓν σῶμα τῶν τριῶν τούτων διαφόρων τζακισμάτων. λάβε δὲ τὰ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ τῶν ρ΄, ἅπερ ἐστὶ ξ΄· τὸ γὰρ πέμπτον τῶν ρ΄ ἐστὶ κ΄, τρὶς δὲ κ΄ ἐστὶ ξ΄. λάβε καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ρ΄, ὅπερ ἐστὶ κε΄· δ΄κις γὰρ κε΄ ρ΄ γίνονται. λάβε καὶ πάλ(ιν) $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ τῶν ρ΄, ἅπερ ἐστὶ πάλιν ξ΄. ἕνωσον τὰ ξ΄ καὶ κε΄ καὶ ξ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ρμε΄. μέρισον τὰ ρμε΄ μετὰ τῶν ρ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ἀκέραιον α΄ καὶ τζάκισμα $\frac{\delta\,\varepsilon}{\alpha\,\mu\,\mu}$, ἅπερ σχιζόμενα εἰς μέρη πέντε γίνονται $\frac{\vartheta}{\beta\,\mu}$. ἕνωσον τοῦτο τὸ α΄ καὶ $\frac{\vartheta}{\beta\,\mu}$ μετὰ τῶν ς΄ καὶ α΄ καὶ β΄, ὧν ἐπολλ(α)πλασίασας, καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν α μ΄ καὶ $\frac{\vartheta}{\beta\,\mu}$, καθὼς οὕτως καὶ διὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως εὗρες.



δ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ μετὰ τῶν ϑ΄ καὶ $\frac{\beta}{\varepsilon}$ πολλ(α)πλασιαζόμενα

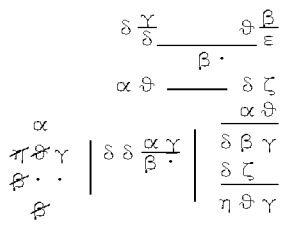
Πολλ(α)πλασίασον τὰ δ΄ ἀκέραια μετὰ τῶν κάτωθεν δ΄· δ΄κις οὖν δ΄ γίνονται ις΄. πρόσθες καὶ τὰ ἄνωθεν γ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ιϑ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ ϑ΄ ἀκέραια μετὰ τῶν κάτωθεν ε΄· ε΄κις οὖν ϑ΄ γίνονται με΄. πρόσθες καὶ τὰ ἄνωθεν β΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ μζ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ μζ΄ μετὰ τῶν ιϑ΄· ιϑ΄κις οὖν μζ΄ γίνονται ωϛγ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰς κάτωθεν δύο ψήφους τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ τῶν $\frac{\beta}{\varepsilon}$. δ΄κις οὖν ε΄ γίνονται κ΄. μέρισον τὰ ωϛγ΄ μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς μδ΄ καὶ $\frac{\iota\gamma}{\kappa}$. καὶ ἰδοὺ τὰ δ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ μετὰ τῶν ϑ΄ καὶ $\frac{\beta}{\varepsilon}$ πολλ(α)πλασιαζόμενα πολλ(α)πλασιάζοσι μδ΄ καὶ $\frac{\iota\gamma}{\kappa}$.

Καὶ ἄλλως. πολλ(α)πλασίασον τὰ δ΄ ἀκέραια μετὰ τῶν ϑ΄ ἀκεραίων· δ΄κις οὖν ϑ΄ γίνονται λϛ΄. πολλ(α)πλασίασον πάλιν τὰ δ΄ ἀκέραια καὶ μετὰ τῶν $\frac{\beta}{\varepsilon}$· δ΄κις οὖν $\frac{\beta}{\varepsilon}$ γίνονται $\frac{\eta}{\varepsilon}$, ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α΄ καὶ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ μετὰ τῶν ϑ΄ ἀκεραίων· $\frac{\gamma}{\delta}$ οὖν ϑ΄κις γίνονται $\frac{\beta\,\zeta}{\delta}$, ἅπερ ἐστὶ ἀκέραια ϛ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ μετὰ τῶν $\frac{\beta}{\varepsilon}$· τρὶς οὖν β΄ γίνονται ϛ΄ καὶ δ΄κις ε΄ γίνονται κ΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\varsigma}{\beta\,\mu}$ δηλῶσι ϛ΄ εἰκοστά. θὲς σύνεγγυς τὰ τρία ἀνόμοια τζακίσματα. οἱ κάτωθεν οὖν δύο πρῶτοι ψῆφοι πολλ(α)πλασιαζόμενοι δ΄κις ε΄ γίνονται κ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ κ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν κ΄ τοῦ τρίτου τζακίσματος· κ΄κις οὖν κ΄ γίνονται υ΄. ἔστι δὲ τὰ υ΄ ταῦτα ἓν σῶμα τῶν τριῶν τζακισμάτων. λάβε οὖν τὰ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ τῶν υ΄, ἅπερ ἐστὶ σμ΄· τὸ γὰρ πέμπτον τῶν υ΄ ἐστὶ π΄, τρὶς δὲ π΄ σμ΄ γίνονται. λάβε δὲ καὶ τὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν υ΄, ἅπερ ἐστὶ τ΄. λάβε δὲ καὶ τὰ $\frac{\varsigma}{\beta\,\mu}$ τῶν υ΄, ἅπερ ἐστὶ ρκ΄· τὸ γὰρ εἰκοστὸν τῶν υ΄ ἐστὶ κ΄, ϛ΄κις δὲ κ΄ ρκ΄ γίνονται

ὁμοῦ $\frac{\chi\xi}{\beta\,\mu}$.

---

13 eadem multiplicatio in sinistro marg. fol. 32^{v} velociter exarata invenitur:



ται. ἕνωσον τὰ σμ΄ καὶ τ΄ καὶ ρκ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ χξ΄. μέρισον τὰ χξ΄ μετὰ τῶν υ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ἀκέραιον α΄ καὶ τζάκισμα $\frac{\beta\,\xi\,\mu}{\delta\,\mu\,\mu}$, ἅπερ εἰς μέρη κ΄ σχιζόμενα γίνονται $\frac{\iota\gamma}{\kappa}$. θὲς οὖν τὸ α΄ καὶ $\frac{\iota\gamma}{\kappa}$ κατωτέρω τῶν λς΄ καὶ α΄ καὶ ς΄ καὶ ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν μδ΄ καὶ $\frac{\iota\gamma}{\kappa}$, καθὼς οὕτως καὶ διὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως εὕρες.

ὡσαύτως καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῶν δύο τούτων μεταχειρίσεων ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

μθ

Περὶ τοῦ πῶς ἔστι λαβεῖν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λς΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν μη΄ καὶ $\frac{\beta}{\varepsilon}$ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως

Ἔστω ὅτι ζητεῖς λαβεῖν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λς΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ἄνωθεν β΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν β΄· δὶς οὖν β΄ γίνονται δ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ κάτωθεν γ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν γ΄· τρὶς οὖν γ΄ γίνονται θ΄, ἅπερ δ΄ καὶ θ΄ οὕτως κείμενα $\frac{\delta}{\vartheta}$ δηλῶσι δ΄ ἔννατα. καὶ ἰδοὺ εὕρες, ὅτι τὰ $\frac{\delta}{\vartheta}$ τῶν λς΄ ἐστὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λς΄. τὰ $\frac{\delta}{\vartheta}$ οὖν τῶν λς΄ ἐστὶ ις΄· τὸ γὰρ ἔννατον τῶν λς΄ ἐστὶ δ΄, δ΄ δὲ ἔννατα, τουτέστι δ΄κις δ΄, γίνονται ις΄. τὰ ις΄ δέ ἐστι $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λς΄. τὰ γὰρ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λς΄ ἐστὶ κδ΄· δὶς γὰρ ιβ΄ γίνονται κδ΄ καὶ τρὶς ιβ΄ γίνονται λς΄. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν κδ΄ ἐστὶ ις΄· δὶς γὰρ η΄ γίνονται ις΄ καὶ τρὶς η΄ γίνονται κδ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λς΄ ἐστὶ ις΄, ἅπερ ις΄ ἐστὶ $\frac{\delta}{\vartheta}$ τῶν λς΄.

Ἔστω ὅτι ζητεῖς λαβεῖν $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν μη΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ἄνωθεν γ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν γ΄· τρὶς οὖν γ΄ γίνονται θ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ κάτωθεν δ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν δ΄· δ΄κις οὖν δ΄ γίνονται ις΄, ἅπερ θ΄ καὶ ις΄ οὕτως κείμενα $\frac{\vartheta}{\iota\varsigma}$ δηλῶσι θ΄ ἑξακαιδέκατα. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\vartheta}{\iota\varsigma}$ τῶν μη΄ ἐστὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν μη΄. τὰ $\frac{\vartheta}{\iota\varsigma}$ οὖν τῶν μη΄ ἐστὶ κζ΄· τὸ γὰρ ἑξακαιδέκατον τῶν μη΄ ἐστὶ γ΄, θ΄ δὲ ἑξακαιδέκατα, τουτέστι θ΄κις γ΄, γίνονται κζ΄. τὰ δὲ κζ΄ ἐστὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν μη΄. τὰ γὰρ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν μη΄ ἐστὶ λς΄· τρὶς γὰρ ιβ΄ γίνονται λς΄ καὶ δ΄κις ιβ΄ γίνονται μη΄. τὰ δὲ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν λς΄ ἐστὶ κζ΄· τρὶς γὰρ θ΄ γίνονται κζ΄ καὶ δ΄κις θ΄ γίνονται λς΄. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν μη΄ ἐστὶ κζ΄, ἅπερ κζ΄ ἐστὶ $\frac{\vartheta}{\iota\varsigma}$ τῶν μη΄.

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς ἐκ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λ΄ λαβεῖν $\frac{\beta}{\varepsilon}$. πολλ(α)πλασίασον τὰ ἄνωθεν β΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν β΄· δὶς οὖν β΄ γίνονται δ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ κάτωθεν γ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ε΄· τρὶς οὖν ε΄ γίνονται ιε΄, ἅπερ δ΄ καὶ ιε΄ οὕτως κείμενα $\frac{\delta}{\iota\varepsilon}$ δηλῶσι δ΄ πεντεκαιδέκατα. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\delta}{\iota\varepsilon}$ τῶν λ΄ ἐστὶ $\frac{\beta}{\varepsilon}$ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λ΄. τὰ $\frac{\delta}{\iota\varepsilon}$ οὖν τῶν λ΄ ἐστὶ η΄· τὸ γὰρ πενταικαιδέκατον τῶν λ΄ ἐστὶ β΄, δ΄ δὲ πενταικαιδέκατα, τουτέστι δ΄κις β΄, γίνονται η΄. τὰ δὲ η΄ ἐστὶ $\frac{\beta}{\varepsilon}$ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λ΄. τὰ γὰρ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λ΄ ἐστὶ κ΄· δὶς γὰρ ι΄ γίνονται κ΄ καὶ τρὶς ι΄ γίνονται λ΄. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\varepsilon}$ τῶν κ΄ ἐστὶ η΄· δὶς γὰρ δ΄ γίνονται η΄ καὶ ε΄κις δ΄ γίνονται κ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\beta}{\varepsilon}$ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λ΄ ἐστὶ η΄, ἅπερ η΄ ἐστὶ $\frac{\delta}{\iota\varepsilon}$ τῶν λ΄.

ὡσαύτως καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον, ὡς διὰ τῶν τριῶν τούτων ὑποδειγμάτων ‖ δηλοῦται σαφέστατα. f. 33^{r}

31/32: πεντεκαιδέκατα/πενταικαιδέκατα] sic C

ν **Περὶ τοῦ πῶς ἔστι λαβεῖν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λε΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν λε΄ καὶ $\frac{\zeta}{\phi}$ τῶν ε΄ καὶ $\frac{\iota\varepsilon}{\kappa}$ τῶν ια΄ καὶ $\frac{\lambda\alpha}{\nu\varepsilon}$ τῶν ρ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως**

Ἔστω ὅτι ζητεῖς λαβεῖν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λε΄. ἔχεις δὲ ταῦτα λαβεῖν οὕτως. πολλ(α)πλασίασον

α α $\frac{\alpha}{\gamma}$ ξ κ κ κ β γ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$	β α α κ ε $\frac{\alpha}{\delta}$ δ δ β ς καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$	η κ ε $\frac{\eta}{\phi}$ δ γ καὶ $\frac{\eta}{\phi}$	α ξ ε $\frac{\varepsilon}{\beta\,\mu}$ β μ η καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$	κ β ξ ε $\frac{\beta\,\mu}{\varepsilon\,\varepsilon}$ γ α κ μ ε ε ε ε ς καὶ $\frac{\delta}{\alpha\,\alpha}$
$\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λε	$\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν λε	$\frac{\zeta}{\phi}$ τῶν ε	$\frac{\iota\varepsilon}{\kappa}$ τῶν ια	$\frac{\lambda\alpha}{\nu\varepsilon}$ τῶν ρ

τὰ λε΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν β΄· δὶς οὖν λε΄ γίνονται ο΄. μέρισον τὰ ο΄ μετὰ τῶν κάτωθεν γ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λε΄ εὗρες, ὅτι ἐστὶ κγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$.

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς λαβεῖν $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν λε΄. πολλ(α)πλασίασον πάλιν τὰ λε΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν γ΄· τρὶς οὖν λε΄ γίνονται ρε΄. μέρισον τὰ ρε΄ μετὰ τῶν κάτωθεν δ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κς΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν λε΄ ἐστὶ κς΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$.

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς λαβεῖν $\frac{\zeta}{\phi}$ τῶν ε΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ε΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν ζ΄· ε΄κις οὖν ζ΄ γίνονται λε΄. μέρισον τὰ λε΄ μετὰ τῶν κάτωθεν θ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς γ΄ καὶ $\frac{\eta}{\phi}$. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\zeta}{\phi}$ τῶν ε΄ ἐστὶ γ΄ καὶ $\frac{\eta}{\phi}$.

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς λαβεῖν $\frac{\iota\varepsilon}{\kappa}$ τῶν ια΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ια΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν ιε΄· ια΄κις οὖν ιε΄ γίνονται ρξε΄. μέρισον τὰ ⟨ρξε΄⟩ μετὰ τῶν κάτωθεν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς η΄ καὶ $\frac{\varepsilon}{\beta\,\mu}$, τουτέστι η΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\iota\varepsilon}{\kappa}$ τῶν ια΄ ἐστὶ η΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$.

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς λαβεῖν $\frac{\lambda\alpha}{\nu\varepsilon}$ τῶν ρ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ρ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν λα΄· ρ΄κις οὖν λα΄ γίνονται ,γρ΄. μέρισον τὰ ,γρ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν νε΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς νς΄ καὶ $\frac{\beta\,\mu}{\varepsilon\,\varepsilon}$, τουτέστι νς΄ καὶ $\frac{\delta}{\iota\alpha}$. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\lambda\alpha}{\nu\varepsilon}$ τῶν ρ΄ ἐστὶ νς΄ καὶ $\frac{\delta}{\iota\alpha}$.

Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν). Ἔστω ὅτι ζητεῖς λαβεῖν $\frac{\phi}{\zeta}$ τῶν ε΄. ἔστι δὲ τοῦτο τὸ ἀνάπαλιν τοῦ προτέρου ζητήματος· πρότερον γὰρ ἐζήτησας λαβεῖν ζ΄ ἕννατα τῶν ε΄, νῦν δὲ ζητεῖς λαβεῖν θ΄ ἕβδομα τῶν ε΄. καὶ πάλιν πολλ(α)πλασίασον τὰ ε΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν θ΄· ε΄κις οὖν θ΄ γίνονται με΄. μέρισον τὰ με΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ς΄ καὶ $\frac{\gamma}{\zeta}$. καὶ ἰδοὺ τὰ θ΄ ἕβδομα τῶν ε΄ ἐστὶ ς΄ καὶ $\frac{\gamma}{\zeta}$.

γ δ ε $\frac{\gamma}{\zeta}$ ξ ς καὶ $\frac{\gamma}{\zeta}$	α κ α ξ $\frac{\alpha\,\mu}{\alpha\,\varepsilon}$ β β μ α ε ε α α δ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$
$\frac{\phi}{\zeta}$ τῶν ε	$\frac{\kappa}{\iota\varepsilon}$ τῶν ια

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς λαβεῖν $\frac{\kappa}{\iota\varepsilon}$ τῶν ια΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ια΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν κ΄· ια΄κις οὖν κ΄ γίνονται σκ΄. μέρισον τὰ σκ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ιε΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιδ΄ καὶ $\frac{\alpha\,\mu}{\alpha\,\varepsilon}$, τουτέστι ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\kappa}{\iota\varepsilon}$ τῶν ια΄ ἐστὶ ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$.

ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

---

1 **ad titulum huius cap. in dextro marg. fol. 33^{r}:** ἕνωσον τὸ παρὸν κεφάλαιον ἔμπροσθεν, ἔνθα ἐστὶ τὸ ρλξ^{ον} κεφάλαιον

14 ρξε΄ **scripsi: spatium trium litt. atramento coopertum**

να

Περὶ τοῦ πῶς ἔστι διαμερίσαι ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ εἰς μέρη ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ εἰδέναι, πόσον ἐστὶ μείζων ἑκάστη μερὶς τῶν ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$

Ἔστω ὅτι βούλ(ει) διαμερίσαι ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ εἰς μέρη ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$. γενόμενα δὲ τὰ ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μέρη ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ ἕκαστον μέρος τῶν ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ ἔσται μεῖζον πάντως ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσον ἐστὶ μεῖζον ἕκαστον τῶν ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$.

ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. τὰ ε΄ ἔχοσι καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅπερ ἐστὶ μισὸν μέρος ἑνὸς ἀκεραίου. ἐπεὶ δὲ οὐκ ἔστι ἐξόλου διηρτημένα τὰ ε΄ εἰς ἀκέραια μέρη, ἀλλ᾽ ἔχοσι καὶ ς″, ποίησον καὶ τὰ ε΄ ἀκέραια μισά. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ε΄ μετὰ τῶν κάτωθεν β΄· δὶς οὖν β΄ γίνονται ι΄. πρόσθες καὶ τὸ ἄνωθεν α΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ ια΄ μισὰ τὰ ε΄ς″. ποίησον καὶ τὰ ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μισά, καθὼς οὕτως καὶ τὰ ε΄ ἐποίησας, καὶ γίνονται τὰ ζ΄ ἀκέραια μισὰ ιδ΄. διπλασίασον δὲ τὸ $\frac{\alpha}{\gamma}$· δὶς οὖν $\frac{\alpha}{\gamma}$ γίνονται $\frac{\beta}{\gamma}$. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ιδ΄, καὶ γίνονται τὰ ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μισὰ ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. καὶ τὰ μὲν ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἐστὶ σῶμα ἀνάλογον τῶν ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. τὰ δὲ ια΄ [μισά] ἐστι καὶ αὐτὰ σῶμα μὲν ἀνάλογον τῶν ε΄ς″, μεριστὴς δὲ τῶν ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. μέρισον γὰρ τὰ ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ μετὰ τῶν ια΄· χωρῶσι δὲ ἀφαιρεθῆναι τὰ ια΄ ἅπαξ ἐπὶ τῶν ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ ἀπομένει καὶ τζάκισμα γ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. ποίησον τρίτα τὰ γ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$· τρὶς οὖν γ΄ γίνονται θ΄ καὶ τὰ ἄνωθεν β΄ – ὁμοῦ ια΄ τρίτα τὰ γ΄ ἀκέραια καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. ποίησον καὶ τὰ ια΄, ἅπερ εἶχες μεριστὴν τῶν ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, τρίτα, καθὼς ἐποίησας καὶ τὰ γ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ τρίτα ια΄· τρὶς οὖν ια΄ γίνονται λγ΄ τρίτα τὰ ια΄, ὁ μεριστὴς δηλονότι. τὰ ια΄ δὲ τρίτα τοῦ τζακίσματος πρὸς τὰ λγ΄ τρίτα τοῦ μεριστοῦ συγκρινόμενα ἔχοσι λόγον $\frac{\alpha}{\gamma}$· τρὶς γὰρ ια΄ γίνονται λγ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ διαμερισμὸς τῶν ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ μετὰ τῶν ια΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ ὁ μεριστὴς τῶν ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, ἔστι ἀκέραιον α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, καθότι ἅπαξ ἐχώρεσαν τὰ ια΄ ἐπὶ τῶν ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ ἀπέμεινε καὶ τζάκισμα γ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, ἅπερ ἔχοσι καὶ αὐτὰ τρίτον μέρος τῶν ια΄, τοῦ μεριστοῦ δηλονότι. τὸ γὰρ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ια΄ ἐστὶ γ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$· τρὶς γὰρ γ΄ γίνονται θ΄ καὶ τρὶς $\frac{\beta}{\gamma}$ γίνονται $\frac{\varsigma}{\gamma}$, ἅπερ ἐστὶ β΄ ἀκέραια, θ΄ δὲ καὶ β΄ γίνονται ια΄, καθὼς οὕτως εὗρες συγκρίνας τὰ ια΄ τρίτα μετὰ τῶν λγ΄ τρίτων. καὶ ἰδοὺ ἕκαστον μέρος τῶν ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ ἐστι πλεῖον ἐφ᾽ ἑκάστου || τῶν ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ὅσον ἐστὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑκάστου σώματος τῶν ζ΄. προστιθεμένου γὰρ τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑκάστου σώματος τῶν ζ΄ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος γενήσεται, ὅσον ἐστὶ ἕκαστον σῶμα τῶν ε΄ς″. f. 33v

γ
α δ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$
α⌣α
α καὶ γ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$

Ποιήσωμεν τοῦτο καὶ διὰ τῆς κοινῆς καὶ πολ(ι)τευομένης μεταχειρίσεως, ἵνα ἀποδειχθῇ οὕτως ἔχον τὸ ἀληθές, ὡς ἡ πρόχειρος ἡμῖν δεδήλωκε μεταχείρισις.

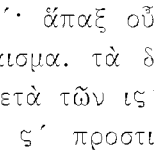
ἕστωσαν φλουριὰ ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνὸς φλουριοῦ, ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα ς΄. καὶ τὰ μὲν ζ΄ φλουριά – ς΄κις ζ΄ γίνονται ὑπέρπυρα μβ΄, τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐστὶ ὑπέρπυρα β΄, ὁμοῦ δὲ τὰ ζ΄ φλουριὰ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ὑπέρπυρα μδ΄. μεριζόμενα δὲ τὰ μδ΄ ὑπέρπυρα εἰς μέρη ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ ζήτ(ει), πόσον ἐστὶ μεῖζον ἕκαστον σῶμα τῶν ε΄ς″ ἐφ᾽ ἑκάστου σώματος τῶν ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. ἡ πρόχειρος δὲ μεταχείρισις δεδήλωκε ἡμῖν, ὅτι προστ(ι)θεμένου $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐφ᾽ ἑκάστου σώματος τῶν ζ΄ γενήσεται, ὅσον ἐστὶ ἕκαστον σῶμα τῶν ε΄. ἕκαστον δὲ τῶν ζ΄ ἐστὶ ὑπέρπυρα ς΄. πρόσθες καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ς΄ ὑπερπύρων, ὅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα β΄, καὶ γίνονται ὑπέρπυρα η΄. ἕκαστον οὖν τῶν ε΄ς″ χρὴ εἶναι ὑπέρπυρα η΄. τὰ μὲν ε΄ ἀκέραια, ἕκαστον ἀνὰ ὑπέρπυρα η΄, ε΄κις η΄ γίνονται μ΄. λείπονται καὶ ὑπέρπυρα δ΄ μέχρι τῶν μδ΄ ὑπερπύρων. τὸ δὲ ς″ – ἐπεὶ ἕκαστον μέρος τῶν ε΄ οἰκειοῦται ὑπέρπυρα η΄, τὸ ς″ οἰκειοῦται ὑπέρπυρα δ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ζ΄ φλουριὰ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα

---

2 ἐφ᾽ ἑκάστου] sc. μέρους **pro** μερίδος **in divisione:** γ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$] sc. τζάκισμα 31 ἀποδειχθῇ] ἀποδικτει **C** 38 ζ΄] **breviter pro** ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ε΄] **brev. pro** ε΄ς″ **scriptum**

μδ΄, εἰς μέρη ε΄ς″ μεριζόμενα γίνονται μὲν πάλιν ὑπέρπυρα μδ΄, ἕκαστον δὲ μέρος τῶν ε΄ς″ οἰκειοῦται ὑπέρπυρα η΄ μὲν τὰ ἀκέραια, δ΄ δὲ τὸ ς″, καθὼς ἡ πρόχειρος μεταχείρισις ἡμῖν οὕτως δεδήλωκε, ὅτι προστ(ι)θεμένου $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ζ΄ γενήσεται ἕκαστον τῶν ζ΄ μετὰ τῆς προσθέσεως τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ὅσον χρὴ εἶναι ἕκαστον τῶν ε΄ ἀκεραίων. ἀναλόγως δὲ πάλιν καὶ τὸ ς″ οὕτως γίνεται.

Ἵνα δὲ σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, ἔστω ὅτι βούλ(ει) διαμερίσασθαι ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ εἰς μέρη ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ εἰδέναι, πόσον ἐστὶ μεῖζον ἕκαστον μέρος τῶν ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐκ τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ς΄ μετὰ τῶν κάτωθεν γ΄· τρὶς οὖν ς΄ γίνονται ιη΄. πρόσθες καὶ τὰ ἄνωθεν β΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ κ΄ τρίτα τὰ ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. ὡσαύτως δὲ πάλιν πολλ(α)πλασίασον τὰ ε΄ μετὰ τῶν κάτωθεν γ΄· τρὶς οὖν ε΄ γίνονται ιε΄. πρόσθες καὶ τὸ ἄνωθεν α΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ ις΄ τρίτα τὰ ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. καὶ τὰ μὲν κ΄ ἐστὶ σῶμα τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, τὰ ις΄ δέ ἐστι σῶμα μὲν τῶν ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, μεριστὴς δὲ τῶν κ΄. μέρισον τὰ κ΄ μετὰ τῶν ις΄· ἅπαξ οὖν ις΄ ἐστὶ πάλιν ις΄, ἀπομένοσι καὶ δ΄ ἑξακαιδέκατα τζάκισμα. τὰ δὲ δ΄ ἑξακαιδέκατά ἐστι $\frac{\alpha}{\delta}$. ἔστι δὲ ὁ διαμερισμὸς τῶν κ΄ μετὰ τῶν ις΄ ἀκέραιον α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ς΄ προστιθεμένου $\frac{\alpha}{\delta}$ γενήσεται, ὅσον χρὴ εἶναι ἕκαστον σῶμα τῶν ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$· καθ᾽ ὃν γὰρ λόγον ἅπαξ ἐχώρεσαν τὰ ις΄ ἐπὶ τῶν κ΄ καὶ ἀπέμεινεν καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$, οὕτως ἅπαξ ὅσο ἂν σῶμά ἐστι ἕκαστον τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἀναλόγως. προστιθεμένου ἔτι καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ γενήσεται, ὅσον χρὴ εἶναι ἕκαστον τῶν ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἀναλόγως.



Ποιήσωμεν τοῦτο καὶ διὰ τῆς κοινῆς καὶ πολ(ι)τευομένης μεταχειρίσεως. ἔστωσαν φλουριὰ ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα ς΄, ὡς εἴπομεν. καὶ τὰ μὲν ς΄ φλουριά – ς΄κις ς΄ γίνονται ὑπέρπυρα λς΄. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἐστὶ ὑπέρπυρα δ΄, ὁμοῦ δὲ τὰ ς΄ φλουριὰ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ὑπέρπυρα μ΄. τὸ $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ς΄ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ ι΄. πρόσθες οὖν ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ ι΄ ἐπὶ τῶν ς΄ ὑπερπύρων, καθὼς διὰ τῆς προχείρου μεταχειρίσεως εὕρομεν οὕτως, καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ι΄. ἕκαστον δὲ σῶμα τῶν ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἀναλόγως χρὴ εἶναι ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ι΄. καὶ τὰ μὲν ε΄ ἀκέραια, ἕκαστον ἀνὰ ὑπερπύρων ζ΄ κουκκιῶν ι΄ – γίνονται ε΄κις ζ΄ λε΄, καὶ β΄ς″, ὁμοῦ ὑπέρπυρα λζ΄ς″. λείπονται καὶ β΄ς″ ὑπέρπυρα μέχρι τῶν μ΄ ὑπερπύρων. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ἐπεὶ ἕκαστον μέρος τῶν ε΄ οἰκειοῦται ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ι΄, τουτέστι ὑπέρπυρα ζ΄ς″, τὸ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ζ΄ς″ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρα β΄ς″· τρὶς γὰρ ὑπέρπυρα β΄ς″ γίνονται ὑπέρπυρα ζ΄ς″. καὶ ἰδοὺ καὶ διὰ τῆς κοινῆς ταύτης μεταχειρίσεως εὗρες, ὅτι τὰ ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ εἰς μέρη ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μεριζόμενα ἕκαστον μέρος τῶν ε΄ ἐστὶ πλέον $\frac{\alpha}{\delta}$ ἐφ᾽ ἑκάστου σώματος τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἀναλόγως. προστιθεμένου δὲ ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ς΄ ἔτι καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ τοῦ ἑαυτοῦ σώματος γίνεται, ὅσον χρὴ εἶναι ἕκαστον τῶν ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἀναλόγως.

νβ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι διαμερίσαι ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ εἰς μέρη ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ εἰδέναι, πόσον ἐστὶ ἔλαττο ἕκαστον τῶν ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$

Ἔστω δὲ ὅτι τὸ ἀνάπαλι(ν) ζητεῖς εἰδέναι, τουτέστι τὰ ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ μεριζόμενα εἰς μέρη ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, πόσον ἐστὶ ἔλαττο ἕκαστον μέρος τῶν ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐφ᾽ ἑκάστου μέρους τῶν ε΄ς″. ποίησον δὲ πάλιν κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον τὰ ε΄ς″ μισά· γίνονται δὲ τὰ ε΄ς″ ια΄ μισά. τὰ δὲ ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ γίνονται μισὰ ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, ὡς τὸ πρότερον. μέρισον δὲ τὰ ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ μετὰ τῶν ια΄, καὶ πάλιν γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς α΄ καὶ τζάκισμα γ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. τὰ

14/15 ἑξακαιδέκατά] ῆς κατα **C** 33 τῶν ε΄] **sc.** τῶν ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ 42 μισὰ] μηα **C**

δὲ γ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ συγκρινόμενα μετὰ τῶν ια΄ εὗρες, ὅτι ἐστὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ια΄. νῦν δὲ οὐ μετὰ τῶν ια΄ συγκρινόμενα, ἀλλὰ μετὰ τῶν ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\delta}$· δ΄κις γὰρ γ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ γίνονται ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ἕκαστον τῶν ε΄ς″ ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐστὶ μέν, ὅσον ἐστὶ ἕκαστον τῶν ζ΄ καὶ ἔτι πλέον $\frac{\alpha}{\delta}$ τοῦ ἑαυτοῦ σώματος, ἑκάστου τῶν ε΄ς″ δηλονότι, ὥστε ἐὰν ἀφέλῃς $\frac{\alpha}{\delta}$ ἐφ᾽ ἑκάστου σώματος τῶν ε΄ς″ ἀναλόγως, τὸ ἐναπομεῖναν μέρος ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ε΄, τοσοῦτον χρὴ εἶναι καὶ ἕκαστον σῶμα τῶν ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἀναλόγως.

$$\begin{array}{l} \overset{\gamma}{\not\alpha\ \not\delta}\ \text{καὶ}\ \frac{\beta}{\gamma} \\ \alpha\_\alpha \end{array} \qquad \alpha\ \text{καὶ}\ \frac{\gamma\ \text{καὶ}\ \frac{\beta}{\gamma}}{\alpha\,\delta\ \text{καὶ}\ \frac{\beta}{\gamma}}\ \text{καὶ}\ \frac{\alpha}{\delta}$$

Ποίησον τοῦτο καὶ διὰ τῆς μεταχειρίσεως τῶν φλουριῶν καὶ εὑρήσεις οὕτως, ὡς καὶ ἡ πρόχειρος δεδήλωκε μεταχείρισις. εἴπομεν ἐπὶ τῆς προτέρας μεταχειρίσεως, ὅτι ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα ς΄ τὰ ζ΄ φλουριὰ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ γίνονται ὑπέρπυρα μδ΄. τὰ δὲ ε΄ς″ – ἕκαστον μὲν τῶν ε΄ ἀνὰ ὑπερπύρων η΄, τὸ δὲ ς″ ὑπέρπυρα δ΄ – γίνονται καὶ ταῦτα ὑπέρπυρα μδ΄. ἐπεὶ δὲ ἕκαστον τῶν ε΄ οἰκειοῦται ὑπέρπυρα η΄, ἄφελε $\frac{\alpha}{\delta}$ ἐκ τοῦ σώματος τῶν η΄ ὑπερπύρων, καθὼς ἡ πρόχειρος μεταχείρισις δεδήλωκε, καὶ ἀπομένοσι ὑπέρπυρα ς΄· τὸ γὰρ $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν η΄ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρα β΄, ἀφελόμενος δὲ ὑπέρπυρα β΄ ἐκ τῶν η΄ ἀπομένοσι καὶ ὑπέρπυρα ς΄. καὶ ἰδοὺ ἀφελόμενος $\frac{\alpha}{\delta}$ ἐκ τοῦ σώματος ἑκάστου τῶν ε΄, τουτέστι ἐκ τῶν η΄ ὑπερπύρων, τὰ ἐναπομένοντα ὑπέρπυρα ς΄ ἐστί, ὅσον ἐστὶ ἕκαστον σῶμα τῶν ζ΄ φλουριῶν καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἀναλόγως, καθὼς εἴπομεν, ὅτι ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα ς΄ τὰ ζ΄ φλουριὰ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ γίνονται ὑπέρπυρα μδ΄. ‖ f. 34r

Ἕτερον τούτου ὅμοιον. Ἔστω δὲ ὅτι βούλ(ει) διαμερίσαι ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ εἰς μέρη ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ εἰδέναι, πόσον ἐστὶ ἔλαττο ἕκαστον τῶν ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. ποίησον τὰ ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ τρίτα. τρὶς οὖν ς΄ γίνονται ιη΄. πρόσθες καὶ τὰ ἄνωθεν β΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ τρίτα κ΄ τὰ ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. ποίησον τρίτα καὶ τὰ ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. τρὶς οὖν ιη΄ γίνονται νδ΄. πρόσθες καὶ τὸ ἄνωθεν α΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ τρίτα νε΄ τὰ ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. καὶ τὰ μὲν κ΄ ἐστὶ μεριστής, τὰ δὲ νε΄ ἐστὶ σῶμα. μέρισον τὰ νε΄ διὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς β΄ καὶ $\frac{\alpha\,\varepsilon}{\beta\,\kappa}$, τουτέστι β΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. καὶ ἰδοὺ διπλάσιον λόγον καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ἑνὸς ἀκεραίου ἔχει ἕκαστον σῶμα τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἐφ᾽ ἑκάστου σώματος τῶν ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἀναλόγως. μέρισον τοίνυν ἕκαστον σῶμα τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ εἰς μέρη β΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, καὶ ὅση ἂν γένηται ἑκάστη μερὶς τῶν ς΄ εἰς β΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ μεριζομένη μέρη, τοσαύτη χρὴ εἶναι καὶ ἑκάστη μερὶς τῶν ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἀναλόγως. διπλασίασον δὲ πάλιν ἕκαστον μέρος τῶν ιη΄, πρόσθες καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τοῦ αὐτοῦ σώματος, καὶ ὅσον ἂν γένηται, τοσοῦτόν ἐστι πάλιν ἕκαστον σῶμα τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἀναλόγως.

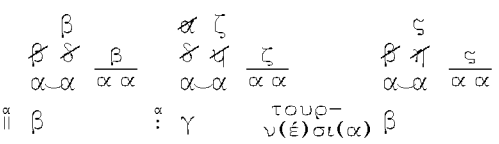
$$\begin{array}{l} \alpha \\ \not\varepsilon\ \varepsilon \\ \beta\_\kappa \\ \beta\ \text{καὶ}\ \frac{\gamma}{\delta} \end{array} \qquad \frac{\alpha\,\varepsilon}{\beta\,\kappa}$$

---

9 **ad** ἀναλόγως **in inf. marg.**: καὶ ἄλλως. συγκρίνας τὰ γ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ τὸ τζάκισμα οὐ μετὰ τῶν α δ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, ὧν ἔχεις σῶμα, ἀλλὰ μετὰ τῶν α α΄, ὧν ἔχεις μεριστήν, γίνεται τζάκισμα $\frac{\alpha\,\alpha}{\gamma\,\gamma}$, τουτέστι $\frac{\alpha}{\gamma}$. μεριζόμενον δὲ ἕκαστον σῶμα τῶν ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ εἰς α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ὅσος ἂν γένηται ὁ τούτων μερισμός, τοσοῦτον ἔσται καὶ ἕκαστον σῶμα τῶν ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, καθὼς καὶ ἐπὶ τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ μεριζομένων εἰς μέρη ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ οὕτως ἐγένετο. **(cf. prox. exempl. initio f. 34r)**

35 **in dextro marg.**: καὶ ἄλλως. συγκρίνας τὰ α ε΄ τὸ τζάκισμα οὐ μετὰ τῶν β κ΄, ὧν ἔχεις μεριστήν, ἀλλὰ μετὰ τῶν ε ε΄, ὧν ἔχεις σῶμα, γίνεται τζάκισμα $\frac{\alpha\,\varepsilon}{\varepsilon\,\varepsilon}$, τουτέστι $\frac{\gamma}{\alpha\,\alpha}$. ἔστι δὲ ἕκαστον σῶμα τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, ὅσον ἐστὶ δὶς ἕκαστον τῶν ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ ἔτι πλείω $\frac{\gamma}{\alpha\,\alpha}$ ἑκάστου σώματος τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, καθὼς καὶ ἐπὶ τῶν ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ μεριζομένων εἰς μέρη ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ οὕτως ἐγένετο. **(cf. exempl. antecedens)**

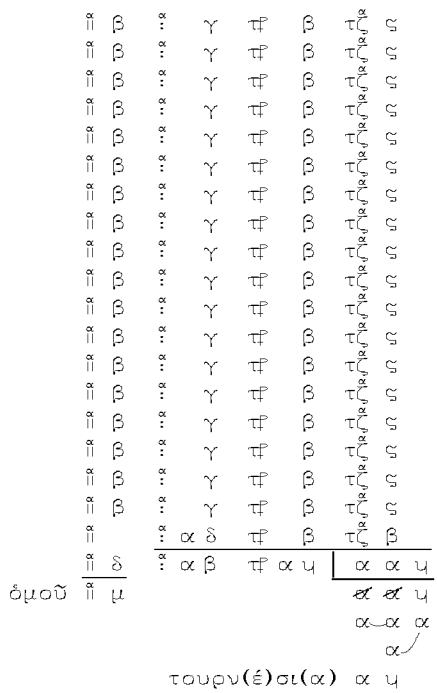
Ἵνα δὲ σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, ποίησον τοῦτο καὶ διὰ τῆς κοινῆς μεταχειρίσεως τῶν φλουριῶν. ἔστωσαν τοίνυν φλουριὰ ϛ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα ϛ΄. τὰ ϛ΄ φλουριὰ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ γίνονται ὑπέρπυρα μ΄. λάβε οὖν ἑνὸς φλουριοῦ ὑπέρπυρα, τουτέστι ὑπέρπυρα ϛ΄, μέρισον δὲ τὰ ϛ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐστὶ σῶμα ἑκάστου τῶν ϛ΄ φλουριῶν, εἰς μέρη β΄ καὶ $\frac{\chi}{\delta}$. ἐπεὶ δὲ τὰ β΄ ἔχουσι καὶ $\frac{\chi}{\delta}$, ποίησον τὰ β΄ ἀκέραια τέταρτα· δ΄κις οὖν β΄ γίνονται η΄. πρόσθες καὶ τὰ ἄνωθεν γ΄, καὶ γίνονται ια΄ τέταρτα τὰ β΄ καὶ $\frac{\chi}{\delta}$. ποίησον καὶ τὰ ϛ΄ ὑπέρπυρα τέταρτα. γίνονται δὲ τὰ ϛ΄ ὑπέρπυρα τέταρτα κδ΄· δ΄κις γὰρ ϛ΄ κδ΄ γίνονται. μέρισον τὰ κδ΄ τέταρτα μετὰ τῶν ια΄ τετάρτων καὶ ἐξέρχεται γράμμα ἕνα, ὅπερ δηλοῖ ὑπέρπυρα β΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα β΄. ποίησον κουκκιὰ τὰ β΄ ὑπέρπυρα· γίνονται δὲ τὰ β΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ μ΄. μέρισον τὰ μ΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν ια΄ καὶ ἐξέρχεται γράμμα ἕνα, ὅπερ δηλοῖ κουκκιὰ γ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ζ΄. ποίησον τουρν(έ)σι(α) τὰ ζ΄ κουκκιά· γίνονται δὲ τὰ ζ΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) κη΄. μέρισον τὰ κη΄ τουρν(έ)σι(α) μετὰ τῶν ια΄ καὶ ἐξέρχεται γράμμα ἕνα, ὅπερ δηλοῖ τουρν(έ)σι(α) β΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα ϛ΄ ἑνδέκατα. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι διαμεριζόμενα τὰ ϛ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐστὶ τέταρτα κδ΄, εἰς μέρη β΄ καὶ $\frac{\chi}{\delta}$, ἅπερ ἐστὶ τέταρτα ια΄, γίνεται ὁ διαμερισμὸς τούτων ὑπέρπυρα β΄ κουκκιὰ γ΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ τζάκισμα ϛ΄ ἑνδέκατα. ἕκαστον οὖν σῶμα τῶν ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἀναλόγως εὑρεθήσεται ἔχον τὴν ὁμοίαν ποσότητα, ἣν ἡμῖν ἡ πρόχειρος δεδήλωκε μεταχείρισις, τουτέστι ὑπέρπυρα β΄ κουκκιὰ γ΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ τζάκισμα ϛ΄ ἑνδέκατα.



Ὅσπερ δὲ ἐμέρισας τὰ ϛ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐστὶ σῶμα ἑκάστου τῶν ϛ΄ φλουριῶν, εἰς μέρη β΄ καὶ $\frac{\chi}{\delta}$ καὶ ἀπέδωκας τὴν οἰκείαν ποσότητα ἑκάστου σώματος τῶν ιη΄, τουτέστι ὑπέρπυρα β΄ κουκκιὰ γ΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ τζάκισμα ϛ΄ ἑνδέκατα, οὕτως διπλασίασον ταῦτα, ἅπερ ἐστὶ σῶμα ἑκάστου τῶν ιη΄. πρόσθες ἀλλ⟨ὰ⟩ καὶ $\frac{\chi}{\delta}$ ἑκάστου σώματος τῶν ιη΄, καὶ πάλιν γενήσεται, ὅσον ἐστὶ ἕκαστον σῶμα τῶν ϛ΄ φλουριῶν, τουτ-

---

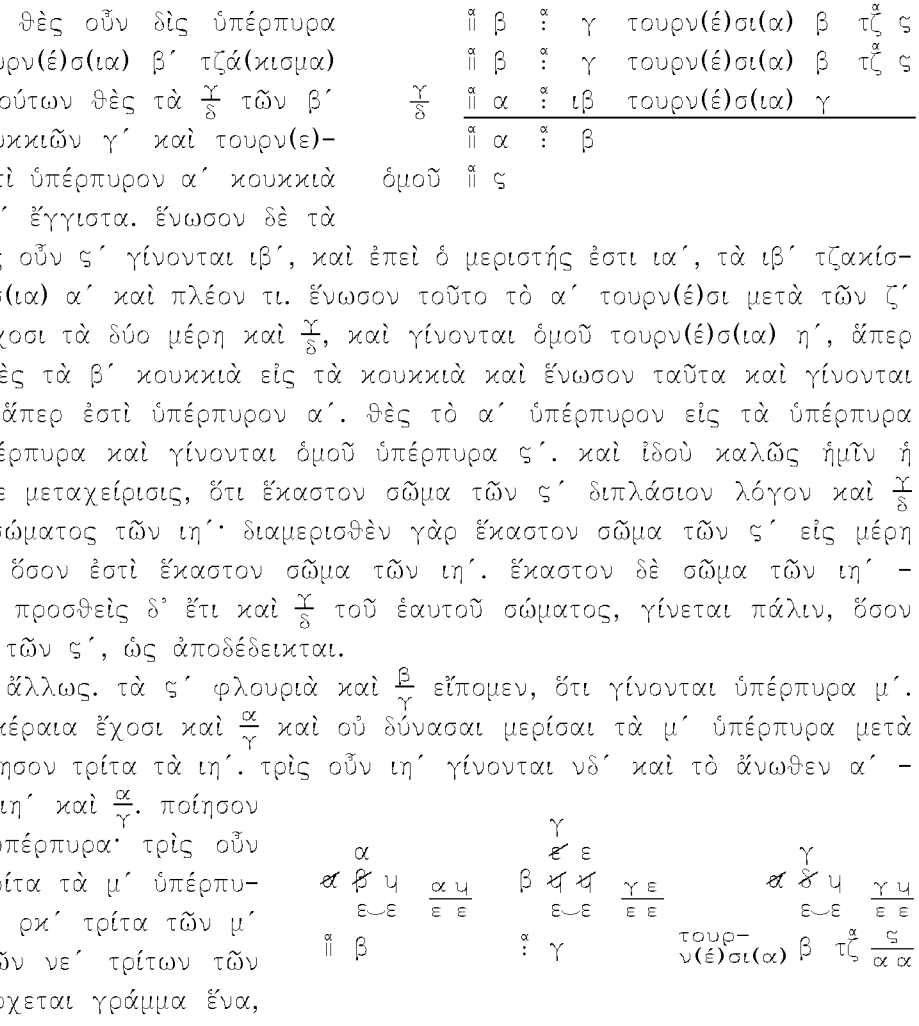
23 in dextro marg. fol. 34^{r}:



έστι ὑπέρπυρα ς΄. θὲς οὖν δὶς ὑπέρπυρα β΄ κουκκιὰ γ΄ τουρν(έ)σ(ια) β΄ τζά(κισμα) ς΄, κατωτέρω δὲ τούτων θὲς τὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν β΄ ὑπερπύρων καὶ κουκκιῶν γ΄ καὶ τουρν(ε)σί(ων) β΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ ιβ΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄ ἔγγιστα. ἕνωσον δὲ τὰ δύο τζακίσματα· δὶς οὖν ς΄ γίνονται ιβ΄, καὶ ἐπεὶ ὁ μεριστής ἐστι ια΄, τὰ ιβ΄ τζακίσματά ἐστι τουρν(έ)σ(ια) α΄ καὶ πλέον τι. ἕνωσον τοῦτο τὸ α΄ τουρν(έ)σι μετὰ τῶν ζ΄ τουρν(ε)σίων, ὧν ἔχοσι τὰ δύο μέρη καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σ(ια) η΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ β΄. θὲς τὰ β΄ κουκκιὰ εἰς τὰ κουκκιὰ καὶ ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ κ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρον α΄. θὲς τὸ α΄ ὑπέρπυρον εἰς τὰ ὑπέρπυρα καὶ ἕνωσον τὰ ὑπέρπυρα καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ς΄. καὶ ἰδοὺ καλῶς ἡμῖν ἡ πρόχειρος δεδήλωκε μεταχείρισις, ὅτι ἕκαστον σῶμα τῶν ς΄ διπλάσιον λόγον καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ἔχει ἐφ' ἑκάστου σώματος τῶν ιη΄· διαμερισθὲν γὰρ ἕκαστον σῶμα τῶν ς΄ εἰς μέρη β΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ γίνεται, ὅσον ἐστὶ ἕκαστον σῶμα τῶν ιη΄. ἕκαστον δὲ σῶμα τῶν ιη΄ – διπλασιάσας τοῦτο, προσθεὶς δ' ἔτι καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τοῦ ἑαυτοῦ σώματος, γίνεται πάλιν, ὅσον ἐστὶ ἕκαστον σῶμα τῶν ς΄, ὡς ἀποδέδεικται.

Ποίησον τοῦτο καὶ ἄλλως. τὰ ς΄ φλουριὰ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ εἴπομεν, ὅτι γίνονται ὑπέρπυρα μ΄. ἐπεὶ οὖν τὰ ιη΄ ἀκέραια ἔχοσι καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ οὐ δύνασαι μερίσαι τὰ μ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ποίησον τρίτα τὰ ιη΄. τρὶς οὖν ιη΄ γίνονται νδ΄ καὶ τὸ ἄνωθεν α΄ – ὁμοῦ τρίτα νε΄ τὰ ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. ποίησον τρίτα καὶ τὰ μ΄ ὑπέρπυρα· τρὶς οὖν μ΄ γίνονται ρκ΄ τρίτα τὰ μ΄ ὑπέρπυρα. μέρισον οὖν τὰ ρκ΄ τρίτα τῶν μ΄ ὑπερπύρων μετὰ τῶν νε΄ τρίτων τῶν ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ ἐξέρχεται γράμμα ἕνα, ὅπερ δηλοῖ ὑπέρπυρα β΄, ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ι΄. ποίησον ταῦτα κουκκιὰ καὶ γίνονται τὰ ι΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ σ΄. μέρισον τὰ σ΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν νε΄ καὶ ἐξέρχεται γράμμα ἕνα, ὅπερ δηλοῖ κουκκιὰ γ΄, ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ λε΄. ποίησον ταῦτα τουρν(έ)σ(ια), καὶ γίνονται τὰ λε΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σ(ια) ρμ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νε΄ καὶ ἐξέρχεται γράμμα ἕνα, ὅπερ δηλοῖ τουρν(έ)σι(α) β΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα, ὅπερ δηλοῖ λ΄ πεντηκοστὰ πέμπτα. σχίσον τὰ λ΄ εἰς μέρη πέντε καὶ γίνεται ἕκαστον τῶν πέντε ἀνὰ ς΄, σχίσον καὶ τὰ νε΄ εἰς μέρη πέντε καὶ γίνεται ἕκαστον τῶν πέντε ἀνὰ ια΄, ἅπερ οὕτως κείμενα $\frac{\varsigma}{\iota\alpha}$ δηλῶσι ς΄ ἐνδέκατα. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὕρες, ὅτι ἕκαστον σῶμα τῶν ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ οἰκειοῦται ὑπέρπυρα β΄ κουκκιὰ γ΄ τουρν(έ)σ(ια) β΄ τζά(κισμα) ς΄ ἐνδέκατα, καθὼς οὕτως εὗρες διαμερίσας τὰ ς΄ ὑπέρπυρα εἰς μέρη β΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$.

Θὲς οὖν τὰ οἰκεῖα μέρη τῶν ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα καὶ γίνονται ὁμοῦ τζακίσματα ρι΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ια) ι΄. ἕνωσον δὲ τὰ τουρν(έ)σι(α) καὶ γίνονται ‖ τουρν(έ)σ(ια) μη΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ιβ΄. ἕνωσον τὰ κουκκιὰ καὶ γίνονται κουκκιὰ π΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα δ΄. ἕνωσον τὰ ὑπέρπυρα καὶ γίνονται ὑπέρπυρα μ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ς΄ φλουριὰ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα μ΄, γίνονται μέρη ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ἕκαστον μέρος τῶν ιη΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἀνὰ ὑπέρπυρα β΄ κουκκιὰ γ΄ τουρν(έ)σ(ια) β΄ τζά(κισμα) ς΄ ἐνδέκατα, ὡς διὰ τῆς προχείρου



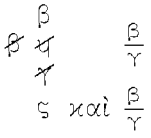
6 ἔγγιστα] ἔγκιςα **C** 38 etc.: cf. additionem in dextro marg. f. 34^{r} (p. 68)

μεταχειρίσεως εὕρομεν οὕτως.
ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

νγ **Περὶ τοῦ ἐὰν τὰ γ΄ γίνωνται δ΄, τὰ ε΄ πόσα γίνονται, καὶ ἐὰν τὰ ια΄ γίνωνται ιε΄, τὰ κ΄ πόσα γίνονται καὶ ἑξῆς ὁμοίως**

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι, ἐὰν τὰ γ΄ αὐξανόμενα γίνωνται δ΄, τὰ ε΄ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον πόσα γίνονται αὐξανόμενα. ἔχεις οὖν τοῦτο εἰδέναι διὰ τῆς μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν. διὰ τῶν τριῶν δὲ λέγεται διὰ τὸ πολλ(α)πλασιάζειν τὰ ε΄ μετὰ τῶν δ΄ καὶ διαμερίζειν τὰ πολλ(α)πλασιασθέντα μετὰ τῶν γ΄· διὰ γὰρ τῶν γ΄ καὶ δ΄ καὶ ε΄, οἵτινές εἰσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνόμοιοι, εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον. ἐνεργοῦντες δὲ οἱ τρεῖς τὸ ζητούμενον καλῶς ἂν καὶ διὰ τῶν τριῶν λέγεται.

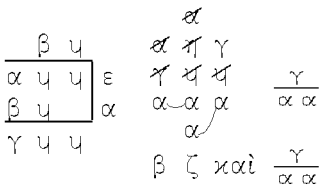
Πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ε΄ μετὰ τῶν δ΄, ὡς εἴπομεν· δ΄κις οὖν ε΄ γίνονται κ΄. μέρισον τὰ κ΄ μετὰ τῶν γ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ ἐὰν τὰ γ΄ γίνωνται αὐξανόμενα δ΄, τὰ ε΄ κατὰ τὸν αὐτὸν ὅμοιον λόγον αὐξανόμενα γίνονται ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς ἀκεραίου.



ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ διὰ τῶν τριῶν, ὅτι ἐστὶ ὀρθὸν τὸ γενόμενον, ἔστι αὕτη. πολλ(α)πλασίασον τὰ ε΄ μετὰ τῶν δ΄ ὡς τὸ πρότερον· δ΄κις οὖν ε΄ γίνονται κ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸν μεριστὴν μετὰ τοῦ ἐξελθόντος διαμερισμοῦ, τουτέστι τὰ γ΄ μετὰ τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$· τρὶς οὖν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ γίνονται κ΄. ἐπεὶ δὲ δ΄κις ε΄ ἐστὶ κ΄ καὶ τρὶς ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ πάλιν ἐστὶ κ΄, ἔστι ὀρθὸν τὸ γενόμενον.

Ἕτερον τούτου ὅμοιον. Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς, ἐὰν τὰ ια΄ αὐξανόμενα γίνωνται ιε΄, τὰ κ΄ πόσα γίνονται αὐξανόμενα κατὰ τὸν ὅμοιον λόγον.

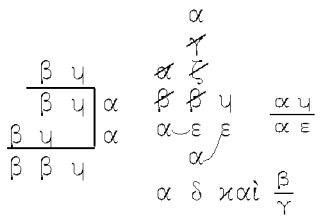
πολλ(α)πλασίασον τὰ κ΄ μετὰ τῶν ιε΄· κ΄κις οὖν ιε΄ γίνονται τ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κζ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\iota\alpha}$ ἑνὸς ἀκεραίου. καὶ ἰδοὺ ἐὰν τὰ ια΄ γίνωνται ιε΄, τὰ κ΄ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον γίνονται κζ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\iota\alpha}$.



ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία τῆς προτέρας. πολλ(α)πλασίασον γὰρ πάλιν τὰ κ΄ μετὰ τῶν ιε΄· κ΄κις οὖν ιε΄ γίνονται τ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ κζ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\iota\alpha}$ μετὰ τῶν ια΄· ια΄κις οὖν κζ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\iota\alpha}$ γίνονται πάλιν τ΄. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

νδ **Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν)**

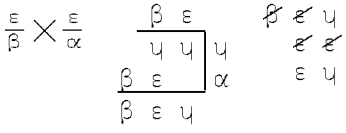
Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς τὸ ἀνάπαλιν· ἐὰν τὰ ιε΄ ἐλαττούμενα γίνωνται ια΄, τὰ κ΄ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐλαττούμενα πόσα γίνονται. νῦν δὲ τὸ ἐναντίον ποίησον. πολλ(α)πλασίασον γὰρ τὰ κ΄ οὐ μετὰ τῶν ιε΄, ἀλλὰ μετὰ τῶν ια΄· κ΄κις οὖν ια΄ γίνονται σκ΄. μέρισον ταῦτα οὐ μετὰ τῶν ια΄, ἀλλὰ μετὰ τῶν ιε΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιδ΄ καὶ $\frac{\alpha\,\iota}{\alpha\,\varepsilon}$, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ ἐὰν τὰ ιε΄ ἐλαττούμενα γίνωνται ια΄, τὰ κ΄ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐλαττο<ύ>μενα γίνονται ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς ἀκεραίου.



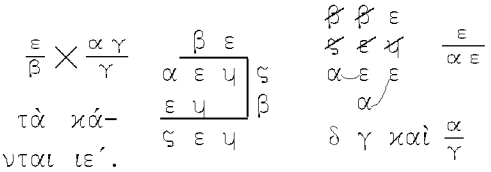
ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία τῶν προτέρων. πολλ(α)πλασίασον γὰρ πάλιν τὰ κ΄ μετὰ τῶν ια΄· κ΄κις οὖν ια΄ γίνονται σκ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ μετὰ τῶν ιε΄· ιε΄κις οὖν ιδ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ γίνονται πάλιν σκ΄. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ διὰ τῶν τριῶν ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον. καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῶν

ἀκεραίων τριῶν ψήφων. ἐὰν δὲ ἔστι καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, ἔστι ἑτέρα τις μεταχείρισις ὁμοία τῆς παρούσης, ἥτις καὶ αὐτὴ ἔστι διὰ τῶν τριῶν. δι᾽ αὐτῆς δὲ εὑρίσκεται καλῶς πᾶν ὅμοιον ζήτημαν, κἄντε ἀκέραιά ἐστι τὰ ζητούμενα κἄντε ἔχοσι καὶ τζάκισμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ ἑξῆς ὁμοίως. ἔστι δὲ αὕτη.

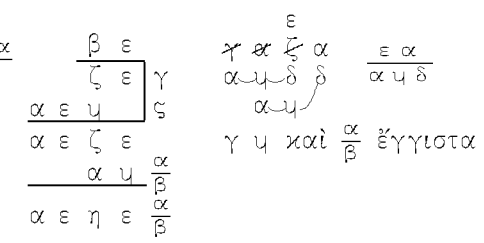
Ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν δι᾽ ἑτέρας μεταχειρίσεως. Ἔστω ὅτι ζητεῖς, ἐὰν τὰ β΄$\frac{\alpha}{\beta}$ γίνωνται ε΄, τὰ κε΄ πόσα γίνονται. πολλ(α)πλασίασον τὰ β΄ ἀκέραια μετὰ τῶν κάτωθεν β΄, ὧν δηλῶσι μισόν· δὶς οὖν β΄ γίνονται δ΄ μισὰ καὶ α΄, τὸ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, ὁμοῦ μισὰ ε΄. θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ε΄ μισά, κάτωθεν δὲ τῶν ε΄ θὲς β΄. θὲς ἄνωθεν καὶ τὰ ε΄ ἀκέραια, κάτωθεν δὲ τῶν ε΄ ἀκεραίων θὲς α΄. καὶ τὸ μὲν α΄, ὅπερ ἐστὶ κάτωθεν τῶν ε΄ ἀκεραίων, δηλοῖ, ὅτι τὰ ἄνωθεν αὐτοῦ ε΄ ἐστὶ ἀκέραια. τὰ δὲ β΄, ἅπερ ἐστὶ κάτωθεν τῶν ε΄ μισῶν, δηλοῖ, ὅτι τὰ ἄνωθεν αὐτῶν ε΄ ἐστὶ μισά. εἰ δὲ τὰ κάτωθεν β΄ ἦν γ΄, ἐδήλει ἂν τὰ γ΄, ὅτι τὰ ἄνωθεν αὐτῶν ε΄ ἐστὶ τρίτα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλὰξ τὸ κάτωθεν α΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν τῶν β΄ ε΄ μισῶν· ἅπαξ οὖν ε΄ πάλιν ἐστὶ ε΄. ἔστι δὲ ταῦτα ὁ μεριστής. πολλ(α)πλασίασον στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλὰξ τὰ κάτωθεν β΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν τοῦ α΄ ἀκεραίων ε΄· δὶς οὖν ε΄ γίνονται ι΄. ταῦτά ἐστι ὁ πολλ(α)πλασιαστὴς τοῦ σώματος. πολλ(α)πλασίασον γὰρ δι᾽ αὐτῶν τῶν ι΄ τὰ κε΄· ι΄κις οὖν κε΄ γίνονται σν΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ε΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ν΄. καὶ ἰδοὺ ἐὰν τὰ β΄$\frac{\alpha}{\beta}$ γίνωνται ε΄, τὰ κε΄ γίνονται ν΄.



Ἕτερον τούτου ὅμοιον. Ἐὰν τὰ β΄$\frac{\alpha}{\beta}$ γίνωνται δ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, τὰ κε΄ πόσα γίνονται; τὰ μὲν β΄$\frac{\alpha}{\beta}$, ὡς εἴπομεν, γίνονται μισὰ ε΄. θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ε΄ μισά, κάτωθεν δὲ β΄. τὰ δὲ δ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ – τρὶς τὰ δ΄ ἀκέραια γίνονται ιβ΄ τρίτα ‖ καὶ α΄, τὸ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, ὁμοῦ τρίτα ιγ΄. θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ιγ΄ τρίτα, κάτωθεν δὲ γ΄. δηλῶσι δὲ τὰ κάτωθεν γ΄, ὅτι τὰ ἄνωθεν αὐτῶν ιγ΄ ἐστὶ τρίτα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλὰξ τὰ κάτωθεν γ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν ε΄· τρὶς οὖν ε΄ γίνονται ιε΄. ἔστι δὲ ταῦτα ὁ μεριστής. πολλ(α)πλασίασον στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλὰξ τὰ κάτωθεν β΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν ιγ΄· δὶς οὖν ιγ΄ γίνονται κς΄. ἔστι δὲ ταῦτα ὁ πολλ(α)πλασιαστής. πολλ(α)πλασίασον γὰρ δι᾽ αὐτῶν τὰ κε΄· κς΄κις οὖν κε΄ γίνονται χν΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ιε΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς μγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. ἐὰν οὖν τὰ β΄$\frac{\alpha}{\beta}$ γίνωνται δ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, τὰ κε΄ γίνονται μγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνὸς ἀκεραίου. f. 35r



Ἕτερον τούτου ὅμοιον. Ἐὰν τὰ δ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ γίνωνται ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$, τὰ κε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\varsigma}$ πόσα γίνονται; τρὶς τὰ δ΄ ἀκέραια γίνονται ιβ΄, καὶ τὸ ἄνωθεν α΄ ὁμοῦ τρίτα ιγ΄. θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ιγ΄ τρίτα, κάτωθεν δὲ γ΄. δ΄κις δὲ ε΄ ἀκέραια γίνονται κ΄ τέταρτα, καὶ α΄ τὸ ἄνωθεν ὁμοῦ τέταρτα κα΄. θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ κα΄ τέταρτα, κάτωθεν δὲ δ΄, ἅπερ δ΄ δηλῶσι, ὅτι τὰ ἄνωθεν αὐτῶν κα΄ ἐστὶ τέταρτα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλὰξ τὰ κάτωθεν δ΄ μετὰ τῶν

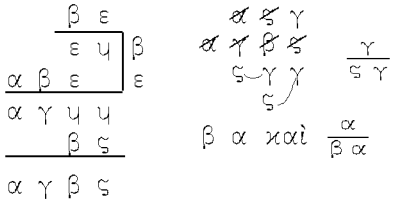


14 ἐδήλει] ἐδίλη **C pro** ἐδήλου

ἄνωθεν ιγ΄· δ΄κις οὖν ιγ΄ γίνονται νβ΄. ἔστι δὲ ταῦτα ὁ μεριστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλὰξ τὰ κάτωθεν γ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν κα΄· τρὶς οὖν κα΄ γίνονται ξγ΄. ἔστι δὲ ταῦτα ὁ πολλ(α)πλασιαστής. πολλ(α)πλασίασον γὰρ δι᾽ αὐτῶν τὰ κε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\varsigma}$· ξγ΄κις οὖν κε΄ γίνονται α ε ζ ε΄. πολλ(α)πλασίασον διὰ τῶν ξγ΄ καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\varsigma}$· ξγ΄κις οὖν $\frac{\alpha}{\varsigma}$ γίνονται $\frac{\Xi\Gamma}{\varsigma}$, ἅπερ ἐστὶ ἀκέραια δέκα καὶ $\frac{\chi}{\varsigma}$, τουτέστι ι΄ς″. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν α ε ζ ε΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ α ε η ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$. ἐπεὶ δέ ἐστι μισόν, ποίησον ταῦτα μισά· δὶς οὖν α ε η ε΄ γίνονται γ α ζ μ΄, καὶ α΄ τὸ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς ὁμοῦ μισὰ γ α ζ α΄. ποίησον μισὰ καὶ τὸν μεριστήν, τὰ νβ΄· δὶς οὖν νβ΄ γίνονται ρδ΄. μέρισον τὰ ,γροα΄ μισὰ μετὰ τῶν ρδ΄ μισῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λ΄ς″ ἔγγιστα. καὶ ἰδοὺ ἐὰν τὰ δ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ γίνωνται ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$, τὰ κε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\varsigma}$ γίνονται λ΄ς″ ἔγγιστα.

Καὶ τὸ ἀνάπαλ(ιν). Ἐὰν τὰ ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ ἐλαττούμενα γίνωνται δ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, τὰ κε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ πόσα γίνονται; καὶ τὰ μὲν ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ γίνονται $\frac{\beta\,\alpha}{\delta}$, τὰ δὲ δ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ γίνονται $\frac{\alpha\,\gamma}{\gamma}$. πολλ(α)πλασίασον στ(αυ)ροειδῶς τὰ κάτωθεν γ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν κα΄· τρὶς οὖν κα΄ γίνονται ξγ΄. ἔστι δὲ ταῦτα ὁ μεριστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλὰξ τὰ κάτωθεν δ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν ιγ΄· δ΄κις οὖν ιγ΄ γίνονται νβ΄. ἔστι δὲ ταῦτα ὁ πολλ(α)πλασιαστής. πολλ(α)πλασίασον γὰρ δι᾽ αὐτῶν τὰ κε΄$\frac{\alpha}{\beta}$· νβ΄κις οὖν κε΄ γίνονται ,ατ΄ καὶ νβ΄κις $\frac{\alpha}{\beta}$ γίνονται ἀκέραια κς΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ,ατ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ,ατκς΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ξγ΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κα΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\gamma}{\varsigma\,\gamma}$, ὅπερ δηλοῖ γ΄ ἑξηκοστὰ τρίτα. σχιζόμενα δὲ εἰς μέρη τρία γίνεται τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\alpha}{\beta\,\alpha}$, ὅπερ δηλοῖ ἕνα εἰκοστὸν πρῶτον. καὶ ἰδοὺ ἐὰν τὰ ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ γίνωνται ἐλαττούμενα δ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, τὰ κε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐλαττούμενα γίνονται κα΄ καὶ $\frac{\alpha}{\kappa\alpha}$.

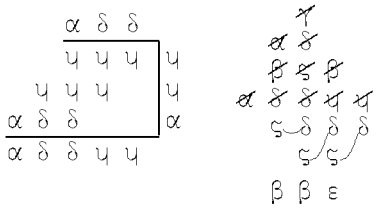
$\frac{\beta\,\alpha}{\delta} \times \frac{\alpha\,\gamma}{\gamma}$



ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

νε Περὶ τοῦ ἐὰν η΄κις η΄ οὐ γίνωνται ξδ΄, ἀλλὰ αὐξανόμενα πλέον τοῦ δέοντος γίνωνται ρ΄, ιβ΄κις ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον πόσα γίνονται

Ἀληθῶς οὖν η΄κις η΄ γίνονται ξδ΄ καὶ ιβ΄κις ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα γίνονται ρμδ΄. ἐπεὶ δὲ νῦν εἴπομεν, ὅτι η΄κις η΄ οὐ γίνονται ξδ΄, ἀλλὰ αὐξανόμενα πλέον τοῦ δέοντος γίνονται ρ΄, πολλ(α)πλασίασον τὰ ρμδ΄ μετὰ τῶν ρ΄ καὶ μέρισον τὰ πολλ(α)πλασιασθέντα μετὰ τῶν ξδ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς σκε΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ιβ΄κις ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα πλέον τοῦ δέοντος οὐκ ἐγένοντο ρμδ΄, ἀλλὰ μᾶλλον σκε΄, καθ᾽ ὃν λόγον εἴπομεν, ὅτι η΄κις η΄ οὐ γίνονται ξδ΄, ἀλλὰ αὐξανόμενα ὑπὲρ τὸ δέον γίνονται ρ΄· ὃν γὰρ λόγον ἔχουσι τὰ ρ΄ πρὸς τὰ ξδ΄, τὸν αὐτὸν ἔχουσι καὶ τὰ σκε΄ πρὸς τὰ ρμδ΄.



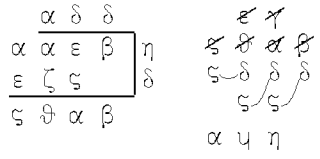
Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί, ὡς ἡ πρόχειρος δεδήλωκε μεταχείρισις· δὶς ξδ΄ γίνονται ρκη΄. ἔστι δὲ καὶ τὸ οἰκεῖον τῶν ρκη΄ αὐξανόμενον διπλάσιον τῶν ρ΄, τουτέστι σ΄· καθὼς γὰρ τὰ ξδ΄ οἰκειοῦνται ρ΄, οὕτως καὶ τὰ ρκη΄ οἰκειοῦνται σ΄. λείπονται ἀπὸ τῶν ρκη΄ μέχρι τῶν ρμδ΄ ις΄. τὰ ις΄ δέ ἐστι τέταρτον μέρος τῶν ξδ΄· δ΄κις γὰρ ις΄ ξδ΄ γίνονται. καθὼς οὖν ἐδιπλασίασας τὰ ξδ΄ καὶ ἐγένοντο ρκη΄ – λείπεται δὲ καὶ

$\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ξδ΄, τουτέστι ις΄, πρὸς τὸ γενέσθαι τὰ ρκη΄ ρμδ΄ –, οὕτως διπλασίασον τὰ ρ΄ καὶ γίνονται σ΄. λείπονται κε΄ μέχρι τῶν σκε΄. τὰ δὲ κε΄ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ρ΄ ὥσπερ καὶ τὰ ις΄ τῶν ξδ΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὕρες, ὅτι ιβ΄κις ιβ΄ οὐ γίνονται ρμδ΄, ἀλλὰ σκε΄, καθὼς καὶ η΄κις η΄ οὐ γίνονται ξδ΄, ἀλλὰ ρ΄.

καὶ ἄλλως. ‖ ἀπὸ τὰ ξδ΄ λείπονται λς΄ μέχρι τῶν ρ΄. τὰ δὲ λς΄ ἔχοσι λόγον $\frac{\vartheta}{\iota\varsigma}$· δ΄κις γὰρ ϑ΄ γίνονται λς΄ καὶ δ΄κις ις΄ γίνονται ξδ΄. ἀπὸ δὲ τὰ ρμδ΄ λείπονται πα΄ μέχρι τῶν σκε΄. τὰ δὲ πα΄ μετὰ τῶν ρμδ΄ ἔχοσι λόγον $\frac{\vartheta}{\iota\varsigma}$. σχίσον γὰρ τὰ πα΄ καὶ τὰ ρμδ΄ εἰς μέρη ϑ΄· ϑ΄κις οὖν ϑ΄ γίνονται πα΄ καὶ ϑ΄κις ις΄ γίνονται ρμδ΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως ἀποδέδεικται, ὅτι ὃν λόγον ἔχοσι τὰ ξδ΄ πρὸς τὰ ρ΄, τὸν αὐτὸν ἔχοσι καὶ τὰ ρμδ΄ πρὸς τὰ σκε΄, καθὼς καὶ διὰ τῆς προχείρου μεταχειρίσεως εὑρομεν οὕτως, ὅτι ἐὰν η΄κις η΄ οὐ γίνωνται ξδ΄, ἀλλὰ ρ΄, ιβ΄κις ιβ΄ οὐ γίνονται ρμδ΄, ἀλλὰ σκε΄. f. 35v

νς **Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν)**

Ἐὰν η΄κις η΄ οὐ γίνωνται ξδ΄, ἀλλὰ φθειρόμενα γίνωνται μη΄, ιβ΄κις ιβ΄ πολλ(α)πλασιαζόμενα πόσα γίνονται φθειρόμενα κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον; ἀληθῶς οὖν η΄κις η΄ γίνονται ξδ΄ καὶ ιβ΄κις ιβ΄ γίνονται ρμδ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ρμδ΄ μετὰ τῶν μη΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι η΄κις η΄ οὐ γίνονται ξδ΄, ἀλλὰ μη΄. μέρισον δὲ τὰ πολλ(α)πλασιασθέντα μετὰ τῶν ξδ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ρη΄. καὶ ἰδοὺ ἐὰν η΄κις η΄ οὐ γίνωνται ξδ΄, ἀλλὰ φθειρόμενα γίνωνται μη΄, ιβ΄κις ιβ΄ κατὰ τὸν ὅμοιον λόγον εὕρες, ὅτι οὐ γίνονται ρμδ΄, ἀλλὰ φθειρόμενα γίνονται ρη΄· ὃν γὰρ λόγον ἔχοσι τὰ μη΄ πρὸς τὰ ξδ΄, τὸν αὐτὸν ἔχοσι καὶ τὰ ρη΄ πρὸς τὰ ρμδ΄.



Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί, ὡς ἡ πρόχειρος δεδήλωκε μεταχείρισις· ἐκ τῶν μη΄ λείπονται ις΄ μέχρι τῶν ξδ΄ καὶ ἐκ τῶν ρη΄ λείπονται λς΄ μέχρι τῶν ρμδ΄. τὰ ις΄ δὲ μετὰ τῶν ξδ΄ συγκρινόμενά ἐστι τέταρτον μέρος· δ΄κις γὰρ ις΄ ξδ΄ γίνονται. ὡσαύτως καὶ τὰ λς΄ πρὸς τὰ ρμδ΄ συγκρινόμενά ἐστι τέταρτον μέρος· δ΄κις γὰρ λς΄ ρμδ΄ γίνονται. ὥσπερ γὰρ η΄κις η΄ οὐ γίνονται ξδ΄, ἀλλὰ μη΄, τὰ δὲ μη΄ ἐστὶ $\frac{\chi}{\delta}$ τῶν ξδ΄, οὕτως καὶ ιβ΄κις ιβ΄ οὐ γίνονται ρμδ΄, ἀλλὰ ρη΄. τὰ δὲ ρη΄ ἐστὶ $\frac{\chi}{\delta}$ τῶν ρμδ΄. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

νζ **Περὶ τοῦ πῶς ἔστι διὰ τῆς προχείρου μεταχειρίσεως τοὺς μεμονωμένους εἰδέναι ἀριθμούς, πόση γίνεται ἡ τούτων ποσότης ἀπαρχῆς μέχρι τέλους ἐν[ν]ούμενοι**

Μονοὶ ἀριθμοί τε καὶ ψῆφοι οὗτοί εἰσι· α΄ γ΄ ε΄ ζ΄ ϑ΄ καὶ πάλιν ια΄ ιγ΄ ιε΄ ιζ΄ ιϑ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως ἐπὶ πολὺ τοῦτο γινόμενον. ὅτε οὖν ζητεῖς εἰδέναι μονάδος ψήφους τῆς αὐτῆς τάξεως ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἀρχομένας, μέχρι ὧν βούλ(ει) εἰδέναι, ποίησον οὕτως καὶ εὑρήσεις προχείρως καὶ καλῶς τὸ ζητούμενον.

ἔστω ὅτι ζητεῖς ἀπὸ τοῦ α΄ μέχρι τῶν ιζ΄, πόσα γίνονται. ϑὲς οὖν ταῦτα, ὡς ὁρᾷς, ἀκολούθως α΄ γ΄ ε΄ ζ΄ ϑ΄ ια΄ ιγ΄ ιε΄ ιζ΄ καὶ ἀρίθμησον ἀπαρχῆς οὕτως· α΄ καὶ γ΄ γίνονται δ΄, δ΄ δὲ καὶ ε΄ γίνονται ϑ΄, ϑ΄ δὲ καὶ ζ΄ γίνονται ις΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

---

4 ἀλλὰ] ἀλλ᾽ε **C** – cf. p. 55 24/25 λείπονται] λειπῶντὰ **C** 36 ἐπὶ πολὺ] ἐπὶ πσ$^{\lambda\lambda}$ **sic C**

εὑρήσεις δέ, ὅτι γίνεται ἀπὸ τὸ α΄ μέχρι τῶν ιζ΄ ἡ τούτων πάντων ψῆφος πα΄. τοῦτο οὖν ἐστι κενὸν ἐπιχείρημα καὶ δυσχερὲς ἀποτέλεσμα πρὸς τὸ εἰδέναι, πόσα γίνονται.
Διὰ δὲ τῆς προχείρου μεταχειρίσεως εὑρίσκεται οὕτως. τὴν τελευταίαν συζυγίαν, ἣν ἂν ζητῇς, ἥτις ἐστὶ νῦν ιζ΄, μέρισον εἰς μέρη δύο καὶ λάβε τὸ ἥμισυ καὶ α΄ πλέον, τουτέστι ἐκ τῶν ιζ΄ λάβε θ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ θ΄ εἰς ἑαυτό· θ΄κις οὖν θ΄ γίνονται πα΄. καὶ ἰδοὺ εὕρες διὰ τῆς προχείρου ταύτης μεταχειρίσεως, ὅτι ἀπὸ τοῦ α΄ μέχρι τῆς συζυγίας τῶν ιζ΄ ἑνούμενα γίνονται πα΄.
Καὶ πάλιν α΄ γ΄ ε΄ ζ΄ θ΄ ια΄ ιγ΄ ιε΄ ιζ΄ ιθ΄ κα΄ κγ΄ κε΄. ταῦτα πάντα ἀπὸ τοῦ α΄ μέχρι τῶν κε΄ ἑνούμενα γίνονται ρξθ΄. μέρισον τὰ κε΄ εἰς μέρη δύο, τουτέστι ιβ΄ καὶ ιγ΄ γίνονται κε΄. λάβε οὖν τὰ ιγ΄ καὶ πολλ(α)πλασίασον ταῦτα εἰς ἑαυτά· ιγ΄κις οὖν ιγ΄ γίνονται ρξθ΄, καθὼς εἴπομεν.
ἐὰν δὲ ζητῇς πάλιν ἀπὸ τοῦ α΄ μέχρι τοῦ ρα΄ ἑνούμενα, πόσα γίνονται, μέρισον τὰ ρα΄ εἰς μέρη δύο, τουτέστι ν΄ καὶ να΄ γίνονται ρα΄. λάβε οὖν τὰ να΄ καὶ πολλ(α)πλασίασον ταῦτα εἰς ἑαυτά· να΄κις οὖν να΄ γίνονται ,βχα΄. καὶ ἰδοὺ ἀπὸ τοῦ α΄ μέχρι τοῦ ρα΄ γίνονται ,βχα΄.
ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον μονάδος ἀριθμὸν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

νη **Περὶ τοῦ πῶς ἔστι προχείρως εἰδέναι τοὺς ἀνὰ δύο ψήφους, τουτέστι β΄ καὶ δ΄ καὶ ς΄, καὶ τοὺς ἀνὰ γ΄ καὶ ς΄ καὶ θ΄ καὶ τοὺς ἀνὰ δ΄ καὶ η΄ καὶ ιβ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, πόση γίνεται ἡ τούτων ποσότης ἀπαρχῆς μέχρι τέλους ἑνούμενοι**

Ἔστω ὅτι ζητεῖς β΄ δ΄ ς΄ η΄ ι΄ ιβ΄ ιδ΄ ις΄ ιη΄ κ΄, πόσα γίνονται. ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. μέρισον τὴν τελευταίαν ψῆφον, ἥτις νῦν ἐστι κ΄, μετὰ τοῦ πρώτου γράμματος, ὅπερ ἐστὶ β΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ι΄· δὶς γὰρ ι΄ κ΄ γίνονται. λάβε οὖν τὰ ἡμίση τῶν ι΄, ἅπερ ἐστὶ ε΄. ἐπεὶ δὲ τὰ ι΄ μερίζονται εἰς μέρη δύο ἴσα, ἕκαστον τῶν δύο μερῶν ἀνὰ ε΄, πρόσθες α΄ εἰς τὰ ι΄ καὶ γίνονται ια΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ μετὰ τῶν ε΄, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἡμίση τῶν ι΄, τὰ ια΄· ε΄κις οὖν ια΄ γίνονται νε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ νε΄ μετὰ τοῦ πρώτου γράμματος, οὗ ἐμέρισας τὰ κ΄, τουτέστι μετὰ τῶν β΄· δὶς οὖν νε΄ γίνονται ρι΄. καὶ ἰδοὺ ἀπὸ τῶν β΄ μέχρι τῶν κ΄ γίνονται ρι΄.
ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς β΄ δ΄ ς΄ η΄ ι΄ ιβ΄ ιδ΄ ις΄ ιη΄ κ΄ κβ΄, πόσα γίνονται. μέρισον τὰ κβ΄ μετὰ τοῦ πρώτου γράμματος, τουτέστι μετὰ τῶν β΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ια΄· δὶς γὰρ ια΄ κβ΄ γίνονται. μέρισον δὲ τὰ ια΄ εἰς δύο, τουτέστι ε΄ καὶ ς΄ γίνονται ια΄. λάβε δὲ τὰ ς΄, καὶ ἐπεὶ νῦν ἐστι τὰ ς΄ πλέον τῶν ε΄, οὐκ ἔστι || χρεία προσθεῖναι α΄ ἐπὶ τῶν ια΄, καθὼς οὕτως ἐποίησας ἐπὶ τῶν ι΄· προσέθηκας γὰρ α΄ ἐπὶ τῶν ι΄ καὶ ἐγένοντο ια΄, ἐπολλ(α)πλασίασας δὲ τὰ ια΄ μετὰ τῶν ε΄, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἡμίση τῶν ι΄. νῦν δέ, ἐπεὶ τὰ ς΄ ἐστὶ πλέον τῶν ε΄, πολλ(α)πλασίασον τὰ ια΄ μετὰ τῶν ς΄· ς΄κις οὖν ια΄ γίνονται ξς΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ξς΄ μετὰ τῶν β΄, ὅπερ ἐστὶ πρῶτον γράμμα· δὶς οὖν ξς΄ γίνονται ρλβ΄. καὶ ἰδοὺ ἀπὸ τῶν β΄ μέχρι τῶν κβ΄ γίνονται ρλβ΄· πρόσθες γὰρ κβ΄ ἐπὶ τῶν ρι΄ καὶ γίνονται ρλβ΄, καθὼς οὕτως εὗρες προχείρως. f. 36r
Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς εἰδέναι γ΄ ς΄ θ΄ ιβ΄ ιε΄ ιη΄ κα΄ κδ΄ κζ΄ λ΄, πόσα γίνονται ἑνούμενα ἀπὸ τῶν γ΄ μέχρι τῶν λ΄. μέρισον τὰ λ΄ μετὰ τῶν γ΄ καὶ γίνεται ὁ τού-

---

2 κενὸν] κεινὸν **C** 7.42 ἑνούμενα] ἔννουμενα **C** 9.12 ἑνούμενα] ἔννομενα **C** 20 ἑνούμενοι] εννούμενοι **C** 12.15 τοῦ ρα΄] **sic pro** τῶν ρα΄ **C** 32 τουτέστι] τουτέ ἐϛί **C**

των διαμερισμὸς ι΄· τρὶς γὰρ ι΄ λ΄ γίνονται. μέρισον τὰ ι΄ εἰς μέρη δύο καὶ γίνεται [καὶ γίνεται] ἕκαστον μέρος τῶν δύο ἀνὰ ε΄. ἐπεὶ δὲ ὁ διαμερισμὸς τῶν ι΄ ἐστὶ καταπάντα ἴσος – ε΄ καὶ ε΄ –, πρόσθες α΄ ἐπὶ τῶν ι΄ καὶ γίνονται ια΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ μετὰ τῶν ἡμίσ<εων> τῶν ι΄, ἅπερ ἐστὶ ε΄, τὰ ια΄· ε΄κις οὖν ια΄ γίνονται νε΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ νε΄ μετὰ τοῦ πρώτου γράμματος, τουτέστι μετὰ τῶν γ΄· τρὶς οὖν νε΄ γίνονται ρξε΄. καὶ ἰδοὺ ἀπὸ τῶν γ΄ μέχρι τῶν λ΄ γίνονται ρξε΄.

ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς γ΄ ς΄ θ΄ ιβ΄ ιε΄ ιη΄ κα΄ κδ΄ κζ΄ λ΄ λγ΄ λς΄ λθ΄, πόσα γίνονται. μέρισον τὰ λθ΄ μετὰ τῶν γ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιγ΄· τρὶς γὰρ ιγ΄ λθ΄ γίνονται. μέρισον τὰ ιγ΄ εἰς μέρη δύο· ς΄ δὲ καὶ ζ΄ γίνονται ιγ΄. ἐπεὶ δὲ τὰ ζ΄ ἐστὶ πλέον τῶν ς΄, οὐκ ἔστι χρεία προσθεῖναι α΄ ἐπὶ τῶν ιγ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ιγ΄ μετὰ τῶν ζ΄· ζ΄κις οὖν ιγ΄ γίνονται ϙα΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ϙα΄ μετὰ τῶν γ΄, τουτέστι μετὰ τοῦ πρώτου γράμματος· τρὶς οὖν ϙα΄ γίνονται σογ΄.καὶ ἰδοὺ ἀπὸ τῶν γ΄ μέχρι τῶν λθ΄ γίνονται σογ΄.

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς δ΄ η΄ ιβ΄ ις΄ κ΄ κδ΄ κη΄ λβ΄, πόσα γίνονται. μέρισον τὰ λβ΄ μετὰ τοῦ πρώτου γράμματος, τουτέστι μετὰ τῶν δ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς η΄· δ΄κις γὰρ η΄ λβ΄ γίνονται. μέρισον τὰ η΄ εἰς μέρη δύο καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δύο ἀνὰ δ΄. ἐπεὶ δὲ ὁ διαμερισμὸς τῶν η΄ ἐστὶ καταπάντα ἴσος – δ΄ καὶ δ΄ –, πρόσθες α΄ ἐπὶ τῶν η΄ καὶ γίνονται θ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ μετὰ τῶν δ΄ τὰ θ΄· δ΄κις οὖν θ΄ γίνονται λς΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ λς΄ μετὰ τοῦ πρώτου γράμματος, τουτέστι μετὰ τῶν δ΄· δ΄κις οὖν λς΄ γίνονται ρμδ΄. καὶ ἰδοὺ ἀπὸ τῶν δ΄ μέχρι τῶν λβ΄ γίνονται ρμδ΄.

ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς δ΄ η΄ ιβ΄ ις΄ κ΄ κδ΄ κη΄ λβ΄ λς΄ μ΄ μδ΄, πόσα γίνονται. μέρισον τὰ μδ΄ μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ια΄· δ΄κις γὰρ ια΄ μδ΄ γίνονται. μέρισον τὰ ια΄ εἰς μέρη δύο· ε΄ δὲ καὶ ς΄ γίνονται ια΄. ἐπεὶ δὲ τὰ ς΄ ἐστὶ πλέον τῶν ε΄, οὐκ ἔστι χρεία προσθ(εῖ)ναι α΄ ἐπὶ τῶν ια΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ια΄ μετὰ τῶν ς΄· ς΄κις οὖν ια΄ γίνονται ξς΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ξς΄ μετὰ τῶν δ΄· δ΄κις οὖν ξς΄ γίνονται σξδ΄. καὶ ἰδοὺ ἀπὸ τῶν δ΄ μέχρι τῶν μδ΄ γίνονται σξδ΄.

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς ε΄ ι΄ ιε΄ κ΄ κε΄ λ΄ λε΄ μ΄ με΄ ν΄ νε΄ ξ΄, πόσα γίνονται. μέρισον τὰ ξ΄ μετὰ τοῦ πρώτου γράμματος, τουτέστι μετὰ τῶν ε΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιβ΄· ε΄κις γὰρ ιβ΄ γίνονται ξ΄. μέρισον τὰ ιβ΄ εἰς μέρη δύο καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δύο ἀνὰ ς΄. ἐπεὶ δὲ ὁ διαμερισμὸς τῶν ιβ΄ ἐστὶ καταπάντα ἴσος – ς΄ καὶ ς΄ –, πρόσθες α΄ ἐπὶ τῶν ιβ΄ καὶ γίνονται ιγ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ιγ΄ μετὰ τῶν ς΄· ς΄κις οὖν ιγ΄ γίνονται οη΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ οη΄ μετὰ τοῦ πρώτου γράμματος, τουτέστι μετὰ τῶν ε΄· ε΄κις οὖν οη΄ γίνονται τϛ΄. καὶ ἰδοὺ ἀπὸ τῶν ε΄ μέχρι τῶν ξ΄ γίνονται τϛ΄.

ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς ε΄ ι΄ ιε΄ κ΄ κε΄ λ΄ λε΄ μ΄ με΄ ν΄ νε΄ ξ΄ ξε΄, πόσα γίνονται. μέρισον τὰ ξε΄ μετὰ τῶν ε΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιγ΄· ε΄κις γὰρ ιγ΄ ξε΄ γίνονται. μέρισον τὰ ιγ΄ εἰς μέρη δύο· ς΄ δὲ καὶ ζ΄ γίνονται ιγ΄. ἐπεὶ δὲ τὰ ζ΄ ἐστὶ πλέον τῶν ς΄, οὐκ ἔστι χρεία προσθ(εῖ)ναι α΄ ἐπὶ τῶν ιγ΄.πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ιγ΄ μετὰ τῶν ζ΄· ζ΄κις οὖν ιγ΄ γίνονται ϙα΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ϙα΄ μετὰ τῶν ε΄· ε΄κις οὖν ϙα΄ γίνονται υνε΄. καὶ ἰδοὺ ἀπὸ τῶν ε΄ μέχρι τῶν ξε΄ γίνονται υνε΄.

ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν, κἄντε ἀνὰ ς΄ ιβ΄ ιη΄ ἐστὶ κἄντε ἀνὰ ζ΄ ιδ΄ κα΄ ἐστὶ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

νθ Περὶ τοῦ γεννηθέντος παιδίου, ἐφ' ἑκάστου δὲ χρόνου διδό<ν>τος τοσαῦτα φλουριά, ὅσον χρόνων ἐστὶ μέχρι τῶν λ΄ χρόνων. ζητεῖς εἰδέναι, πόσα φλουριὰ δέδωκε.

Ἄν(θρωπ)ός τις ἐγέννησεν υἱόν. ἔταξεν δὲ ἐφ' ἕκαστον πλήρωμαν χρόνου, καθ' ἣν ἡμέραν ἐγεννήθη[ν] τὸ παιδίον αὐτοῦ, δοῦναι ψυχικὸν φλουριὰ τοσαῦτα, ὅσων χρόνων ἐστὶ καὶ ὁ υἱὸς αὐτοῦ. καὶ τὸν μὲν πρῶτον χρόνον, καθ' ἣν ἡμέραν ἐγεννήθη ὁ υἱὸς αὐτοῦ, δέδωκε φλουρὶ α΄, τὸν δεύτερον δέδωκε φλουριὰ β΄· α΄ δὲ καὶ β΄ γίνονται φλουριὰ γ΄ τοὺς δύο χρόνους. τὸν τρίτον δὲ χρόνον δέδωκε φλουριὰ γ΄· τοὺς τρεῖς χρόνους γίνονται φλουριὰ ς΄. γενόμενος δὲ ὁ υἱὸς αὐτοῦ χρόνων λ΄, ζητεῖς εἰδέναι, πόσα φλουριὰ γίνονται τῷ τρόπῳ τούτῳ διδόμενα.

μέρισον τοὺς λ΄ χρόνους εἰς μέρη δύο καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δύο ἀνὰ ιε΄. ἐπεὶ δὲ ὁ διαμερισμὸς τῶν λ΄ ἐστὶ καταπάντα ἴσος – ιε΄ καὶ ιε΄ –, πρόσθες α΄ ἐπὶ τῶν λ΄ καὶ γίνονται λα΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ λα΄ μετὰ τῶν ἡμίσεων τῶν λ΄, τουτέστι μετὰ τῶν ιε΄· ιε΄κις οὖν λα΄ γίνονται υξε΄. καὶ ἰδοὺ εἰς τοὺς λ΄ χρόνους δέδωκε φλουριὰ υξε΄.

	γ	α	
α	ε	ε	ε
γ	α		α
δ	ς	ε	

ζήτει δὲ πάλιν, καὶ ὅτε ἐγένετο ὁ υἱὸς αὐτοῦ χρόνων λα΄, πόσα φλουριὰ δέδωκε. μέρισον τοὺς λα΄ χρόνους εἰς μέρη δύο· ιε΄ δὲ καὶ ις΄ γίνονται λα΄. νῦν δέ, ἐπεὶ τὰ ις΄ ἐστὶ πλείονα τῶν ιε΄, οὐκ ἔστι χρεία προσθεῖναι α΄ || ἐπὶ τῶν λα΄· ἔχοσι γὰρ τὸ α΄ τὰ ις΄, ἅπερ ἐστὶ πλείονα τῶν ιε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ λα΄ μετὰ τῶν ις΄· ις΄κις οὖν λα΄ γίνονται υςς΄. καὶ ἰδοὺ εἰς τοὺς λα΄ χρόνους δέδωκε φλουριὰ υςς΄. εἴπομεν δέ, ὅτι εἰς τοὺς λ΄ χρόνους δέδωκε φλουριὰ υξε΄· πρόσθες καὶ λα΄ φλουριὰ ὑπὲρ τῶν λα΄ χρόνων καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ υςς΄, καθὼς οὕτως εὕρομεν καὶ διὰ τῆς προχείρου ταύτης μεταχειρίσεως. f. 36v

	γ	α	
α	η	ς	ς
γ	α		α
δ	θ	ς	

ὡσαύτως δὲ διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως καὶ ἐπὶ πλείστων χρόνων οὕτως ποιῶν εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον.

ξ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι προχείρως, πόσαι ὧραι σημαντικαὶ κρούονται εἰς τὰς κδ΄ ὥρας τοῦ νυχθημέρου

Αἱ κδ΄ ὧραι τοῦ νυχθημέρου κρούονται πρῶτον μὲν α΄, ἔπειτα β΄, ἅπερ ἐστὶ τὰς δύο ὥρας ὧραι σημαντικαὶ γ΄, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, ἐπειδὰν σημανθῶσι ὧραι κγ΄, πόσα ἀπηχήματα ὡρῶν ἐσημάνθησαν τὰς κγ΄ ὥρας.

ἐστὶ δὲ τοῦτο ὅμοιον ζήτημαν ὡς καὶ τοῦ παιδίου καὶ τῶν φλουριῶν. μέρισον τὰς κγ΄ ὥρας εἰς μέρη δύο· ια΄ δὲ καὶ ιβ΄ γίνονται κγ΄. ἐπεὶ δὲ τὰ ιβ΄ ἐστὶ πλείονα τῶν ια΄, οὐκ ἔστι χρεία προσθ(εῖ)ναι α΄ ἐπὶ τῶν κγ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς κγ΄ ὥρας μετὰ τῶν ιβ΄· ιβ΄κις οὖν κγ΄ γίνονται σος΄. καὶ ἰδοὺ τὰς κγ΄ ὥρας κρούονται ἀπηχήματα ὡρῶν σος΄.

	β	γ	
	δ	ς	β
β	γ		α
β	ζ	ς	

	β	ε	
	ε	ι	β
β	ε		α
γ	ι	ι	

Ζήτει δὲ πάλιν τὰς κδ΄ ὥρας τοῦ νυχθημέρου, πόσα ἀπηχήματα ὡρῶν κρούονται. μέρισον δὲ τὰς κδ΄ ὥρας εἰς μέρη δύο καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δύο ἀνὰ ιβ΄. ἐπεὶ δὲ ὁ διαμερισμὸς τῶν κδ΄ ἐστὶ ἴσος – ιβ΄ καὶ ιβ΄ –, πρόσθες α΄ ἐπὶ τῶν κδ΄ ὡρῶν καὶ γίνονται ὧραι κε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ κε΄ μετὰ τῶν ιβ΄· ιβ΄κις οὖν κε΄ γίνονται τ΄. καὶ ἰδοὺ τὰς κδ΄ ὥρας τοῦ νυχθημέρου κρούονται ἀπηχήματα ὡρῶν τ΄. εὕρομεν, ὅτι εἰς τὰς κγ΄ ὥρας κρούονται ἀπηχήματα σος΄. πρόσθες καὶ κδ΄ ὑπὲρ τῶν κδ΄ ὡρῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ τ΄, καθὼς οὕτως εὗρες καὶ διὰ τῆς προχείρου ταύτης μεταχειρίσεως.

---

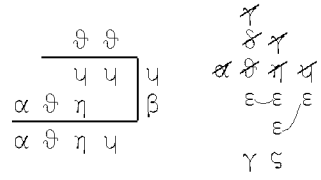
12 ἡμίσεων] ἢ μ̈η̈ C

ὡσαύτως δὲ διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως καὶ ἐπὶ ἄλλων ὡρῶν οὕτως ποιῶν εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον.

ξα Περὶ τῶν ἐσθιόντων δαιτυμόνων ἐρωτηθέντες, πόσοι εἰσί, διὰ σοφιστικῆς ἀποκρίσεως εἶπον· δὶς ὅσοι ἡμεῖς καὶ τὸ ἥμισυ ἡμῶν καὶ τὸ τέταρτον ἡμῶν μετά σου ἐσόμεθα ἄν(θρωπ)οι ρ΄.

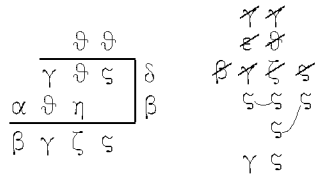
Συνημμένους τινὰς ἄνδρας εὑρών τις ἐσθίοντας ἐρώτησεν αὐτούς, πόσοι ἐστέ. ἀποκριθέντες δὲ οὐκ εἶπον, ὅτι ἐσμὲν ἄν(θρωπ)οι τόσοι, ἀλλ᾽ εἶπον, ὅτι ἡμεῖς καὶ ἄλλοι τοσοῦτοι ὅσοι ἡμεῖς καὶ τὸ ἥμισυ ἡμῶν καὶ τὸ τέταρτον ἡμῶν μετά σου ἐσόμεθα ἂν ἄν(θρωπ)οι ρ΄. μὴ εἰδότες δὲ ἡμεῖς, πόσοι εἰσὶ οἱ ἐσθίοντες, πῶς ἔχομεν τούτους εἰδέναι; ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως.

Ὑπέθου σοι παρὰ σεαυτῷ θέσιν τινά, ἣν ἂν βούλ(ῃ), καὶ εἰπέ· ἔστωσαν οἱ ἐσθίοντες ἄν(θρωπ)οι κ΄, καὶ ἄλλοι τοσοῦτοι, καθὼς εἶπον, γίνονται μ΄, καὶ τὸ ἥμισυ τῶν κ΄, ὡς εἶπον, ἐστὶ ι΄, ὁμοῦ ν΄, καὶ τὸ τέταρτον τῶν κ΄, ὡς εἶπον, ὅπερ ἐστὶ ε΄, ὁμοῦ ἄν(θρωπ)οι νε΄. ἄφελε οὖν α΄ ἐκ τῶν ρ΄, ὃν εἶπον, ὅτι μετά σου ἐσόμεθα ἂν ἄν(θρωπ)οι ρ΄, τουτέστι τὴν σὴν ἰδίαν ψῆφον, καὶ ἀπομένοσι ἄν(θρωπ)οι ϛθ΄. πολλ(α)πλασίασον οὖν τοὺς ϛθ΄ ἀν(θρώ)πους μετὰ τῶν κ΄ ἀν(θρώπ)ων, ὧν σὺ ὑπέθου· κ΄κις οὖν ϛθ΄ γίνονται ,αϡπ΄. μέρισον τοὺς ,αϡπ΄ ἀν(θρώπ)ους μετὰ τῆς ὁμάδος τῶν νε΄ ἀν(θρώπ)ων, ὧν ἐποίησας ἐκ τῶν κ΄ ἀν(θρώπ)ων, ὧν ὑπέθου· διαμεριζόμενοι δὲ οἱ ,αϡπ΄ ἄν(θρωπ)οι μετὰ τῶν νε΄ ἀν(θρώπ)ων γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς λϛ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι οἱ ἐσθίοντές εἰσι ἄν(θρωπ)οι λϛ΄.



ἡ δὲ ἀπόδειξις, ὅτι οὕτως ἐστί, ἔστι αὕτη. ἄν(θρωπ)οι λϛ΄ καὶ ἄν(θρωπ)οι τοσοῦτοι, ὡς εἶπον, γίνονται οβ΄, καὶ τὸ ἥμισυ τῶν λϛ΄, ὅπερ ἐστὶ ιη΄, ὁμοῦ ϛ΄, καὶ τὸ τέταρτον τῶν λϛ΄, ὅπερ ἐστὶ θ΄, ὁμοῦ ϛθ΄. πρόσθες καὶ τὴν σὴν ἰδίαν ψῆφον, ἣν εἶπον, ὅτι μετά σου ἐσόμεθα ἂν ἄν(θρωπ)οι ρ΄, καὶ γίνονται ϛθ΄ καὶ α΄, ὁμοῦ ἄν(θρωπ)οι ρ΄ – κατὰ τὸν λόγον, ὃν εἶπον, ὅτι ἡμεῖς καὶ ἄλλοι τοσοῦτοι ὅσοι ἡμεῖς καὶ τὸ ἥμισυ ἡμῶν καὶ τὸ τέταρτον ἡμῶν μετά σου ἐσόμεθα ἂν ἄν(θρωπ)οι ρ΄.

Ἵνα δὲ ἴδῃς τὸ ἀληθὲς τῆς προχείρου ταύτης μεταχειρίσεως, ἔστω ὅτι ὑπέθου εἶναι ἄν(θρωπ)οι κδ΄, καὶ ἄλλοι τοσοῦτοι γίνονται μη΄, καὶ τὸ ἥμισυ τῶν κδ΄, ὅπερ ἐστὶ ιβ΄, ὁμοῦ ἄν(θρωπ)οι ξ΄, καὶ τὸ τέταρτον τῶν κδ΄, ὅπερ ἐστὶ ϛ΄, ὁμοῦ ἄν(θρωπ)οι ξϛ΄. ἔστι δὲ τὰ ξϛ΄ ἓν σῶμα, ὅπερ ἐστὶ καὶ μεριστής. ἄφελε δὲ πάλιν ἐκ τῶν ρ΄ τὴν σὴν ἰδίαν ψῆφον ὡς καὶ πρότερον καὶ ἀπομένοσι ϛθ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ϛθ΄ μετὰ τῶν κδ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,βτος΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ξϛ΄ ἀν(θρώπ)ων, ὃν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς πάλιν λϛ΄ ὡς τὸ πρότερον. καὶ ἰδοὺ καὶ διὰ τῆς δευτέρας ταύτης θέσεως τῶν κδ΄ πάλιν εὗρες, ὅτι εἰσὶ ἄν(θρωπ)οι λϛ΄ ὡς καὶ πρότερον.



ὡσαύτως δέ, ἐὰν ὑποθῇς εἶναι τοὺς ἐσθίοντας λβ΄ ἢ καὶ μ΄, διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως εὑρήσεις αὐτοὺς λϛ΄, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν παρόντων δύο θέσεων τῶν κ΄ καὶ τῶν κδ΄ εὗρες αὐτοὺς τῷ ἀριθμῷ ὄντας λϛ΄.

---

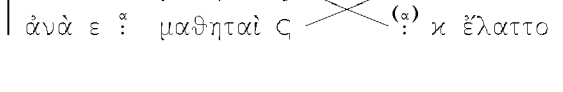
3 δαιτυμόνων] δὲ τι μόνῶν **C** 11 Ὑπέθου] **sic pro** Ὑπόθου **C** 32 ὅπερ] ἅπερ **C**

ξβ Περὶ τῶν μαθητῶν, ὧν οὐκ εἶπον, πόσοι εἰσί – διὰ δὲ σοφιστικῆς ἀποκρίσεως εἶπον· ἐὰν δώσῃ ἕκαστος ἡμῶν ἀνὰ κουκκιὰ ε΄, λείπονται ἡμῖν εἰς ἀναπλήρωσι(ν) τοῦ νοικιοῦ ἡμῶν κουκκιὰ λ΄· εἰ δὲ δώσῃ ἕκαστος ἡμῶν ἀνὰ ς΄ κουκκιά, περισσεύει ἐκ τοῦ συμπεφωνημένου νοικιοῦ ἡμῶν κουκκιὰ μ΄.

Ἄν(θρωπ)ός τις ἀπῆλθεν || εἰς <σ>χολεῖόν τινα. εὗρε δὲ μαθητὰς ἐν αὐτῷ καὶ ἐρώ- f. 37r
τησεν αὐτούς· πόσοι ἄρα ἐστέ, μαθηταί, καὶ πόσον ἐστὶ τὸ νοίκιν, ὅπερ δίδετε ἐφ᾽ ἕκαστον χρόνον πάντες ὑμεῖς; οὐκ εἶπον δέ, τόσοι ἐσμέν, ἀλλ᾽ ὅτι ἐὰν ἕκαστος ἡμῶν δώσῃ ἀνὰ κουκκιὰ ε΄, λείπεται εἰς ἀποσωσμὸν τοῦ νοικιοῦ ἡμῶν κουκκιὰ λ΄, εἰ δὲ ἕκαστος ἡμῶν δώσῃ ἀνὰ κουκκιῶν ς΄, περισσεύει ἐκ τῆς ὀφειλ(σ)μένης ποσότητος τοῦ νοικιοῦ ἡμῶν κουκκιὰ μ΄. μὴ εἰδότες δὲ ἡμεῖς, πόσοι μαθηταί εἰσι καὶ πόσον ἐστὶ τὸ ὀφειλ(ό)μενον νοίκιν αὐτῶν, πῶς ἔχομεν εἰδέναι ταῦτα; ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι οὕτως. Ὑπέθου σοι πάλιν καὶ ἐνταῦθα παρὰ σεαυτῷ θέσιν τινὰ καὶ εἰπέ· ἔστωσαν τοίνυν μαθηταὶ ξ΄, ἕκαστος τούτων δεδωκὼς ἀνὰ ε΄ κουκκιῶν. ε΄κις ξ΄ γίνονται τ΄. καθὼς οὖν εἴπομεν ἄνωθεν, λείπονται αὐτοῖς κουκκιὰ λ΄ εἰς ἀναπλήρωσι(ν) τοῦ νοικίου αὐτῶν. πρόσθες καὶ ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ τλ΄. ἐὰν δὲ πάλιν δώσῃ ἕκαστος τῶν ξ΄ ἀνὰ κουκκιὰ ς΄, ς΄κις ξ΄ γίνονται κουκκιὰ τξ΄. ἐπεὶ δὲ εἴπομεν ἄνωθεν, ὅτι, ἐὰν δώσῃ ἕκαστος αὐτῶν ἀνὰ κουκκιὰ ς΄, περισσεύοσι κουκκιὰ μ΄, ἄφελε κουκκιὰ μ΄ ἐκ τῶν τξ΄ καὶ ἀπομένοσι κουκκιὰ τκ΄. ἐστὶ δὲ τὰ τκ΄ κουκκιὰ κουκκιὰ ι΄ ἔλαττο ἐκ τῶν τλ΄ κουκκιῶν.

ὑπέθου δὲ πάλιν παρὰ σεαυτῷ ἑτέραν θέσιν καὶ εἰπέ· ἔστωσαν τοίνυν μαθηταὶ ς΄, ἕκαστος τούτων δεδωκὼς ἀνὰ κουκκιῶν ε΄. ε΄κις ς΄ γίνονται κουκκιὰ υν΄. πρόσθες ὡς τὸ πρότερον τὰ λ΄ κουκκιά, ἅπερ λείπονται εἰς ἀναπλήρωσι(ν) τοῦ νοικιοῦ αὐτῶν, καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ υπ΄. ἐὰν δὲ πάλιν δώσῃ ἕκαστος τῶν ς΄ ἀνὰ κουκκιῶν ς΄, ς΄κις ς΄ γίνονται κουκκιὰ φμ΄. ἄφελε κουκκιὰ μ΄, καθὼς καὶ πρότερον οὕτως ἐποίησας, καὶ ἀπομένοσι κουκκιὰ φ΄. ἐστὶ δὲ τὰ φ΄ κουκκιὰ κουκκιὰ κ΄ πλέον ἐκ τῶν υπ΄ κουκκιῶν. καὶ οἱ μὲν ξ΄ μαθηταὶ ἀνὰ ε΄ κουκκιὰ διδόντες ἔχοσι κουκκιὰ ι΄ πλέον ἀνὰ ς΄ κουκκιῶν δεδωκότων αὐτῶν, οἱ δὲ ς΄ τὸ ἀνάπαλιν ἀνὰ ε΄ κουκκιὰ δεδωκότων ἔχοσι ἔλαττο κουκκιὰ κ΄ ἀνὰ ς΄ κουκκιὰ δεδωκότων αὐτῶν.

Θὲς οὖν τὰς δύο τούτων διαφορὰς ἐν συγκρίσει καὶ εἰπέ· μαθηταὶ ξ΄ – ἕκαστος ἀνὰ ε΄ κουκκιά – ἔχοσι κουκκιὰ ι΄ πλέον, καὶ πάλιν μαθηταὶ ς΄ – ἀνὰ ε΄ κουκκιῶν – ἔχοσι κουκκιὰ κ΄ ἔλαττο.



πολλ(α)πλασίασον ταῦτα στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλάξ· ι΄κις οὖν ς΄ γίνονται ≫΄ καὶ πάλ(ιν) κ΄κις ξ΄ γίνονται ,ασ΄. ἕνωσον τὰ ≫΄ μετὰ τῶν ,ασ΄ καὶ γίνονται ,βρ΄. ἕνωσον δὲ καὶ τὰ ι΄ κουκκιά, ἅπερ περισσεύοσι ἐκ τῶν ξ΄ μαθ(η)τῶν, μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν, ὧν ἔχοσι ἔλαττο οἱ ς΄ μαθηταί, καὶ γίνεται ὁμοῦ κουκκιὰ λ΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστής. μέρισον γὰρ τὰ ,βρ΄ μετὰ τῶν λ΄ καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς ο΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι μαθηταὶ ο΄ εἰσί.



ζήτει δὲ καὶ τὸ νοίκιν, πόσον ἐστί, καὶ ὡς ἐν ταὐτῷ καταλαβεῖν ἔχεις καὶ τὴν ποσότητα τοῦ νοικιοῦ, πόση ἐστί, καὶ ὅτι καὶ οἱ μαθηταὶ ἀληθῶς εἰσι ο΄.

ἕκαστος τοίνυν τῶν μαθητῶν δεδωκὼς ἀνὰ κουκκιὰ ε΄ – ε΄κις ο΄ γίνονται κουκκιὰ τν΄. πρόσθες καὶ λ΄ κουκκιά, καθὼς εἴπομεν, ὅτι λείπονται εἰς ἀναπλήρωσι(ν) τοῦ

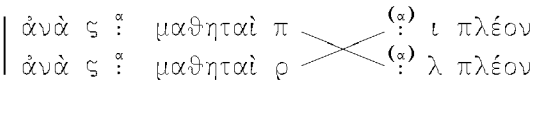
2.3 etc. δώσῃ] pro δῷ C 3 νοικιοῦ] pro ἐνοικίου C 5 τινα] sic C 5/6 ἐρώτησεν] hic et passim C pro ἠρώτησεν 39 ἐν ταὐτῷ] εν ταυτο hic et aliubi C

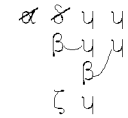
νοικιοῦ, καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ τπ΄. ἕκαστος δὲ πάλιν τῶν ο΄ μαθητῶν δεδωκὼς ἀνὰ κουκκιὰ ς΄ – ς΄κις ο΄ γίνονται κουκκιὰ υκ΄. ἄφελε ἐξ αὐτῶν κουκκιὰ μ΄, καθὼς εἶπον, ὅτι ἀνὰ κουκκιὰ ς΄ δεδωκότες περισσεύοσι κουκκιὰ μ΄. ἀφελόμενος δὲ κουκκιὰ μ΄ ἐκ τῶν υκ΄ κουκκιῶν ἀπομένοσι τπ΄, καθὼς [ἐ]προσέθηκας καὶ εἰς τὰ τν΄ κουκκιὰ λ΄ καὶ ἐγένοντο κουκκιὰ τπ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες τοὺς μὲν μαθ(η)τὰς ο΄, τὸ δὲ ἐφ᾽ ἕκαστον χρόνον νοίκιν κουκκιὰ τπ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ιθ΄.

Ἵνα δὲ ἴδῃς τὸ ἀληθὲς τῆς προχείρου ταύτης μεταχειρίσεως, ἔστω ὅτι ὑπέθου μαθηταὶ π΄, ἕκαστος αὐτῶν δεδωκὼς ἀνὰ ε΄· ε΄κις π΄ γίνονται κουκκιὰ υ΄. πρόσθες πάλιν, ὡς εἴπομεν, κουκκιὰ λ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ υλ΄. ἕκαστος δὲ πάλιν τῶν π΄ δεδωκὼς ἀνὰ κουκκιὰ ς΄ – ς΄κις π΄ γίνονται κουκκιὰ υπ΄. ἄφελε πάλιν καὶ ἐκ τούτων τὰ μ΄ κουκκιὰ καὶ ἀπομένοσι κουκκιὰ υμ΄. ἔχοσι οἱ π΄ μαθηταὶ ἀνὰ κουκκιῶν ς΄ δεδωκότες κουκκιὰ ι΄ πλέον τῶν ἀνὰ ε΄ κουκκιῶν δεδωκότων αὐτῶν.

ὑπέθου δὲ πάλιν παρὰ σεαυτῷ ἑτέραν θέσιν καὶ εἰπέ· ἔστωσαν μαθηταὶ ρ΄, ἕκαστος αὐτῶν δεδωκὼς ἀνὰ κουκκιὰ ε΄. ε΄κις ρ΄ γίνονται κουκκιὰ φ΄. πρόσθες πάλιν καὶ ἐνταῦθα κουκκιὰ λ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ φλ΄. ἕκαστος δὲ πάλιν αὐτῶν ἀνὰ κουκκιὰ ς΄ δεδωκότων – ς΄κις ρ΄ γίνονται κουκκιὰ χ΄. ἄφελε πάλιν κουκκιὰ μ΄ καὶ ἀπομένοσι κουκκιὰ φξ΄. ἔχοσι οἱ ρ΄ μαθηταὶ ἀνὰ ς΄ κουκκιὰ δεδωκότες κουκκιὰ λ΄ πλέον τῶν ἀνὰ ε΄ κουκκιῶν δεδωκότων αὐτῶν. καὶ ἰδοὺ καὶ ἡ πρώτη θέσις τῶν π΄ μαθητῶν καὶ ἡ δευτέρα τῶν ρ΄ μαθητῶν ἀνὰ κουκκιὰ ς΄ δεδωκότων – οἱ μὲν π΄ ἔχοσι πλέον κουκκιὰ ι΄, οἱ δὲ ρ΄ ἔχοσι πλέον κουκκιὰ λ΄.

Θὲς οὖν καὶ ἐνταῦθα τὰς δύο τούτων διαφορὰς ἐν συγκρίσει καὶ εἰπέ· μαθηταὶ π΄ – ἕκαστος ἀνὰ ς΄ κουκκιά – ἔχοσι κουκκιὰ ι΄ πλέον, καὶ πάλιν μαθηταὶ ρ΄ – ἕκαστος ἀνὰ κουκκιὰ ς΄ – ἔχοσι κουκκιὰ λ΄ πλέον. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ ι΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν ρ΄ καὶ τὰ λ΄ μετὰ τῶν π΄· ι΄κις οὖν ρ΄ γίνονται ,α΄ καὶ λ΄κις π΄ γίνονται ,βυ΄. νῦν δέ, ἐπεὶ μονομερῶς καὶ οἱ π΄ μαθηταὶ καὶ οἱ ρ΄ ἀνὰ ς΄ κουκκιὰ δεδωκότες ἔχοσι πλέον τῶν ἀνὰ ε΄ κουκκιῶν δεδωκότων αὐτῶν, ἄφελε μᾶλλον τὰ ἐλάττονα ἐκ τῶν πλειόνων, τουτέστι τὰ ,α΄ ἐκ τῶν ,βυ΄, καὶ ἀπομένοσι ,αυ΄. ἄφελε δὲ καὶ τὰ ι΄ κουκκιὰ ἐκ τῶν λ΄ κουκκιῶν καὶ ἀπομένοσι κουκκιὰ κ΄. μέρισον δὲ τὰ ,αυ΄ μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τέ-





---

18 θέσις] θήσης **C**

in inf. marg. fol. 37^{r}: Καὶ ἄλλως προχειρεστέρως· ἕνωσον τὰ ἐλλείποντα κουκκιὰ μετὰ τῶν περισσευόντων κουκκιῶν, τουτέστι ἕνωσον τὰ γ ϛ΄ κουκκιά, ἅπερ λείπονται, μετὰ τῶν δ ϛ΄ κουκκιῶν, ὧν περισσεύοσι, καὶ γίνονται ὁμοῦ ζ ϛ΄. εὗρες οὖν καὶ οὕτως προχ(ει)ρεστέρως, ὅτι εἰσὶ μαθ(η)ταὶ ζ ϛ΄. καὶ τοῦτο μὲν οὕτως, ὁπόταν λείπωνται κουκκιά τινα ἐκ τῆς μιᾶς δόσεως, περισσεύωνται δὲ κουκκιά τινα ἐκ τῆς ἑτέρας, ὥσπερ νῦν λείπονται μὲν κουκκιὰ γ ϛ΄ ἐκ τῆς μιᾶς δόσεως, περισσεύονται δὲ κουκκιὰ δ ϛ΄ ἐκ τῆς ἑτέρας, ἅπερ ὁμοῦ γίνονται ζ ϛ΄. εἰ δὲ λείπονται καὶ ἐκ τῶν δύο δόσεων ἢ περισσεύονται ἐκ τῶν δύο δόσεων, ἄφελε τὰ ἐλάττονα ἐκ τῶν πλειόνων, καὶ ὅσον ἐστὶ τὸ ἐναπομένον μέρος, τοσοῦτοι μαθηταί εἰσι – εἴπερ διαφέρει ἡ μία δόσις ἐκ τῆς ἑτέρας κουκκὶ ἕνα, ὥσπερ νῦν ἐστι ἡ μὲν μία δόσις ἀνὰ κουκκιὰ ε΄, ἡ δὲ ἑτέρα ἀνὰ κουκκιὰ ς΄.

εἰ δὲ διαφέρει κουκκιὰ δύο, λάμβανε τὸ ἥμισυ. εἰ δὲ διαφέρει κουκκιὰ τρία, λάμβανε τὸ τρίτον καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

λειος τούτων διαμερισμὸς ο΄ ὡς τὸ πρότερον. τὸ δὲ νοίκιν αὐτῶν ἐστι πάλιν κουκκιὰ τπ΄, τουτέστι ὑπέρπυρα ιθ΄.

Ὅτε οὖν ἐστι πλέον τὸ μέρος τῶν ἀνὰ ε΄ κουκκιὰ δεδωκότων τῶν ἀνὰ ς΄ κουκκιῶν ἐν τῇ πρώτῃ ἢ τῇ δευτέρᾳ θέσει τῶν μαθητῶν – τὸ ἀνάπαλι(ν) δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ θέσει ἀνὰ ς΄ κουκκιά ἐστι πλέον τῶν ἀνὰ ε΄ κουκκιῶν δεδωκότων αὐτῶν – καθὼς οὕτως ἐστὶ τὸ πρῶτον τῶν ξ΄ καὶ ς΄ μαθητῶν, ἐπεὶ ὁ πλεονασμὸς τούτων ἐστὶ ἀνώμαλος ἐπὶ μὲν τῆς μιᾶς θέσεως ἀνὰ ε΄ κουκκιῶν ἔχων τὸ πλέον, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας ἀνὰ ς΄ κουκκιὰ ἔχων τὸ πλέον, ἕνωσον τὰ δύο μέρη τῶν θέσεων, ἅπερ στ(αυ)ροειδῶς ἐπολλ(α)πλασίασας. ἕνωσον δὲ καὶ τὰ κουκκιὰ τῶν πλεονασμῶν, καθὼς ἐπὶ τοῦ πρώτου ἐποίησας || καὶ ἕνωσας τὰ ι΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν κ΄ καὶ ἐγένοντο κουκκιὰ λ΄. f. 37v
μέρισον δὲ τὰς δυο πολλ(α)πλασιασθείσας θέσεις, ἃς ἕνωσας, μετὰ τῶν ἑνωθέντων κουκκιῶν τοῦ πλεονασμοῦ τῶν δύο θέσεων, καὶ ὁ γενόμενος τούτων τέλειος διαμερισμός ἐστι οἱ ζητούμενοι μαθηταί. ἀπὸ δὲ τῆς ποσότητος τῶν μαθητῶν καὶ τὸ νοίκιν δῆλον ἡμῖν γίνεται.

ὅτε δὲ πάλιν καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας θέσεως τῶν μαθητῶν ἐστι πλέον μονομερῶς τὰ ἀνὰ ε΄ κουκκιὰ ἐκ τῶν ἀνὰ ς΄ κουκκιῶν ἢ τὰ ἀνὰ ς΄ κουκκιὰ μονομερῶς ἐκ τῶν ἀνὰ ε΄ κουκκιῶν ἐστι πλέον, τοίνυ<ν> καὐτὰ τὰ πολλ(α)πλασιασθέντα δύο μέρη στ(αυ)ροειδῶς ἄφελε τὰ ἐλάττονα ἐκ τῶν πλειόνων, ὡσαύτως καὶ τὰ περισσεύοντα κουκκιὰ τῶν δύο θέσεων ἄφελε τὰ ἐλάττονα ἐκ τῶν πλειόνων, καὶ μέρισον δι᾽ αὐτῶν τὸ ἐναπομεῖναν μέρος τῶν δύο πολλ(α)πλασιαζομένων στ(αυ)ροειδῶς μερῶν, ὅπερ ἀφεῖλες τὸ ἔλαττον ἐκ τοῦ πλείονος, καθὼς οὕτως ἐποίησας διὰ τῶν δύο ὑποδ(ει)γμάτων, ὧν ἐκτιθέμεθα. καὶ ὅσος γένηται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμός, τοσοῦτοι μαθηταί ἐστι οἱ ζητούμενοι.

οὕτως δὲ ποιῶν εὑρήσεις καλῶς πᾶν ὅμοιον ζήτημαν τῆς αὐτῆς μὲν τάξεως, ἄλλης δὲ ποσότητος καὶ μαθητῶν καὶ νοικιοῦ.

ξγ Περὶ τοῦ πωλοῦντος τὸν ἵππον αὐτοῦ σεσοφισμένως καὶ μὴ θέλων ἐξειπεῖν τὸ τίμημα αὐτοῦ, ἀλλὰ δι᾽ αἰνιγμάτων αἰνιττόμενος τὴν τιμὴν τούτου, πόση τις ἔστι

Ἄν(θρωπ)ός τις πωλεῖ τὸν ἵππον αὐτοῦ. ἐλθὼν δέ τις ἐξωνήσασθαι τοῦτον ἐρώτησεν τὴν τιμὴν τοῦ ἵππου, πόση τις ἔστι. ὁ δὲ κύριος τοῦ ἵππου ἀποκριθεὶς εἶπε πρὸς τὸν ζητῶντα μαθεῖν τὴν τιμὴν τούτου· ἐγὼ ἔχω φλουριὰ ις΄. εἰ οὖν δώσῃς μοι σὺ ἐκ τῶν σῶν φλουριῶν, ὅσα ἐστὶ τὰ ἡμίση τῶν ἐμῶν ις΄ φλουριῶν, ἔτι τε καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ἐξ ὧν σὺ κρατεῖς φλουριά, ἤδη εἴληφα τὴν τιμήν – σὺ δὲ λαβὼν τὸν ἵππον ἄπιθι. εἶπεν δὲ καὶ ὁ ζητῶν ἀγοράσαι πρὸς τὸν πωλοῦντα· ἐὰν σύ μοι δώσῃς $\frac{\alpha}{\delta}$ ἐκ τῶν σῶν ις΄ φλουριῶν, μετὰ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$, ὧν ἔχω ἐγώ, δώσω σοι, ὅσα ἄν μοι ζητῇς, καὶ ἔστω ἐμὸς ὁ ἵππος. μὴ εἰδότες οὖν ἡμεῖς, τί ἐστι ἡ τιμή, ἣν ζητεῖ ὁ πωλῶν, καὶ πόσα φλουριὰ κρατεῖ ὁ ἀγοράζων, ὥστε οὕτως γενέσθαι, ὡς αὐτοὶ κοινῶς συνε[μ]φώνησαν, πῶς ἔχομεν εἰδέναι ταῦτα;

Ποίησον οὕτως. θὲς καὶ ἐνταῦθα θέσιν τινὰ παρὰ σεαυτῷ καὶ εἰπέ· ἔστω ὁ ζητῶν ἀγοράσαι ἔχει φλουριὰ κδ΄. ζητεῖ δὲ ὁ κύριος τοῦ ἵππου ἐκ τοῦ ἀγοράζοντος $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν κδ΄, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ η΄. τὰ ἡμίση δὲ τῶν ις΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντός ἐστι φλουριὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ις΄. ζητεῖ δὲ ὁ ἀγοράζων $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ις΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ἅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν κδ΄ φλουριῶν, ὧν

---

4 τῇ δευτέρᾳ θέσει] τὴν δευτέραν θέσην **C** 23 ἐστι] **sic C** 27 αἰνιττόμενος] ἐννηττόμενος **C** 35 πωλῶν] **hic et aliubi** πουλῶν **C**

ὑπέθου ἔχειν ὁ ἀγοράζων, ἐστὶ φλουριὰ ις΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ κ΄. καὶ ὁ μὲν πωλῶν εὗρες, ὅτι ἔχει φλουριὰ ις΄, ὁ δὲ ἀγοράζων κ΄· ὁ ἀγοράζων ἔχει πλέον τοῦ πωλοῦντος φλουριὰ δ΄.

ὑπέθου πάλιν δευτέραν θέσιν καὶ εἰπέ· ἔστω ὁ ἀγοράζων ἔχει φλουριὰ κζ΄. ζητεῖ δὲ ὁ πωλῶν ἐκ τοῦ ἔχοντος τὰ κζ΄ φλουριὰ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ θ΄. τὰ ἡμίση δὲ τῶν ις΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντός ἐστι φλουριὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ιζ΄. ζητεῖ δὲ ὁ ἀγοράζων $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ις΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν κζ΄ φλουριῶν, ὧν ὑπέθου ἔχειν ὁ ἀγοράζων, ἐστὶ φλουριὰ ιη΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ κβ΄. καὶ ὁ μὲν πωλῶν εὗρες, ὅτι ἔχει φλουριὰ ιζ΄, ὁ δὲ ἀγοράζων κβ΄· ὁ ἀγοράζων ἔχει πλέον τοῦ πωλοῦντος φλουριὰ ε΄.

Θὲς οὖν ἐν συγκρίσει τὰς δύο θέσεις τῶν φλουριῶν, ὧν ἐποίησας, καὶ τὰ μὲν κδ΄ φλουριὰ ἔχοσι πλέον φλουριὰ δ΄, τὰ δὲ κζ΄ φλουριὰ ἔχοσι πλέον φλουριὰ ε΄. καὶ ἐπεὶ μονομερῶς ὁ ἀγοράζων καὶ εἰς τὴν πρώτην καὶ δευτέραν θέσιν ἔχει πλέον τοῦ πωλοῦντος, ἄφελε τὰ ἐλάττονα ἐκ τῶν πλειόνων, τουτέστι τὰ δ΄ ἐκ τῶν ε΄, καὶ ἀπομένει α΄ φλουρί· ἔστι δὲ τοῦτο ὁ μεριστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ δ΄ φλουριὰ μετὰ τῶν κζ΄ καὶ τὰ ε΄ μετὰ τῶν κδ΄· δ΄κις οὖν κζ΄ γίνονται ρη΄ καὶ ε΄κις κδ΄ γίνονται ρκ΄. ἄφελε καὶ ἐνταῦθα, δι᾽ ἣν εἴπομεν αἰτίαν, τὰ ἐλάττονα ἐκ τῶν πλειόνων, τουτέστι τὰ ρη΄ ἐκ τῶν ρκ΄, καὶ ἀπομένουσι φλουριὰ ιβ΄. μέρισον ταῦτα τὰ ιβ΄ φλουριὰ μετὰ τοῦ α΄ φλουριοῦ, οὗ εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς πάλιν ιβ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ ἀγοράζων κρατεῖ φλουριὰ ιβ΄· ἔστι δὲ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἵππου φλουριὰ ιβ΄.

φ	κδ	πλέον δ
φ	κζ	πλέον ε

ἡ δὲ ἀπόδειξις, ὅτι ἐστὶ ὀρθὸν τὸ γενόμενον, ἔστι αὕτη. ζητεῖ ὁ ἔχων τὸν ἵππον καὶ τὰ ις΄ φλουριὰ ἐκ τοῦ ἀγοράζοντος $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ιβ΄ φλουριῶν, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὰ δὲ ἡμίση τῶν ις΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντός ἐστι φλουριὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ιβ΄. ζητεῖ δὲ καὶ ὁ ἀγοράζων ἐκ τῶν ις΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος $\frac{\alpha}{\delta}$, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν ιβ΄ φλουριῶν, ὧν εὗρες διὰ τῆς προχείρου μεταχειρίσεως, ὅτι κρατεῖ ὁ ἀγοράζων, ἐστὶ φλουριὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα τὰ η΄ μετὰ τῶν δ΄, ὧν ἔλαβες ἐκ τῶν ις΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, καὶ γίνονται πάλιν ὁμοῦ φλουριὰ ιβ΄ ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης ὁμάδος. μὴ εἰδὼς οὖν τὴν τιμὴν τοῦ ἵππου καὶ πόσα φλουριὰ κρατεῖ ὁ ἀγοράζων, διὰ τῆς προχείρου μεταχειρίσεως εὗρες, ὅτι καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἵππου καὶ τὰ φλουριά, ἅπερ κρατεῖ ὁ ἀγοράζων, ἐστὶ φλουριὰ ιβ΄, ὡς ἀποδέδεικται.

Ἵνα δὲ ἴδῃς τὸ ἀληθὲς τῆς παρούσης ταύτης μεταχειρίσεως, θὲς ἑτέραν θέσιν καὶ εἰπέ· ἔστω ὁ ἀγοράζων ἔχει φλουριὰ κζ΄. ζητεῖ ὁ πωλῶν $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν κζ΄ φλουριῶν, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ θ΄. τὰ δὲ ἡμίση τῶν ις΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντός ἐστι φλουριὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ιζ΄. ζητεῖ δὲ ὁ ἀγοράζων $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ις΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν κζ΄ φλουριῶν ἐστι φλουριὰ ιη΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ κβ΄. ὁ πωλῶν ἔχει φλουριὰ ιζ΄, ὁ δὲ ἀγοράζων κβ΄· ὁ ἀγοράζων ἔχει πλέον φλουριὰ ε΄.

ὑπέθου πάλιν δευτέραν θέσιν καὶ εἰπέ· ἔστω ὁ ἀγοράζων ἔχει φλουριὰ λγ΄. ζητεῖ ὁ πωλῶν $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν λγ΄ φλουριῶν, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ ια΄. τὰ δὲ ἡμίση τῶν ις΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντός ἐστι φλουριὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ιθ΄. ζητεῖ δὲ ὁ ἀγοράζων || $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ις΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λγ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντός ἐστι φλουριὰ κβ΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ κς΄. ἔχει ὁ πωλῶν φλουριὰ ιθ΄, ὁ δὲ ἀγοράζων κς΄· ὁ ἀγοράζων ἔχει f. 38r

καὶ ἐνταῦθα πλέον φλουριὰ ζ΄.

Θὲς οὖν καὶ νῦν ἐν συγκρίσει τὰς δύο θέσεις τῶν φλουριῶν, ὧν ἐποίησας, καὶ ἄφελε τὰ ε΄ φλουριά, ἅπερ ἐστὶ ἐλάττονα, ἐκ τῶν ζ΄ φλουριῶν καὶ ἀπομένοσι φλουριὰ β΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστής.

φ	κζ	πλέον ε
φ	λγ	πλέον ζ

πολλαπλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ ε΄ φλουριὰ μετὰ τῶν λγ΄ καὶ τὰ ζ΄ μετὰ τῶν κζ΄· ε΄κις οὖν λγ΄ γίνονται ρξε΄ καὶ ζ΄κις κζ΄ γίνονται ρπθ΄. ἐπεὶ οὖν μονομερῶς ὁ ἀγοράζων ἔχει πλέον εἰς μὲν τὴν πρώτην θέσιν φλουριὰ ε΄, εἰς δὲ τὴν δευτέραν ζ΄, ὥσπερ ἀφεῖλες τὰ ε΄ ἐκ τῶν ζ΄ καὶ ἀπέμειναν β΄ μεριστής, ἄφελε καὶ τὰ ρξε΄ ἐκ τῶν ρπθ΄, τουτέστι τὰ ἐλάττονα ἐκ τῶν πλειόνων, καὶ ἀπομένοσ(ι) κδ΄. μέρισον τὰ κδ΄ μετὰ τῶν β΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς πάλιν φλουριὰ ιβ΄ ὡς τὸ πρότερον. καὶ ἰδοὺ καὶ νῦν εὕρες, ὅτι καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἵππου καὶ τὰ φλουριά, ἅπερ κρατεῖ ὁ ἀγοράζων, ἐστὶ φλουριὰ ιβ΄. ἡ δὲ ἀπόδειξις τούτου πάλιν ἐστὶ ὁμοία.

β	δ	
β	β	
α	β	

ξδ Περὶ τοῦ αὐτοῦ ζητήματος, οὐχ ὡς τὸ πρῶτον, ἀλλὰ τὸ ἀνάπαλιν· νῦν γὰρ ὁ μὲν πωλῶν εἶπεν ἔχειν φλουριὰ ιβ΄. μὴ εἰδότες οὖν, πόσα φλουριὰ ἔχει ὁ ἀγοράζων καὶ πόσα φλουριά ἐστι ἡ τιμὴ τοῦ ἵππου, ἡ μὲν τιμὴ εὑρεθήσεται πάλιν φλουριὰ ιβ΄, τὰ δὲ τοῦ ἀγοράζοντος φλουριὰ ις΄.

Ἔστω δὲ νῦν τὸ ἀνάπαλιν· ὁ μὲν πωλῶν εἶπεν, ὅτι ἔχει φλουριὰ ιβ΄. ζητεῖ δὲ τὸν ἀγοράζοντα $\frac{\alpha}{\delta}$ ἐκ τῶν φλουριῶν, ὧν ἔχει ὁ ἀγοράζων, καὶ ἔτι $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν ιβ΄ φλουριῶν, ὧν ἔχει ὁ πωλῶν. στέργει δὲ τοῦτο ὁ ἀγοράζων· ὑπερδώσῃ ὁ πωλῶν $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐκ τῶν ιβ΄ φλουριῶν, ὧν ἔχει, καὶ ἔτι πλέον τὰ ἡμίση, ὧν ἔχει ὁ ἀγοράζων. μὴ εἰδότες οὖν ἡμεῖς, πόσα φλουριὰ ἔχει ὁ ἀγοράζων καὶ πόση ἐστὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἵππου, εὑρήσομεν τὴν μὲν τιμὴν φλουριὰ ιβ΄ ὡς τὸ πρότερον, τὰ δὲ φλουριὰ τοῦ ἀγοράζοντος ις΄.

Παρὰ σεαυτῷ ὑπέθου πάλιν θέσιν τινὰ καὶ εἰπέ· ἔστω ὁ ἀγοράζων ἔχει φλουριὰ κ΄. ζητεῖ ὁ πωλῶν $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν κ΄, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ ε΄. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν ιβ΄ φλουριῶν, ὧν ἔχει ὁ πωλῶν, ἐστὶ φλουριὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ιγ΄. ζητεῖ δὲ ὁ ἀγοράζων $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ιβ΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὰ δὲ ἡμίση τῶν κ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντός ἐστι φλουριὰ ι΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ιδ΄· ἔχει ὁ ἀγοράζων α΄ φλουρὶ πλέον.

ὑπέθου δευτέραν θέσιν καὶ εἰπέ· ἔστω ὁ ἀγοράζων ἔχει φλουριὰ κδ΄. ζητεῖ ὁ πωλῶν $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν κδ΄, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ ς΄. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν ιβ΄ φλουριῶν, ὧν ἔχει ὁ πωλῶν, ἐστὶ φλουριὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ιδ΄. ζητεῖ δὲ ὁ ἀγοράζων $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ιβ΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὰ δὲ ἡμίση τῶν κδ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντός ἐστι φλουριὰ ιβ΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ις΄· ὁ ἀγοράζων ἔχει πάλιν πλέον τοῦ πωλοῦντος φλουριὰ β΄.

Θὲς οὖν ἐν συγκρίσει τὰς δύο θέσεις τῶν φλουριῶν, ὧν ἐποίησας. ἐπεὶ δὲ μονομερῶς καὶ ἐπὶ τῶν δύο θέσεων τῶν κ΄ καὶ κδ΄ φλουριῶν ἔχει πλέον ὁ ἀγοράζων, ἄφελε τὰ ἐλάττονα ἐκ τῶν πλειόνων, τουτέστι τὸ α΄ ἐκ τῶν β΄, καὶ ἀπομένει α΄, ὅπερ ἐστὶ ὁ μεριστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὸ α΄ μετὰ τῶν κδ΄ καὶ τὰ β΄ μετὰ τῶν κ΄· ἅπαξ οὖν κδ΄ πάλιν ἐστὶ κδ΄ καὶ δὶς τὰ κ΄ γίνονται μ΄. ἄφελε καὶ ἐνταῦθα τὰ ἐλάττονα ἐκ τῶν πλειόνων, τουτέστι τὰ κδ΄ ἐκ τῶν μ΄, καὶ ἀπομένοσι ις΄. μέρισον τὰ ις΄ μετὰ τοῦ α΄, οὗ εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς πάλιν ις΄. καὶ ἰδοὺ εὕραμεν, ὅτι ὁ ἀγοράζων ἔχει φλουριὰ ις΄.

φ	κ	πλέον α
φ	κδ	πλέον β

α	ς	
α	α	
α	ς	

Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἵππου ἐστὶ φλουριὰ ιβ΄· ζητεῖ ὁ πωλῶν $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ις΄ φλουριῶν, ὧν εὕρομεν, ὅτι ἔχει, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν ιβ΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντός ἐστι φλουριὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ιβ΄. ζητεῖ ὁ ἀγοράζων $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ιβ΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὰ δὲ ἡμίση τῶν ις΄ φλουριῶν, ὧν εὕρες, ὅτι ἔχει ὁ ἀγοράζων, ἐστὶ φλουριὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται καὶ οὕτως πάλιν φλουριὰ ιβ΄. καὶ ἰδοὺ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἵππου εὑρέθη, ὡς εἴπομεν, φλουριὰ ιβ΄.

ἐὰν δὲ πάλιν ὑποθῇς δύο θέσεις – τὴν μὲν πρώτην φλουριὰ κδ΄, τὴν δευτέραν δὲ φλουριὰ λς΄, ἢ πάλιν τὴν μὲν πρώτην μη΄, τὴν δευτέραν δὲ ξ΄ –, διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως εὑρήσεις πάλιν τὴν μὲν τιμὴν τοῦ ἵππου φλουριὰ ιβ΄, τὰ δὲ φλουριὰ τοῦ ἀγοράζοντος ις΄, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος εὕραμεν οὕτως.

Ἕτερον τούτου ὅμοιον. Ἔστω ὁ μὲν ἀγοράζων ἔχει φλουριὰ κδ΄. ζητεῖ δὲ ὁ πωλῶν $\frac{\alpha}{\varsigma}$ ἐκ τῶν κδ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντος καὶ ἔτι $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐξ ὧν φλουριῶν ἀγνώστων <, ὧν> ἔχει ὁ πωλῶν. στέργει δὲ τοῦτο ὁ ἀγοράζων· ὑπερδώσῃ ὁ πωλῶν $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἐκ τῶν ἀγνώστων φλουριῶν, ὧν ἔχει, καὶ ἔτι πλέον $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν κδ΄ φλουριῶν, ὧν ἔχει ὁ ἀγοράζων. μὴ εἰδότες οὖν ἡμεῖς, πόσα φλουριὰ ἔχει ὁ πωλῶν καὶ πόσα φλουριὰ ζητεῖ ὑπὲρ τοῦ ἵππου αὐτοῦ, τὴν μὲν τιμὴν τοῦ ἵππου εὑρήσομεν φλουριῶν ιδ΄, τὰ δὲ φλουριά, ἅπερ ἔχει ὁ πωλῶν, εὑρήσομεν ταῦτα φλουριὰ λ΄.

Ὑπέθου παρὰ σεαυτῷ θέσιν τινὰ καὶ εἰπέ· ἔστω ὁ πωλῶν ἔχει φλουριὰ ξ΄. ζητεῖ δὲ τὸν ἀγοράζοντα $\frac{\alpha}{\varsigma}$ ἐκ τῶν κδ΄ φλουριῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι κρατεῖ, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ξ΄ φλουριῶν, ὧν ὑπέθου ἔχειν τὸν πωλοῦντα, ἐστὶ φλουριὰ κ΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ κδ΄. ζητεῖ δὲ ὁ ἀγοράζων $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἐκ τῶν ξ΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ ιβ΄. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν κδ΄ φλουριῶν, ὧν ἔχει ὁ ἀγοράζων, ἐστὶ φλουριὰ η΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ κ΄· ὁ πωλῶν ἔχει πλέον φλουριὰ δ΄.

ὑπέθου πάλιν ἑτέραν θέσιν καὶ εἰπέ· ἔστω ὁ πωλῶν ἔχει φλουριὰ ς΄. ζητεῖ ὁ πωλῶν $\frac{\alpha}{\varsigma}$ ἐκ τῶν κδ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ς΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντός ἐστι φλουριὰ λ΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ λδ΄. ζητεῖ δὲ ὁ ἀγοράζων $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἐκ τῶν ς΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ ιη΄. τὸ δὲ ‖ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν κδ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντός ἐστι φλουριὰ η΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ κς΄· ἔχει ὁ πωλῶν καὶ ἐνταῦθα φλουριὰ η΄ πλέον. **f. 38^{v}**

Θὲς οὖν ἐν συγκρίσει τὰς δύο θέσεις τῶν φλουριῶν, ὧν ἐποίησας. ἐπεὶ οὖν μονομερῶς ὁ πωλῶν ἔχει πλέον καὶ ἐπὶ τῶν δύο θέσεων, ἄφελε τὰ δ΄ ἐκ τῶν η΄ καὶ ἀπομένοσι δ΄· ἔστι δὲ ταῦτα ὁ μεριστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ δ΄ μετὰ τῶν ς΄ καὶ τὰ η΄ μετὰ τῶν ξ΄· δ΄κις οὖν ς΄ γίνονται τξ΄ καὶ η΄κις ξ΄ γίνονται υπ΄. ἄφελε καὶ ἐνταῦθα τὰ ἐλάττονα ἐκ τῶν πλειόνων, τουτέστι τὰ τξ΄ ἐκ τῶν υπ΄, καὶ ἀπομένοσι ρκ΄. μέρισον τὰ ρκ΄ μετὰ τῶν δ΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ὁ πωλῶν κρατεῖ φλουριὰ λ΄, ὡς εἴπομεν.

φ	ξ	πλέον δ
φ	ς	πλέον η

α β φ
δ δ
γ ψ

Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἵππου ἐστὶ φλουριὰ ιδ΄, ὡς εἴπομεν· ὁ πωλῶν ζητεῖ $\frac{\alpha}{\varsigma}$ τῶν κδ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν λ΄ φλουριῶν, ὧν εὗρες, ὅτι ἔχει ὁ πωλῶν, ἐστὶ φλουριὰ ι΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ιδ΄. ζητεῖ ὁ ἀγοράζων $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν λ΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ ς΄. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν κδ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντός ἐστι φλουριὰ η΄. ἕνωσον καὶ

ταῦτα καὶ γίνονται πάλιν φλουριὰ ιδ΄ ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἑνώσεως. καὶ ἰδοὺ εὑρέθη καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἵππου φλουριὰ ιδ΄.

Ἔστω δὲ πάλιν ὁ μὲν ἀγοράζων ἔχει φλουριὰ κδ΄. ὑπέθου δὲ σὺ παρὰ σεαυτῷ καὶ εἰπέ· ἔστω ὁ πωλῶν ἔχει φλουριὰ ιε΄. ζητεῖ ὁ πωλῶν $\frac{\alpha}{\varsigma}$ τῶν κδ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ιε΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντός ἐστι φλουριὰ ε΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ θ΄. ζητεῖ ὁ ἀγοράζων $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν ιε΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ γ΄. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν κδ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντός ἐστι φλουριὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ια΄· ὁ ἀγοράζων ἔχει πλέον φλουριὰ β΄.

ὑπέθου πάλιν δευτέραν θέσιν καὶ εἰπέ· ἔστω ὁ πωλῶν ἔχει φλουριὰ ξ΄. ζητεῖ ὁ πωλῶν $\frac{\alpha}{\varsigma}$ τῶν κδ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ δ΄. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ξ΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντός ἐστι φλουριὰ κ΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ κδ΄. ζητεῖ ὁ ἀγοράζων $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν ξ΄ φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ ιβ΄. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν κδ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντός ἐστι φλουριὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ κ΄. νῦν δὲ οὐχ ὁ πωλῶν, ἀλλὰ ὁ ἀγοράζων μᾶλλον ἔχει πλέον φλουριὰ δ΄.

Θὲς οὖν ἐν συγκρίσει τὰς δύο θέσεις τῶν φλουριῶν, ὧν ἐποίησας. ἐπεὶ δὲ νῦν οὐ μονομερῶς, ἀλλὰ ἀνωμάλως ἔχοσι τὸ

ὁ πωλῶν·	ἐκ τῶν ιε φ ἔχει πλέον β
ὁ ἀγοράζων·	ἐκ τῶν ξ φ ἔχει πλέον δ

πλέον – ὁ μὲν πωλῶν ἐπὶ τῆς πρώτης θέσεως τῶν ιε΄ φλουριῶν ἔχων φλουριὰ β΄ πλέον τοῦ ἀγοράζοντος, ὁ δὲ ἀγοράζων ἔχει φλουριὰ δ΄ πλέον τοῦ πωλοῦντος ἐπὶ τῆς δευτέρας θέσεως τῶν ξ΄ φλουριῶν –, ἕνωσον τὰ β΄ φλουριὰ μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ς΄· ἔστι δὲ ταῦτα ὁ μεριστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ β΄ φλουριὰ μετὰ τῶν ξ΄ καὶ τὰ δ΄ μετὰ τῶν ιε΄· δὶς οὖν ξ΄ γίνονται ρκ΄ καὶ δ΄κις ιε΄ γίνονται ξ΄. ἕνωσον τὰ ρκ΄ μετὰ τῶν ξ΄, καθὼς ἕνωσας καὶ τὰ β΄ μετὰ τῶν δ΄ καὶ ἐγένοντο ς΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ ρπ΄. μέρισον τὰ ρπ΄ μετὰ τῶν ς΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λ΄ πάλιν ὡς τὸ πρότερον. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὗρες, ὅτι λ΄ φλουριὰ ἔχει ὁ πωλῶν, καθὼς οὕτως εὗρες καὶ πρότερον. ἡ δὲ τιμὴ τοῦ ἵππου ἐστὶ πάλιν φλουριὰ ιδ΄.

α η κ
ξ ξ
γ ιε

Ἐὰν δὲ καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν) ζητῇς, ὅτι ὁ ἀγοράζων ἔχει φλουριὰ λ΄, ζητεῖ δὲ ὁ πωλῶν $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν λ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντος καὶ ἔτι $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ἀγνώστων φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος, ὁ δὲ ἀγοράζων ζητεῖ $\frac{\alpha}{\varsigma}$ τῶν ἀγνώστων φλουριῶν τοῦ πωλοῦντος καὶ ἔτι $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν λ΄ φλουριῶν τοῦ ἀγοράζοντος, εὑρήσεις, ὅτι τὰ ἄγνωστα φλουριὰ τοῦ πωλοῦντός εἰσι κδ΄, ἡ δὲ τιμὴ τοῦ ἵππου πάλιν φλουριὰ ιδ΄, ὥσπερ νῦν τὸ ἀνάπαλι(ν) γέγονε· ὁ μὲν ἀγοράζων εἴπομεν ἔχειν φλουριὰ κδ΄, εὕρομεν δὲ διὰ τῆς δηλωθείσης μεταχειρίσεως, ὅτι ὁ πωλῶν ἔχει φλουριὰ λ΄. νῦν δέ, ἐὰν ὁ ἀγοράζων ἔχῃ φλουριὰ λ΄, ὁ πωλῶν εὑρεθήσεται ἔχων φλουριὰ κδ΄, ἡ δὲ τιμὴ τοῦ ἵππου πάλιν φλουριὰ ιδ΄.

ξε Περὶ τῶν δύο ὁδοιπόρων,

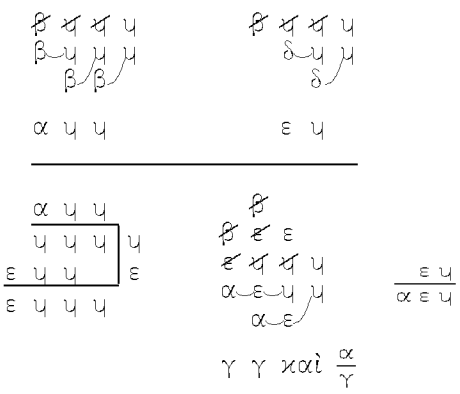
ὧν ὁ μὲν ὁδεύων τῆν ἡμέραν ὥρας ι΄, τὴν δὲ ὥραν μίλια β΄, ὁ δὲ τὴν μὲν ἡμέραν ὥρας η΄, τὴν δὲ ὥραν μίλι(α) ε΄· ἐν [μ]πόσες ἡμέρες ἑνωθήσονται καὶ πόσα μίλι(α) εὑρεθήσεται ἔχων ἕκαστος αὐτῶν; ἔστι δὲ τὸ διάστημα αὐτῶν μίλ(ια) ,β΄.

Ἔστω ὅτι δύο τινὲς ὁδοιπόροι ἔχοσι ποιῆσαι ὁδοιπορίαν τινὰ ἐκ διαστήματος μακροῦ

15.17.18.20.21 **pro** πωλῶν, πωλοῦντος **lege** ἀγοράζων, ἀγοράζοντος **et vice versa**

ὡς μίλ(ια) ,β΄. καὶ ὁ μὲν κινήσας ἤρξατο ὁδεύων ἔρχεσθαι πρὸς ἡμᾶς, ἑκάστη(ν) δὲ ἡμέραν πορεύεται ὥρας ι΄, ἑκάστην δὲ ὥραν ποιεῖται μίλ(ια) β΄. κατ᾽ αὐτὴν δὲ τὴν ἡμέραν τε καὶ ὥραν, καθ᾽ ἣν ὁ δηλωθεὶς ὁδοιπόρος ἐκίνησεν ἔρχεσθαι πρὸς ἡμᾶς, ἀπεδήμησεν ἀφ᾽ ἡμῶν καὶ ὁ ἕτερος ὁδοιπόρος καὶ ποιεῖται τὴν ἑαυτοῦ πορείαν πρὸς τὸ παραγενέσθαι πρὸς ἐκείνην τὴν πόλιν, ἥτις εἶχε τὸν πρὸς ἡμᾶς ἀφιέμενον ὁδοιπόρον. πορεύεται δὲ ὁ ἀφ᾽ ἡμῶν πρὸς τὰ ἐκεῖσε ὁδεύων ἑκάστην ἡμέραν ὥρας η΄, ποιεῖται δὲ ἑκάστην ὥραν μίλ(ια) ε΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, ἐν [μ]πόσες ἡμέρες ἕκαστος αὐτῶν ἀποπληρώσει ποιούμενος τὴν τῶν ,β΄ μιλ(ίων) διάστασιν καὶ ἐν [μ]πόσες ἡμέρες ὡς ἐν ταὐτῷ συνέλθωσι οἱ δύο ὁμοῦ ὁδοιπόροι καὶ πόσα μίλ(ια) εὑρεθήσεται ἔχων ἕκαστος αὐτῶν, ὅτε συνέλθωσι οἱ δύο ὁμοῦ. ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι οὕτως.

Πολλ(α)πλασίασον τὰς ι΄ ὥρας μετὰ τῶν β΄ μιλ(ίων), ὧν ποιεῖται ἑκάστην ὥραν· δὶς οὖν ι΄ γίνονται κ΄. ὁδεύει δὲ ὁ πρὸς ἡμᾶς ἐρχόμενος ἑκάστην ἡμέραν μίλ(ια) κ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰς η΄ ὥρας τοῦ ἑτέρου, ἃς ὁδεύει ἑκάστην ἡμέραν, μετὰ τῶν ε΄ μιλ(ίων), ὧν ποιεῖται ἑκάστην ὥραν· ε΄κις οὖν η΄ γίνονται μ΄. ποιεῖται δὲ ὁ ἀφ᾽ ἡμῶν πρὸς τὰ ἐκεῖσε ὁδεύων ἑκάστην ἡμέραν μίλ(ια) μ΄. μέρισον τοίνυν τὰ ,β΄ μίλ(ια) μετὰ τῶν κ΄ μιλίων, ὧν ποιεῖται ὁ πρὸς ἡμᾶς ἐρχόμενος ἑκάστην ἡμέραν, καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς ρ΄. καὶ ἰδοὺ ‖ ἐν ἡμέρες ρ΄ ἀποσωθήσεται ὁ ἐρχόμενος εἰς ἡμᾶς. μέρισον πάλιν τὰ ,β΄ μίλ(ια) μετὰ τῶν μ΄ μιλίων, ὧν ὁδεύει ἑκάστην ἡμέραν ὁ πρὸς τὰ ἐκεῖσε ὁδεύων ἀφ᾽ ἡμῶν ἀποδημήσας, καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς ν΄. καὶ ἰδοὺ ἐν ἡμέρες ν΄ ἀποσωθήσεται ἐκεῖσε, ἔνθα ὁ πρῶτος ἀπεδήμησεν. ἐπεὶ δὲ ζητεῖς, καὶ ἐν [μ]πόσες ἡμέρες ἑνωθήσονται καὶ πόσα μίλι(α) ἔχων ἕκαστος, πολλ(α)πλασίασον τὰς ρ΄ ἡμέρας, ἃς εἴπομεν, ὅτι ἀποσωθήσεται ὁ πρὸς ἡμᾶς ἐρχόμενος, μετὰ τῶν ν΄ ἡμερῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἀποσωθήσεται ὁ ἀφ᾽ ἡμῶν πρὸς τὰ ἐκεῖσε ὁδεύων, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,ε΄. ἕνωσον δὲ τὰς ρ΄ ἡμέρας μετὰ τῶν ν΄ ἡμερῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ ἡμέραι ρν΄. μέρισον τὰ ,ε΄ μετὰ τῶν ρν΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λγ΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\varepsilon\,\iota}{\alpha\,\varepsilon\,\iota}$. τὰ δὲ ν΄ μετὰ τῶν ρν΄ συγκρινόμενά ἐστι $\frac{\alpha}{\gamma}$· ὃν γὰρ λόγον ἔχει τὸ α΄ πρὸς τὰ γ΄, τὸν αὐτὸν ἔχουσι καὶ τὰ ν΄ πρὸς τὰ ρν΄, τουτέστι $\frac{\alpha}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ ἐν ἡμέρες λγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνωθήσονται οἱ δύο ὡς ἐν ταὐτῷ ὁμοῦ.



πολλ(α)πλασίασον τὰ κ΄ μίλ(ια), ἅπερ ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν ὁ ἐρχόμενος εἰς ἡμᾶς, μετὰ τῶν λγ΄ ἡμερῶν καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$· κ΄κις οὖν λγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ γίνονται χξς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ τῇ τριακοστῇ τρίτῃ ἡμέρᾳ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, καθ᾽ ἣν οἱ δύο ἑνώθησαν, ἐποιήσατο ὁ ἐρχόμενος πρὸς ἡμᾶς μίλ(ια) χξς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς μιλίου.

πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ μ΄ μίλι(α), ἅπερ ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν ὁ ἀφ᾽ ἡμῶν πρὸς τὰ ἐκεῖσε ὁδεύων, μετὰ τῶν λγ΄ ἡμερῶν καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$· μ΄κις οὖν λγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ γίνονται ,ατλγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ τῇ τριακοστῇ τρίτῃ ἡμέρᾳ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, καθ᾽ ἣν οἱ δύο ἑνώθησαν, ἐποιήσατο ὁ ἀφ᾽ ἡμῶν πρὸς τὰ ἐκεῖσε ὁδεύων μίλι(α) ,ατλγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνὸς μιλίου.

37/38.42 τῇ τριακοστῇ τρίτῃ ἡμέρᾳ] τὴ λ$^{\eta}$γ ἡμερα **C**

ἕνωσον δὲ τὰ χξς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ μετὰ τῶν ,ατλγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ γίνονται ὁμοῦ μίλ(ια) ,β΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ἐν [μ]πόσες ἡμέρες ἀποπληρώσει ἕκαστος αὐτῶν τὰ ,β΄ μίλια· ὁ μὲν τὰ κ΄ μίλ(ια) ἑκάστην ἡμέραν ποιούμενος ἐν ἡμέρες ρ΄, ὁ δὲ τὰ μ΄ μίλ(ια) ἑκάστην ἡμέραν ποιούμενος ἐν ἡμέρες ν΄. εὗρες δέ, ὅτι ἐν ἡμέραις λγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μιᾶς ἡμέρας ἑνωθήσονται οἱ δύο ὡς ἐν ταὐτῷ. εὗρες δέ, ὅτι ὁ ἐρχόμενος πρὸς ἡμᾶς, καθ' ἣν ἡμέραν τε καὶ ὥραν ἑνώθησαν οἱ δύο, ἐποιήσατο μίλ(ια) χξς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς μιλ(ίου)· ὁ δὲ ἀφ' ἡμῶν πρὸς τὰ ἐκεῖσε ὁδεύων, καθ' ἣν ἡμέραν τε καὶ ὥραν ἑνώθησαν οἱ δύο, ἐποιήσατο μίλ(ια) ,ατλγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνὸς μιλ(ίου), ἃ καὶ ἑνώσας ἐγένοντο πάλιν μίλ(ια) ,β΄. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

χξς καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$
,ατλγ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$
ὁμοῦ μίλ(ια) ,β

ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

ξς Περὶ τῶν ἀπὸ τῆς μιᾶς πόλεως ἀποδημησάντων,

ὧν ὁ μὲν ἀπεδήμησεν πρὸ ἡμερῶν ι΄, ὁ δὲ μετὰ τῶν ι΄ ἡμερῶν τοῦ προαποδημήσαντος σπουδαιοτέρως ὁδεύων· ἐν [μ]πόσες ἡμέρες καταλάβῃ τὸν προαποδημήσαντα;

Ἔστω ὅτι ἀπεδήμησέν τις τῶν ἀρχόντων ἐκ πόλεώς τινος. πορεύεται δὲ ἑκάστην ἡμέραν ὥρα(ς) η΄, ἑκάστην δὲ ὥρα(ν) ποιεῖται μίλ(ια) γ΄· τρὶς δέ η΄ γίνονται κδ΄, τουτέστι ἑκάστην ἡμέραν ὁδεύει μίλ(ια) κδ΄. μετὰ δὲ τὴν τούτου ἀποδημίαν – ἡμερῶν ι΄ διάστημα – χρείας καταλαβούσης τὸν δεσπότην καὶ κύριον τοῦ προαποδημήσαντος ἄρχοντος παραδηλῶσαί τι τῶν ἀναγκαίων αὐτῷ ἐξαπέστειλε πρὸς αὐτὸν ἕτερον στρατιώτην ταῦτα μηνύων αὐτῷ.

πορεύεται δὲ ἑκάστην ἡμέραν ὁ μετὰ ι΄ ἡμέρας ἀποδημήσας στρατιώτης ὥρας ια΄, ἑκάστην δὲ ὥραν ποιεῖται μίλ(ια) δ΄· δ΄κις δὲ ια΄ γίνονται μδ΄, τουτέστι τὸ ἡμερήσιον κίνημα αὐτοῦ μίλ(ια) μδ΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, ἐν [μ]πόσες ἡμέρες καταλάβῃ καὶ ἑνωθήσεται τὸν προαποδημήσαντα αὐτῷ ἄρχοντα πρὸ ἡμερῶν ι΄. ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως.

Ὑπέρθου ὁδοιπορίαν τινά, ὅσον ἂν ἡμερῶν ἱκανόν σοι φάνηται πλέον εἶναι τοῦ

---

14 **ad titulum huius capitis in dextro marg. fol. 39^{r} scriptum**: τὸ παρὸν χρήσιμον, τὸ δὲ πρῶτον ἄχρηστον

22 μηνύων] μινιων **C**

27 **post** οὕτως **in dextro marg. fol. 39^{r}**: πολλ(α)πλασίασον τὰς ι΄ ἡμέρας τοῦ προαποδημήσαντος ἄρχοντος μετὰ τῶν κδ΄ μιλί(ων), ὧν ὁδεύει ἑκάστην ἡμέραν· ι΄κις οὖν κδ΄ γίνονται σμ΄ μίλια, ἅπερ ἐποιήσατο ὁδεύων ἐν ἡμέρες ι΄. ἄφ(ε)λ(ε) τὸ ἓν ἡμερήσιον κίνημα ἐκ τοῦ ἑτέρου, τουτέστι τὰ κδ΄ μίλ(ια) ἐκ τῶν μδ΄ μιλί(ων), καὶ ἀπομένουσι μίλ(ια) κ΄. μέρισον τὰ σμ΄ μίλι(α) τῶν ι΄ ἡμερῶν μετὰ τῶν κ΄ μιλί(ων), ὧν ἀπέμειναν ἐκ τῶν μδ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων μερισμὸς ιβ΄· ιβ΄κις γὰρ κ΄ γίνονται σμ΄. ἐν ἡμέραις οὖν ιβ΄ ἑνωθήσεται ὁ μετὰ ι΄ ἡμέρας ἀποδημήσας τὸν πρὸ ι΄ ἡμέρας **(sic!)** ἀποδημήσαντα.

ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι αὕτη. ὁ πρὸ ι΄ ἡμέρας **(!)** ἀποδημήσας ἄρχων ἐν ἡμέραις κβ΄· κβ΄κις μίλι(α) κδ΄ γίνονται μίλι(α) φκη΄. ὁ δὲ μετὰ ι΄ ἡμέρας ἀποδημήσας στρατιώτης· ιβ΄κις μίλι(α) μδ΄ γίνονται μίλι(α) φκη΄. ὅτε οὖν ὁ μὲν ἄρχων εἶχεν ἡμέρας κβ΄, ὁ δὲ στρατιώτης ἡμέρας ιβ΄, ἐποιήσατο ἕκαστος αὐτῶν ἀνὰ μιλ(ί)ων φκη΄ καὶ ἐγένοντο οἱ δύο ὡς ἐν ταὐτῷ ἑνωθέντες.

δέοντος δέον γὰρ ὑποθέσθαι τοσούτων ἡμερῶν διάστημά τε καὶ κίνημα, ὅσον ἂν ἱκανόν σοι φάνηται πρὸς τὸ προβῆναι ὁ μετὰ ι΄ ἡμέρας ἀποδημήσας τὸν προαποδημήσαντα. ἔστω τοίνυν ὁ προαποδημήσας ἄρχων ἔχει ὁδοιπορίαν ἡμέρας λε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς λε΄ ἡμέρας, ἃς ὑπέρθου ὁδεύειν, μετὰ τῶν κδ΄ μιλ(ί)ων, ὧν ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν ὁ προαποδημήσας ἄρχων, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ωμ΄. καὶ ἰδοὺ τὰς λε΄ ἡμέρας ἐποιήσατο ὁ προαποδημήσας ἄρχων μίλ(ια) ωμ΄. ἐπεὶ δὲ εἴπομεν, ὅτι μετὰ ι΄ ἡμέρας ἀπεδήμησε ὁ καταλαβεῖν αὐτὸν ἐπειγόμενος στρατιώτης, ἄφελε ι΄ ἡμέρας ἐκ τῶν λε΄ ἡμερῶν, ὧν λέγομεν ὁδεύειν τὸν προαποδημήσαντα, καὶ ἀπομένοσι ἡμέραι κε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς κε΄ ἡμέρας, ἃς ἔχει ὁδεύων ὁ μετὰ ι΄ ἡμέρας ἀποδημήσας στρατιώτης, μετὰ τῶν μδ΄ μιλ(ίων), ὧν ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,αρ΄. καὶ ὁ μὲν πρὸ δέκα ἡμερῶν ἀποδημήσας ἄρχων ἐν[ν] ἡμέραις λε΄ ἐποιήσατο μίλ(ια) ωμ΄, ὁ δὲ μετὰ δέκα ἡμέρας ἀποδημήσας στρατιώτης ἐν[ν] ἡμέραις κε΄ ἐποιήσατο μίλ(ια) ,αρ΄. καὶ ἰδοὺ προέβη καταπολ(ὺ) ὁ μετὰ ταῦτα ἀποδημήσας τὸν προαποδημήσαντα αὐτὸν ἄρχοντα.

γ ε
α δ υ | δ
ζ υ | β
η δ υ

δ δ
β β υ | ε
η η | β
α α υ υ

ἄφελε τοίνυν τὰ ωμ΄ μίλ(ια) ἐκ τῶν ,αρ΄ καὶ ἀπομένοσι μίλ(ια) σξ΄· ἐποιήσατο δὲ ὁ μετὰ ταῦτα ἀποδημήσας περισσοτέραν ὁδόν, ὡσεὶ μίλ(ια) σξ΄. εἴπομεν, ὅτι ὁ μὲν κινεῖται ἑκάστην ἡμέραν μίλ(ια) κδ΄, || ὁ δὲ μδ΄. περισσεύει τὸ ἓν ἡμερήσιον κίνημα ἐκ τοῦ ἑτέρου μίλ(ια) κ΄. μέρισον τὰ σξ΄ μίλ(ια), ἅπερ περισσεύοσι ἐκ τῶν ,αρ΄, μετὰ τῶν κ΄ μιλ(ίων), ὧν περισσεύοσι ἐκ τῶν μδ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιγ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι πρὸ ιγ΄ ἡμερῶν κατέλαβε καὶ ἐνώθη τὸν προαποδημήσαντα ἄρχοντα. ἄφελε οὖν ταύτας τὰς ιγ΄ ἡμέρας ἐκ τῶν λε΄ ἡμερῶν, ὧν ὑπέρθου ἔχειν τὸν προαποδημήσαντα, καὶ ἀπομένοσι ἡμέραι κβ΄. ὅτε οὖν εἶχε ὁ προαποδημήσας ἄρχων ὁδοιπόρους ἡμέρας κβ΄, κατ᾽ αὐτὴν ἡμέραν κατέλαβεν τοῦτον καὶ ὁ μετὰ ταῦτα ἀποδημήσας στρατιώτης, ὅστις στρατιώτης κατέλαβεν αὐτὸν ἐν[ν] ἡμέραις ιβ΄ μετὰ τὴν ἑαυτοῦ ἐκδημίαν, – ὅτε οὖν ὁ μὲν εἶχε ὁδεύων ἡμέρας κβ΄, ὁ δὲ ιβ΄, κατ᾽ αὐτὴν τὴν ἡμέραν κατέλαβεν τοῦτον, καθὼς προχείρως διὰ τῆς δηλωθείσης μεταχειρίσεως ἡμῖν γνωρίμως γέγονε. f. 39v

β ϛ υ
β υ μ
β
α γ

Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί, ὡς ἡ πρόχειρος δεδήλωκε ἡμῖν μεταχείρισις, πολλ(α)πλασίασον τὰς κβ΄ ἡμέρας, ἃς λέγομεν, ὅτι κατέλαβεν τοῦτον, μετὰ τῶν κδ΄ μιλ(ίων), ὧν κινεῖται ἑκάστην ἡμέραν ὁ προαποδημήσας ἄρχων, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς φκη΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰς ιβ΄ ἡμέρας, ἃς λέγομεν, ὅτι κατέλαβε τοῦτον ὁ μετὰ ταῦτα ἀποδημήσας, μετὰ τῶν μδ΄ μιλίων, ὧν ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς πάλιν φκη΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι, ὅτε ὁ προαποδημήσας ἄρχων εἶχεν ἡμέρας κβ΄, ἐποιήσατο μίλ(ια) φκη΄, ὅτε δὲ πάλιν εἶχεν ἡμέρας ιβ΄ ὁδοιπόρους ὁ μετὰ ι΄ ἡμέρας ἀποδημήσας στρατιώτης, ἐποιήσατο καὶ αὐτὸς μίλ(ια) φκη΄. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

β δ
δ η | β
δ η | β
ε β η

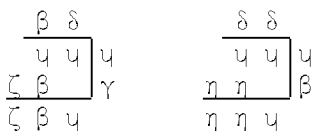
δ δ
η η | β
δ δ | α
ε β η

Ἵνα δὲ ἴδῃς τὸ ἀληθὲς τῆς παρούσης ταύτης μεταχειρίσεως, ὑπέρθου τὰς ὁδοιπόρους ἡμέρας τοῦ προαποδημήσαντος ἄρχοντος οὐ λε΄, ἀλλὰ λ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς λ΄ ἡμέρας μετὰ τῶν κδ΄ μιλ(ί)ων, ὧν ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν ὁ προαποδημήσας ἄρχων, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ψκ΄. καὶ ἰδοὺ ἐν ἡμέρες λ΄ ἐποιή-

---

5.24.41 ὑπέρθου] sic C

σατο ὁ προαποδημήσας ἄρχων μίλ(ια) ψκ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰς κ΄ ἡμέρας τοῦ μετὰ ι΄ ἡμέρας ἀποδημήσαντος στρατιώτου μετὰ τῶν μδ΄ μιλ(ίων), ὧν ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ωπ΄. καὶ ἰδοὺ ἐν ἡμέρες κ΄ ἐποιήσατο ὁ μετὰ ι΄ ἡμέρας ἀποδημήσας στρατιώτης μίλ(ια) ωπ΄.



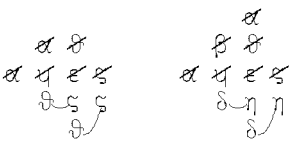
ἄφελε τὰ ψκ΄ μίλ(ια) ἐκ τῶν ωπ΄ μιλ(ίων) καὶ ἀπομένοσι μίλ(ια) ρξ΄. ἄφελε καὶ τὰ κδ΄ μίλ(ια) ἐκ τῶν μδ΄ μιλ(ίων), ὧν ἕκαστος αὐτῶν ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν, καὶ ἀπομένοσι μίλ(ια) κ΄. μέρισον τὰ ρξ΄ μίλ(ια) μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς η΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι πρὸ η΄ ἡμερῶν τῶν λ΄, τουτέστι ἐν ἡμέραις κβ΄, ἀφ᾽ ἧς ἡμέρας προαπεδήμησεν ὁ ἄρχων, ἐγένετο ἡ συνέλευσις τούτων, καθὼς οὕτως καὶ πρότερον εὗρες, ὅτι, ὅτε ὁ μὲν ἄρχων εἶχεν ἡμέρας κβ΄, ὁ δὲ στρατιώτης ιβ΄, συνήλθωσαν οἱ δύο ὁμοῦ. ἄφελε δὲ καὶ νῦν ἀπὸ μὲν τῶν λ΄ ἡμερῶν τοῦ ἄρχοντος η΄ ἡμέρας καὶ ἀπομένοσι καὶ ἡμέραι κβ΄. ἄφελε η΄ καὶ ἀπὸ τὰς κ΄ ἡμέρας τοῦ στρατιώτου καὶ ἀπομένοσι ιβ΄. καὶ ἰδοὺ καὶ μετὰ τῶν λ΄ ἡμερῶν τὴν ὑπέρθεσιν οὕτως εὗρες ὡς καὶ μετὰ τῶν λε΄ ἡμερῶν.



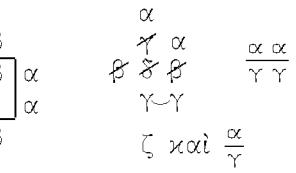
ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

ξζ Περὶ δύο τινῶν νηῶν ὅμοιον ζήτ(η)μαν ὥσπερ τῶν συναντησάντων ἐκ διαστημάτων δύο τινῶν πόλεων ὁδοιπόροι τινὲς δύο

Ἔστωσαν δύο τινὲς νῆαι ἐκ δύο πόλεων κινηθεῖσαι κατὰ μίαν ἡμέραν τε καὶ ὥραν. τὸ δὲ διάστημα αὐτῶν ἔστω μίλ(ια) ,ανς΄. ἐπεὶ οὖν τὴν ἐναντ(ί)αν ὁδεύοντες ἡ μὲν ἔρχεται, ἡ δὲ ὑπάγει. οὐ κινῶνται ὁμαλῶς καὶ ὁμοίως, ἀλλ᾽ ἡ μὲν ἔχουσα καιρὸν πρὸς τὸ κινεῖσθαι ταχύτερον ποιεῖται ἑκάστην ὥραν μίλ(ια) δ΄, τὸ δὲ νυχθήμερον ϛς΄· δ΄κις γὰρ κδ΄ ϛς΄ γίνονται. ἡ δὲ οὐκ ἔχουσα τὴν τῶν πν(ευμ)άτων φορὰν πρὸς τὸ κινεῖσθαι τῆς προτέρας ὁμοίως κινεῖται δ᾽ ὅμως βραδύνουσα ἑκάστην μὲν ὥραν μίλ(ια) β΄, τὸ δὲ νυχθήμερον μη΄· δὶς γὰρ κδ΄ μη΄ γίνονται. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, ἐν πόσες ἡμέρες ἀποπληρώσει ἑκάστη τὸ διάστημα τῶν ,ανς΄ μιλ(ίων) καὶ ἐν πόσες ἡμέρες τε καὶ μίλ(ια) ἑνωθήσονται συναντήσασαι ἀλλήλων αἱ νῆαι. ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι οὕτως.



Μέρισον τὰ ,ανς΄ μίλ(ια) μετὰ τῶν ϛς΄ μιλ(ίων), ὧν ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν ἡ ταχυτέρως ὁδεύουσα ναῦς, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ια΄. καὶ ἰδοὺ ἐν[ν] ἡμέρες ια΄ ἀποσωθήσεται ἡ ὁδεύουσα ἑκάστην ἡμέραν μίλ(ια) ϛς΄. μέρισον πάλιν τὰ ,ανς΄ μίλ(ια) μετὰ τῶν μη΄ μιλ(ίων), ὧν ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν ἡ βραδυτέρως ὁδεύουσα ναῦς, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κβ΄. καὶ ἰδοὺ ἐν ἡμέραις κβ΄ ἀποσωθήσεται ἡ ὁδεύουσα ἑκάστην ἡμέραν μίλ(ια) μη΄.



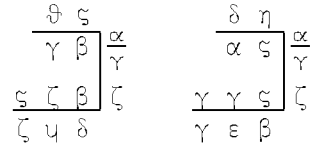
πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς ια΄ ἡμέρας μετὰ τῶν κβ΄ ἡμερῶν, ἐν αἷς ἑκάστη ἀποσωθήσεται, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς σμβ΄. ἕνωσον δὲ τὰς ια΄ ἡμέρας τῆς βραδυτέρας νηὼς μετὰ τῶν κβ΄ ἡμερῶν τῆς

---

16 ὑπέρθεσιν] sic C 22 ἐπὶ ... τὴν ἐναντίαν] sc. ὁδὸν 23 κινῶνται] pro κινοῦνται C καιρὸν] κερὸν C 27/28 ἐν πόσες] ἐμπόσες C 32 apud divisionem dextram: ϐ] α C

ταχυτέρας καὶ γίνονται ὁμοῦ ἡμέραι λγ΄. μέρισον τὰ σμβ΄ μετὰ τῶν λγ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ζ΄ καὶ ια΄ τριακοστὰ τρίτα, τουτέστι ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ἐν ἡμέραις ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνὸς νυχθημέρου, ὅπερ ἐστὶ ὧραι η΄, ἑνωθήσονται αἱ νῆαι.

Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί, πολλ(α)πλασίασον τὰ || ϛς΄ μίλ(ια), ἅπερ ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν ἡ ταχυτέρα, μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ζ΄ ἡμερῶν καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ϛς΄ μιλ(ίων) ἐστὶ λβ΄· τρὶς γὰρ λβ΄ ϛς΄ γίνονται. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ϛς΄ μίλ(ια) καὶ μετὰ τῶν ζ΄ ἡμερῶν· ζ΄κις οὖν ϛς΄ γίνονται χοβ΄. ἕνωσον τὰ λβ΄ μετὰ τῶν χοβ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ψδ΄. καὶ ἰδοὺ ἐν ἡμέραις ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐποιήσατο ἡ ταχυτέρα ναῦς μίλ(ια) ψδ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ μη΄ μίλ(ια), ἅπερ ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν ἡ βραδυτέρα, μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν μη΄ μιλ(ίων) ἐστὶ ις΄· τρὶς γὰρ ις΄ μη΄ γίνονται. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ μη΄ μίλ(ια) καὶ μετὰ τῶν ζ΄ ἡμερῶν· ζ΄κις οὖν μη΄ γίνονται τλς΄. ἕνωσον τὰ ις΄ μετὰ τῶν τλς΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ τνβ΄. καὶ ἰδοὺ ἐν ἡμέραις ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐποιήσατο ἡ βραδυτέρα ναῦς μίλ(ια) τνβ΄. ἕνωσον τὰ ψδ΄ μίλ(ια) μετὰ τῶν τνβ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν μίλ(ια) ,ανς΄ ὡς τὸ πρότερον. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἀληθῶς ἑνώθησαν αἱ νῆαι ἐν ἡμέραις ζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ὅπερ ἐστὶ ὧραι η΄.



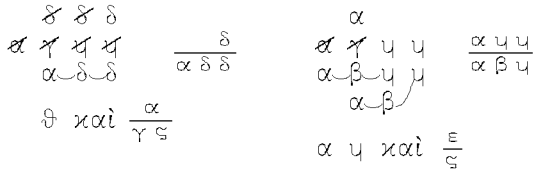
ψ δ
τνβ
ὁμοῦ ,ανς

f. 40r

ξη Περὶ τῶν ἀπὸ μιᾶς πόλεως ὡς ἐν ταὐτῷ κινηθέντων δύο νηῶν ταχυτέρας τε οὔσης καὶ βραδυτέρας, ἐν [μ]πόσες ἡμέρες ἑκάστη ἀποσωθήσεται

Δύο τινὲς νῆαι ὡς ἐν ταὐτῷ ἐκ μιᾶς πόλεως κινηθεῖσαι – ἡ μὲν ταχυτέρως ὁδεύουσα πορεύεται ἑκάστην μὲν ὥραν μίλ(ια) ϛ΄, τὸ δὲ νυχθήμερον ποιεῖται μίλ(ια) ρμδ΄· ϛ΄κις γὰρ κδ΄ ρμδ΄ γίνονται. ἡ δὲ μὴ δυναμένη οὕτως κινεῖσθαι αἰτίας εὐλόγου κωλούσης αὐτὴ πορεύεται ἑκάστην μὲν ὥρ(αν) μίλ(ια) ε΄, τὸ δὲ νυχθήμερον ποιεῖται μίλ(ια) ρκ΄· ε΄κις γὰρ κδ΄ ρκ΄ γίνονται. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, ἐν πόσες ἡμέρες ἑκάστη τούτων οὕτως ὁδεύουσα ἀποσωθήσεται καὶ ἀποπληρώσει ὁδὸν ὡσεὶ μιλ(ί)ων ,ατ΄.

Μέρισον τὰ ,ατ΄ μίλ(ια) μετὰ τῶν ρμδ΄ μιλίων, ὧν ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν ἡ ταχυτέρως πορευομένη ναῦς, καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς θ΄, ἀπομένοσι καὶ μίλ(ια) δ΄ τζάκισμα. τὰ δὲ δ΄ μίλ(ιά) ἐστι $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν ϛ΄ μιλίων, ὧν κινεῖται ἑκάστην ὥραν ἡ ταχυτέρως ὁδεύουσα ναῦς. ἐστὶ δὲ λοιπόν, τὰ δ΄ μίλ(ια) τὸ τζάκισμα, κίνημαν $\frac{\beta}{\gamma}$ μιᾶς ὥρας. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ἐν ἡμέραις θ΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ μιᾶς ὥρας ἀποσωθήσεται καὶ ἀποπληρώσει τὸ τῶν ,ατ΄ διάστημα ἡ ἑκάστην ἡμέραν ὁδεύουσα μίλ(ια) ρμδ΄. μέρισον πάλιν τὰ ,ατ΄ μίλ(ια) μετὰ τῶν ρκ΄ μιλίων, ὧν ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν ἡ βραδυτέρως ὁδεύουσα ναῦς, καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς ι΄, ἀπομένοσι καὶ τζάκισμα μίλ(ια) ρ΄. ἐπεὶ δὲ ἑκάστην ὥρ(αν) κινεῖται ἡ βραδυτέρως ὁδεύουσα μίλ(ια) ε΄, τὰ ρ΄ μίλ(ια) τὸ τζάκισμά ἐστι κ΄ ὡρῶν κίνημαν· ὧραι γὰρ κ΄ ε΄κις γίνονται μίλ(ια) ρ΄. καὶ ἄλλως. τὰ ρ΄ μίλ(ια) τὸ τζάκισμα πρὸς τὰ ρκ΄ τὸν μεριστὴν συγκρινόμενά ἐστι $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$, τὰ δὲ $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ τῶν κδ΄ ὡρῶν ἐστι ὧραι κ΄· ε΄κις γὰρ δ΄ γίνονται κ΄ καὶ ϛ΄κις δ΄ γίνονται κδ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ἐν ἡμέραις ι΄ καὶ ὧρες



---

19 κινηθέντων ... νηῶν **sic C** 20 ἐν [μ]πόσες ἡμέρες] ἐν μπόσες ἡμέραις **C** 21 τινὲς] τιναὶ **C** 23 κωλούσης] **sic C pro** κωλυούσης 25 ἐν πόσες] ἐμπόσες **C**

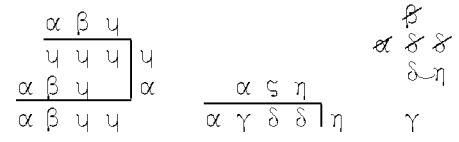
κ΄ ἀποσωθήσεται καὶ ἀποπληρώσει τὸ τῶν ,ατ΄ μιλ(ίων) διάστημα ἡ ἑκάστην ἡμέραν ὁδεύουσα μίλ(ια) ρκ΄ .
ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

ξθ

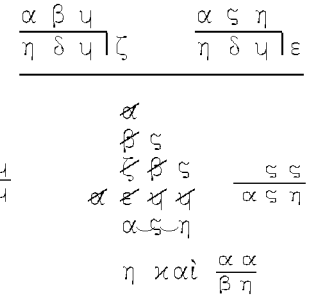
Περὶ τῶν ἀπὸ μιᾶς πόλεως κινηθέντων δύο νηῶν, οὐχ ὡς ἐν ταὐτῷ ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ, ἀλλ᾽ ἡ μὲν πρὸ ἡμερῶν, ἡ δὲ μετὰ ἡμέρας τινάς, ἐν [μ]πόσες δὲ ἡμέρες ἑνωθήσονται καὶ ἐν πόσες ἑκάστη ἀποπληρώσει τῷ διαστήματι

Δύο τινὲς νῆαι ἔχοσι ποιῆσαι ὁδοιπορίαν τινὰ διαστήματος μιλίων ,αφ΄. καὶ ἡ μὲν ἀπεδήμησεν πρὸ ἡμερῶν β΄, μὴ οὖσα δὲ ταχείας κινήσεως κινεῖται μὲν ἑκάστην ὥρ(αν) μίλια ε΄, τὸ δὲ νυχθήμερον ρκ΄. μετὰ δὲ τῶν β΄ ἡμερῶν ἀπεδήμησεν καὶ ἡ ἑτέρα, ἥτις ταχυτέρα οὖσα κινεῖται μὲν ἑκάστην ὥρ(αν) μίλια ζ΄, τὸ δὲ νυχθήμερον ρξη΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, ἐν πόσες ἡμέρες καὶ μίλ(ια) ἑνωθήσονται καὶ ἐν πόσες ἀποσωθήσεται ἑκάστη τούτων τὸ τῶν ,αφ΄ διάστημα.

Πολλ(α)πλασίασον ι΄ ἡμερῶν κίνημα τῆς πρὸ β΄ ἡμερῶν ἀποδημησάσης νηώς, ἥτις κινεῖται τὸ νυχθήμερον μίλι(α) ρκ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,ασ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ η΄ ἡμερῶν κίνημα τῆς μετὰ β΄ ἡμέρας ἀποδημησάσης νηώς, ἥτις κινεῖται τὸ νυχθήμερον μίλ(ια) ρξη΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,ατμδ΄. προέβη δὲ ἡ μετὰ β΄ ἡμέρας ἀποδημήσασα μίλ(ια) ρμδ΄. ἄφελε τὰ ρκ΄ μίλ(ια) ἐκ τῶν ρξη΄ καὶ ἀπομένοσι μίλ(ια) μη΄. μέρισον τὰ ρμδ΄ μετὰ τῶν μη΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων δι(α)μερισμὸς γ΄. καὶ ἰδοὺ πρὸ γ΄ ἡμερῶν τῶν ι΄ ἐγένετο ἡ σύνοδος τούτων. ἄφελε γὰρ γ΄ ἐκ τῶν ι΄ ἡμερῶν καὶ ἀπομένοσι ζ΄. ἄφελε γ΄ ἐκ τῶν η΄ ἡμερῶν καὶ ἀπομένοσι ε΄. ὅτε δὲ ἡ μὲν εἶχε ὁδοιπόρους ἡμέρας ζ΄, ἡ δὲ ε΄, κατέλαβε ἡ μετὰ β΄ ἡμέρας ἀποδημήσασα τὴν προεξελθοῦσαν ἡμέρας β΄.



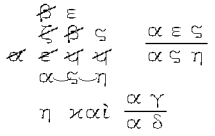
Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί, πολλ(α)πλασίασον τὰ ρκ΄ μίλ(ια) μετὰ τῶν ζ΄ ἡμερῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ωμ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ ρξη΄ μίλ(ια) μετὰ τῶν ε΄ ἡμερῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ωμ΄. εὗρες οὖν, ἐν πόσες ἡμέρες ἑνώθησαν καὶ πόσα μίλ(ια) ἐποιήσαντο. ἐπεὶ δὲ ζητεῖς εἰδέναι, καὶ ἐν πόσες ἡμέρες ἑκάστη ἀπο-



---

5 **ad titulum huius capitis in dextro marg. fol. 40^{r} scriptum:** τὸ παρὸν χρήσιμον, τὸ δὲ πρῶτον ἄχρηστον **7.13 (bis)** ἐν πόσες] ἐμποσες **C** 9 τινὲς] τιναὶ **C**
14 post διάστημα **in dextro marg. fol. 40^{r}:** πολλ(α)πλασίασον τὰς β΄ ἡμέρας μετὰ τῶν ρκ΄ μιλί(ων)· δὶς οὖν ρκ΄ γίνονται σμ΄. ἄφ(ε)λ(ε) τὰ ρκ΄ μίλ(ια) ἐκ τῶν ρξη΄ καὶ ἀπομένοσι μίλι(α) μη΄. μέρισον τὰ σμ΄ μετὰ τῶν μη΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων μερισμὸς ε΄· ἐν ἡμέραις οὖν ε΄ ἑνωθήσεται ἡ μετὰ β΄ ἡμέρας ἀποδημήσασα ναῦς τὴν πρὸ β΄ ἡμερῶν ἀποδημήσασα(ν).

Ultima divisio vitosa hoc modo corrigenda est:



σωθήσεται τῶν ,αφ΄ μιλίων τὸ διάστημα, μέρισον τὰ ,αφ΄ μίλ(ια) μετὰ τῶν ρκ΄ μιλ(ίων) τῆς βραδυτέρας νηὸς καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιβ΄ς″· ἐν ἡμέρες οὖν ιβ΄ς″ ἐποιήσατο τὰ ,αφ΄ μίλ(ια) ἡ ἑκάστην ἡμέραν ὁδεύουσα μίλ(ια) ρκ΄. μέρισον πάλιν τὰ ,αφ΄ μίλ(ια) μετὰ τῶν ρξη΄ μιλ(ί)ων τῆς ταχυτέρας νηὸς καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς η΄, ἀπομένει τζάκισμα μίλι(α) ξς΄. ‖ ἐπεὶ οὖν ἑκάστην ὥρ(αν) κινεῖται μίλ(ια) ζ΄, ὡς εἴπομεν, τὰ ξς΄ μίλ(ια) τὸ τζάκισμά ἐστι κίνησις ταύτης ὡρῶν θ΄ς″ ἔγγιστα· ζ΄κις γὰρ θ΄ γίνονται ξγ΄, τὰ δὲ ἐναπομένοντα γ΄ ἐστὶ ἔγγιστα μισὸν τῶν ζ΄. ἐν ἡμέραις οὖν η΄ καὶ ὥρας θ΄ς″ ἔγγιστα ἐποιήσατο τὰ ,αφ΄ μίλ(ια) ἡ ἑκάστην ἡμέραν ὁδεύουσα μίλ(ια) ρξη΄. f. 40v

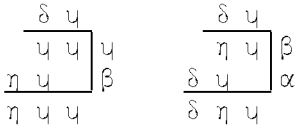
ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

Περὶ τῶν δύο ἀν(θρώπ)ων τῶν ἀνωμάλως κινουμένων, μέρος μὲν τῆς ἡμέρας πορευομένων ἐπὶ τὰ ἔμπροσθεν καὶ μέρος αὐτῆς ἐπιστρεφόντων ἐπὶ τὰ ὄπισθεν· ἐν πόσες ἡμέρες ἑνωθήσονται καὶ ἐν πόσες ἕκαστος αὐτῶν περαιώσει τῷ διαστήματι οὕτως ὁδεύων;

Δύο τινὲς συνέθεντο· ὁ μὲν ἑκάστην ἡμέραν κινεῖσθαι μὲν κατ᾽ εὐθεῖαν ἔμπροσθεν πορευόμενος διάστημα ἑνὸς μιλ(ίου) $\frac{\alpha}{\delta}$, ἐπιστρέφειν δὲ πάλιν κατ᾽ αὐτὴν τὴν ἡμέραν ὀπισθορμήτως οὐ τὸ $\frac{\alpha}{\delta}$, ὅπερ ἐκεῖ μὲν ὁδεύων ἔμπροσθεν πορευόμενος, ἀλλὰ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τοῦ ἑνὸς μιλ(ίου), ὁ δὲ πάλιν κινεῖσθαι μέρος μὲν τῆς ἡμέρας κατ᾽ εὐθεῖαν ἔμπροσθεν πορευόμενος διάστημα ἑνὸς μιλ(ίου) $\frac{\alpha}{\gamma}$, ἐπιστρέφειν δὲ πάλιν κατ᾽ αὐτὴν τὴν ἡμέραν οὐ τὸ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ὅπερ ἐκεῖ μὲν ὁδεύων ἔμπροσθεν πορευόμενος, ἀλλὰ $\frac{\alpha}{\delta}$ τοῦ ἑνὸς μιλ(ίου). ἔστι δὲ τὸ καθόλου διάστημα, ὅπερ συνέθεντο οὕτως ὁδεύειν, ὡσεὶ μίλι(α) μ΄. οὐκ ἀπὸ μιᾶς δὲ ἀρχῆς οὕτως ἀρξάμενοι, ἀλλ᾽ ὁ μὲν ἐκ τῆς ἀρχῆς, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ τέλους τῶν μ΄ μιλίων ἀρξάμενοι, ὁ μὲν ὑπάγειν, ὁ δὲ ἔρχεσθαι πρὸς τὸ συναντῆσαι ἀλλήλ[λ]ων. ζητεῖς εἰδέναι, ἐν πόσες ἡμέρες ἑνωθήσονται οὕτως ὁδεύοντες καὶ ἐν πόσες ἡμέρες ἀποπληρώσει ἕκαστος αὐτῶν τὰ μ΄ μίλ(ια).

τοῦτο δὲ πάνυ ἄχρηστον· οὔτε γὰρ πώποτε γέγονε οὔτε μὴν τοιοῦτόν τι γενήσεται πώποτε οὔτ᾽ ἐπ᾽ ἀν(θρωπ)ων οὔτε ἐπ᾽ ἄλλης τινὸς ὁμοίας ζητήσεως. ὡς ποικίλον δ᾽ ὅμως καὶ δυσχ<ερ>έστερον ζήτημαν τῶν προειρημένων διὰ τῆς προχείρου μεταχειρίσεως καὶ τοῦτο ῥᾳδίως εὑρίσκεται.

Πολλ(α)πλασίασον τὸ $\frac{\alpha}{\delta}$ μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$· δ΄κις οὖν ε΄ γίνονται κ΄. ἐν ἡμέρες οὖν κ΄ ποιεῖται τὸ διάστημα τοῦ ἑνὸς μιλ(ίου) ὁ πορευόμενος $\frac{\alpha}{\delta}$ καὶ ἐπιστρέφων ὀπισθορμήτως $\frac{\alpha}{\varepsilon}$. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ μ΄ μίλ(ια), τὸ καθόλου διάστημα δηλονότι, μετὰ τῶν κ΄ ἡμερῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι ποιεῖται ἕκαστ(ο)ν μίλ(ιον), καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλσιασμὸς ω΄. καὶ ἰδοὺ ἐν ἡμέρες ω΄ οὕτως ὁδεύων ἀποπληρώσει τὰ μ΄ μίλι(α). πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὸ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\delta}$· τρεῖς οὖν δ΄κις γίνονται ιβ΄. ἐν ἡμέρες οὖν ιβ΄ ποιεῖται τὸ διάστημα τοῦ ἑνὸς μιλί(ου) ὁ πορευόμενος $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ ἐπιστρέφων ὀπισθορμήτως $\frac{\alpha}{\delta}$. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν

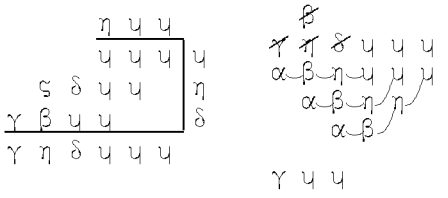


5–8 **sequitur solutio falsa (cf. p. 90):** 5.6 ξς΄] **lege** ρνς΄ 6.8 θ΄ς″] **lege** κβ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ 7 θ΄] **lege** κβ΄ ξγ΄] **lege** ρνδ΄ γ΄ **lege** β΄ μισὸν] **lege** $\frac{\alpha}{\delta}$

28 οὔτ᾽ ἐπ᾽ ἀν(θρώπ)ων] οὐτε πᾶνῶν **C**

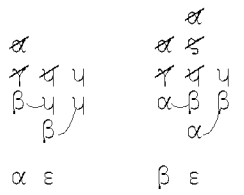
36/37 ἐν ἡμέρες ω΄ ... ἀποπληρώσει τὰ μ΄ μίλ(ια)] **In hoc capite viris postremo die iam non regrediendum esse neglegitur.**

τὰ μ΄ μίλια μετὰ τῶν ιβ΄ ἡμερῶν, ὧν ποιεῖται ἑκάστην ἡμέραν, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς υπ΄. καὶ ἰδοὺ ἐν ἡμέρες υπ΄ οὕτως ὁδεύων ἀποπληρώσει τὰ μ΄ μίλια.



Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰς ω΄ ἡμέρας μετὰ τῶν υπ΄ ἡμερῶν καὶ γίνεται ὁ παρὼν πολλ(α)πλασιασμὸς γ η δ υ υ υ΄. ἕνωσον δὲ τὰς ω΄ ἡμέρας μετὰ τῶν υπ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ α β η υ΄. μέρισον τὰ γ η δ υ υ υ΄ μετὰ τῶν α β η υ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τ΄. καὶ ἰδοὺ ἐν ἡμέραις τ΄ οὕτως ὁδεύοντες ἑνωθήσονται οἱ δύο ὡς ἐν ταὐτῷ.

Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστὶ καὶ πόσα μίλι(α) ἕκαστος αὐτῶν ἐποιήσατο, ὅτε συνῆλθον ὁμοῦ, μέρισον τὰς τ΄ ἡμέρας μετὰ τῶν κ΄ ἡμερῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐν ἡμέραις κ΄ ποιεῖται οὕτως ὁδεύων τὸ ἕνα μίλ(ιον), καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιε΄. καὶ ἰδοὺ τὰς τ΄ ἡμέρας οὕτως ὁδεύων ἐποιήσατο μίλ(ια) ιε΄. μέρισον πάλ(ιν) τὰς τ΄ ἡμέρας μετὰ τῶν ιβ΄ ἡμερῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐν ἡμέρες ιβ΄ οὕτως ὁδεύων ὁ ἕτερος ποιεῖται τὸ ἕνα μίλι(ον), καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κε΄. καὶ ἰδοὺ τὰς τ΄ ἡμέρας οὕτως ὁδεύων ἐποιήσατο ὁ ἕτερος μίλ(ια) κε΄. ἕνωσον τὰ ιε΄ μίλ(ια), ἅπερ ἐποιήσατο ὁ ἐν κ΄ ἡμέραις ποιούμενος μίλ(ιον) ἕν, μετὰ τῶν κε΄ μιλίων τοῦ ἐν ιβ΄ ἡμέραις ποιουμένου μίλ(ιον) ἕν· ιε΄ οὖν καὶ κε΄ ὁμοῦ γίνονται μ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, καὶ πόσα μίλ(ια) ἐποιήσατο ἕκαστος αὐτῶν, ὅτε ἐνώθησαν – ὁ μὲν ιε΄, ὁ δὲ κε΄, ἃ καὶ ἑνώσας ἐγένοντο μ΄. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.



ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

οα Περὶ τοῦ πῶς τὰ ἐφεξῆς ῥηθησόμενα ζητήματα τῶν πρακτικῶν καὶ πολ(ι)τευομένων ἐστί, διὸ καὶ χρησιμώτερα τῶν προρ<ρ>ηθέντων εἰσί

Πανθ' ὅσαπερ ζητήματα μέχρι τοῦ νῦν γεγράφαμεν καλὰ μὲν καὶ ἀναγκαῖα καὶ χρήσιμα· οὐδὲ γὰρ ἐκτὸς λόγων τε ὄντα καὶ ζητημάτων ἐκεῖ ἐγεγράφεσαν, ἀλλὰ πάντα καὶ λόγου εἰσὶ ἄξια καὶ χρησεώς τε οὐκ ἄμοιρα. ἀλλ' ἔστιν ὅτε καὶ ζητηθήσονται καὶ ἀναγκαῖα φανήσεται ἡ τούτων κατάληψις· οὐδὲ γάρ τι τῶν μὴ ζητουμένων χρήσιμον πώποτε. τὸ δὲ ἐπιζητούμενον μέγιστον δόξει, κἂν ἐλάχιστον μᾶλλον εἶναι δοκεῖ, ὡς καὶ τὰ προρ<ρ>ηθέντα μικρὰ μὲν εἶναι δοκῶσι ὡς μὴ ζητούμενα. ὅτε δὲ ἐν χρήσει τούτων γενήμεθα, καὶ ἀναγκαία καὶ χρήσιμος ἡ πρόχειρος τούτων κατάληψις ἡμῖν εὑρεθήσεται. ἄλλως τε δὲ συνεγραψάμεθα ταῦτα γυμνασίας χάριν πρὸς τὸ γενέσθαι ταῦτα διδάσκαλός τε καὶ ὁδηγὸς τῶν ἐφεξῆς ῥηθησομένων ζητημάτων, πολλῷ τούτων ὄντα ἀναγκαιότερα, ὡς ἂν ἀπονεστέρα γένηται ἡ κατάληψις τούτων διὰ τῶν προλαβόντων ‖ ὑποδειγμάτων. τὴν πεῖραν τῶν πολλ(α)πλασιαζομένων τε καὶ διαμεριζομένων ζητημάτων καλῶς ἐξασκήσας καὶ γενόμενος πρόχειρος πρὸς τὸ καὶ τὰ ἐφεξῆς ῥηθησόμενα καλῶς δέξασθαι καὶ κατανοῆσαι καὶ χρήσασθαι, ἐπάν σοι γένηται τῶν τοιούτων ἐπάναγκες ζήτημαν. ἅπερ δὲ νῦν ἐρεῖν μέλομεν, ἔστι διάφορά τε καὶ ποικίλα ζητήματα, δι' ὧν ἐν τῷ βίῳ αἱ πολιτευόμεναι πράξεις τῶν μεταδόσεών τε καὶ f. 41r

---

5 ὁ παρὼν] απαρὸν **C** 34 γενήμεθα] **sc.** γεγενήμεθα 39 ἐξασκήσας] ἐξάσχισας **C**

συναλλαγμάτων γίνονται· πωλεῖν γὰρ καὶ ἀγοράζειν καὶ πραγματείας ἐπιζητεῖν ἀριθμοὺς, διὰ τούτων πάντων συνίστανται καὶ προχείρως διὰ τῆς δηλωθησομένης μεταχειρίσεως γίνονται. τοιαῦτα οὖν ὄντα καὶ ἀναγκαῖα καὶ χρήσιμα – νῦν ὅτε μάλιστα προχείρως γέγονας πρὸς τὸ δέξασθαι ταῦτα ἀπονεστέρως – ἐροῦμεν πάντα ἐντεῦθεν ἀρξάμενοι.

οβ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι, ὅσα ἂν φλουριὰ ζητῇς, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται – πρόχειρος καὶ ῥᾳδία εὕρεσις

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι φλουριὰ ρλα΄, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται· ἕκαστον δὲ φλουρὶ ἔστω ὅτι χρῄζει ὑπέρπυρα ζ΄. ἐπεὶ δὲ τὰ ζ΄ ὑπέρπυρά ἐστι ἀκέραια ἐξόλου μὴ ἔχοντα κουκκιά τινα, πολλ(α)πλασίασον τὰ ρλα΄ φλουριὰ μετὰ τῶν ζ΄ ὑπερπύρων, ὧν χρῄζει ἕκαστον φλουρί, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ⩾ιζ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ρλα΄ φλουριά – ἕκαστον ἀνὰ ὑπέρπυρα ζ΄ – γίνονται ὑπέρπυρα ⩾ιζ΄. καὶ ταῦ<τα> μὲν οὕτως, ὁπηνίκα ἕκαστον φλουρὶ χρῄζει ὑπέρπυρα ἀκέραια, τουτέστι ς΄ ἢ ζ΄ ἢ η΄. ὁπηνίκα δὲ ἕκαστον φλουρὶ χρῄζει μὲν ὑπέρπυρα ς΄ ἢ ὑπέρπυρα ζ΄, ἔστι δὲ ἡ τιμὴ τούτου καὶ μετὰ κουκκιῶν τινων μεμειγμένη, τουτέστι ἕκαστον φλουρὶ ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ς΄ ἢ πάλιν ἕκαστον φλουρὶ ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ια΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γίνεται οὕτως.

α	γ	α
ϑ	α	ζ ⌋ ζ

Ἔστω ὅτι φλουριὰ ρκγ΄, ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ς΄, ζητεῖς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται. ζήτει φλουριὰ ι΄, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται· ι΄κις οὖν ὑπέρπυρα ζ΄ γίνονται ὑπέρπυρα ο΄ καὶ ι΄κις κουκκιὰ ς΄ γίνονται κουκκιὰ ξ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα γ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ι΄ φλουριὰ γίνονται ὑπέρπυρα ογ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ρκγ΄ φλουριὰ μετὰ τῶν ογ΄ ὑπερπύρων, ὧν ἐποίησαν τὰ ι΄ φλουριά, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,ηⷪοθ΄. ἐπεὶ οὖν δεκάδαν φλουρὶ ἐπολλ(α)πλασίασας, τουτέστι ὑπέρπυρα ογ΄, κόψε ἕνα γράμμα καὶ ἀπομένοσι γράμματα τρία, ἅπερ δηλῶσι ὑπέρπυρα ωϛζ΄. τὸ δὲ ἓν γράμμα, ὅπερ ἔκοψας, ἐστὶ ὑπέρπυρα ϑ΄, τὰ δὲ ϑ΄ ὑπέρπυρά ἐστι κουκκιὰ ρπ΄. κόψε πάλιν γράμμα ἓν καὶ ἀπομένοσι τὰ παρόντα δύο γράμματα α η΄, ἅπερ δηλῶσι κουκκιὰ ιη΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ρκγ΄ φλουριά, ἕκαστον αὐτῶν εἰς ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ς΄, γίνονται ὑπέρπυρα ωϛζ΄ κουκκιὰ ιη΄.

	α	β	γ
	γ	ς	ϑ ⌋ γ
η	ς	α	⌋ ζ
‖ η	ϑ	ζ	⌋ ϑ
⋮	α	η	⌋ ψ

Ἔστω δὲ πάλιν ὅτι φλουριὰ ,αρια΄, ἕκαστον αὐτῶν ἀνὰ ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ια΄, ζητεῖς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται. ζήτει φλουριὰ ι΄, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται· ι΄κις οὖν ὑπέρπυρα ζ΄ γίνονται ὑπέρπυρα ο΄, ι΄κις δὲ κουκκιὰ ια΄ γίνονται κουκκιὰ ρι΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ε΄ κουκκιὰ ι΄. ἐπεὶ δὲ τὰ ι΄ φλουριὰ γίνονται ὑπέρπυρα οε΄ κουκκιὰ ι΄ καὶ οὐκ ἔχεις δι᾽ αὐτῶν καλῶς πολλ(α)πλασιάσαι τὰ ,αρια΄ φλουριά, ζήτει φλουριὰ ρ΄, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται· ρ΄κις οὖν ὑπέρπυρα ζ΄ γίνονται ὑπέρπυρα ψ΄, ρ΄κις δὲ κουκκιὰ ια΄ γίνονται κουκκιὰ ,αρ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα νε΄. καὶ ἰδοὺ

---

2 συνίστανται] σηνήσθανται **C**

6 **Haec verba in inf. marg. fol. 41^{r} scripta ad initium huius capitis pertinere videntur**: γίνωσκε, ὅτι καὶ τὸ παρὸν ζήτημα διὰ τοῦ κανόνος γίνεται τοῦ διὰ τῶν τριῶν, ὥσπερ εἴπομεν καὶ ἐπὶ τῶν ἔμπροσθεν καντ(α)ρίων καὶ ῥετούλων, τουτέστι ἐὰν τὰ αμ΄ φλουριὰ γίνωνται ὑπέρπυρα ζγ΄, τὰ αβγ΄ φλουριὰ πόσα ὑπέρπυρα γίνονται, καὶ ἐὰν τὰ αμμ΄ φλουριὰ γίνωνται ὑπέρπυρα ζεε΄, τὰ αααα΄ φλουριὰ πόσα ὑπέρπυρα γίνονται, καὶ ἑξῆς ὁμοίως ἐπὶ τῶν ἄλλων.

τὰ ρ΄ φλουριὰ γίνονται ὑπέρπυρα ψνε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ,αρια΄ φλουριὰ μετὰ τῶν ψνε΄ ὑπερπύρων, ὧν ἐποίησαν τὰ ρ΄ φλουριά, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα ἓξ γράμματα η γ η η ι ε΄. ἐπεὶ οὖν ἑκατοντάδα φλουριὰ ἐπολλ(α)πλασίασας, τουτέστι ὑπέρπυρα ψνε΄, κόψε δύο γράμματα καὶ ἀπομένοσι τὰ παρόντα τέσσερα γράμματα η γ η η΄, ἅπερ δηλῶσι ὑπέρπυρα ,ητπη΄. τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, οὕτως κείμενα ι ε΄, ἐπεὶ τὸ πρῶτόν ἐστι ι΄, τὸ δεύτερόν ἐστι ὑπέρπυρα ε΄, τουτέστι κουκκιὰ ρ΄ – καθὼς οὖν καὶ ἐπὶ τῶν ὑπερπύρων ἔκοψας δύο γράμματα, οὕτως καὶ νῦν ἐπὶ τῶν κουκκιῶν κόψε δύο γράμματα καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ κουκκὶ α΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ,αρια΄ φλουριά, ἕκαστον αὐτῶν εἰς ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ια΄, γίνονται ὑπέρπυρα ,ητπη΄ κουκκὶ α΄.

φ α α α α
ε ε ε ε | ε
ε ε ε ε | ε
ζ ζ ζ ζ | ζ φ ρ ∥ ψνε
∥ η γ η η | ι ε
⁝ α | ι ι

῞Οτε οὖν πάλιν οὐκ ἔχεις καλῶς πολλ(α)πλασιάσαι μετὰ τῶν ι΄ φλουριῶν τὰ ὑπέρπυρα ἢ καὶ μετὰ τῶν ρ΄ φλουριῶν τὰ ὑπέρπυρα διὰ τὸ ἔχειν καὶ κουκκιά τινα, ζήτει φλουριὰ ,α΄, ὑπέρπυρα πόσα ἐστί, καὶ πολλ(α)πλασίασον, ὅσα ἂν ζητῇς φλουριὰ ποιῆσαι ταῦτα ὑπέρπυρα, μετὰ τῶν ,α΄ φλουριῶν τὰ ὑπέρπυρα, καὶ ἐκ τὸν γεγονότα πολλ(α)πλασιασμόν, ἐπεὶ φλουριὰ ,α΄ ὑπέρπυρα ἐπολλ(α)πλασίασας, κόψε τρία γράμματα, καὶ τὰ ἐναπομένοντα γράμματα – ὅσα δηλῶσι, τόσα ὑπέρπυρα γίνονται τὰ φλουριά, ἅπερ ζητεῖς ποιῆσαι ὑπέρπυρα. τὰ δὲ τρία γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, εἰσὶ ὑπέρπυρα. ὅσα οὖν ὑπέρπυρα δηλῶσι τὰ τρία γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, ποίησον ταῦτα τὰ ὑπέρπυρα, ὅσα κουκκιὰ ἐνδέχεσθαι γενέσθαι, καὶ κόψε πάλιν καὶ ἀπὸ τῶν κουκκιῶν τρία γράμματα ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῶν ὑπερπύρων, καὶ τὰ ἐναπομέν<ον>τα – ὅσα δηλῶσι, τοσαῦτα κουκκιὰ ἔχοσι ἔτι πλέον τῶν ὑπερπύρων τὰ φλουριά, ἅπερ ζητεῖς ποιῆσαι ὑπέρπυρα.

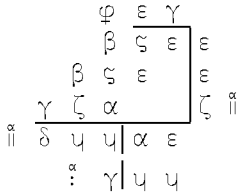
῞Ινα δὲ γένηταί σοι τοῦτο σαφέστερον· τὰ ,α΄ φλουριά – ,α΄κις ὑπέρπυρα ζ΄ γίνονται ὑπέρπυρα ,ζ΄, ,α΄κις δὲ κουκκιὰ ια΄ γίνονται ,ι,α΄ κουκκιά, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα φν΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ,α΄ φλουριὰ γίνονται ὑπέρπυρα ,ζφν΄, ἕκαστον αὐτῶν ἀνὰ ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ια΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ,αρια΄ φλουριὰ μετὰ τῶν ,ζφν΄ ὑπερπύρων, ὧν ἐποίησαν τὰ ,α΄ φλουριά, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα ἑπτὰ γράμματα η γ η η ι ε ι΄. ἐπεὶ οὖν ,α΄ φλουριὰ ἐπολλ(α)πλασίασας, τουτέστι ὑπέρπυρα ,ζφν΄, κόψε τρία γράμματα καὶ ἀπομένοσι τὰ παρόντα τέσσερα γράμματα η γ η η΄, ἅπερ δηλῶσι ὑπέρπυρα ,ητπη΄. τὰ δὲ τρία γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, οὕτως κείμενα ι ε ι΄ – τὸ μὲν πρῶτόν ἐστι ι΄, τὰ δὲ δύο δηλῶσι ὑπέρπυρα ν΄, τουτέστι κουκκιὰ ,α΄. κόψε οὖν πάλιν τρία γράμματα καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ κουκκὶ α΄. καὶ ἰδοὺ ‖ καὶ μετὰ τῶν ,α΄ φλουριῶν **f. 41^{v}** τὰ ὑπέρπυρα πολλ(α)πλασιάσας τὰ ,αρια΄ φλουριὰ ἐγένοντο πάλιν ὑπέρπυρα ,ητπη΄ κουκκὶ α΄, ὥσπερ καὶ μετὰ τῶν ρ΄ φλουριῶν τὰ ὑπέρπυρα πολλ(α)πλασιάσας τὰ ,αρια΄ φλουριὰ εὗρες καὶ οὕτως, ὅτι γίνονται πάλιν ὑπέρπυρα ,ητπη΄ κουκκὶ α΄.

φ α α α α
ι ι ι ι | ι
ε ε ε ε | ε
ε ε ε ε | ε
ζ ζ ζ ζ | ζ φ ,α ∥ ,ζφν
∥ η γ η η | ι ε ι
(α)
⁝ α | ι ι ι

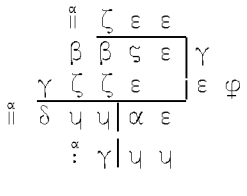
῞Εστω δὲ ὅτι καὶ φλουριὰ νγ΄ ζητεῖς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται, ἕκαστον αὐτῶν ἀνὰ ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ια΄. εἴπομεν δέ, ὅτι τὰ ρ΄ φλουριὰ γίνονται ὑπέρπυρα

2.7 ψνε΄] ψνς **C** 17 ἐκ τὸν γεγονότα] **sic C**

ψνε΄. θὲς οὖν ἄνωθεν τὰ νγ΄ φλουριά, ἐκ πλαγίου δὲ τὰ ψνε΄ ὑπέρπυρα τῶν ρ΄ φλουριῶν. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ νγ΄ φλουριὰ μετὰ τῶν ψνε΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα πέντε γράμματα δ υ υ α ε΄. ἐπεὶ δὲ ρ΄ φλουριὰ ὑπέρπυρα πολλ(α)πλασιάζεις, κόψε δύο γράμματα καὶ ἀπομένουσι τὰ παρόντα τρία γράμματα δ υ υ΄, ἅπερ δηλῶσι υ΄. τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, οὕτως κείμενα α ε΄ δηλῶσι ὑπέρπυρα ιε΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ τ΄. κόψε καὶ ἐνταῦθα δύο γράμματα καὶ ἀπομένει τὸ παρὸν γράμμα γ΄, ὅπερ δηλοῖ κουκκιὰ γ΄. καὶ ἰδοὺ τὰ νγ΄ φλουριὰ εὗρες, ὅτι γίνονται ὑπέρπυρα υ΄ καὶ κουκκιὰ γ΄.



Καὶ ἄλλως. θὲς ἄνωθεν τὰ ψνε΄ ὑπέρπυρα, ἐκ πλαγίου δὲ τὰ νγ΄ φλουριά. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ψνε΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν νγ΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρογενέστερα πέντε γράμματα. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένουσι τρία γράμματα, ἅπερ δηλῶσι ὑπέρπυρα υ΄. τὰ δὲ δύο, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι ὑπέρπυρα ιε΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ τ΄. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένουσι κουκκιὰ γ΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως τὰ νγ΄ φλουριὰ γίνονται ὑπέρπυρα υ΄ καὶ κουκκιὰ γ΄.

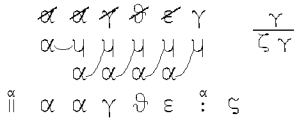


ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτων ὅμοιον διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

ογ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι τὸ παρὸν ζήτημα δι' ἑτέρας μεταχειρίσεως

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι φλουριὰ ,αφξα΄, ἕκαστον αὐτῶν ἀνὰ ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ς΄, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται. ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι καὶ διὰ τῆς μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν. ζήτει δὲ φλουριὰ ι΄, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται, ἕκαστον ἀνὰ ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ς΄. ι΄κις οὖν ὑπέρπυρα ζ΄ γίνονται ὑπέρπυρα ο΄, ι΄κις δὲ κουκκιὰ ς΄ γίνονται κουκκιὰ ξ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα γ΄· τὰ ι΄ οὖν φλουριὰ γίνονται ὑπέρπυρα ογ΄. ἐὰν οὖν τὰ ι΄ φλουριὰ γίνωνται ὑπέρπυρα ογ΄, τὰ αφξα΄ φλουριὰ πόσα γίνονται;





ὥσπερ οὖν εἰώθαμεν ποιεῖν διὰ τῶν τριῶν, οὕτως καὶ νῦν ποίησον. πολλ(α)πλασίασον γὰρ τὰ ,αφξα΄ φλουριὰ μετὰ τῶν ογ΄ ὑπερπύρων τῶν ι΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα ἓξ γράμματα α α γ θ ε γ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ι΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τὰ παρόντα πέντε γράμματα α α γ θ ε΄, ἅπερ δηλῶσι ,ι,α΄ καὶ τϛε΄ ὑπέρπυρα. ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα γ΄ συγκρινόμενα οὐ μετὰ τῶν ι΄ φλουριῶν, ὧν ἔχεις μεριστήν, ἀλλὰ μετὰ τῶν ογ΄ ὑπερπύρων, ὧν ποιῶσι τὰ ι΄ φλουριά. τὰ δὲ $\frac{\gamma}{\zeta\gamma}$ τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ ἐστι κουκκιὰ ς΄. τὸ γὰρ ἕνα φλουρί, καθὼς εἴπομεν, ὅτι χρῄζει ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ς΄, γίνονται κουκκιὰ ρμς΄, τὸ δὲ ἑβδομηκοστὸν τρίτον τῶν ρμς΄ ἐστὶ κουκκιὰ β΄· δὶς γὰρ ογ΄ ρμς΄ γίνονται, τρία δὲ ἑβδομηκοστὰ τρίτα, τουτέστι τρὶς κουκκιὰ β΄, γίνονται κουκκιὰ ς΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ,αφξα΄ φλουριὰ γίνονται ὑπέρπυρα ,ι,α΄ καὶ τϛε΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ς΄.

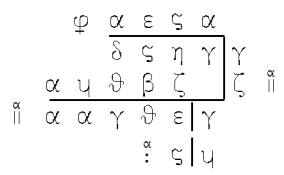
ἡ δὲ ἀπόδειξις τούτου ἐστὶ αὕτη. πολλ(α)πλασίασον τὰ ογ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν

---

14 παρογενέστερα] παρογενέσθερα **C** 39 ἑβδομηκοστὸν τρίτον] $\zeta\overset{ον}{\gamma}$ **C**

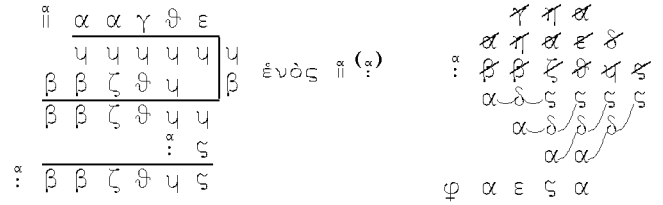
,αφξα΄ φλουριῶν· ογ΄κις οὖν ,αφξα΄ γίνονται α α γ ϑ ε γ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ ι΄ φλουριὰ μετὰ τῶν α α γ ϑ ε΄ ὑπερπύρων καὶ κουκκιῶν ς΄· ι΄κις οὖν ⟨ὑπέρπυρα⟩ α α γ ϑ ε΄ κουκκιὰ ς΄ γίνονται πάλιν α α γ ϑ ε γ΄. καὶ ἐπεί ἐστι ὅμοιος ὁ πρῶτος πολλ(α)πλασιασμὸς μετὰ τοῦ δευτέρου, ἐστὶ ὀρθὸν τὸ γενόμενον.

Ποίησον τοῦτο καὶ διὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ,αφξα΄ φλουριὰ μετὰ τῶν ογ΄ ὑπερπύρων τῶν ι΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα ἓξ γράμματα α α γ ϑ ε γ΄. ἐπεὶ οὖν ι΄ φλουριὰ ὑπέρπυρα πολλ(α)πλασιάζεις, κόψε γράμμα ἓν καὶ ἀπομένοσι τὰ παρόντα πέντε γράμματα α α γ ϑ ε΄, ἅπερ δηλῶσι ,ι,α΄ καὶ τϛε΄. τὸ δὲ ἓν γράμμα, ὅπερ ἔκοψας, ἐστὶ ὑπέρπυρα γ΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ξ΄. κόψε πάλιν γράμμα ἓν καὶ ἀπομένοσι κουκκιὰ ς΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως τὰ ,αφξα΄ φλουριὰ γίνονται ὑπέρπυρα ,ι,α΄ καὶ τϛε΄ κουκκιὰ ς΄.



οδ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι, ὅσα ἂν ὑπέρπυρα ζητῇς, πόσα φλουριὰ γίνονται

Ἐὰν δὲ τὸ ἀνάπαλιν ζητῇς, τουτέστι αἱ ,ι,α΄ καὶ τϛε΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ς΄ – ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ς΄ – πόσα φλουριὰ γίνονται, ἔχεις καὶ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. ποίησον κουκκιὰ τὰς ,ι,α΄ καὶ τϛε΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ς΄· πολλ(α)πλασίασον γὰρ τὰ καθόλου ὑπέρπυρα μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου, πρόσθες καὶ τὰ ς΄ κουκκιὰ καὶ γίνονται τὰ α α γ ϑ ε΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ς΄ κουκκιὰ β β ζ ϑ ι ς΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρμς΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ· ἕκαστον γὰρ φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ς΄ γίνονται κουκκιὰ ρμς΄. μεριζόμεναι δὲ αἱ ,σ,κ,ζ΄ καὶ ≫ς΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν ρμς΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ,αφξα΄. καὶ ἰδού, ὥσπερ τὰ ,αφξα΄ φλουριὰ ἐγένοντο ὑπέρπυρα α α γ ϑ ε΄ κουκκιὰ ς΄, οὕτως καὶ νῦν τὸ ἀνάπαλι(ν) τὰ α α γ ϑ ε΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ς΄ γενόμενα[ι] κουκκιὰ β β ζ ϑ ι ς΄ καὶ μεριζόμενα[ι] μετὰ τῶν ρμς΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ ἐγένετο ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς πάλιν φλουριὰ ,αφξα΄ ὡς τὸ πρότερον. ‖ f. 42^{r}
ὡσαύτως δὲ καί, ὅσα ὑπέρπυρα ζητεῖς εἰδέναι, πόσα φλουριὰ γίνονται – πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου, καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμός, τοσαῦτα κουκκιὰ γίνονται τὰ ὑπέρπυρα, ἅπερ μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν ἐπολλαπλασίασας. ποίησον δὲ καὶ ἑνὸς φλουριοῦ τιμὴν κουκκιά, καὶ ὅσα κουκκιὰ γένωνται τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ, μέρισον δι᾽ αὐτῶν τὰ καθόλου κουκκιά, ἅπερ ἐποίησαν τὰ ὑπέρπυρα, ἅπερ μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν ἐπολλαπλασίασας. καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτων διαμερισμός, τόσα φλουριὰ γίνονται τὰ ὑπέρπυρα, ἅπερ ζητεῖς ποιῆσαι φλουριά. ἐὰν δὲ καὶ ἀπομείνῃ τζάκισμα, τὰ ἐναπομένοντά ἐστι κουκκιά, ἅπερ



---

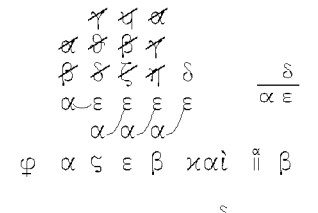
14 **ad titulum huius capitis in inferiore marg. fol. 41^{v} scriptum:** ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ παρὸν ζήτημαν τό, πόσα φλουριὰ γίνονται τὰ ὑπέρπυρα, ὅσα ἂν ζητῇς, διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν γενήσεται προχειρέστατα.

19 τὰς ,ι,α΄] **sc.** χιλιάδας 26 μεριζόμεναι δὲ αἱ ,σ,κ,ζ΄] **sc.** χιλιάδαι 33/36–38 ὅσος / ὅσα **c. coni.**

οὐκ ἔφθασαν φλουριά, διὸ καὶ ἐναπέμειναν τζάκισμα.

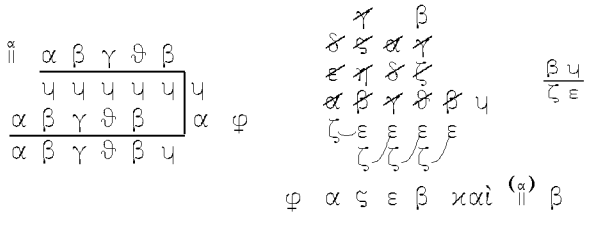
οε Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι τὸ παρὸν ζήτημα δι' ἑτέρας μεταχειρίσεως

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι, πόσα φλουριὰ γίνονται ὑπέρπυρα ,ι,β΄ καὶ τϛβ΄, ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ι΄, τουτέστι ὑπέρπυρα ζ΄ϛ″. ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι καὶ διὰ τῆς μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν, τουτέστι ἐὰν τὰ ιε΄ μισὰ διδῶσι β΄ μισά, ταὐτὸν γὰρ εἰπεῖν ἐὰν τὰ ζ΄ϛ″ ὑπέρπυρα διδῶσι φλουρὶ α΄, τὰ α β γ ϑ β΄ ὑπέρπυρα πόσα δίδωσι; πολλ(α)πλασίασον τὰ α β γ ϑ β΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν β΄ μισῶν· δὶς οὖν α β γ ϑ β΄ γίνονται β δ ζ η δ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ιε΄ μισῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς α ϛ ε β΄ καὶ τζάκισμα $\frac{\delta}{\alpha\,\varepsilon}$. καὶ ἰδοὺ τὰ α β γ ϑ β΄ ὑπέρπυρα γίνονται φλουριὰ ,αχνβ΄ καὶ $\frac{\delta}{\iota\varepsilon}$. τὰ δὲ $\frac{\delta}{\iota\varepsilon}$ τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ ἐστι κουκκιὰ μ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα β΄. τὰ γὰρ ζ΄ϛ″ ὑπέρπυρα τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ ἐστι κουκκιὰ ρν΄, τὰ δὲ $\frac{\delta}{\iota\varepsilon}$ τῶν ρν΄ κουκκιῶν ἐστι κουκκιὰ μ΄, τουτέστι ὑπέρπυρα β΄. δ΄κις γὰρ ι΄ μ΄ γίνονται, ιε΄κις δὲ πάλιν ι΄ ρν΄. καὶ ἰδοὺ τὰ α β γ ϑ β΄ ὑπέρπυρα γίνονται φλουριὰ ,αχνβ΄ καὶ ὑπέρπυρα β΄.



ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ διὰ τῶν τριῶν ἐστι αὕτη. πολλ(α)πλασίασον τὰ α β γ ϑ β΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν β΄ ὡς τὸ πρότερον· δὶς οὖν α β γ ϑ β΄ γίνονται β δ ζ η δ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ιε΄ τὸν μεριστὴν μετὰ τῶν α ϛ ε β΄ καὶ $\frac{\delta}{\iota\varepsilon}$· ιε΄κις οὖν α ϛ ε β΄ καὶ $\frac{\delta}{\iota\varepsilon}$ γίνονται πάλιν β δ ζ η δ΄. ἐπεὶ οὖν ἐστι ὅμοιοι οἱ δύο πολλ(α)πλασιασμοί, ἐστὶ ὀρθὸν τὸ γενόμενον.

Ἔστω δὲ πάλιν, ὅτι τὰ αὐτὰ ὑπέρπυρα ζητεῖς εἰδέναι, πόσα φλουριὰ γίνονται. ζήτει φλουριὰ ι΄, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται, ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα ζ΄ϛ″· ι΄κις οὖν ὑπέρπυρα ζ΄ϛ″ γίνονται ὑπέρπυρα οε΄. ἐὰν οὖν τὰ ι΄ φλουριὰ γίνωνται ὑπέρπυρα οε΄, τὰ α β γ ϑ β΄ ὑπέρπυρα πόσα γίνονται; πολλ(α)πλασίασον οὖν τὰ α β γ ϑ β΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ι΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α β γ ϑ β υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οε΄ φλουριῶν, ὧν ἐποίησαν τὰ ι΄ φλουριά, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς α ϛ ε β΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\beta\,\upsilon}{\zeta\,\varepsilon}$, ὅπερ δηλοῖ κουκκιὰ μ΄, τουτέστι ὑπέρπυρα β΄. τὸ γὰρ φλουρί, ὅπερ εἴπομεν, ὅτι χρῄζει ὑπέρπυρα ζ΄ϛ″, γίνονται κουκκιὰ ρν΄, τὸ δὲ ἑβδομηκοστὸν πέμπτον μέρος τῶν ρν΄ κουκκιῶν ἐστι κουκκιὰ β΄· δὶς γὰρ οε΄ ρν΄ γίνονται, κ΄ δὲ ἑβδομηκοστὰ πέμπτα, τουτέστι κ΄κις κουκκιὰ β΄, γίνονται κουκκιὰ μ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα β΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὕρες, ὅτι τὰ α β γ ϑ β΄ ὑπέρπυρα γίνονται φλουριὰ ,αχνβ΄ καὶ ὑπέρπυρα β΄ ὡς καὶ πρότερον.

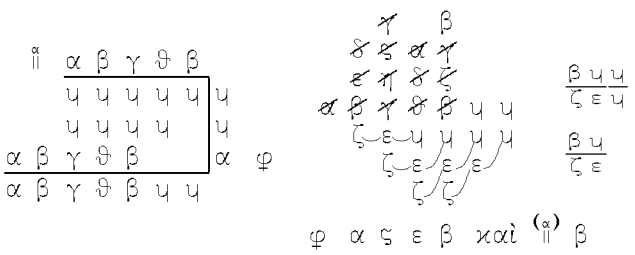


Ἐὰν δὲ καὶ μετὰ τῶν ρ΄ φλουριῶν τὰ ὑπέρπυρα ποιήσῃς ταῦτα, εὑρήσεις πάλιν, ὅτι γίνονται φλουριὰ αχνβ΄ ὑπέρπυρα β΄. τὰ γὰρ ρ΄ φλουριά – ἕκαστον φλουρὶ ἀνὰ ζ΄ϛ″ <ὑπέρπυρα> – ρ΄κις ὑπέρπυρα ζ΄ϛ″ γίνονται ὑπέρπυρα ψν΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ α β γ ϑ β΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ρ΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα ἑπτὰ γράμματα α β γ ϑ β υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ψν΄

---

3 τϛβ΄] τϛς **falso C** 20 ἐστι] **sic C** 34 ἑβδομηκοστὸν πέμπτον] $\overset{ον}{ο\varepsilon}$ **C** 40 ρ΄κις] $\overset{ον}{ρ}$τάκοις **C**

ὑπερπύρων τῶν ρ΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς α ϛ ε β΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\beta\,\upsilon\,\upsilon}{\zeta\,\varepsilon\,\upsilon}$· σχίσον τοῦτο εἰς μέρη δέκα καὶ γίνονται $\frac{\beta\,\upsilon}{\zeta\,\varepsilon}$, ὅπερ δηλοῖ κουκκιὰ μ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα β΄. καὶ ἰδοὺ καὶ μετὰ τῶν ρ΄ φλουριῶν τὰ ὑπέρπυρα, τουτέστι μετὰ τῶν ψν΄ ὑπερπύρων,



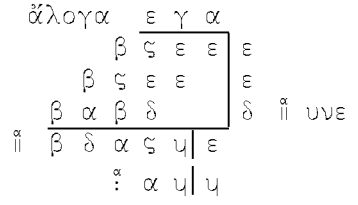
εὗρες αὐτὰ πάλιν φλουριὰ ,αχνβ΄ ὑπέρπυρα β΄, ὡς καὶ μετὰ τῶν ι΄ φλουριῶν τὰ οε΄ δηλονότι ὑπέρπυρα εὗρες οὕτως.

ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτων ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

ος **Περὶ τοῦ πῶς ἔστι διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως τῶν φλουριῶν {χρήσασθαι ταύτην καὶ ἐπὶ ζῴων καὶ} εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα χρῄζοσι, ὅσα ἂν ζῷα ζητῇς, καὶ τὸ ἀνάπ(α)λι(ν) πόσα ζῷα χρῄζοσι, ὅσα ἂν ὑπέρπυρα ζητῇς**

Τοῦτο οὐκ ἐπὶ φλουριῶν μόνον καὶ ὑπερπύρων γίνεται οὕτως, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ ζῴων καὶ ἄλλων ὁμοίων ζητημάτων ἐστὶ χρήσιμος ἡ δηλωθεῖσα μεταχείρισις.

ἔστω γὰρ ὅτι ζητεῖς εἰδέναι ἄλογα φλα΄, ἕκαστον αὐτῶν ἀνὰ ὑπέρπυρα με΄ κουκκιὰ ι΄, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται. ζήτει καὶ ἐνταῦθα ι΄ ἀλόγων ὑπέρπυρα ὡς καὶ ἐπὶ τῶν φλουριῶν· ι΄κις οὖν ὑπέρπυρα με΄ϛ″ γίνονται ὑπέρπυρα υνε΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ι΄ ἄλογα χρῄζοσι ὑπέρπυρα υνε΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ φλα΄ ἄλογα μετὰ τῶν υνε΄ ὑπερπύρων τῶν ι΄ ἀλόγων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα ἓξ γράμματα β δ α ϛ υ ε΄. ἐπεὶ οὖν ι΄ ἀλόγων ὑπέρπυρα ἐπολλ(α)πλασίασας, κόψε γράμμα ἓν καὶ ἀπομένοσι πέντε γράμματα, ἅπερ δηλῶσι ὑπέρπυρα ,κ,δ΄ καὶ ρξ΄ ὑπέρπυρα. τὸ δὲ ἓν γράμμα, ὅπερ ἔκοψας, δηλοῖ ὑπέρπυρα ε΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρ΄. κόψε πάλιν γράμμα ἓν ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ὑπερπύρων καὶ ἀπομένοσι δύο γράμματα, ἅπερ δηλῶσι κουκκιὰ ι΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι τὰ φλα΄ ἄλογα, ἕκαστον αὐτῶν ἀνὰ ὑπέρπυρα με΄ κουκκιὰ ι΄, γίνεται ἡ τιμὴ αὐτῶν ὑπέρπυρα ,κ,δ΄ καὶ ρξ΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ι΄.



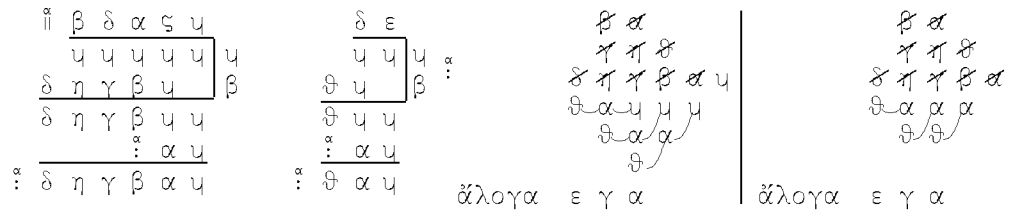
Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν). ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι ὑπέρπυρα ,κ,δ΄ καὶ ρξ΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ι΄, πόσα ἄλογα ἐξωνήσαντο, ἕκαστον ἄλογον || ἀνὰ ὑπέρπυρα με΄ κουκκιὰ ι΄. f. 42^{v}
ποίησον τὰς ,κ,δ΄ καὶ ρξ΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ι΄ κουκκιά· πολλ(α)πλασίασον δὲ ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα γράμματα δ η γ β υ υ΄. πρόσθες καὶ τὰ ι΄ κουκκιὰ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ δ η γ β α υ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ με΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ι΄ – ἑνὸς ἀλόγου τιμὴν δηλονότι – μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα γράμματα θ υ υ΄. πρόσθες καὶ

---

16 οὐκ ἐπὶ] οὐ καὶ πὶ **C**

multiplicatio secunda: auctor scripsit primo ε γ γ **pro** ε γ α β α β δ] **hoc primo auctor scripsit, tum falso** β β β δ **correxit item** β δ α ϛ υ] β ε α ϛ υ **C**

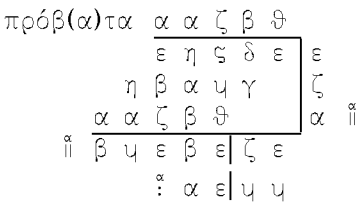
30 ,κ,δ΄] **hoc primo auctor scripsit, tum falso** ,κ,ε **correxit et in inferiore marg. fol. 42^{r} iteravit**



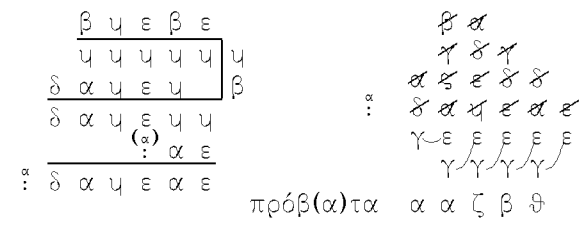
τὰ ι΄ κουκκιὰ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ϑ α ι΄. μέρισον δὲ τὰ δ η γ β α ι΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν ϑ α ι΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς φλα΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι αἱ ,κ,δ΄ καὶ ρξ΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ι΄ – ἕκαστον ἄλογον ἀνὰ ὑπέρπυρα με΄ κουκκιὰ ι΄ – ἐξωνῶνται ἄλογα φλα΄, ὥσπερ πρότερον τὸ ἀνάπαλι(ν) ἄλογα φλα΄ – ἕκαστον ἀνὰ ὑπέρπυρα με΄ κουκκιὰ ι΄ – ἐγένοντο ὑπέρπυρα ,κ,δ΄ καὶ ρξ΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ι΄.

Καὶ ἄλλως προχ(ει)ρ(ο)τέρως. ἐπεὶ αἱ ,κ,δ΄ καὶ ρξ΄ <ὑπέρπυρα> κουκκιὰ ι΄ ἔχοσι ὑπέρπυρον ϛ″ – τὰ γὰρ ι΄ κουκκιὰ μισὸν ὑπέρπυρόν ἐστι –, ὡσαύτως καὶ τὰ με΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ι΄ ἔχοσι καὶ ταῦτα ὑπέρπυρον ϛ″, ποίησον μισὰ τὰς ,κ,δ΄ καὶ ρξ΄ ὑπέρπυρα· δὶς οὖν β δ α ς ι΄ γίνονται δ η γ β ι΄. πρόσθες καὶ ϛ″ ὑπὲρ τῶν ι΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται μισὰ δ η γ β α΄. ποίησον μισὰ καὶ τὰ με΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ι΄· δὶς οὖν με΄ γίνονται Ϛ΄. πρόσθες καὶ ϛ″ ὑπὲρ τῶν ι΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται μισὰ Ϛα΄. μέρισον τὰ δ η γ β α΄ μισὰ μετὰ τῶν Ϛα΄ μισῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς πάλιν ἄλογα φλα΄.

Ἔστω δὲ [ἔστω δὲ] πάλιν ὅτι ζητεῖς εἰδέναι πρόβατα ,ι,α΄ καὶ ψκϑ΄, ἕκαστον πρόβατον ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ ιε΄, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται. ζήτει ι΄ προβάτων τιμήν· ι΄κις οὖν ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ ιε΄ γίνονται ὑπέρπυρα ιζ΄ κουκκιὰ ι΄. καὶ ἐπεὶ τὰ ι΄ πρόβατα ἔχοσι κουκκιὰ ι΄ περισσότερον τῶν ιζ΄ ὑπερπύρων, ζήτει ρ΄ προβάτων τιμήν· ρ΄κις δὲ ὑπέρπυρον α΄ καὶ κουκκιὰ ιε΄ γίνονται ὑπέρπυρα ροε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς ,ι,α΄ καὶ ψκϑ΄ πρόβατα μετὰ τῶν ροε΄ ὑπερπύρων τῶν ρ΄ προβάτων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα ἑπτὰ γράμματα β υ ε β ε ζ ε΄. καὶ ἐπεὶ ρ΄ προβάτων τιμὴν ἐπολλ(α)πλασίασας, κόψε δύο γράμματα καὶ ἀπομένοσι πέντε γράμματα, ἅπερ δηλῶσι ὑπερπύρα ,κ΄ καὶ φκε΄ ὑπέρπυρα. τὰ δύο δὲ γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι ὑπέρπυρα οε΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ,αφ΄. κόψε πάλιν δύο γράμματα ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ὑπερπύρων καὶ ἀπομένοσι δύο γράμματα, ἅπερ δηλῶσι κουκκιὰ ιε΄. καὶ ἰδοὺ αἱ ,ι,α΄ καὶ ψκϑ΄ πρόβατα, ἕκαστον πρόβατον ἀνὰ ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ ιε΄, γίνονται ὑπέρπυρα ,κ΄ καὶ φκε΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ιε΄.



Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν). ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι ὑπέρπυρα ,κ΄ καὶ φκε΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ιε΄, πόσα πρόβατα ἐξωνήσονται, ἕκαστον πρόβατον εἰς ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ ιε΄. ποίησον κουκκιὰ τὰς ,κ΄ καὶ φκε΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ιε΄. πολλ(α)πλασίασον γὰρ τὰ β υ ε β ε΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου καὶ γίνεται ὁ τούτων

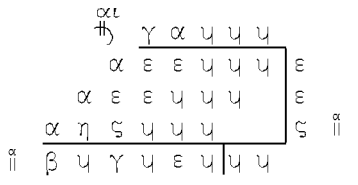


3.7.28 αἱ ,κ,δ΄] sc. χιλιάδαι, cf. 9.20.34/35 τὰς ...] sc. χιλιάδας

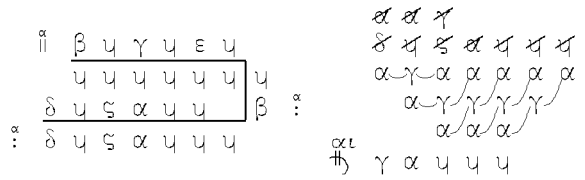
πολλ(α)πλασιασμὸς δ α υ ε υ υ΄. πρόσθες καὶ τὰ ιε΄ κουκκιὰ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ δ α υ ε α ε΄. ποίησον καὶ ἑνὸς προβάτου τιμὴν κουκκιά· γίνονται ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ ιε΄ κουκκιὰ λε΄. μέρισον τὰς δ α υ ε α ε΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν λε΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς προβάτου καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τὰ παρόντα γράμματα α α ζ β θ΄, ἅπερ δηλῶσι ,ι,α΄ καὶ ψκθ΄. καὶ ἰδοὺ αἱ ,κ΄ καὶ φκε΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ιε΄ – ἕκαστον πρόβατον ἀνὰ ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ ιε΄ – ἐξωνῶνται πρόβατα ,ι,α΄ καὶ ψκθ΄ πρόβατα, ὥσπερ πρότερον τὸ ἀνάπαλιν πρόβατα ,ι,α΄ καὶ ψκθ΄ – ἕκαστον πρόβατον ἀνὰ ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ ιε΄ – ἐγένοντο ὑπέρπυρα ,κ΄ καὶ φκε΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ιε΄.

οζ Περὶ τοῦ πῶς τοῦτο καὶ ἐπὶ μετάξης χρήσιμον

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι λα΄ χιλ(ι)άδαι λίτραι μετάξης, ἑκάστη λίτρα ἀνὰ ὑπέρπυρα ς΄ κουκκιὰ ια΄, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται. ζήτει ι΄ λιτρῶν τιμήν· ι΄κις οὖν ὑπέρπυρα ς΄ κουκκιὰ ια΄ γίνονται ὑπέρπυρα ξε΄ κουκκιὰ ι΄. καὶ ἐπεὶ ἡ τιμὴ τῶν ι΄ λιτρῶν ἔχει περισσεύοντα κουκκιὰ ι΄, ζήτει ρ΄ λιτρῶν τιμήν, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται. ρ΄κις οὖν ὑπέρπυρα ς΄ κουκκιὰ ια΄ γίνονται ὑπέρπυρα χνε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς λα΄ χιλ(ι)άδας λίτρας τῆς μετάξης μετὰ τῶν χνε΄ ὑπερπύρων τῶν ρ΄ λιτρῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα ὀκτὼ γράμματα β υ γ υ ε υ υ υ΄. ἐπεὶ δὲ ρ΄ λιτρῶν ὑπέρπυρα ἐπολλ(α)πλασίασας, κόψε δύο γράμματα καὶ ἀπομένουσι τὰ παρόντα ἓξ γράμματα β υ γ υ ε υ΄, ἅπερ δηλῶσι ὑπέρπυρα ,σ,γ΄ χιλ(ι)άδας καὶ ὑπέρπυρα ν΄. καὶ ἰδοὺ αἱ ,λ,α΄ λίτραι τῆς μετάξης χρῄζουσι ὑπέρπυρα ,σ,γ΄ καὶ ν΄ ὑπέρπυρα.



Ἐὰν δὲ πάλιν ζητῇς εἰδέναι σγ΄ χιλ(ι)άδαι καὶ ν΄ ὑπέρπυρα, πόσας χιλ(ι)άδας λίτρας μετάξης ἐξωνήσαντο, πολλ(α)πλασίασον τὰς σγ΄ χιλ(ι)άδας καὶ ν΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου καὶ γίνονται κουκκιὰ δ υ ς α υ υ υ΄. ποίησον κουκκιὰ καὶ τὰ ς΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ια΄ τῆς μιᾶς λίτρας, τὴν τιμὴν δηλονότι· γίνονται δὲ κουκκιὰ ρλα΄. μέρισον τὰς δ υ ς α υ υ υ΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν α γ α΄ κουκκιῶν τῆς μιᾶς λίτρας καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τὰ παρόντα πέντε γράμματα γ α υ υ υ΄, ἅπερ δηλῶσι λα΄ χιλ(ι)άδας. καὶ ἰδοὺ αἱ σγ΄ χιλ(ι)άδαι καὶ ν΄ ὑπέρπυρα ἐξωνῶνται λα΄ χιλ(ι)άδας λίτρας μετάξης – ἑκάστην λίτραν εἰς ὑπέρπυρα ς΄ κουκκιὰ ια΄ –, ὥσπερ πρότερον τὸ ἀνάπ(α)λ(ιν) ‖ ,λ,α΄ λίτραι μετάξης – ἑκάστη λίτρα εἰς ὑπέρπυρα ς΄ κουκκιὰ ια΄ – ἐγένοντο ὑπέρπυρα ,σ,γ΄ καὶ ν΄ ὑπέρπυρα. f. 43r



ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν ἔχεις εἰδέναι καὶ διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως, ἧς γίνονται τὰ φλουριὰ ἢ τὰ ζῷα ἢ αἱ λίτραι ὑπέρπυρα καὶ τὰ ὑπέρπυρα πάλιν, πόσα φλουριὰ ἢ ζῷα ἢ λίτρας ἐξωνῶνται. ἔχεις δὲ εἰδέναι ταῦτα καὶ διὰ τῆς ἑτέρας μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν, ἧς ἐποίησας ἐπὶ τοῦ πρώτου ζητήματος τῶν φλουριῶν, ὧν εἴπομεν, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται τὰ φλουριὰ καὶ πόσα φλουριὰ γίνον-

---

3.31 μέρισον τὰς] **sic C** 11 λίτραι] **hic et passim** $\overset{\alpha\iota}{\text{Ϟ}}$ **C**

divisio: 𐅵𐅵𐅵𐅵𐅵𐅵𐅵 𐅵𐅵𐅵𐅵𐅵υυ **C**

ται τὰ ὑπέρπυρα, καθὼς ταῦτα πάντα ὁρῶνται καλῶς διὰ τῶν ὑποδειγμάτων, ὧν διαφόρως ὑποτιθέμεθα. καὶ ταῦτα πάντα γίνονται οὕτως, ὁπόταν περισσεύωσι ἐκ τῆς τιμῆς τῶν φλουριῶν ἢ τῶν ζῴων ἢ τῶν λιτρῶν καὶ κουκκιά τινα.

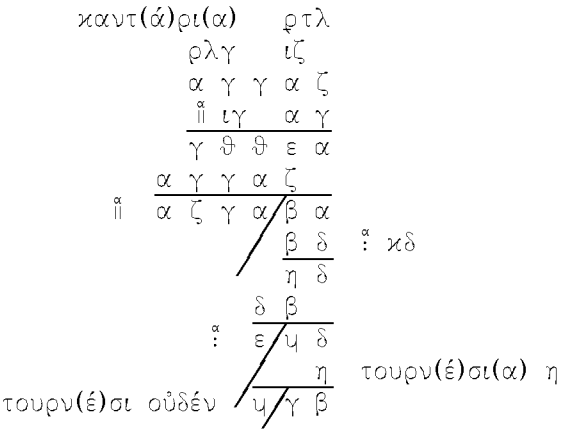
ὅτε δέ ἐστι ἡ τιμὴ τούτων ἐξόλου ἐξαρτυμένη εἰς ὑπέρπυρα ἀκέραια μὴ ἔχοντα καὶ κουκκιά τινα περιττά, οὐκ ἐστι χρεία τῶν δηλωθέντων μεταχειρίσεων, ἀλλὰ βουλόμενος πολλ(α)πλασιάσαι ζῷά τινα ἢ φλουριὰ ἢ λίτρας πρὸς τὸ εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται, πολλ(α)πλασίασον, ἅπερ ζητεῖς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται, μετὰ τῆς τιμῆς τῶν ἀκεραίων ὑπερπύρων, ὧν χρῄζει ἕνα φλουρὶ ἢ ἕνα ζῷον ἢ μία λίτρα. καὶ ὅσος γένηται ὁ πολλ(α)πλασιασμὸς τῶν καθόλου, ὧν ζητεῖς, μετὰ τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς τῶν ἀκεραίων ὑπερπύρων, τοσαῦτα ὑπέρπυρα γίνονται, ἅπερ ζητεῖς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται.

βουλόμενος δὲ πάλιν εἰδέναι ὑπέρπυρά τινα, πόσα φλουριὰ γίνονται ἢ πόσα ζῷα ἐξωνῶνται – ἐὰν ἡ τιμὴ ἑκάστου αὐτῶν οὐκ ἔχῃ κουκκιά τινα περισσεύοντα, ἀλλ᾽ ἔστι ἐξόλου ὑπέρπυρα ἀκέραια, οὐκ ἐστι χρεία γενέσθαι κουκκιὰ τὰ ὑπέρπυρα, ἅπερ ζητεῖς εἰδέναι, πόσα φλουριὰ ἢ ζῷα ἢ λίτραι γίνονται, ἀλλὰ ἀκεραίων ὄντων τῶν ὑπερπύρων, ὧν ζητεῖς, διαμέρισον ταῦτα πάντα μετὰ τῆς τιμῆς τῶν ἀκεραίων ὑπερπύρων τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ ἢ ζῴου ἢ λίτρας, οὗ ζητεῖς ἐξωνήσασθαι. καὶ ὅσος γένηται ὁ διαμερισμὸς τῶν καθόλου ὑπερπύρων, ὧν ζητεῖς, μετὰ τῶν ἀκεραίων ὑπερπύρων τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ ἢ ζῴου ἢ λίτρας, τοσαῦτα φλουριὰ ἢ ζῷα ἢ λίτρας ἐξωνῶνται τὰ ὑπέρπυρα, ὅσα ἂν ζητῇς εἰδέναι, πόσα ἐξ αὐτῶν ὠνῶνται.

οη Περὶ πλείστων καὶ διαφόρων καντ(α)ρίων καὶ ῥετούλων πρόχειρος κατάληψις, πόσα ὑπέρπυρα γίνεται ἡ καθόλου τούτων ποσότης

Ἔστω ὅτι πραγματευτής τις ἀγόρασέν τινα πραγματείαν, ἥτις καμπανισθεῖσα ἐγένετο καντ(ά)ρι(α) ρλγ΄ καὶ ῥέτουλα ιζ΄. τὸ δὲ καντ(ά)ρι ἐστὶ ῥέτουλα ρ΄. ἀγόρασεν δὲ τὸ καντ(ά)ρι εἰς ὑπέρπυρα ιγ΄ μεγάλα, ἃ καὶ χρυσὰ λέγονται, ὅπερ ὑπέρπυρον χρυσὸν χρῄζει κουκκιὰ κδ΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὰ ρλγ΄ καντ(ά)ρ(ια) καὶ ιζ΄ ῥέτουλα, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται. ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως.

Θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ρλγ΄ καντ(ά)ρι(α) καὶ ιζ΄ ῥέτουλα κατ᾽ εὐθεῖαν, κάτωθεν δὲ περὶ τὸ τέλος θὲς τὰ ιγ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ εἴπομεν, ὅτι ἕκαστον καντ(ά)ρι χρῄζει ὑπέρπυρα ιγ΄. εἰ γὰρ καὶ κάτωθεν περὶ τὸ τέλος θέτεις τὰ ιγ΄ ὑπέρπυρα καὶ οὐκ ἐκ πλαγίου ὡς σύνηθες, οὐ λυμαίνεταί τι τοῦτο· ταὐτὸν γάρ ἐστι κακεῖσε ταῦτα πολλ(α)πλασιάσαι ὡς καὶ ἐκ πλαγίου. ἐπὶ γὰρ τοῦ παρόντος ζητήματος κρεῖττόν ἐστι κάτωθεν τιθέναι τὰ ιγ΄ ὑπέρπυρα – τὴν τιμὴν δηλονότι τοῦ ἑνὸς καντ(α)ρί(ου) – περὶ τὸ τέλος, ὡς εἴπομεν, ἢ ἐκ πλαγίου.



γενομένου δὲ τούτου πολλ(α)πλασίασον τὰ ἄνωθεν πέντε γράμματα, ἅπερ δηλῶσι καντ(ά)-

---

2 ὁπόταν] ὁπότ ᾽ναν **C** 23 πραγματευτής] **hic et aliubi** πραγματευθής **C** ἀγόρασέν] **pro** ἠγόρασέν **C** ρτλ **(v. ratio)**] **pro** ῥέτουλα 34 οὐκ ἐκ πλαγίου] οὐ καὶ᾽κ πλαγίου **C** 35 οὐ λυμαίνεται] οὐ λῖ μένεται **C**

ρ(ια) ρλγ΄ καὶ ῥέτουλα ιζ΄, μετὰ τῶν ιγ΄ ὑπερπύρων ἀρξάμενος πρῶτον ἀπὸ τὸ ἔσχατον καὶ τελευταῖον γράμμα τῶν ιγ΄ ὑπερπύρων, ὅπερ δηλοῖ γ΄. πολλ(α)πλασιάσας δὲ τοῦτο μετὰ τῶν ἄνωθεν πάντων γραμμάτων ὡς σύνηθες. πάλιν ἄρξου καὶ πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ ἕτερον γράμμα, τουτέστι τὸ α΄, ὅπερ ἐστὶ εἰς τόπον δεκάδος καὶ δηλοῖ ι΄. γίνεται δὲ ὁ πολλ(α)πλασιασμὸς τῶν ἄνωθεν πέντε γραμμάτων μετὰ τῶν κάτωθεν ιγ΄ ὑπερπύρων τὰ παρόντα ἓξ γράμματα α ζ γ α β α΄. κόψε δύο γράμματα – ἐπὶ γὰρ τοῦ παρόντος ζητήματος πάντοτε δύο γράμματα κόπτονται – καὶ ἀπομένουσι τὰ παρόντα τέσσερα γράμματα α ζ γ α΄, ἅπερ δηλῶσι ὑπέρπυρα ,αψλα΄. τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι κα΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ κα΄ μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι χρῄζει ἕκαστον ὑπέρπυρον χρυσόν, ὡς ἐπὶ τῆς Κωνσταντινουπόλεως πέφυκε διαπράτ<τ>εσθαι, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα τρία γράμματα ε ι δ΄. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ κουκκιὰ ε΄. ἔχεις μέχρι τοῦ νῦν ὑπέρπυρα ,αψλα΄ καὶ κουκκιὰ ε΄. τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, οὕτως κείμενα ι δ΄ δηλῶσι δ΄· τὸ γὰρ ι΄ οὐδὲν δηλοῖ. ἕκαστον δὲ τῶν κδ΄ κουκκιῶν ἐστι τουρνέσια η΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ μετὰ τῶν η΄ τουρν(ε)σ(ίων) τοῦ ἑνὸς κουκκιοῦ τὰ δ΄, ἅπερ ἀπέμειναν ἐκ τῶν δύο γραμμάτων, ὧν ἔκοψας, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα τρία γράμματα ι γ β΄. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένει τὸ παρὸν γράμμα ι΄, ὅπερ δηλοῖ οὐδέν. καὶ ἰδοὺ τὰ ρλγ΄ καντ(ά)ρι(α) καὶ ιζ΄ ῥέτουλα, ἕκαστον καντ(ά)ρ(ι) εἰς ὑπέρπυρα χρυσὰ ιγ΄, γίνονται ὑπέρπυρα ,αψλα΄ καὶ κουκκιὰ ε΄ τουρν(έ)σι οὐδέν.

τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, οὕτως κείμενα γ β΄ δηλῶσι λβ΄. εἰ οὖν ζητεῖς λαβεῖν καὶ ἐξ αὐτῶν τζάκισμα ἑνὸς τουρνεσίου $\frac{\alpha}{\delta}$, πολλ(α)πλασίασον τὰ δύο, ἅπερ ἀπέμειναν καὶ δηλῶσι λβ΄, μετὰ τῶν δ΄. τὰ δὲ δ΄ ἐστὶ τέσσερα τέταρτα ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου) ἀκεραίου. δ΄κις οὖν λβ΄ γίνονται τὰ παρόντα τρία γράμματα α β η΄, ἅπερ δηλῶσι ρκη΄. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ α΄· τὸ δὲ α΄ ἐστὶ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου) $\frac{\alpha}{\delta}$. καὶ ἰδοὺ τὰ ρλγ΄ καντ(ά)ρ(ια) καὶ ῥέτουλα ιζ΄ γίνονται ὑπέρπυρα ,αψλα΄ κουκκιὰ ε΄ τουρν(έ)σι(α) $\frac{\alpha}{\delta}$. τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι κη΄, πλὴν οὐκ ἔχεις τι λαβεῖν ἐξ αὐτῶν ἐπὶ πλέον, ἀλλὰ ἀπέμειναν ἄχρηστα μὴ δυνάμενος λαβεῖν τι ἐξ αὐτῶν. ‖ f. 43^{v}

$\frac{\gamma\ \beta}{\alpha\ |\beta\ \eta}$ $\frac{\delta}{\delta}$ τέταρτα

Ἔστω δὲ πάλιν, ὅτι ὁ αὐτὸς πραγματευτὴς ἠγόρασεν καντ(ά)ρι(α) ρνθ΄ καὶ ῥέτουλα ξε΄, ἕκαστον καντ(ά)ρι εἰς ὑπέρπυρα χρυσὰ κα΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται.

καὶ πάλιν θὲς κατ᾽ εὐθεῖαν ἄνωθεν τὰ ρνθ΄ καντ(ά)ρι(α) καὶ ῥέτουλα ξε΄, κάτωθεν δὲ περὶ τὸ τέλος θὲς τὰ κα΄ ὑπέρπυρα. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν πέντε γράμ-

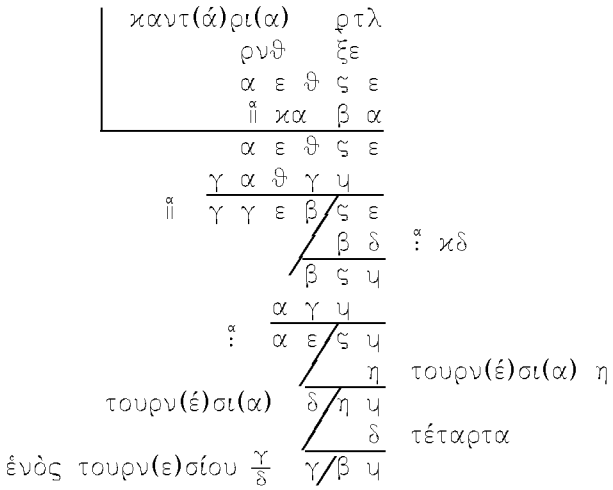
---

1 ῥέτουλα] hic et passim $\overset{\tau\lambda}{\rho}$ **C** ἀπὸ τὸ] ὁ πο τὸ **C** 4/5 δεκάδος] $\overset{\alpha}{\iota}$δος **C**

in inferiore marg. fol. 43^{r}: + ἐὰν ποιῇς τὸ τζάκισμα τῶν τουρνεσίων τέταρτα ἢ πέμπτα, οὐ λαμβάνεις ὅλον τὸ τζάκισμα, ἀλλὰ ἀπομένει καὶ μέρος τι, ὃ οὐ λαμβάνεις. εἰ οὖν θέλεις ὅλον τὸ τζάκισμα λαβεῖν, θέτε ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς τὰ δύο γράμματα τοῦ τζακίσματος, ἅπερ κόπτεις, κάτωθεν δὲ τῆς κεραίας γραμμῆς θέτε α ι η΄ ῥέτουλα, ἅπερ ἐστὶ καντάριον ἕνα. καὶ σχίσον τὸ τζάκισμα καὶ τὰ α ι η΄ ῥέτουλα, τουτέστι σχίσον τὰ $\frac{\gamma\ \beta}{\alpha\ \iota\ \eta}$, καὶ γίνονται $\frac{\eta}{\beta\ \varepsilon}$ ἑνὸς τουρνεσίου. τὰ γ β΄ οὖν τζακίσματα, ἅπερ ἔκοψας, ἐστὶ $\frac{\eta}{\beta\ \varepsilon}$ ἑνὸς ἀκεραίου τουρνεσίου.

ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τζακισμάτων ποίησον.

31 ἠγόρασεν] ἐγόρασεν **C**



ματα μετὰ τῶν κάτωθεν κα΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα ἓξ γράμματα γ γ ε β ς ε΄. κόψε πάλιν δύο γράμματα ἐξ αὐτῶν, ὡς εἴπομεν ποιεῖν πάντοτε, καὶ ἀπομένοσι τὰ παρόντα τέσσερα γράμματα γ γ ε β΄, ἅπερ δηλῶσι ὑπέρπυρα χρυσὰ ,γτνβ΄. τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, οὕτως κείμενα ς ε΄ δηλῶσι ξε΄. θὲς κάτωθεν τῶν ξε΄ ἑνὸς ὑπερπύρου κουκκιά, ἅπερ – ὡς εἴπομεν – ἐστὶ κδ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ξε΄ μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα τέσσερα γράμματα α ε ς ι΄. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένοσι τὰ παρόντα δύο γράμματα α ε΄, ἅπερ δηλῶσι κουκκιὰ ιε΄. ἔχεις μέχρι τοῦ νῦν ὑπέρπυρα ,γτνβ΄ καὶ κουκκιὰ ιε΄. τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, οὕτως κείμενα ς ι΄ δηλῶσι ξ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ξ΄ μετὰ τῶν η΄ τουρν(ε)σ(ίων) τοῦ ἑνὸς κουκκιοῦ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα τρία γράμματα δ η ι΄. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένει τὸ παρὸν γράμμα δ΄, ὅπερ δηλοῖ τουρν(έ)σ(ια) δ΄. ἔχεις μέχρι τοῦ νῦν ὑπέρπυρα ,γτνβ΄ κουκκιὰ ιε΄ καὶ τουρν(έ)σ(ια) δ΄. τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, οὕτως κείμενα η ι΄ δηλῶσι π΄. εἰσὶ δὲ τουρν(έ)σ(ια), καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχεις ἔλαττο χάραγμαν τουρν(ε)σί(ου), πολλ(α)πλασίασον τὰ π΄ τουρν(έσια) μετὰ τῶν δ΄, ἅπερ ἐστὶ τέταρτα ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου), καθὼς οὕτως καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου ἐποίησας, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα τρία γράμματα γ β ι΄. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένει τὸ παρὸν γράμμα γ΄, ὅπερ δηλοῖ ἑνὸς ἀκεραίου τουρν(ε)σί(ου) $\frac{\gamma}{\delta}$. καὶ ἰδοὺ τὰ ρνθ΄ καντ(ά)ρ(ια) καὶ ῥέτουλα ξε΄, ἕκαστον καντ(ά)ρι εἰς ὑπέρπυρα κα΄, γίνονται ὑπέρπυρα ,γτνβ΄ κουκκιὰ ιε΄ τουρν(έ)σι(α) δ΄ καὶ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου) $\frac{\gamma}{\delta}$.

οϑ Περὶ τοῦ ἐὰν τὸ καντ(ά)ρ(ι) χρῄζῃ ὑπέρπυρα ιζ΄, τὰ κβ΄ ῥέτουλα πόσα ὑπέρπυρα χρῄζοσι, πρόχειρος εὕρεσις

Ἔστω ὅτι ἕκαστον καντ(ά)ρ(ι) χρῄζει ὑπέρπυρα χρυσά, ἃ καὶ μεγάλα καλοῦνται, ιζ΄. ζητεῖς δέ, ἐὰν τὸ καντ(ά)ρ(ι) χρῄζῃ ὑπέρπυρα ιζ΄, τὰ κβ΄ ῥέτουλα πόσα ὑπέρπυρα χρῄζοσι· τὸ γὰρ καντ(ά)ρ(ι) ἐστὶ ῥέτουλα ρ΄.

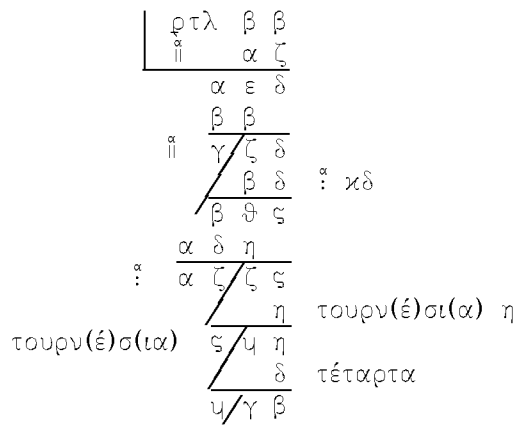
θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ κβ΄ ῥέτουλα, κάτωθεν δὲ θὲς τὰ ιζ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ εἴπομεν, ὅτι τὸ καντ(ά)ρ(ι) χρῄζει ὑπέρπυρα ιζ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ κβ΄ ῥέτουλα μετὰ τῶν ιζ΄ ὑπερπύρων ὡς καὶ ἐπὶ τῶν προγενεστέρων, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα τρία γράμματα α ε δ΄. κόψε πάλιν καὶ ἐνταῦθα δύο γράμματα, ἐπεὶ καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος δύο γράμματα ἐπὶ πάντων κόπτονται ὡς καὶ ἐπὶ τῶν πρώτων, καὶ ἀπομένει τὸ παρὸν γράμμα γ΄, ὅπερ δηλοῖ ὑπέρπυρα γ΄. τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, οὕτως κείμενα ζ δ΄ δηλῶσι οδ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ οδ΄ μετὰ

---

23 χάραγμαν τουρν(ε)σί(ου)] **fort. etiam** χάραγμαν τουρν(ε)σί(ων)

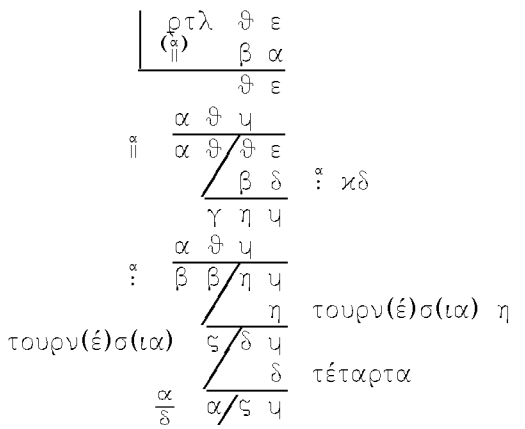
in sinistro marg. fol. 43^{v} de ultima ratione capitis 78: ἀντὶ τῶν $\frac{\gamma}{\delta}$ μᾶλλον λάβε $\frac{\eta\,\iota}{\alpha\,\iota\,\iota}$, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\delta}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρνεσίου.

τῶν κδ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς μεγάλου ὑπερπύρου, καθὼς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου οὕτως ἐποίησας, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα τέσσερα γράμματα α ζ ζ ς΄. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένοσι τὰ παρόντα δύο γράμματα α ζ΄, ἅπερ δηλῶσι κουκκιὰ ιζ΄. ἔχεις μέχρι τοῦ νῦν ὑπέρπυρα γ΄ κουκκιὰ ιζ΄. τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, οὕτως κείμενα ζ ς΄ δηλῶσι ος΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ος΄ μετὰ τῶν η΄ τουρν(ε)σ(ίων) τοῦ ἑνὸς κουκκιοῦ, καθὼς καὶ ἐπὶ τῶν προγενεστέρων οὕτως ἐποίησας, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα τρία γράμματα ς υ η΄. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένει τὸ παρὸν γράμμα ς΄, ὅπερ δηλοῖ τουρν(έ)σι(α) ς΄. ἔχεις μέχρι τοῦ νῦν ὑπέρπυρα γ΄ κουκκιὰ ιζ΄ τουρν(έ)σι(α) ς΄. τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, οὕτως κείμενα υ η΄ δηλῶσι η΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ η΄ μετὰ τῶν δ΄, ἅπερ ἐστὶ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου) τέταρτα, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν προγενεστέρων, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα τρία γράμματα υ γ β΄. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένει τὸ παρὸν γράμμα υ΄, ὅπερ δηλοῖ οὐδέν. καὶ ἰδοὺ ἐὰν τὸ καντ(ά)ρ(ι) χρῄζῃ ὑπέρπυρα ιζ΄, τὰ κβ΄ ῥέτουλα χρῄζοσι ὑπέρπυρα γ΄ κουκκιὰ ιζ΄ τουρν(έ)σι(α) ς΄.



Ἐὰν δὲ πάλιν τὸ καντ(ά)ρ(ι) χρῄζῃ ὑπέρπυρα κα΄, τὰ Cε΄ ῥέτουλα πόσα ὑπέρπυρα χρῄζοσι;

θὲς ἄνωθεν τὰ Cε΄ ῥέτουλα, κάτωθεν δὲ τὰ κα΄ ὑπέρπυρα. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ Cε΄ ῥέτουλα μετὰ τῶν κα΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τέσσερα γράμματα. κόψε δύο γράμματα καὶ ἀπομένοσι δύο γράμματα, ἅπερ δηλῶσι ὑπέρπυρα ιϑ΄. ἀπομένοσι καὶ δύο γράμματα, ἅπερ δηλῶσι Cε΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τέσσερα γράμματα. κόψε δύο γράμματα καὶ ἀπομένοσι δύο



---

in sinistro marg. fol. 43^{v} de ratione primi propositi huius capitis: λάβε $\frac{\eta}{\alpha\,\upsilon\,\upsilon}$, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\beta}{\beta\,\varepsilon}$ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου).

in inferiore marg. fol. 43^{v} de rationibus secundi propositi capitis antecedentis et primi propositi huius capitis: + γίνωσκε, ὅτι ἡ παροῦσα μεταχείρισις γίνεται διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν. δοκεῖ δὲ ἑτέρα τις μεταχείρισις· οὐδὲν γὰρ ἄλλο ποιεῖς ἢ ὅτι ἐὰν τὸ καντάριον, ὅπερ ἐστὶ ῥέτουλα ρ΄, χρῄζῃ ὑπέρπυρα κα΄, τὰ ρνϑ΄ καντ(ά)ρι(α) καὶ ῥέτουλα ξε΄ πόσα χρῄζοσι, καὶ ἐὰν ρ΄ ῥέτουλα χρῄζωσι ὑπέρπυρα ιζ΄, τὰ κβ΄ ῥέτουλα πόσα χρῄζοσι – καὶ ἑξῆς ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίων ζητημάτων.

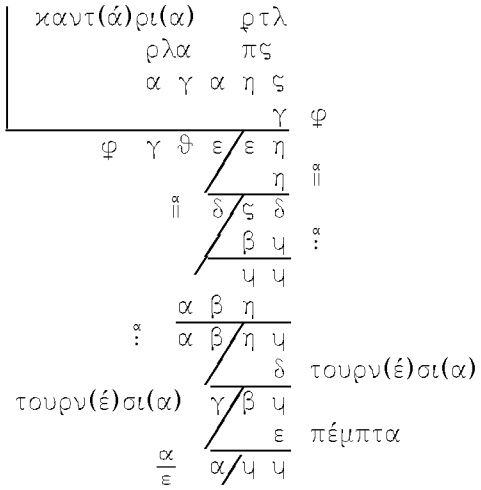
in sinistro marg. fol. 43^{v} de ratione secundi propositi huius capitis: ἀντὶ τοῦ $\frac{\alpha}{\delta}$ μᾶλλον λάβε $\frac{\delta\,\upsilon}{\alpha\,\upsilon\,\upsilon}$, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\beta}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρνεσίου.

γράμματα, ἅπερ δηλῶσι κουκκιὰ κβ΄. ἀπομέν(ο)σι καὶ δύο γράμματα, ἅπερ δηλῶσι π΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν η΄ τουρν(ε)σ(ίων) τοῦ ἑνὸς κουκκιοῦ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τρία. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ τουρν(έ)σ(ια) ς΄. ἀπομένοσι καὶ δύο γράμματα, ἅπερ δηλῶσι μ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ τετάρτων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τρία. κόψε πάλιν γράμματα δύο καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου) $\frac{\alpha}{\delta}$. καὶ ἰδοὺ ἐὰν τὸ καντ(ά)ρ(ι) χρῄζῃ ὑπέρπυρα κα΄, τὰ ϛε΄ ῥέτουλα χρῄζοσ(ι) ὑπέρπυρα ιϑ΄ κουκκιὰ κβ΄ τουρν(έ)σ(ια) ς΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου).

π Περὶ τοῦ πῶς ταῦτα καὶ μετὰ φλουριῶν καὶ μικρῶν ὑπερπύρων καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου χαράγματος χρήσιμά εἰσι

Τὰ δύο ταῦτα ζητήματα τῶν καντ(α)ρί(ων) τε καὶ ῥετούλων οὐllκ ἐπὶ τῶν μεγάλων ὑπερπύρων, ὧν καὶ χρυσῶν ὀνομάζομεν, μόνον χρήσιμα, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ φλουριῶν καὶ μικρῶν ὑπερπύρων καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου χαράγματος χρήσιμα εὑρεθήσονται. f. 44^{r}

ἔστω τοίνυν ὅτι ἀγόρασέν τις καντ(ά)ρ(ια) ρλα΄ καὶ ῥέτουλα πς΄, ἕκαστον καντ(ά)ρ(ι) εἰς φλουριὰ γ΄. τὸ δὲ φλουρὶ ἔστω ὅτι χρῄζει μικρὰ ὑπέρπυρα η΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται.



θὲς ἄνωθεν πάλιν τὰ ρλα΄ καντ(ά)ρ(ια) καὶ πς΄ ῥέτουλα, κάτωθεν δὲ περὶ τὸ τέλος θὲς τὰ γ΄ φλουριά. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν πέντε γράμματα μετὰ τῶν γ΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς πέντε γράμματα. κόψε δύο γράμματα καὶ ἀπομένοσι τὰ παρόντα τρία γράμματα γ ϑ ε΄, ἅπερ δηλῶσι φλουριὰ τϛε΄. τὰ δὲ δύο γράμματα, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι νη΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ νη΄ μετὰ τῶν η΄ ὑπερπύρων τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τρία. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένει τὸ παρὸν γράμμα δ΄, ὅπερ δηλοῖ ὑπέρπυρα δ΄. ἔχεις μέχρι τοῦ νῦν φλουριὰ τϛε΄ καὶ ὑπέρπυρα δ΄. τὰ δὲ δύο, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι ξδ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ξδ΄ μετὰ τῶν κ΄, ἅπερ ἐστὶ ἑνὸς μικροῦ ὑπερπύρου κουκκιά, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τέσσερα. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένοσι τὰ παρόντα δύο γράμματα α β΄, ἅπερ δηλῶσι κουκκιὰ ιβ΄. ἔχεις μέχρι τοῦ νῦν φλουριὰ τϛε΄ ὑπέρπυρα δ΄ κουκκιὰ ιβ΄. τὰ δὲ δύο, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι π΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ τουρν(εσίων) τοῦ ἑνὸς κουκκιοῦ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τρία. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένει τὸ παρὸν γράμμα γ΄, ὅπερ δηλοῖ τουρν(έ)σ(ια) γ΄. ἔχεις μέχρι τοῦ νῦν φλουριὰ τϛε΄ ὑπέρπυρα δ΄ κουκκιὰ ιβ΄ τουρν(έ)σ(ια) γ΄. τὰ δύο δέ, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι κ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ κ΄ μετὰ τῶν ε΄, ἅπερ ἐστὶ πέ[ν]μπτα – τὰ γὰρ ἐξ αὐτῶν ἐξερχόμενα πέ[ν]μπτα εἰσί – καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς

---

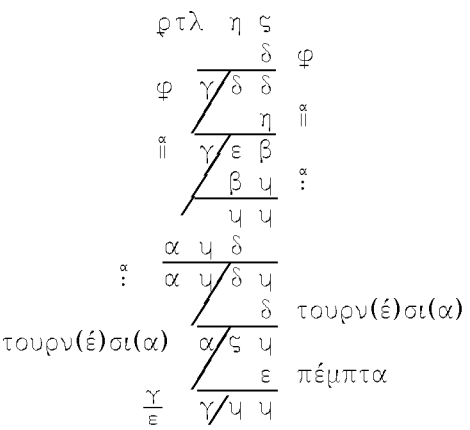
12 οὐllκ ἐπὶ] οὐ ll καὶ πει **C**

in dextro marg. fol. 44^{r} de ratione: ἀντὶ τοῦ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ λάβε $\frac{\beta\ \upsilon}{\alpha\ \upsilon\ \upsilon}$, ἅπερ ἐστὶ πάλ(ιν) $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου).

γράμματα τρία. κόψε πάλιν γράμματα δύο καὶ ἀπομένει τὸ παρὸν γράμμα α΄, ὅπερ δηλοῖ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου). καὶ ἰδοὺ τὰ ρλα΄ καντ(ά)ρι(α) καὶ πς΄ ῥέτουλα, ἕκαστον καντ(ά)ρι εἰς φλουριὰ γ΄, γίνονται φλουριὰ τϛε΄ ὑπέρπυρα δ΄ κουκκιὰ ιβ΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου).

πα Περὶ τοῦ ἐὰν τὸ καντ(ά)ρι χρῄζῃ φλουριὰ δ΄, τὰ πς΄ ῥέτουλα πόσα φλουριὰ καὶ μικρὰ ὑπέρπυρα χρῄζει

Ἔστω δὲ πάλιν ἐὰν τὸ καντ(ά)ρι χρῄζῃ φλουριὰ δ΄, ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα η΄, τὰ πς΄ ῥέτουλα ζητεῖς εἰδέναι, πόσα φλουριὰ καὶ μικρὰ ὑπέρπυρα χρῄζ(ο)σι. θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ πς΄ ῥέτουλα, κάτωθεν δὲ τὰ δ΄ φλουριά. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ πς΄ ῥέτουλα μετὰ τῶν δ΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τρία. κόψε δύο γράμματα καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλ(οῖ) φλουριὰ γ΄. τὰ δὲ δύο, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι μδ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν η΄ ὑπερπύρων τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τρία. κόψε δύο γράμματα καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ ὑπέρπυρα γ΄. τὰ δὲ δύο, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι νβ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τέσσερα. κόψε δύο γράμματα καὶ ἀπομένουσι δύο γράμματα, ἅπερ δηλῶσι κουκκιὰ ι΄. τὰ δὲ δύο, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι μ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ τουρν(ε)σί(ων) τοῦ ἑνὸς κουκκιοῦ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τρία. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ τουρν(έ)σ(ι) α΄. τὰ δὲ δύο, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι ξ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν ε΄, ἅπερ ἐστὶ πέμπτα, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τρία. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου). καὶ ἰδοὺ τὰ πς΄ ῥέτουλα χρῄζοσι φλουριὰ γ΄ ὑπέρπυρα γ΄ κουκκιὰ ι΄ τουρν(έ)σ(ι) α΄ καὶ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου).



εἰ δὲ φλουριὰ οὐκ ἔχεις τιμῆσαι τὸ καντ(ά)ρι, ἀλλὰ μόνον ὑπέρπυρα μικρὰ ἄνευ φλουριῶν, θὲς πάλιν, ὅσα ὑπέρπυρα οἶδας, ὅτι χρῄζει τὸ καντ(ά)ρι, καὶ ποίησον ὡς καὶ ἐπὶ τῶν παρόντων καὶ εὑρήσεις καὶ οὕτως καλῶς τὸ ζητούμενον.

πβ Περὶ τοῦ πῶς δεῖ ποιεῖν, ὁπόταν ζητῇς καντ(ά)ρι(α) μὲν πλείω τῶν ρ΄, ῥέτουλα δὲ ἐλάττονα τῶν δέκα

Δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, ὡς ὁπόταν ζητῇς καντ(ά)ρι(ά) τινα, ὅσα ἂν ζητῇς, κἄντε πλείω ἐστὶ τῶν ρ΄ κἄντε ἐλάττω, ζητεῖς δὲ καὶ ῥέτουλα πλείω τῶν ι΄ ἢ καὶ ι΄, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται τὰ καντ(ά)ρι(α) καὶ τὰ ῥέτουλα, ὅσα ἂν ζητῇς, καὶ εἰς ὅση(ν) ἄρα βούλ(ε)σαι ἔχειν τιμὴν τὸ καντ(ά)ρι – κἄντε πλεῖο τῶν ι΄ ὑπερπύρων κἄντε ἔλαττο – εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον, ὡς οἶδας διὰ τῶν προτ(ε)θέντων ὑποδειγμάτων.

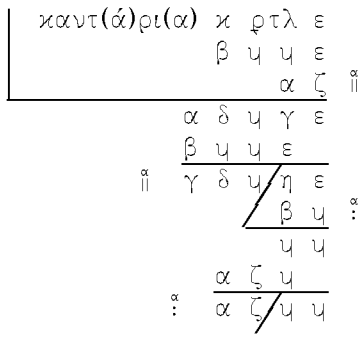
ὅταν δὲ ζητῇς καντ(ά)ρι(α) μέν, ὅσα βούλ(ει), ῥέτουλα δὲ ἐλάττω τῶν ι΄, ποίησον οὕ-

---

in dextro marg. fol. 44^{r} de ratione capitis 81: ἀντὶ τῶν $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ λάβε $\frac{\varsigma\ \upsilon}{\alpha\ \upsilon\ \upsilon}$, ἅπερ ἐστὶ πάλ(ιν) $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου).

τως καὶ εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον.

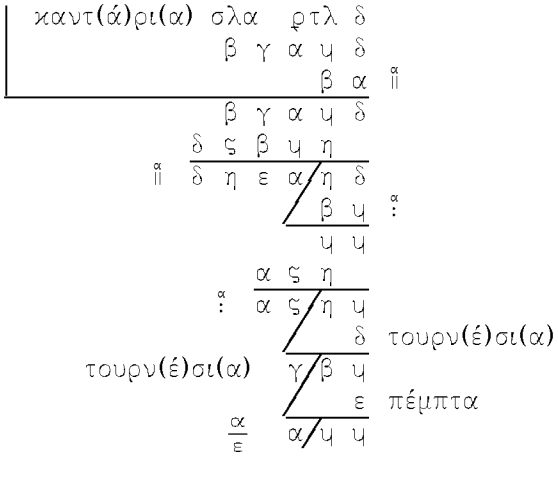
ἔστω τοίνυν ὅτι ζητεῖς καντ(άρι)α(ν) κ΄ καὶ ῥέτουλα ε΄, ἕκαστον καντ(άρι)ον ὑπέρπυρα ιζ΄, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται.



θὲς ἄνωθεν τὰ κ΄ καντ(άρι)α(ν), ὡς εἴωθας ποιεῖν, τὰ δὲ ε΄ ῥέτουλα – θὲς ταῦτα οὐκ εἰς τρίτον τόπον, ἀλλ᾽ εἰς τέταρτον· εἰς δὲ τὸν τρίτον τόπον θὲς υ΄. κάτωθεν δὲ περὶ τὸ τέλος θὲς τὰ ιζ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ εἴπομεν, ὅτι χρῄζει ἕκαστον καντ(άρι)ον ὑπέρπυρα ιζ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ιζ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ἄνωθεν τεσσάρων γραμμάτων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς πέντε γράμματα. κόψε ὡς σύνηθες δύο γράμματα καὶ ἀπομένουσι τὰ παρόντα τρία γράμματα γ δ υ΄, ἅπερ δηλῶσι ὑπέρπυρα τμ΄. τὰ δὲ δύο, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι πε΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς μικροῦ ὑπερπύρου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τέσσερα. κόψε πάλιν δύο γράμματα καὶ ἀπομένουσι τὰ παρόντα δύο γράμματα α ζ΄, ἅπερ δηλῶσι κουκκιὰ ιζ΄. τὰ δὲ δύο, ἅπερ ἔκοψας, ἐστὶ οὐδέν. καὶ ἰδοὺ τὰ κ΄ καντ(άρι)α(ν) καὶ ε΄ ῥέτουλα – ἕκαστον καντ(άρι)ο(ν) ὑπέρπυρα μικρὰ ιζ΄ – ‖ γίνονται ὑπέρπυρα τμ΄ κουκκιὰ ιζ΄. f. 44^{v}

Ἔστω δὲ πάλιν καντ(άρι)α(ν) σλα΄ καὶ ῥέτουλα δ΄, ἕκαστον καντ(άρι)ον εἰς ὑπέρπυρα κα΄· ζητεῖς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται.

θὲς πάλιν ἄνωθεν τὰ σλα΄ καντ(άρι)α(ν), θὲς δὲ πάλιν εἰς πέμπτον τόπον τὰ δ΄ ῥέτουλα, εἰς δὲ τὸν τέταρτον τόπον θὲς υ΄. θὲς δὲ κάτωθεν καὶ τὰ κα΄ ὑπέρπυρα. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ κα΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ἄνωθεν πέντε γραμμάτων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα ἕξ. κόψε δύο γράμματα καὶ ἀπομένουσι τὰ παρόντα τέσσερα γράμματα δ η ε α΄, ἅπερ δηλῶσι ,δωνα΄. τὰ δὲ δύο, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι πδ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τέσσερα. κόψε πάλιν γράμματα δύο καὶ ἀπομένουσι τὰ παρόντα δύο γράμματα α ς΄, ἅπερ δηλῶσι κουκκιὰ ις΄. τὰ δὲ δύο, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι π΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ τουρν(εσίων) τοῦ ἑνὸς κουκκιοῦ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τρία, ἅπερ δηλῶσι τκ΄. κόψε πάλιν γράμματα δύο καὶ ἀπομένει τὸ παρὸν γράμμα γ΄, ὅπερ δηλοῖ τουρν(έ)σ(ια) γ΄. τὰ δὲ δύο, ἅπερ ἔκοψας, δηλῶσι κ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν ε΄, ἅπερ ἐστὶ πέμπτα, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γράμματα τρία. κόψε πάλιν γράμματα δύο καὶ ἀπομένει τὸ παρὸν γράμμα α΄, ὅπερ δηλοῖ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου). καὶ ἰδοὺ τὰ σλα΄ καντ(άρι)α(ν) καὶ ῥέτουλα δ΄ – ἕκαστον καντ(άρι)ον εἰς ὑπέρπυρα κα΄ – γίνονται ὑπέρπυρα ,δωνα΄ κουκκιὰ ις΄ τουρν(έ)σ(ια) γ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου).



---

6 οὐκ εἰς] οὐχὶς **C**

ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτων ὅμοιον ζήτ(η)μαν – ὁπόταν ἐστὶ τὰ ῥέτουλα ἐλάττω τῶν ι΄, τουτέστι θ΄ ἢ καὶ η΄ ἢ καὶ ζ΄ καὶ ἔτι ἐλάττω – πρόσθετε υ΄ πρὸ τῶν ῥετούλων τῶν ἐλάττω ὄντα τῶν ι΄ καὶ πολλ(α)πλασίαζε τὰ ὑπέρπυρα τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς καντ(α)ρί(ου), ὡς ἐπὶ τῶν δηλωθέντων ὑποδειγμάτων μεμάθηκας. οὕτως δὲ ποιῶν εὕρες καλῶς τὸ ζητούμενον.

Τὸ δὲ ἕτερον ζήτ(η)μαν, ὅπερ εἴπομεν, ὅτι ἐὰν τὸ καντ(ά)ρ(ι) χρῄζῃ ὑπέρπυρα τόσα, τὰ με΄ ῥέτουλα – ἢ ὅσα ἂν ὑποθῇς εἶναι – πόσα ὑπέρπυρα γίνονται· τοῦτο ἐπὶ πάντων ἐστὶ ὀρθόν, κἂν ὅπως ἂν ζητῇς τοῦτο, κἄντε πλείω τῶν ι΄ ῥετούλων ζητῇς κἄντε ἐλάττω. διὸ οὐδὲ χρεία σοί ἐστι προσθεῖναι υ΄ ἐπὶ τῶν ἐλαττό<νων> τῶν ι΄, ὡς ἐπὶ τοῦ πρώτου ζητήματος εἴπομεν, ἀλλὰ κἄντε πλείω τῶν ι΄ ζητῇς κἄντε ἐλάττω, μηδενὸς ἑτέρου ἐπιπροσθέντος, ἀλλὰ μόνον τὰ ῥέτουλα καὶ τὰ ὑπέρπυρα, ὅσα ἂν χρῄζῃ ἕκαστον καντ(ά)ρι, εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον διὰ τῆς δηλωθείσης μεταχειρίσεως.

πγ Περὶ ἐὰν ,α΄ λίτραι χρῄζωσι φλουριὰ οε΄, ἢ ὅσα ἂν εἴπῃς, τὸ κηντ(η)ν(ά)ρι καὶ τὸ δεκάρι καὶ ἡ μον(ά)ς – πόσα χρῄζουσι ἀναλόγως

Ἔστω ὅτι λίτραι ,α΄ χρῄζουσι φλουριὰ οε΄, ἕκαστον δὲ φλουρὶ ὑπέρπυρα η΄. ἐὰν οὖν λίτραι ,α΄ χρῄζωσι φλουριὰ οε΄, τὸ κηντ(η)ν(ά)ρι, ὃ καὶ καντ(ά)ρι καλεῖται, τουτέστι λίτραι ρ΄, καὶ τὸ δεκάρι, τουτέστι λίτραι ι΄, καὶ ἡ μονάς, τουτέστι λίτρα α΄, – ζητεῖς εἰδέναι, πόσα χρῄζει ἑκάστη τάξις αὐτῶν ἀναλόγως. ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι οὕτως.

θὲς ἄνωθεν λίτρας ,α΄, ἔμπροσθεν δὲ τούτων τὰ οε΄ φλουριῶν. κάτωθεν δὲ τῶν ,α΄ λιτρῶν θὲς τὸ καντ(ά)ρι, τουτέστι λίτρας ρ΄, ἔμπροσθεν δὲ τῶν ρ΄ λιτρῶν θὲς πάλιν τὰ οε΄ φλουριὰ τῶν ,α΄ λιτρῶν. καὶ ὥσπερ λείπονται τὰς ρ΄ λίτρας γράμμα ἓν πρὸς τὸ γενέσθαι λίτραι ,α΄ – αἱ μὲν γὰρ ρ΄ ἐστὶ τρία γράμματα, αἱ δὲ ,α΄ τέσσερα – οὕτως καὶ σὺ κόψε γράμμα ἓν ἐκ τῶν οε΄ φλουριῶν καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ φλουριὰ ζ΄. τὸ δὲ ἕτερον, ὅπερ ἔκοψας, τουτέστι τὰ ε΄, ἐστὶ $\frac{\varepsilon}{\iota}$ ἑνὸς φλουριοῦ. τὰ δὲ $\frac{\varepsilon}{\iota}$ ἐστὶ μισόν, καὶ ἐπεὶ τὸ φλουρὶ χρῄζει ὑπέρπυρα η΄, τὰ $\frac{\varepsilon}{\iota}$, τουτέστι τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν η΄ ὑπερπύρων, ἐστὶ ὑπέρπυρα δ΄. χρῄζει δὲ τὸ καντ(ά)ρι φλουριὰ ζ΄ καὶ ὑπέρπυρα δ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ξ΄. θὲς δὲ κάτωθεν τῶν ,α΄ καὶ τῶν ρ΄ λιτρῶν τὸ δεκ(ά)ρι, τουτέστι λίτρας ι΄, ἔμπροσθεν δὲ τῶν ι΄ λιτρῶν θὲς τὰ ξ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ χρῄζει τὸ καντ(ά)ρι. ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν καντ(ά)ρι ἔχει γράμματα τρία, τὸ δεκ(ά)ρι δὲ δύο, κόψε πάλιν γράμμα ἓν ἐκ τῶν ξ΄ ὑπερπύρων καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ ὑπέρπυρα ς΄. χρῄζει δὲ τὸ δεκάρι ὑπέρπυρα ς΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρκ΄. θὲς δὲ κάτωθεν τῶν ,α΄ καὶ ρ΄ καὶ ι΄ λιτρῶν λίτρα α΄, ἔμπροσθεν δὲ ταύτης θὲς τὰ ρκ΄ κουκκιὰ τῶν ς΄ ὑπερπύρων, ἃν χρῄζει τὸ δεκάρι. ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν δεκάρι ἔχει γράμματα δύο, ἡ δὲ μονὰς ἕνα, κόψε πάλιν γράμμα ἓν ἐκ τῶν ρκ΄ κουκκιῶν καὶ ἀπομένουσι γράμματα δύο, ἅπερ δηλῶσι κουκκιὰ ιβ΄. χρῄζει δὲ λίτρα α΄ κουκκιὰ ιβ΄. καὶ ἰδοὺ ἐὰν λίτραι ,α΄ χρῄζωσι φλουριὰ οε΄, αἱ μὲν ρ΄ χρῄζουσι φλουριὰ ζ΄ καὶ ὑπέρπυρα δ΄, αἱ δὲ ι΄ χρῄζ(ο)υσι ὑπέρπυρα ς΄, ἡ δὲ α΄ λίτρα χρῄζει κουκκιὰ ιβ΄.

| | | |

Ἔστω δὲ πάλιν ,α΄ λίτραι χρῄζοσι φλουριὰ ρν΄. θὲς τὰ ρν΄ φλουριὰ καὶ ἔμπροσθεν τῶν ρ΄ λιτρῶν. κόψε οὖν γράμμα ἓν ἐκ τῶν ρν΄ φλουριῶν καὶ ἀπομένουσι γράμματα δύο, ἅπερ δηλῶσι φλουριὰ ιε΄. χρῄζει δὲ τὸ καντ(ά)ρι φλουριὰ ιε΄. θὲς ταῦτα τὰ ιε΄ φλουριὰ ἔμπροσθεν τῶν ι΄ λιτρῶν. κόψε δὲ πάλιν γράμμα ἓν ἐκ τῶν ιε΄ φλουριῶν καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ φλουρὶ α΄. τὸ δὲ ἕτερον, ὅπερ ἔκοψας, τουτέστι τὰ ε΄, ἐστὶ $\frac{ε}{ι}$ ἑνὸς φλουριοῦ. ἐπεὶ δὲ τὸ φλουρὶ χρῄζει ὑπέρπυρα η΄, τὰ $\frac{ε}{ι}$ τῶν η΄ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρα δ΄. χρῄζει δὲ τὸ δεκάρι φλουρὶ α΄ καὶ ὑπέρπυρα δ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ιβ΄. θὲς τὰ ιβ΄ ὑπέρπυρα ἔμπροσθεν τῆς α΄ λίτρας. κόψε δὲ πάλιν γράμμα ἓν καὶ ἀπομένει γράμμα ἕν, ὅπερ δηλοῖ ὑπέρπυρον α΄. τὸ δὲ ἕτερον, ὅπερ ἔκοψας, τουτέστι τὰ β΄, ἐστὶ $\frac{β}{ι}$ ἑνὸς ὑπερπύρου. τὰ δὲ $\frac{β}{ι}$ ἐστὶ $\frac{α}{ε}$, τὸ δὲ $\frac{α}{ε}$ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου ἐστὶ κουκκιὰ δ΄. χρῄζει δὲ λίτρα α΄ ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ δ΄. καὶ ἰδοὺ ἐὰν λίτραι ,α΄ χρῄζωσι φλουριὰ ρν΄, αἱ μὲν ρ΄ χρῄζουσι || φλουριὰ ιε΄, αἱ ι΄ δὲ χρῄζουσι φλουρὶ α΄ ὑπέρπυρα δ΄, ἡ δὲ α΄ λίτρα χρῄζει ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ δ΄. f. 45r

χιλιάς	ϡι	α	ψ	ψ	ψ	χρῄζουσι	φ		α	ε	ψ					
καντάρι	ϡι	α	ψ	ψ		χρῄζουσι	φ		α	ε	ψ					
δεκάρι	ϡι	α	ψ			χρῄζουσι	φ			α	ε·	$\frac{ε}{ι}$	ἐστὶ	ΐ	δ	
μονάς	ϡ	α				χρῄζει	ΐ			α	β·	$\frac{β}{ι}$	ἐστὶ	⁝	δ	

ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτων ὅμοιον ζήτ(η)μαν διὰ τῆς παρούσης ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι ἀπὸ τῆς τιμῆς τῶν ,α΄ λιτρῶν, πόσα χρῄζουσι αἱ [ἐ] ρ΄ λίτραι καὶ πόσα αἱ ι΄ καὶ πόσα ἡ α΄ λίτρα, ἀναλόγως ἑκάστη τάξις αὐτῶν.

πδ

Περὶ τοῦ ἐὰν χιλιάδα καὶ ἑκατοντάδα καὶ δεκάδα καὶ μονάδα οἴδας, πόσα χρῄζει ἑκάστη τάξις αὐτῶν, πῶς ἔστι εἰδέναι, πόσα χρῄζ(ο)σι χιλ(ι)άδαι γ΄ καντ(ά)ρι(α) δ΄ δεκάρια ζ΄ καὶ λίτραι ϑ΄

Ἔστω οἴδας, ὅτι ἡ μὲν χιλιάδα χρῄζει φλουριὰ οε΄, τὸ δὲ καντ(ά)ρι φλουριὰ ζ΄ καὶ ὑπέρπυρα δ΄, τὸ δεκάρι δὲ ὑπέρπυρα ς΄, ἡ δὲ μονάς, τουτέστι λίτρα α΄, κουκκιὰ ιβ΄. ζητεῖς δὲ ἀγοράσαι ἢ πωλῆσαι χιλιάδας γ΄ καὶ καντ(ά)ρι(α) δ΄ καὶ δεκάρια ζ΄ καὶ λίτρας ϑ΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα χρῄζουσι ταῦτα πάντα ἀναλόγως.

ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι διὰ τῆς Λατινικῶς λεγομένης τολέτας, ὡς ἂν εἴπῃ τις παρὰ τῆς ἡμετέρας φωνῆς ταυλέτας, δι᾽ ἧς τὰ παιδία σχεδογράφειν εἰώθασι. ἔστι δὲ αὕτη.

Θὲς ,α΄ λιτρῶν φλουριά, τουτέστι οε΄. κάτωθεν δὲ τῆς χιλιάδας θὲς ἑνὸς καντ(α)ρί-(ου) τιμήν, τουτέστι φλουριὰ ζ΄ καὶ ὑπέρπυρα δ΄. κατωτέρω δὲ τούτων θὲς ἑνὸς δεκαρίου τιμήν, τουτέστι ὑπέρπυρα ς΄. κατωτέρω δὲ τούτων θὲς α΄ λίτρας τιμήν, τουτέστι κουκκιὰ ιβ΄. ἔμπροσθεν δὲ τῆς χιλιάδος καὶ τῶν οε΄ φλουριῶν θὲς χιλιάδας γ΄, ἃς ζητεῖς ἀγοράσαι. ὡσαύτως δὲ καὶ ἔμπροσθεν τοῦ καντ(α)ρί(ου) καὶ τῶν ζ΄ φλουριῶν καὶ δ΄ ὑπερπύρων θὲς καντ(ά)ρι(α) δ΄, ἃ ζητεῖς ἀγοράσαι. ὡσαύτως καὶ ἔμπροσθεν τοῦ δεκαρίου καὶ τῶν ς΄

ἡ χιλ(ι)άδα	φ	ζ	ε			χιλιάδαι	γ	φ	β	β	ε					
τὸ καντ(ά)ρι	φ	ζ			ΐ	δ	καντ(ά)ρι(α)	δ	φ			γ	ψ			
τὸ δεκάρι					(ϡ)	ς	δεκάρια	ζ	φ			ε		ΐ	β	
ϡ α			⁝	α	β		ϡ μον(ά)δος	ϑ	ΐ					ΐ	ε	⁝ η
							ὁμοῦ		φ	β	ς	ψ		ΐ	ζ	⁝ η

---

22 χιλιάδα] ,αδὰ **C** ἑκατοντάδα] ρδὰ **C** δεκάδα] ιδὰ **C** μονάδα] αδὰ **C** οἴδας **(ind.)**] εἴδᾶς **C** 30 σχεδογράφειν] σκεδόγραφεὶν **C**

ὑπερπύρων θὲς δεκάρια ζ΄, ἃ ζητεῖς ἀγοράσαι. ὡσαύτως καὶ ἔμπροσθεν τῆς α΄ λίτρας καὶ τῶν ιβ΄ κουκκιῶν θὲς τὰς θ΄ λίτρας, ἃς ζητεῖς ἀγοράσαι.

πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ οε΄ φλουριὰ τῆς χιλιάδος μετὰ τῶν γ΄ χιλιάδων, ὧν ζητεῖς ἀγοράσαι· τρὶς οὖν φλουριὰ οε΄ γίνονται φλουριὰ σκε΄. θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν τῶν γ΄ χιλιάδων. καὶ ἰδοὺ αἱ γ΄ χιλιάδαι χρῄζουσι φλουριὰ σκε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ζ΄ φλουριὰ καὶ ὑπέρπυρα δ΄ τοῦ καντ(α)ρί(ου) μετὰ τῶν δ΄ καντ(α)ρί(ων), ὧν ζητεῖς ἀγοράσαι· δ΄κις οὖν φλουριὰ ζ΄ γίνονται φλουριὰ κη΄ καὶ δ΄κις ὑπέρπυρα δ΄ γίνονται ὑπέρπυρα ις΄, ἅπερ ἐστὶ φλουριὰ β΄ – ὁμοῦ φλουριὰ λ΄. θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν τῶν δ΄ καντ(α)ρί(ων). καὶ ἰδοὺ τὰ δ΄ καντ(ά)ρι(α) χρῄζουσι φλουριὰ λ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ ς΄ ὑπέρπυρα τοῦ δεκαρίου μετὰ τῶν ζ΄ δεκαρίων, ὧν ζητεῖς ἀγοράσαι· ζ΄κις οὖν ὑπέρπυρα ς΄ γίνονται ὑπέρπυρα μβ΄, καὶ ἐπεὶ ἕκαστον φλουρὶ χρῄζει ὑπέρπυρα η΄, τὰ μβ΄ ὑπέρπυρά ἐστι φλουριὰ ε΄ καὶ ὑπέρπυρα β΄. θὲς οὖν ταῦτα ἔμπροσθεν τῶν ζ΄ δεκαρίων. καὶ ἰδοὺ τὰ ζ΄ δεκάρια χρῄζουσι φλουριὰ ε΄ καὶ ὑπέρπυρα β΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ ιβ΄ κουκκιὰ τῆς α΄ λίτρας μετὰ τῶν θ΄ λιτρῶν, ὧν ζητεῖς ἀγοράσαι· θ΄κις οὖν κουκκιὰ ιβ΄ γίνονται κουκκιὰ ρη΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ε΄ κουκκιὰ η΄. θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν τῶν θ΄ λιτρῶν εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν. καὶ ἰδοὺ αἱ θ΄ λίτραι χρῄζουσι ὑπέρπυρα ε΄ καὶ κουκκιὰ η΄.

ἕνωσον ταῦτα πάντα καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ σξ΄ καὶ ὑπέρπυρα ζ΄ καὶ κουκκιὰ η΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι λίτραι ,γυοθ΄, τουτέστι χιλ(ι)άδαι γ΄ καντ(ά)ρι(α) δ΄ δεκάρια ζ΄ λίτραι θ΄, χρῄζουσι φλουριὰ σξ΄ καὶ ὑπέρπυρα ζ΄ καὶ κουκκιὰ η΄.

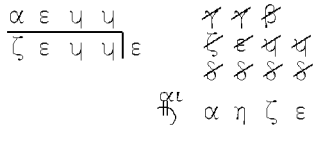
ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτ(η)μαν, ὅσον ἂν χιλιάδων καὶ καντ(α)ρί(ων) καὶ δεκαρίων καὶ μονάδων ἔχῃς ζητῆσαι, διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως τῆς τολέτας ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

πε Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα ἔχεις κερδ(ῆ)σαι διὰ τὸ δοῦναι τὴν τῶν ιε΄ οὐγγιῶν λίτρα(ν) εἰς λίτρα(ν) οὐγγιῶν ιβ΄ καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν)

Ἔστω ὅτι παρέλαβες πρα<γ>ματείαν τινὰ λιτρῶν ,αφ΄, διὰ καμπανοῦ τοῦ κοινῶς στατερίου ὀνομαζομένου, ἑκάστην λίτρα(ν) εἰς ὑπέρπυρα ε΄, ἑκάστη δὲ λίτρα τοῦ στατερίου [ζυγὸς] ἔστω οὐγγιῶν ιε΄. ἐπώλησας δὲ τὰς ,αφ΄ λίτρας τῶν ἀνὰ ε΄ ὑπερπύρων εἰς ἕτερον καμπανὸν τὸν ἔχοντα ἐφ' ἑκάστης λίτρας οὐγγίας ιβ΄, ὅστις κοινῶς καὶ ιβ΄γγιν καλεῖται, ἑκάστην λίτραν τῶν ,αφ΄ πάλιν εἰς ὑπέρπυρα ε΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσαι λίτραι πλεῖο τῶν ,αφ΄ ἐγένοντο διὰ τὸ δοῦναι τὴν τῶν ιε΄ οὐγγιῶν λίτραν εἰς καμπανὸν οὐγγιῶν ιβ΄ καὶ πόσα ὑπέρπυρα ἐκέρδεσας ἀπὸ ταύτης τῆς αἰτίας, ἧς λέγομεν. ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν.

αἱ δ΄ λίτραι τοῦ στατερίου τῶν ιε΄ οὐγγιῶν γίνονται ε΄ λίτραι τῶν ἀνὰ ιβ΄ οὐγγιῶν, ὧν καὶ ιβ΄γγιν, ὡς εἴπομεν, ὀνομάζεται· δ΄κις γὰρ ιε΄ γίνονται ξ΄ καὶ ε΄κις ιβ΄ γίνονται ξ΄. ἐὰν οὖν αἱ δ΄ λίτραι γίνωνται ε΄, αἱ ,αφ΄ λίτραι πόσαι γίνονται; καὶ ὥσπερ εἰώθαμεν ποιεῖν διὰ τῶν τριῶν, οὕτως καὶ νῦν ποίησον.

πολλ(α)πλασίασον γὰρ τὰς ,αφ΄ λίτρας μετὰ τῶν ε΄ λιτρῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι αἱ δ΄ λίτραι γίνονται ε΄· ε΄κις οὖν ,αφ΄ γίνονται ,ζφ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ λιτρῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ,αωοε΄. καὶ ἰδοὺ ἐγένοντο αἱ ,αφ΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν οὖσαι ιε΄ λίτραι



---

25 οὐγγιῶν] $\overset{\Gamma\Gamma}{o}$ et $\overset{\Gamma\Gamma^{\omega\nu}}{o}$ hic et passim C 30.35 ιβ΄γγιν] pro δωδεκουγγίν, i. e. δωδεκαουγγεῖον 32 ἐκέρδεσας] hic et passim pro ἐκέρδησας C

,αωοε΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ιβ΄, τουτέστι πλεῖο τῶν ,αφ΄ λιτρῶν λίτραι τοε΄. ἐπεὶ δὲ ἑκάστην λίτραν δέδωκας εἰς ὑπέρπυρα ε΄ – ε΄κις τοε΄ γίνονται ,αωοε΄ –, ἐκέρδησας οὖν ὑπέρπυρα ,αωοε΄ διὰ τὸ δοῦναι τὴν τῶν ιε΄ οὐγγιῶν λίτραν εἰς λίτραν οὐγγιῶν ιβ΄.

Ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί· αἱ ,αφ΄ λίτραι ἀνὰ <εἰς> ὑπέρπυρα ε΄ – ε΄κις ,αφ΄ γίνονται ,ζφ΄, αἱ δὲ ,αωοε΄ λίτραι ἀνὰ ὑπερπύρων ε΄ – ε΄κις ,αωοε΄ γίνονται ,θτοε΄ ὑπέρπυρα. ἄφελε τὰ ,ζφ΄ ὑπέρπυρα τῶν ,αφ΄ λιτρῶν ἐκ τῶν ,θτοε΄ ὑπερπύρων τῶν ,αωοε΄ λιτρῶν καὶ ἀπομένοσι ὑπέρπυρα ,αωοε΄, ἅπερ ἐκέρδεσας, ὡς εἴπομεν.

α ε υ υ
ΙΙ ζ ε υ υ | ε

α η ζ ε
ΙΙ θ γ ζ ε | ε

Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν). Ἔστω δὲ ὅτι τὸ ἐναντίον μᾶλλον ἐποίησας. παρέλαβες γὰρ εἰς τὸ ιβ΄γγιν λίτρας ,αφ΄, ἑκάστη(ν) λίτραν εἰς ὑπέρπυρα ε΄. δέδωκας δὲ ταύτας τὰς ,αφ΄ λίτρας εἰς τὸ στατέριν τῶν ιε΄ οὐγγιῶν, ἑκάστην λίτραν πάλιν εἰς ὑπέρπυρα ε΄. ζητεῖς δὲ ‖ εἰδέναι, πόσαι λίτραι ἐξέπεσον καὶ πόσα ὑπέρπυρα ζημιοῦσαι. f. 45v

νῦν δὲ τὸ ἐναντίον ποίησον. πολλ(α)πλασίασον γὰρ τὰς ,αφ΄ λίτρας οὐ μετὰ τῶν ε΄ λιτρῶν, ἀλλὰ μετὰ τῶν δ΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι αἱ δ΄ λίτραι γίνονται ε΄· δ΄κις οὖν ,αφ΄ γίνονται ,ς΄. μέρισον ταῦτα οὐ μετὰ τῶν δ΄ λιτρῶν, ἀλλὰ μετὰ τῶν ε΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ,ασ΄. ἐγένοντο δὲ αἱ ,αφ΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν ιβ΄ ,ασ΄ λίτραι ἀνὰ οὐγγιῶν ιε΄, τουτέστι ἔλαττο τῶν ,αφ΄ λιτρῶν λίτραι τ΄. ἐπεὶ δὲ ἑκάστη(ν) λίτραν δέδωκας εἰς ὑπέρπυρα ε΄ – ε΄κις τ΄ γίνονται ,αφ΄ – ἐζημιώθης οὖν ὑπέρπυρα ,αφ΄ διὰ τὸ δοῦναι τὴν τῶν ιβ΄ οὐγγιῶν λίτραν εἰς λίτραν οὐγγιῶν ιε΄.

α ε υ υ
ς υ υ υ | δ

α
ς υ υ υ
ε ε ε ε
αι α β υ υ

ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι αὕτη. αἱ ,αφ΄ λίτραι, ἑκάστη λίτρα ἀνὰ ὑπέρπυρα ε΄ – ε΄κις ,αφ΄ γίνονται ,ζφ΄ ὑπέρπυρα. αἱ δὲ ,ασ΄ λίτραι, ἑκάστη λίτρα πάλιν ἀνὰ ὑπέρπυρα ε΄ – ε΄κις ,ασ΄ γίνονται ὑπέρπυρα ,ς΄. ἄφελε τὰ ,ς΄ ὑπέρπυρα τῶν ,ασ΄ λιτρῶν ἐκ τῶν ,ζφ΄ ὑπερπύρων τῶν ,αφ΄ λιτρῶν καὶ ἀπομένοσι ὑπέρπυρα ,αφ΄. καὶ ἰδοὺ ἐζημιώθης, ὡς εἴπομεν, ὑπέρπυρα ,αφ΄ διὰ τὸ δοῦναι τὴν τῶν ιβ΄ οὐγγιῶν λίτραν εἰς λίτραν οὐγγιῶν ιε΄.

α ε υ υ
ΙΙ ζ ε υ υ | ε

α β υ υ
ΙΙ ς υ υ υ | ε

ἔστι δὲ καὶ ἑτέρα ἀπόδειξις ἐπὶ τοῦ παρόντος ζητ(ή)ματος τοῦ διὰ τῶν τριῶν. πολλ(α)πλασίασον τὰς ,αφ΄ λίτρας μετὰ τῶν δ΄ λιτρῶν ὡς τὸ πρότερον· δ΄κις οὖν ,αφ΄ γίνονται ,ς΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰς ,ασ΄ λίτρας, ἃς διεμέρισας, μετὰ τῶν ε΄· ε΄κις οὖν ,ασ΄ γίνονται πάλιν ,ς΄. καὶ ἐπεὶ ἐγένοντο οἱ δύο πολλ(α)πλασιασμοὶ ὅμοιοι, ἐστὶ ὀρθὸν τὸ γενόμενον.

ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτων ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

πς **Περὶ τῶν δύο καταλ(λ)ασσόντων, ὧν ὁ μὲν ἔχει πωλῆσαι μάλιν, ὁ δὲ τζόχαν δοῦναι καὶ φλουριὰ πρὸς τὸ λαβεῖν τὸ μάλιν, καθ' ὃν τρόπον ὑμῖν σαφέστερον δηλωθήσεται**

Ἔστωσαν δύο τινὲς ἀλλήλων καταλ(λ)ασσόμενοι, καὶ ὁ μὲν ἔχει πωλῆσαι μάλιν, ὁ δὲ τζόχαν. καὶ ὁ μὲν ἔχων τὸ μάλιν συνε[μ]φώνησεν τὸ κηντ(η)ν(ά)ρι, ταὐτὸν δ' εἰπεῖν τὸ καντ(ά)ρι, φλουριὰ ις΄, ὁ δὲ τὴν τζόχαν ἔχων συνε[μ]φώνησε δοῦναι τὰ ἡμίση τῶν ις΄ φλουριῶν χάραγμαν φλουριὰ η΄, τὰ δὲ ἕτερα η΄ τζόχαν. συνε[μ]φώνησε δὲ δοῦ-

---

6 ὑπερπύρων] οὐγγιῶν **C** 14 ζημιοῦσαι] **sic pro** ζημιοῖ **C**

ναι ἑκάστην κάναν εἰς τιμὴν φλουριῶν ς΄, ἥτις κάνα οὐ χρῄζει πλέον τῶν δ΄ φλουριῶν. ζητεῖς οὖν εἰδέναι, τί ἔρχεται ἔλαττο τὸ καντ(ά)ρι, τὸ μάλιν, ὅπερ συνε[μ]φωνήθη φλουριὰ ις΄, διὰ τὸ δέξασθαι λαβεῖν εἰς τιμὴν φλουριῶν ς΄ τὴν κάναν, ἥτις χρῄζει φλουριὰ δ΄.

ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. ὁ ἀγοράζων τὸ μάλιν δέδωκεν χάραγμαν φλουριὰ η΄ καὶ κάναν α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$· ς΄ γὰρ φλουριὰ ὑπὲρ τῆς μιᾶς κάνας καὶ β΄ φλουριὰ ὑπὲρ τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ – γίνεται κάνα α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ φλουριὰ η΄, ὁμοῦ δὲ τὸ καντ(ά)ρ(ι) φλουριὰ ις΄. Πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ η΄ φλουριὰ τῆς α΄ κάνας καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μετὰ τῶν δ΄ φλουριῶν, ὧν ἀληθῶς χρῄζει ἡ μία κάνα· δ΄κις οὖν η΄ γίνονται λβ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ς΄ φλουριῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι δέχεται ὁ πωλῶν τὸ μάλιν τὴν τῶν δ΄ φλουριῶν κάναν, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς φλουριὰ ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. ἕνωσον τὰ ε΄ φλουριὰ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μετὰ τῶν η΄ φλουριῶν, ὧν ἔλαβεν εἰς χάραγμαν ὁ πωλῶν τὸ μάλιν, καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ ιγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ τὸ καντ(ά)ρ(ι), τὸ μάλιν, ὅπερ συνε[μ]φωνήθη φλουριὰ ις΄, γίνεται ἡ τιμὴ τούτου φλουριὰ ιγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ διὰ τὸ δέξασθαι τὴν τῶν δ΄ φλουριῶν κάναν εἰς τιμὴν φλουριῶν ς΄. ἐξέπεσε δὲ τὸ καντ(ά)ρ(ι) ἀπὸ τῶν ις΄ φλουριῶν φλουριὰ β΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς φλουριοῦ.

$\not\chi$ β $\frac{\beta}{\varsigma}$
$\not\varsigma$
ε καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$

Καὶ ἄλλως. ἐπεὶ ἡ κάνα διὰ τῆς ἀληθοῦς τιμῆς χρῄζει φλουριὰ δ΄, δέδωκε δὲ κάναν α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ εἰς φλουριὰ η΄, ἡ μὲν μία κάνα διὰ τῆς ἀληθοῦς τιμῆς χρῄζει φλουριὰ δ΄, τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῆς μιᾶς κάνας εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν τῶν δ΄ φλουριῶν χρῄζει φλουριὰ α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, τουτέστι κάνα α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ φλουριὰ ε΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. ἕνωσον δὲ τὰ ε΄ φλουριὰ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μετὰ τῶν η΄ φλουριῶν τοῦ χαράγματος καὶ γίνονται πάλιν ὁμοῦ φλουριὰ ιγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. λείπονται καὶ φλουριὰ β΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ εἰς ἀποσωσμὸν τῶν ις΄ φλουριῶν.

πζ Περὶ τοῦ πῶς ἐστι τοῦτο χρήσιμον καὶ ἐπὶ πλείστων καντ(α)ρίων

Ἔστω δὲ ὅτι ὁ ἔχων τὸ μάλιν συνε[μ]φώνησε δοῦναι πρὸς τὸν ἔχοντα τὰς τζόχας μάλιν καντ(ά)ρι(α) λα΄, ἕκαστον καντ(ά)ρι εἰς φλουριὰ ιη΄. ὁ δὲ τὴν τζόχαν ἔχων συνε[μ]φώνησε δοῦναι τὴν μὲν ἡμίσειαν τιμὴν τῶν λα΄ καντ(α)ρί(ων) χάραγμαν, τὴν δὲ ἑτέραν ἡμίσειαν τιμὴν τζόχας, τὴν κάναν τὴν χρῄζουσαν φλουριὰ δ΄ πάλιν εἰς φλουριὰ ς΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσα ζημιωθήσεται ὁ ἔχων τὸ μάλιν ἐπὶ τῶν λα΄ καντ(α)ρ(ίων) διὰ τὸ δέξασθαι τὴν τῶν δ΄ φλουριῶν κάναν εἰς τιμὴν φλουριῶν ς΄.

Πολλ(α)πλασίασον τὰ λα΄ καντ(ά)ρι(α) οὐ μετὰ τῶν ιη΄ φλουριῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι χρῄζει ἕκαστον καντ(ά)ρι, ἀλλὰ μετὰ τῶν ἡμίσεων τῶν ιη΄ φλουριῶν, τουτέστι μετὰ τῶν θ΄· θ΄κις οὖν λα΄ γίνονται σοθ΄. καὶ ἰδοὺ ἡ ἡμίσεια τιμὴ τῶν λα΄ καντ(α)ρί(ων), ἕκαστον καντ(ά)ρ(ι) εἰς φλουριὰ ιη΄, ἐστὶ φλουριὰ σοθ΄. διπλασίασον τὰ σοθ΄ φλουριὰ καὶ γίνονται φλουριὰ φνη΄· ἐστὶ δὲ ἡ καθόλου τιμὴ τῶν λα΄ καντ(α)ρ(ίων) φλουριὰ φνη΄. δέδωκε δὲ ὁ ἀγοράζων τὸ μάλιν χάραγμαν φλουριὰ σοθ΄ καὶ τζόχαν κάνας τοσαύτας, ὅσαι εἰσὶ ἱκαναὶ πρὸς ς΄ φλουριὰ τὴν κάναν γενέσθαι φλουριὰ σοθ΄, καθὼς εἴπομεν τὴν μὲν ἡμίσειαν τιμὴν φλουριὰ χάραγμαν, τὴν δὲ ἑτέραν ἡμίσειαν τζόχαν.

γ α
β ζ θ|θ

Πολλ(α)πλασίασον τὴν ἡμίσειαν τιμὴν τῶν τζοχῶν, τουτέστι τὰ σοθ΄ φλουριά, μετὰ τῶν δ΄ φλουριῶν, ὧν ἀληθῶς χρῄζει ἑκάστην κάναν· δ΄κις οὖν σοθ΄ γίνονται ,αριϛ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ς΄ φλουριῶν, ὧν δέδωκεν ἑκάστην κάναν, καὶ γίνε-

---

1 κάναν] **sic C pro** κάνναν 10.13 πωλῶν] πουλῶν **C** 27 ἡμίσειαν] ἡ μείσι **C** 32 ἡμίσεων] ἡμησιν **C** 38.39 ἡμίσειαν] ἡμησιν 41 ἑκάστην κάναν] **sic C**

ται ὁ τούτων διαμερισμὸς ρπς΄. καὶ ἰδοὺ ἐξέπεσον τὰ σοθ΄ φλουριά, ἅπερ ἐστὶ ἡ ἡμίσεια τιμή, καὶ ἐγένοντο φλουριὰ ρπς΄ διὰ τὸ δέξασθαι τὴν τῶν δ΄ φλουριῶν ‖ κάναν εἰς τιμὴν φλουριῶν ς΄. ἔνωσον δὲ τὰ ρπς΄ φλουριὰ μετὰ τῆς ἡμισείας τιμῆς τῶν φλουριῶν, ἧς ἔλαβεν διὰ χαράγματος ὁ πωλῶν τὸ μάλιν, τουτέστι μετὰ τῶν σοθ΄ φλουριῶν, καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ υξε΄. καὶ ἐπεὶ εἴπομεν, ὅτι ἡ καθόλου τιμὴ τῶν λα΄ καντ(α)ρί(ων) ἐστὶ φλουριὰ φνη΄, ἐγένετο δὲ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τούτων φλουριὰ υξε΄, λείπονται εἰς ἀποσωσμὸν τῶν φνη΄ φλουριὰ Cγ΄. καὶ γὰρ Cγ΄ καὶ υξε΄ φνη΄ γίνονται. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων τὸ μάλιν διὰ τὸ λαβεῖν τὴν τῶν δ΄ φλουριῶν κάναν εἰς φλουριὰ ς΄ ἐξέπεσεν φλουριὰ Cγ΄. ἐπὶ τῶν λα΄ καντ(α)ρ(ίων), [ὧν] ἕκαστον καντ(ά)ρι εἰς φλουριὰ ιη΄, γίνεται ἡ τιμὴ τούτων φλουριὰ φνη΄, ὡς εἴπομεν. Ἐὰν δὲ καὶ πόσας κάνας δέδωκεν ζητῇς, ἑκάστην κάναν φλουριὰ ς΄, πρὸς τὸ ποιῆσαι φλουριὰ σοθ΄ – τὴν ἡμίσειαν τιμὴν δηλονότι –, μέρισον ταύτην τὴν ἡμίσειαν τιμήν, ἥτις ἐστὶ φλουριὰ σοθ΄, μετὰ τῶν ς΄ φλουριῶν, ὧν δέδωκεν ἑκάστην κάναν, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς μς΄ς΄΄. μέρισον καὶ τὰ ρπς΄ φλουριά, ἅπερ εἴπομεν, ὅτι ἐξέπεσον τὰ σοθ΄ καὶ ἐγένοντο ρπς΄, μετὰ τῶν δ΄ φλουριῶν, ὧν ἀληθῶς χρῄζει ἡ κάνα, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς πάλιν μς΄ς΄΄. καὶ ἰδοὺ μς΄ς΄΄ κάνας δέδωκεν, ἑκάστην μὲν κάναν εἰς φλουριὰ ς΄ γίνονται φλουριὰ σοθ΄, ἑκάστην δὲ κάναν εἰς φλουριὰ δ΄ γίνονται φλουριὰ ρπς΄. [ε] ἐξέπεσον δὲ τὰ σοθ΄ φλουριὰ καὶ ἐγένοντο ρπς΄ διὰ τὸ δέξασθαι λαβεῖν τὴν τῶν δ΄ φλουριῶν κάναν εἰς τιμὴν φλουριῶν ς΄. αἱ δὲ κάναι καὶ μετὰ τῆς τιμῆς τῶν ς΄ φλουριῶν μς΄ς΄΄ εἰσὶ καὶ μετὰ τῆς τιμῆς τῶν δ΄ φλουριῶν μς΄ς΄΄ εἰσί.

f. 46r

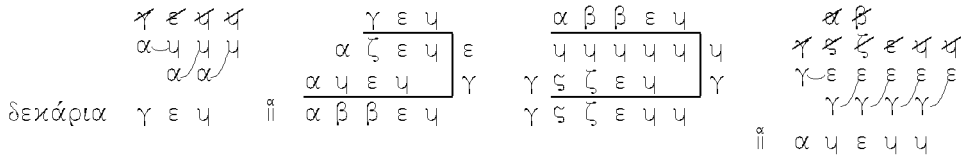
πη Περὶ τοῦ πῶς ἐστι τοῦτο χρήσιμον καὶ ἐπὶ τῆς μετάξης

Ἔστω ὅτι πωλεῖ τις μέταξαν λίτρας ,γφ΄, τὸ δεκάρι εἰς ὑπέρπυρα ο΄. καὶ τὰ μὲν ἡμίση τῶν ο΄ ὑπερπύρων, ἅπερ ἐστὶ ἑνὸς δεκαρίου ὑπέρπυρα, συνε[μ]φώνησεν δοῦναι ὁ ἀγοράζων ὑπέρπυρα καθαρά, ἅπερ ἐστὶ λε΄ ὑπέρπυρα, τὰ δὲ ἕτερα λε΄ συνε[μ]φώνησεν δοῦναι ἀσήμιν καὶ τζόχας, τὰ μὲν κα΄ ὑπέρπυρα ἀσήμιν καματεμένον οὐγγίας γ΄, τὰ ιδ΄ δὲ ὑπέρπυρα κάναν μίαν. ἐξέπιπτε δὲ εἰς τὰς γ΄ οὐγγίας τὸ ἀσήμιν ὑπέρπυρα γ΄· χρῄζουσι γὰρ αἱ γ΄ οὐγγίαι, ἃς δίδει ὁ ἀγοράζων, ὑπέρπυρα ιη΄, δέχεται δὲ ὁ πωλῶν τῶν ιη΄ ὑπερπύρων τὸ ἀσήμιν εἰς τιμὴν ὑπερπύρων κα΄. ὡσαύτως δέχεται καὶ τὴν κάναν τὴν τζόχαν, ἥτις χρῄζει ὑπέρπυρα ιβ΄, εἰς τιμὴν ιδ΄. ζημιοῦται δὲ εἰς τὴν κάναν ὑπέρπυρα β΄. ἐξέπιπτε δὲ εἰς τὰ λε΄ ὑπέρπυρα τῆς ἡμισείας τιμῆς ὑπέρπυρα ε΄, καὶ ἀντὶ τῶν λε΄ ὑπερπύρων λάμβανε μᾶλλον ὑπέρπυρα λ΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα ἐλαττοῦται εἰς τὰς ,γφ΄ λίτρας διὰ τὸ λαβεῖν ἀσήμιν καὶ τζόχαν, ἄτινα ποιῶσι τὰ λε΄ ὑπέρπυρα τῆς ἡμισείας τιμῆς τῶν ο΄ ὑπερπύρων τοῦ ἑνὸς δεκαρίου ὑπέρπυρα λ΄.

Πρῶτον μὲν ζήτει, πόσα δεκάρια γίνονται αἱ ,γφ΄ λίτραι. μέρισον γὰρ τὰς ,γφ΄ λίτρας μετὰ τῶν ι΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τν΄. καὶ ἰδοὺ αἱ ,γφ΄ λίτραι γίνονται δεκάρια τν΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ τν΄ δεκάρια μετὰ τῆς ἡμισείας τιμῆς τοῦ ἑνὸς δεκαρίου, ἥτις ἐστὶ ὑπέρπυρα λε΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ὑπέρπυρα ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπέρπυρα. καὶ ἰδοὺ ἡ ἡμίσεια τιμὴ τῶν ,γφ΄ λιτρῶν τῆς

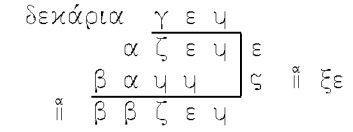
---

8 (bis).10 Cγ΄] πγ **falso C** 28 καματεμένον] **sic pro** κεκαματευμένον **C** 29 κάναν μίαν] **sc.** τζόχαν ἐξέπιπτε] ἐξεπίπτει **C, item** 33



μετάξης ἐστὶ ὑπέρπυρα ,ι,β΄ καὶ σν΄. διπλασίασον ταύτας καὶ γίνονται ὑπέρπυρα ,κ,δ΄ καὶ φ΄ ὑπέρπυρα· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ καθόλου τιμὴ τῶν ,γφ΄ λιτρῶν ὑπέρπυρα ,κ,δ΄ καὶ φ΄ ὑπέρπυρα. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὴν ἡμίσειαν τιμήν, ἥτις ἐστὶ ὑπέρπυρα ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπέρπυρα, μετὰ τῶν λ΄ ὑπερπύρων, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐξεπίπτοσι τὰ λε΄ ὑπέρπυρα καὶ γίνονται ὑπέρπυρα λ΄ διὰ τὸ λαβεῖν ἀσήμιν καὶ τζόχαν, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα ἓξ γράμματα γ ς ζ ε ι ι΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν λε΄ ὑπερπύρων τῆς ἡμισείας τιμῆς καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τὰ παρόντα πέντε γράμματα α ι ε ι ι΄, ἅπερ δηλῶσι ὑπέρπυρα ,ιφ΄. ἕνωσον τὰ ,ιφ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῆς ἡμισείας τιμῆς, ἧς ἔλαβεν διὰ καθαρῶν ὑπερπύρων – ὑπέρπυρα ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπέρπυρα – καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,κ,β΄ καὶ ψν΄ ὑπέρπυρα. καὶ ἐπεὶ ἡ καθόλου τιμὴ τῶν ,γφ΄ λιτρῶν ἐστι ὑπέρπυρα ,κ,δ΄ καὶ φ΄ ὑπέρπυρα, διὰ τὸ λαβεῖν δὲ ἀσήμιν καὶ τζόχαν ἐξέπεσον καὶ ἐγένοντο ὑπέρπυρα ,κ,β΄ καὶ ψν΄ ὑπέρπυρα, δῆλον ἡμῖν γίνεται, ὅτι ἐλαττοῦται ἐκ τῆς καθόλου τιμῆς τῶν ,κ,δ΄ καὶ φ΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα ,αψν΄.

Καὶ ἄλλως προχειροτέρως. τὸ δεκάρι εἴπομεν, ὅτι συνε[μ]φωνήθη εἰς ὑπέρπυρα ο΄, αἱ δὲ ,γφ΄ λίτραι εἰσὶ δεκάρια τν΄. καὶ ἐπεὶ εἴπομεν, ὅτι τὰ ἡμίση τῶν ο΄ ὑπερπύρων, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα λε΄, γίνονται ὑπέρπυρα λ΄ διὰ τὸ λαβεῖν ἀσήμιν καὶ τζόχαν, τὸ δεκάρι χρῄζει ὑπέρπυρα ξε΄· καὶ γὰρ λε΄ ὑπέρπυρα καθαρὰ καὶ λ΄ ὑπέρπυρα τοῦ ἀσημιοῦ καὶ τῆς τζόχας γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ξε΄. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν δεκάρι χρῄζει ὑπέρπυρα καθαρὰ ξε΄ ἀντὶ τῶν ο΄, αἱ δὲ ,γφ΄ λίτραι εἰσὶ δεκάρια τν΄, πολλ(α)πλασίασον τὰ τν΄ δεκάρια μετὰ τῶν ξε΄ καθαρῶν ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς πάλιν ὑπέρπυρα ,κ,β΄ καὶ ψν΄ ὑπέρπυρα. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὗρες προχειροτέρως, ὅτι γίνεται ἡ καθαρὰ τιμὴ τῶν ,γφ΄ λιτρῶν τῆς μετάξης ὑπέρπυρα ,κ,β΄ καὶ ψν΄ ὑπέρπυρα.



Ἐὰν δὲ ζητῇς εἰδέναι, καὶ πόσες οὐγγίας ἀσήμιν ἔλαβεν καὶ πόσες κάνας τζόχαν· εἴπομεν, ὅτι ἡ ἡμίσεια τιμὴ τῶν ο΄ ὑπερπύρων, ὧν χρῄζει τὸ δεκάρι, ἐστὶ ὑπέρπυρα λε΄ – τὰ μὲν κα΄ ὑπέρπυρα ἀσήμιν, τὰ ιδ΄ δὲ ὑπέρπυρα τζόχαν κάναν μίαν. τὰ δὲ κα΄ ὑπέρπυρα τοῦ ἀσημιοῦ πρὸς τὰ ιδ΄ τῆς τζόχας συ[ν]γκρινόμενα ἔχουσι λόγον, ὃν ἔχουσ(ι) τὰ γ΄ πρὸς τὰ β΄, τουτέστι $\frac{\gamma}{\beta}$· δὶς γὰρ ζ΄ γίνονται ιδ΄ καὶ τρὶς ζ΄ γίνονται κα΄. ἡ ἡμίσεια οὖν τιμὴ τοῦ καθόλου μεταξιοῦ ἐστι ὑπέρπυρα ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπέρπυρα. ἐξ αὐτῶν δὲ τῶν ὑπερπύρων τὸ μὲν ἀσήμιν οἰκειοῦται γ΄ τρίτα, αἱ δὲ τζόχαι β΄ τρίτα· καθ᾽ ὃν λόγον ‖ οὕτως ἔχουσι τὰ γ΄ πρὸς τὰ β΄, ὡς καὶ τὰ κα΄ ὑπέρπυρα πρὸς τὰ ιδ΄. ἕνωσον δὲ τὰ γ΄ καὶ β΄ καὶ γίνονται ε΄. μέρισον τὰς ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ε΄, τουτέστι εἰς μέρη πέντε, καὶ γίνεται τὸ πέμπτον μέρος τῶν **f. 46^{v}**

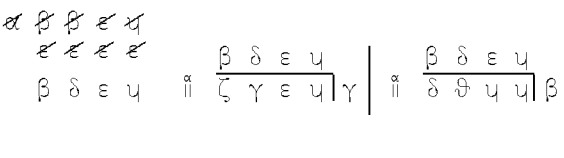
---

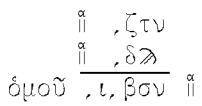
divisio prima: auctor numeros exstinguere oblitus est.

divisio secunda: ϡ ⊄ ζ ⊄ ⊄ ⊄] ϡ ⊄ ζ ⊄ ι ι **C**

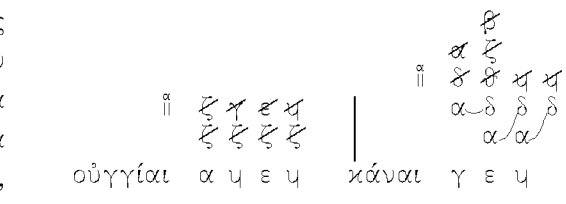
4 ἐξεπίπτοσι] **sic pro** ἐξέπιπτον **C** 27 πόσες] **sic C** 31 $\frac{\gamma}{\beta}$] $\frac{\beta}{\gamma}$ **falso C** 33/34 τρίτα] πέμπτα **rectum esset.**

,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα ,βυν΄. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ἀσήμιν οἰκειοῦται μέρη γ΄, αἱ δὲ τζόχαι β΄, τριπλασίασον τὰ ,βυν΄ ὑπέρπυρα· τρὶς οὖν ,βυν΄ γίνονται ,ζτν΄. διπλασίασον πάλιν τὰ ,βυν΄ ὑπέρπυρα· δὶς οὖν ,βυν΄ γίνονται ,δ≫΄. καὶ ἰδοὺ τὸ μὲν ἀσήμιν οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα ,ζτν΄, αἱ δὲ τζόχαι οἰκειοῦνται ὑπέρπυρα δ≫΄. ἕνωσον δὲ τὰ ,ζτν΄ ὑπέρπυρα τοῦ ἀσημιοῦ μετὰ τῶν ,δ≫΄ ὑπερπύρων τῶν τζοχῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπέρπυρα.





Ἵνα δὲ ἴδῃς, καὶ πόσαι οὐγγίαι ἀσήμιν γίνονται τὰ ,ζτν΄ ὑπέρπυρα καὶ πόσαι κάναι τὰ ,δ≫΄ ὑπέρπυρα· ἑκάστη μὲν οὐγγία χρῄζει ὑπέρπυρα ζ΄, καθὼς εἴπομεν, ὅτι τὰ κα΄ ὑπέρπυρα δέχεται ὁ πωλῶν τὸ μετάξιν εἰς οὐγγίας γ΄, ἑκάστη δὲ κάνα χρῄζει ὑπέρπυρα ιδ΄, καθὼς εἴπομεν, ὅτι δέχεται τὴν κάναν εἰς ὑπέρπυρα ιδ΄. θὲς οὖν ἄνωθεν μὲν τὰ ,ζτν΄ ὑπέρπυρα τοῦ ἀσημιοῦ, κάτωθεν δὲ μεριστὴν μιᾶς οὐγγίας ὑπέρπυρα, τουτέστι ὑπέρπυρα ζ΄. καὶ μέρισον τὰ ,ζτν΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ζ΄ ὑπερπύρων τῆς μιᾶς οὐγγίας καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς τὰ παρόντα τέσσερα γράμματα α υ ε υ΄, ἅπερ δηλῶσι ,αν΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ,ζτν΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ οἰκειοῦται τὸ ἀσήμιν, γίνονται οὐγγίαι ,αν΄. θὲς δὲ πάλιν ἄνωθεν μὲν τὰ ,δ≫΄ ὑπέρπυρα τῶν τζοχῶν, κάτωθεν δὲ μεριστὴν μιᾶς κάνας ὑπέρπυρα, τουτέστι ὑπέρπυρα ιδ΄. μέρισον δὲ τὰ ,δ≫΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ιδ΄ ὑπερπύρων τῆς μιᾶς κάνας καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς τὰ παρόντα τρία γράμματα γ ε υ΄, ἅπερ δηλῶσι τν΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ,δ≫΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ οἰκειοῦνται αἱ τζόχαι, ἑκάστη κάνα ὑπέρπυρα ιδ΄, γίνονται κάναι τν΄. ἡ ἡμίσεια οὖν τιμή, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπέρπυρα, ἐδόθη ἀσήμι – ἑκάστη οὐγγία ὑπέρπυρα ζ΄ – οὐγγίας ,αν΄ καὶ τζόχαι – ἑκάστη κάνα ὑπέρπυρα δ΄ – κάνας τν΄. ἡ δὲ ἑτέρα ἡμίσεια τιμὴ ἐδόθη ὑπέρπυρα καθαρὰ ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπέρπυρα, ὁμοῦ δὲ ἡ καθόλου τιμὴ τῶν ,γφ΄ λιτρῶν ὑπέρπυρα ,κ,δ΄ καὶ φ΄ ὑπέρπυρα. διὰ δὲ τὸ λαβεῖν ἀσήμιν καὶ τζόχαν ἐλαττοῦται ἐκ τῆς τοιαύτης τιμῆς ὑπέρπυρα ,αψν΄ καὶ ἀπομένοσι καθαρὰ ὑπέρπυρα ,κ,β΄ καὶ ψν΄ ὑπέρπυρα.



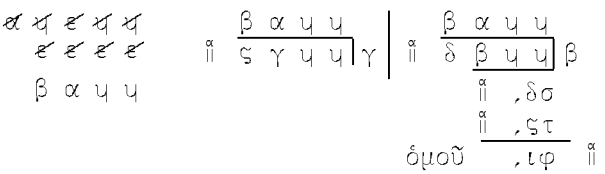
ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι αὕτη. εἴπομεν, ὅτι δέχεται κα΄ ὑπέρπυρα εἰς οὐγγίας γ΄, ἑκάστη οὐγγία ὑπέρπυρα ζ΄, χρῄζοσι δὲ αἱ γ΄ οὐγγίαι ὑπέρπυρα ιη΄· ζημιοῦται δὲ ἐφ᾽ ἑκάστης οὐγγίας ὑπέρπυρον α΄. ἐπεὶ οὖν εἰς τὰς γ΄ οὐγγίας ζημιοῦται ὑπέρπυρα γ΄, εἰς τὰς ,αν΄ οὐγγίας ζημιοῦται ὑπέρπυρα ,αν΄, ἔχεις οὖν παραφθορὰν εἰς τὰς ,αν΄ οὐγγίας ὑπέρπυρα ,αν΄. εἴπομεν δέ, ὅτι ζημιοῦται καὶ εἰς τὴν κάναν ὑπέρπυρα β΄· τῶν γὰρ ιδ΄ ὑπερπύρων ἡ κάνα χρῄζει ὑπέρπυρα ιβ΄. ζημιοῦται δὲ εἰς τὰς τν΄ κάνας ὑπέρπυρα ψ΄. ἔχεις οὖν παραφθορὰν εἰς τὰς τν΄ κάνας ὑπέρπυρα ψ΄. ἕνωσον τὰ ,αν΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ψ΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,αψν΄. καὶ ἰδοὺ αὕτη ἐστὶ ἡ πρώτη ἀπόδειξις, ὅτι ,αν΄ οὐγγίας ἀσήμιν ἔλαβεν ὁ πωλῶν καὶ τν΄ κάνας τζόχαν.

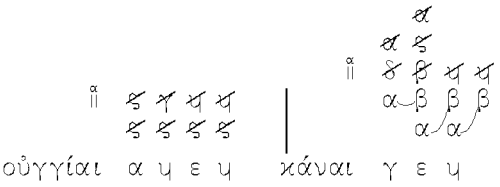
ἔστι δὲ καὶ δευτέρα ἀπόδειξις. ἄφελε τὰ ,αψν΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐξέπιπτε ὁ πωλῶν, ἐκ

---

additio: ,δ≫] δ≫ **C** 27 οὐγγίας] $\overset{\alpha\iota}{\Gamma\Gamma}$, **i. e.** οὐγγίαι **C** 33 ὑπέρπυρα] ΐ΄ **C** 43 ἐξέπιπτε] ἐξεπίπτει **C**

τῶν ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπερπύρων καὶ ἀπομένοσι ὑπέρπυρα ,ιφ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ε΄, δι᾽ ὧν ἐμέρισας πρότερον καὶ τὰς ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπέρπυρα, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ,βρ΄. τριπλασίασον δὲ ταῦτα, καθὼς οὕτως καὶ πρότερον ἐποίησας· τρὶς οὖν ,βρ΄ γίνονται ,ςτ΄. διπλασίασον τὰ ,βρ΄· δὶς οὖν ,βρ΄ γίνονται ,δσ΄. καὶ ἰδοὺ τὸ μὲν ἀσήμιν οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,ιφ΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα ,ςτ΄, αἱ δὲ τζόχαι οἰκειοῦνται ,δσ΄ ὑπέρπυρα. ἕνωσον δὲ τὰ ,ςτ΄ ὑπέρπυρα τοῦ ἀσημιοῦ μετὰ τῶν ,δσ΄ ὑπερπύρων τῶν τζοχῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν ὑπέρπυρα ,ιφ΄. μέρισον δὲ τὰ ,ςτ΄ καθαρὰ ὑπέρπυρα, ἅπερ οἰκειοῦται τὸ ἀσήμιν, μετὰ ς΄ ὑπερπύρων, ὧν χρῄζει ἑκάστη οὐγγία καθαρὰ ὑπέρπυρα ς΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ,αν΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὗρες, ὅτι τὰ ,ςτ΄ ὑπέρπυρα γίνονται οὐγγίαι ,αν΄, ἑκάστη οὐγγία ὑπέρπυρα ς΄. μέρισον δὲ καὶ τὰ ,δσ΄ καθαρὰ ὑπέρπυρα, ἅπερ οἰκειοῦται ἡ τζόχα, μετὰ τῶν ιβ΄ ὑπερπύρων, ὧν χρῄζει ἑκάστη κάνα καθαρὰ ὑπέρπυρα ιβ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τν΄. καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως εὗρες, ὅτι τὰ ,δσ΄ ὑπέρπυρα γίνονται κάναι τν΄, ἑκάστη κάνα ὑπέρπυρα ιβ΄. καὶ αὕτη ἐστὶ δευτέρα ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

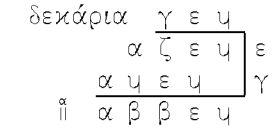




ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ζήτημαν τούτου ὅμοιον διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον, ὁπόταν εἰδέναι ἔχῃς τὴν παραφθορὰν τοῦ ἀσημιοῦ καὶ τῶν τζοχῶν εἰς τὸ δεκάρι.

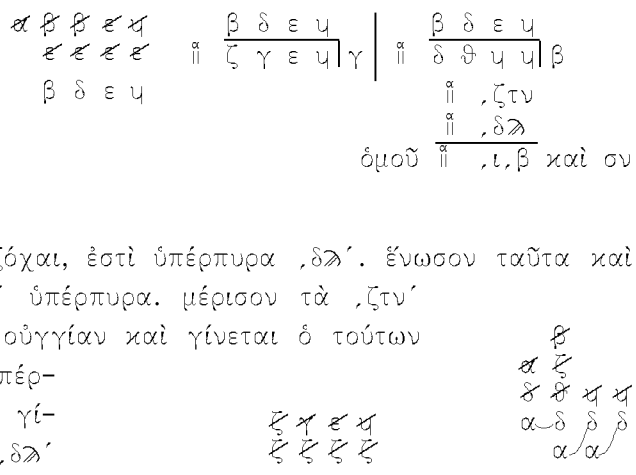
εἰ δὲ οὐ δύνασαι εἰδέναι τὴν παραφθορὰν εἰς τὸ δεκάρι, ἀλλ᾽ εἰς τὴν καθόλου τιμήν, ποίησον οὕτως. ἔστω ὅτι εὑρέθη[ν] τὸ μετάξιν πάλιν δεκάρια τν΄, τουτέστι – ὡς εἴπομεν – λίτραι ,γφ΄. συνε[μ]φώνησεν δὲ πάλιν ὁ ἀγοράζων ὑπέρπυρα ο΄ τὸ δεκάρι. τὴν δὲ καθόλου τιμὴν τῶν ,γφ΄ λιτρῶν, ταὐτὸν δ᾽ εἰπεῖν τῶν τν΄ δεκαρίων, συνε[μ]φώνησεν δοῦναι τὴν μὲν ἡμίσειαν τιμὴν ὑπέρπυρα καθαρά, τὴν δὲ ἑτέραν ἡμίσειαν τὰ τρία μὲν μέρη ταύτης ἀσήμιν, ἑκάστην οὐγγίαν εἰς ὑπέρπυρα ζ΄, ἥτις χρῄζει ὑπέρπυρα ς΄, τὰ δύο δὲ μέρη ταύτης τζόχας, ἑκάστην κάναν εἰς ὑπέρπυρα ιδ΄, ἥτις χρῄζει ὑπέρπυρα ιβ΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι ἐκ || τῆς ὅλης τιμῆς, πόσα ὑπέρπυρα ἐξέπιπτε διὰ τὸ δέξασθαι τὴν τῶν ς΄ ὑπερπύρων τὴν οὐγγίαν εἰς ὑπέρπυρα ζ΄ καὶ τὴν τῶν ιβ΄ ὑπερπύρων κάναν εἰς ὑπέρπυρα ιδ΄ καὶ πόσας οὐγγίας ἀσήμιν ἔχει λαβεῖν καὶ πόσας κάνας τζόχαν. f. 47^{r}

Πολλ(α)πλασίασον τὰ τν΄ δεκάρια οὐ μετὰ τῶν ο΄ ὑπερπύρων, ὧν χρῄζει ἕκαστον δεκάρι, ἀλλὰ μετὰ τῆς ἡμισείας τιμῆς τούτου, τουτέστι μετὰ τῶν λε΄ ὑπερπύρων, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,ι,β΄ καὶ σν΄. καὶ ἰδοὺ πάλιν ἡ ἡμίσεια τιμὴ τούτων ἐστὶ ὑπέρπυρα ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπέρπυρα. διπλασίασον ταύτας καὶ γίνεται ἡ καθόλου τιμὴ ὑπέρπυρα ,κ,δ΄ καὶ φ΄ ὑπέρπυρα. μέρισον δὲ πάλιν τὴν ἡμίσειαν τιμήν, ἥτις ἐστὶ ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπέρπυρα, μετὰ τῶν ε΄ ὡς καὶ πρότερον καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ,βυν΄. τριπλασίασον ταῦτα· τρὶς οὖν ,βυν΄



33 ἐξέπιπτε] **iterum** ἐξεπίπτει **C** 42 ταύτας] **sic C**

γίνονται ,ζτν΄. διπλασίασον τὰ ,βυν΄· δὶς οὖν ,βυν΄ γίνονται ,δ≫΄. καὶ ἰδοὺ τὰ μὲν τρία μέρη, ἅπερ οἰκειοῦται τὸ ἀσήμιν ἐκ τῆς ἡμισείας τιμῆς τῶν ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπερπύρων, ἐστὶ ὑπέρπυρα ,ζτν΄, τὰ δὲ δύο μέρη, ἅπερ οἰκειοῦνται αἱ τζόχαι, ἐστὶ ὑπέρπυρα ,δ≫΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,ι,β΄ καὶ σν΄ ὑπέρπυρα. μέρισον τὰ ,ζτν΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ζ΄ ὑπερπύρων τὴν οὐγγίαν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ,αν΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ,ζτν΄ ὑπέρπυρα, ἀνὰ ζ΄ ὑπέρπυρα τὴν οὐγγίαν, γίνονται οὐγγίαι ,αν΄. μέρισον καὶ τὰ ,δ≫΄ ὑπέρπυρα τῶν τζοχῶν μετὰ τῶν ιδ΄ ὑπερπύρων τὴν κάναν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τν΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ,δ≫΄ ὑπέρπυρα, ἀνὰ ιδ΄ ὑπέρπυρα τὴν κάναν, γίνονται κάναι τν΄, καθὼς οὕτως καὶ πρότερον εὗρες οὐγγίας μὲν ,αν΄, κάνες δὲ τν΄.



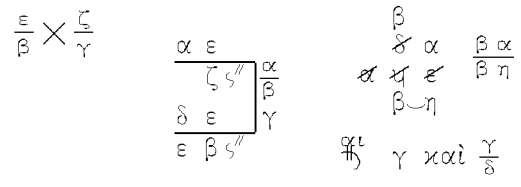
ἐπεὶ οὖν οἶδας, ὅτι ἐφ᾽ ἑκάστης οὐγγίας τῶν ζ΄ ὑπερπύρων ἐκπίπτει ὁ δεξάμενος ταύτην ὑπέρπυρον α΄ – χρῄζει γὰρ ὑπέρπυρα ς΄ – ἄφελε ἐκ τῶν ,αν΄ οὐγγιῶν ὑπέρπυρα ,αν΄. ἄφελε καὶ ἀπὸ τῶν τν΄ κανῶν ἐφ᾽ ἑκάστης κάνας ὑπέρπυρα β΄, ἐπεὶ ἑκάστη κάνα τῶν ιδ΄ ὑπερπύρων χρῄζει ὑπέρπυρα ιβ΄· δὶς οὖν τν΄ γίνονται ψ΄. ἕνωσον τὰ ψ΄ ὑπέρπυρα, τὴν παραφθορὰν τῶν τζοχῶν, μετὰ τῶν ,αν΄ ὑπερπύρων τῆς παραφθορᾶς τοῦ ἀσημιοῦ καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,αψν΄. ἄφελε δὲ ταῦτα ἐκ τῆς καθόλου ποσότητος τῶν ,κ,δ΄ καὶ φ΄ ὑπερπύρων καὶ ἀπομένοσι καθαρὰ ὑπέρπυρα ,κ,β΄ καὶ ψν΄ ὑπέρπυρα, καθὼς οὕτως καὶ πρότερον εἴπομεν. καὶ ἰδοὺ καὶ ἐκ τῆς ὅλης τιμῆς τῶν ,κ,δ΄ καὶ φ΄ ὑπερπύρων εὗρες τὸν ἐξεπεσμὸν ὑπέρπυρα ,αψν΄ – καὶ τὸ μὲν ἀσήμιν οὐγγίας ,αν΄, τὴν δὲ τζόχαν κάνας τν΄ –, ὥσπερ οὕτως εὗρες πρότερον καὶ ἀπὸ τῆς τοῦ ἑνὸς δεκαρίου τιμῆς τῶν ο΄ ὑπερπύρων.

ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτων ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

πϑ Περὶ ἐὰν β΄ϛ″ λίτραι μετάξης χρῄζωσι φλουριὰ β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, τὰ γ΄ϛ″ φλουριὰ πόσαι λίτραι μετάξης γίνονται

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι, ἐὰν μετάξης λίτραι $\beta'\frac{\alpha}{\beta}$ χρῄζ(ω)σι φλουριὰ β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, τὰ $\gamma'\frac{\alpha}{\beta}$ φλουριὰ πόσαι λίτραι γίνονται.

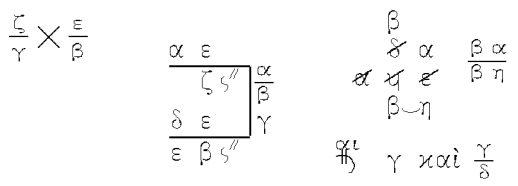
τοῦτο οὖν ἐστι ὅμοιον ζήτημαν ὥσπερ ἐκεῖνο, ὃ προείπομεν ἐν τῷ < > κεφαλαίῳ· εὑρίσκεται γὰρ καὶ τοῦτο διὰ τῆς μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν. ποίησον τὰς $\beta'\frac{\alpha}{\beta}$ λίτρας μισάς· δὶς οὖν β΄ γίνονται δ΄, καὶ α΄ τὸ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς – ὁμοῦ ε΄ μισὰ αἱ $\beta'\frac{\alpha}{\beta}$ λίτραι. θὲς οὖν ἄνωθέν τινος κεραίας γραμμῆς ε΄, κάτωθεν δὲ ταύτης β΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι τὰ ἄνωθεν ε΄ ἐστὶ μισά.



16 κάνες, i. e. κάνας] κάναις **C** 35 < > **auctor numerum capitis omisit, sed spatium reliquit: videlicet** πεντηκοστῷ τετάρτῳ **supplendum est.** 40 μισὰ] **vel** μισαὶ **C**

ποίησον δὲ καὶ τὰ β΄ φλουριὰ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τρίτα· τρὶς οὖν β΄ γίνονται ς΄, καὶ α΄ τὸ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς – ὁμοῦ ζ΄ τρίτα τὰ β΄ φλουριὰ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. θὲς οὖν ἄνωθέν τινος κεραίας γραμμῆς ζ΄, κάτωθεν δὲ ταύτης γ΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι τὰ ἄνωθεν ζ΄ ἐστὶ τρίτα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ κάτωθεν γ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν ε΄· τρὶς οὖν ε΄ γίνονται ιε΄. ἐστὶ δὲ ταῦτα ὁ πολλ(α)πλασιαστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς ἐναλλὰξ τὰ κάτωθεν β΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν ζ΄· δὶς οὖν ζ΄ γίνονται ιδ΄. ἐστὶ δὲ ταῦτα ὁ μεριστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ γ΄$\frac{\alpha}{\beta}$ φλουριὰ μετὰ τῶν ιε΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ πολλ(α)πλασιαστής· ς″κις οὖν ιε΄ γίνονται ζ΄ς″ καὶ τρὶς ιε΄ γίνονται με΄. ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ νβ΄ς″. ἐπεὶ οὖν οὐκ ἔχεις καλῶς διαμερίσαι τὰ νβ΄ς″ μετὰ τῶν ιδ΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής· τὰ νβ΄ς″ γίνονται μισὰ ρε΄ καὶ τὰ ιδ΄ γίνονται μισὰ κη΄. μέρισον τὰ ρε΄ μισὰ μετὰ τῶν κη΄ μισῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς γ΄ καὶ $\frac{\beta\,\alpha}{\beta\,\eta}$, τουτέστι γ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$· τρὶς γὰρ ζ΄ γίνονται κα΄ καὶ δ΄κις ζ΄ γίνονται κη΄. καὶ ἰδοὺ ἐὰν λίτραι β΄$\frac{\alpha}{\beta}$ χρῄζωσι φλουριὰ β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, τὰ γ΄$\frac{\alpha}{\beta}$ φλουριὰ ὠνῶνται λίτρας γ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ μιᾶς λίτρας.

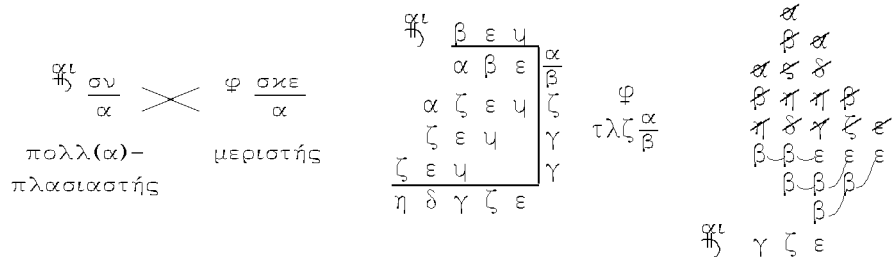
Καὶ τὸ ἀνάπαλιν. ἐὰν φλουριὰ β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ χρῄζ(ω)σι λίτρας β΄$\frac{\alpha}{\beta}$, τὰ γ΄$\frac{\alpha}{\beta}$ φλουριὰ πόσας λίτρας χρῄζ(ο)σι;



θὲς οὖν ἄνωθεν ζ΄, κάτωθεν δὲ γ΄ ὑπὲρ τῶν β΄ φλουριῶν καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. θὲς καὶ ἄνωθεν ε΄, κάτωθεν δὲ β΄ ὑπὲρ τῶν β΄$\frac{\alpha}{\beta}$ λιτρῶν. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ κάτωθεν β΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν ζ΄· δὶς οὖν ζ΄ γίνονται ιδ΄. ἐστὶ δὲ ταῦτα οὐ πολλ(α)πλασιαστής, ὥσπερ εἴπομεν πρότερον, ἀλλὰ μεριστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ κάτωθεν γ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν ε΄· τρὶς οὖν ε΄ γίνονται ιε΄. ἐστὶ δὲ ταῦτα οὐ μεριστής, ὥσπερ εἴπομεν πρότερον, ἀλλὰ πολλ(α)πλασιαστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ γ΄$\frac{\alpha}{\beta}$ φλουριὰ μετὰ τῶν ιε΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς νβ΄ς″, τουτέστι ρε΄ μισά. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κη΄ μισῶν τῶν ιδ΄ ἀκεραίων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς πάλιν γ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. ‖ καὶ ἰδοὺ ἐὰν φλουριὰ β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ χρῄζωσι μετάξιν λίτρας β΄$\frac{\alpha}{\beta}$, τὰ γ΄$\frac{\alpha}{\beta}$ φλουριὰ χρῄζοσι λίτρας γ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ μιᾶς λίτρας. ὥσπερ γάρ – ἐὰν β΄$\frac{\alpha}{\beta}$ λίτραι χρῄζ(ω)σι φλουριὰ β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ – εὗρες, ὅτι τὰ γ΄$\frac{\alpha}{\beta}$ φλουριὰ χρῄζοσι λίτρας γ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, οὕτως καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ἐὰν φλουριὰ β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ χρῄζ(ω)σι λίτρας β΄$\frac{\alpha}{\beta}$, τὰ γ΄ς″ φλουριὰ πάλιν χρῄζοσι λίτρας γ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. f. 47^{v}

ς Περὶ τοῦ πῶς τοῦτο καὶ ἐπὶ πλείστων λιτρῶν ἐστι χρήσιμον

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι, ἐὰν μετάξης λίτραι σν΄ χρῄζωσι φλουριὰ σκε΄, τὰ τλζ΄ς″ φλουριὰ πόσας λίτρας μετάξης προσοικειοῦνται κατὰ τὸ αὐτὸ ἀνάλογον τίμημα.



θὲς ἄνωθεν μὲν τὰς σν΄ λίτρας τῆς μετάξης, κάτωθεν δὲ τούτων θὲς α΄ πρὸς δή-

λωσι(ν), ὅτι αἱ ἄνωθεν σν΄ λίτραι εἰσὶ ἀκέραιαι. θὲς πάλιν ἄνωθεν μὲν τὰ σκε΄ φλουριά, ἅπερ εἴπομεν, ὅτι χρῄζοσ(ι) αἱ σν΄ λίτραι, κάτωθεν δὲ τούτων θὲς α΄ πρὸς δήλωσ(ιν), ὅτι τὰ ἄνωθεν σκε΄ φλουριά εἰσι ἀκέραια. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὸ κάτωθεν τῶν σκε΄ φλουριῶν α΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν σν΄ λιτρῶν· ἅπαξ οὖν σν΄ πάλιν ἐστὶ σν΄. ἐστὶ δὲ ταῦτα ὁ πολλ(α)πλασιαστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς καὶ τὸ κάτωθεν τῶν σν΄ λιτρῶν α΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν σκε΄ φλουριῶν· ἅπαξ οὖν σκε΄ πάλιν ἐστὶ σκε΄. ἐστὶ δὲ ταῦτα ὁ μεριστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ [τὰς] τὰ τλζ΄$\frac{\alpha}{\beta}$ φλουριὰ μετὰ τῶν σν΄ λιτρῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ πολλ(α)πλασιαστής· ϛ″κις οὖν σν΄ γίνονται ρκε΄. θὲς οὖν ρκε΄. ἔπειτα πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ τλζ΄ φλουριὰ μετὰ τῶν σν΄ λιτρῶν καὶ ἕνωσον τὰ πολλ(α)πλασιασθέντα μέρη καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα πέντε γράμματα η δ γ ζ ε΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν σκε΄ φλουριῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τέλειος τούτων διαμερισμὸς τοε΄. καὶ ἰδοὺ ἐὰν αἱ σν΄ λίτραι χρῄζωσι φλουριὰ σκε΄, τὰ τλζ΄$\frac{\alpha}{\beta}$ φλουριὰ κατὰ τὸ αὐτὸ τίμημα προσοικειοῦνται λίτρας τοε΄.

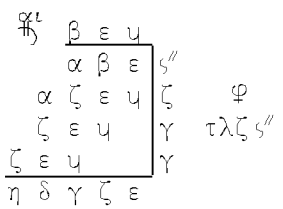
ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι αὕτη. σκε΄ φλουριὰ καὶ τὰ ἡμίση τούτων ριβ΄ϛ″ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ τλζ΄ϛ″. καὶ ὥσπερ εἴπομεν, ὅτι αἱ σν΄ λίτραι οἰκειοῦνται φλουριὰ σκε΄, οὕτως καὶ τὰ τλζ΄ϛ″ φλουριὰ οἰκειοῦνται λίτρας τοε΄. ὥσπερ γὰρ προσέθηκας ἐπὶ τῶν σκε΄ φλουριῶν ριβ΄ϛ″ φλουριά, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἡμίσ(η) τῶν σκε΄, καὶ ἐγένοντο φλουριὰ τλζ΄ϛ″, οὕτως πρόσθες τὰ ἡμίση τῶν σν΄ λιτρῶν, ἅπερ ἐστὶ λίτραι ρκε΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ λίτραι τ ζ ε΄. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον – ἐπὶ τοῦ παρόντος ζητήματος τῶν τλζ΄ϛ″ φλουριῶν· οὐ γὰρ ἐπὶ πάντων χρήσιμος ἡ ἀπόδειξις αὕτη.

Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν). ἐὰν φλουριὰ σκε΄ οἰκειοῦνται λίτρας σν΄, τὰ τλζ΄ϛ″ φλουριὰ πόσας λίτρας οἰκειοῦνται;

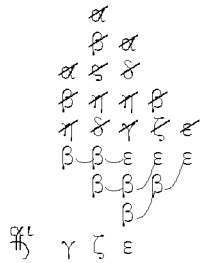
θὲς ἄνωθεν τὰ σκε΄ φλουριά, κάτωθεν δὲ α΄. θὲς ἄνωθεν καὶ τὰς σν΄ λίτρας, κάτωθεν δὲ α΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὸ κάτωθεν α΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν σκε΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς πάλιν σκε΄· ἐστὶ δὲ ταῦτα οὐ πολλ(α)πλασιαστής, ἀλλὰ μᾶλλον μεριστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὸ κάτωθεν α΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν σν΄ λιτρῶν καὶ πάλιν γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς σν΄· ἐστὶ δὲ ταῦτα οὐ μεριστής, ἀλλὰ μᾶλλον πολλ(α)πλασιαστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ τλζ΄ϛ″ φλουριὰ μετὰ τῶν σν΄ λιτρῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς πάλιν η δ γ ζ ε΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν σκε΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς πάλιν λίτραι τοε΄ ὡς τὸ πρότερον. καὶ ἰδοὺ ἐὰν φλουριὰ σκε΄ οἰκειοῦνται λίτρας σν΄, τὰ τλζ΄ϛ″ φλουριὰ οἰκειοῦνται λίτρας τοε΄, ὥσπερ καὶ τὸ ἀνάπαλιν· ἐὰν λίτραι σν΄ χρῄζωσι φλουριὰ σκε΄, τὰ τλζ΄ϛ″ φλουριὰ οἰκειοῦνται

φ σκε / α — μεριστής

σν / α — πολλ(α)πλασιαστής



φ τλζ ϛ″



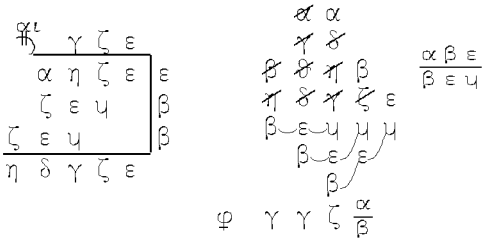
---

20 τ ζ ε΄] **sic C pro** γ ζ ε΄ **sive** τοε΄

λίτρας τοε΄.

Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν). ἐὰν λίτραι σν΄ χρῄζωσι φλουριὰ σκε΄, αἱ τοε΄ λίτραι πόσα φλουριὰ χρῄζουσι;

πολλ(α)πλασίασον τὰς τοε΄ λίτρας μετὰ τῶν σκε΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα γράμματα η δ γ ζ ε΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν σν΄ λιτρῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τλζ΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\alpha\,\beta\,\varepsilon}{\beta\,\varepsilon\,\mu}$, τουτέστι τλζ΄ς″· ὃν γὰρ λόγον ἔχει τὸ α΄ πρὸς τὰ β΄, τὸν αὐτὸν ἔχουσι καὶ τὰ ρκε΄ πρὸς τὰ σν΄, τουτέστι μισόν. καὶ ἰδοὺ ἐὰν λίτραι σν΄ χρῄζωσι φλουριὰ σκε΄, αἱ τοε΄ λίτραι χρῄζουσι φλουριὰ τλζ΄ς″, ὥσπερ καὶ τὸ ἀνάπαλιν· ἐὰν λίτραι σν΄ χρῄζωσι φλουριὰ σκε΄, τὰ τλζ΄ς″ φλουριὰ οἰκειοῦνται λίτρας τοε΄.

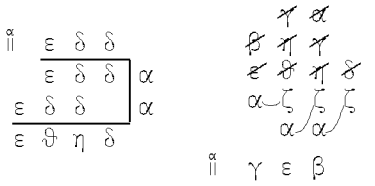


Cα Περὶ τοῦ ἐὰν τὸ βηλάριν, ἡ τζόχα, χρῄζῃ ὑπέρπυρα φμδ΄, αἱ ια΄ κάναι, ἃς ζητεῖς ἀγοράσαι, πόσα ὑπέρπυρα χρῄζουσι ἀναλόγως

Ἔστω ὅτι τὸ βηλάριν, ἡ τζόχα, ἐστὶ κάνες ιζ΄, χρῄζουσι δὲ αἱ ιζ΄ κάναι ὑπέρπυρα φμδ΄. ζητεῖς δὲ ἀγοράσαι κάνας ια΄ εἰς τὸ αὐτὸ ἀνάλογον τίμημα, ὅπερ εἴπομεν, ὅτι αἱ ιζ΄ κάναι χρῄζουσι ὑπέρπυρα φμδ΄. ζητεῖς δὲ καὶ πόσα ὑπέρπυρα ἔχεις δοῦναι πρὸς τὸ λαβεῖν κάνας ια΄.

ἔχεις δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν, δι᾽ οὗ καὶ τὰ προειρημένα πάντα ζητήματα εὗρες καλῶς καὶ προχείρως. ποίησον ‖ δὲ τοῦτον καὶ νῦν **f. 48^{r}** καὶ εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον.

πολλ(α)πλασίασον τὰ φμδ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ια΄ κανῶν, ὧν ζητεῖς ἀγοράσαι, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα γράμματα ε θ η δ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ιζ΄ κανῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι τὸ καθόλου βηλάριν ἐστὶ κάνας ιζ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τνβ΄. καὶ ἰδοὺ ἐὰν αἱ ιζ΄ κάναι χρῄζωσι ὑπέρπυρα φμδ΄, αἱ ια΄ κάναι χρῄζουσι ἀναλόγως εἰς τὸ αὐτὸ τίμημα ὑπέρπυρα τνβ΄.



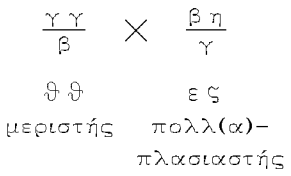
καὶ τοῦτο γίνεται οὕτως, ὅταν καὶ τὰ τρία μέρη ἐστὶ ἀκέραια ὡς τὰ φμδ΄ ὑπέρπυρα καὶ κάναι ιζ΄ καὶ κάναι ια΄· ἐστὶ ταῦτα πάντα ἀκέραια. ὅταν δὲ ἔχωσι μισὸν καὶ τρίτον, γίνεται ἄλλως, ὡς πρότερον εἴπομεν.

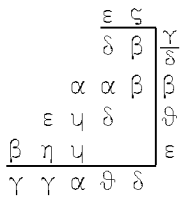
Ἔστω γὰρ ἕτερον βηλάριν, ὅπερ ἔχει κάνας ις΄ς″. χρῄζουσι δὲ αἱ ις΄ς″ κάναι ὑπέρπυρα φϙβ΄ κουκκιὰ ιε΄, τουτέστι ὑπέρπυρα φϙβ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ἑνὸς ὑπερπύρου. ζητεῖς δὲ ἀγοράσαι κάνας θ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ μιᾶς κάνας. πόσα ὑπέρπυρα χρῄζουσι ἀναλόγως αἱ θ΄ κάναι καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$;

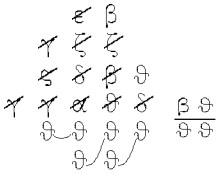
ἐπεὶ οὖν καὶ τὰ τρία μέρη οὐκ ἐστι ἐξόλου ἀκέραια, ἀλλὰ τὸ μὲν βηλάριν ἐστὶ κάναι ις΄ς″, ἡ δὲ τιμὴ τούτου ὑπέρπυρα φϙβ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, αἱ δὲ κάναι, ἃς ζητεῖς ἀγοράσαι, θ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ποίησον τὰς ις΄$\frac{\alpha}{\beta}$ μισάς· δὶς οὖν ις΄ γίνονται λβ΄, καὶ α΄ τὸ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς – ὁμοῦ μισὰ λγ΄ αἱ ις΄ς″ κάναι. θὲς οὖν ἄνωθεν μὲν τῆς κεραίας γραμμῆς λγ΄, κάτωθεν δὲ β΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι τὰ ἄνωθεν λγ΄ ἐστὶ μισά. ποίησον

---

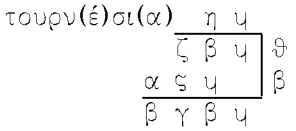
17 κάνες, i. e. κάναι] κάναις **C**

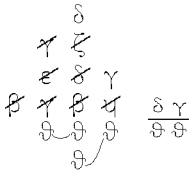






ἢ γ γ ε ⁝ ε καὶ τουρν(έ)σι(α) γ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἔγγιστα





τουρν(έ)σι(α) β γ καὶ $\frac{\beta}{\varepsilon}$
βραχ(ύ) τι πλεῖο

καὶ τὰς ϑ΄ κάνας καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ἃς ζητεῖς ἀγοράσαι, τρίτας· τρὶς οὖν ϑ΄ γίνονται κζ΄, καὶ α΄ τὸ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς – ὁμοῦ τρίτα κη΄ αἱ ϑ΄ κάναι καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. θὲς οὖν ἄνωθεν μὲν τῆς κεραίας γραμμῆς κη΄, κάτωθεν δὲ γ΄ πρὸς δήλωσι(ν), ὅτι τὰ ἄνωθεν κη΄ ἐστὶ τρίτα. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς τὰ κάτωθεν γ΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν λγ΄· τρὶς οὖν λγ΄ γίνονται ϙϑ΄. ἐστὶ δὲ ταῦτα ὁ μεριστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ στ(αυ)ροειδῶς καὶ τὰ κάτωθεν β΄ μετὰ τῶν ἄνωθεν κη΄· δὶς οὖν κη΄ γίνονται νς΄. ἐστὶ δὲ ταῦτα ὁ πολλ(α)πλασιαστής. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ φϙβ΄ ὑπέρπυρα καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ μετὰ τῶν νς΄· νς΄κις οὖν $\frac{\gamma}{\delta}$ γίνονται ἀκέραια μβ΄. θὲς οὖν μβ΄, ἔπειτα πολλ(α)-πλασίασον καὶ τὰ φϙβ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν νς΄ καὶ ἕνωσον τὰ πολλ(α)πλασιασθέντα μέρη καὶ γίνονται ὁμοῦ τὰ παρόντα γράμματα γ γ α ϑ δ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ϙϑ΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τλε΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\beta\ \vartheta}{\vartheta\ \vartheta}$. καὶ ἰδοὺ ἐὰν κάνες ις΄ς″ χρῄζωσι ὑπέρπυρα φϙβ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ιε΄, αἱ ϑ΄ κάναι καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ἃς ζητεῖς ἀγοράσαι, χρῄζοσι ἀναλόγως εἰς τὸ αὐτὸ τίμημα ὑπέρπυρα τλε΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\beta\ \vartheta}{\vartheta\ \vartheta}$.

ἐπεὶ δὲ ἕκαστον ὑπέρπυρόν ἐστι τουρν(έ)σι(α) π΄, τὰ δὲ κϑ΄ τὸ τζάκισμα μετὰ τῶν ϙϑ΄ τὸν μεριστὴν συγκρινόμενα οὐκ ἔχεις καλῶς εἰδέναι, τίνα λόγον ἔχουσι πρὸς τὸ ἕνα ὑπέρπυρον, ὅπερ ἐστὶ τουρν(έ)σ(ια) π΄, πολλ(α)πλασίασον τὰ π΄ τουρν(έ)σι(α) τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου μετὰ τῶν ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς κϑ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα γράμματα β γ β ι΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς ϙϑ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἔγγιστα. τὰ δὲ κγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐστὶ τουρν(έ)σ(ια), ἅπερ γίνονται κουκκιὰ ε΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἔγγιστα ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου). καὶ ἰδοὺ αἱ ϑ΄ κάναι καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ χρῄζ(ο)σι ὑπέρπυρα τλε΄ κουκκιὰ ε΄ καὶ τουρν(έ)σι(α) γ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἔγγιστα ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου).

---

multiplicatio decussata: auctor crucem oblitus est.

divisio prima: ϡξξ] ϡξζ **C**

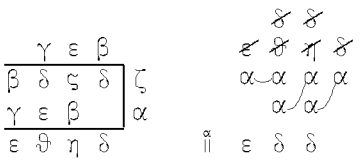
solutio: $\frac{\alpha}{\beta}$ ἔγγιστα] $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἔγγιστα **falso C**

12 κάνες] cf. 13 κάναι 23 ἔγγιστα **scripsi: spatium atramento coopertum**

Cβ **Καὶ τὸ ἀνάπαλιν. ἐὰν αἱ ια΄ κάναι, ἃς ζητεῖς ἀγοράσαι, χρῄζωσι ὑπέρπυρα τνβ΄, αἱ ιζ΄ κάναι, τὸ καθόλου βηλάριν, πόσα ὑπέρπυρα χρῄζ(ο)σι ἀναλόγως;**

Πολλ(α)πλασίασον τὰ τνβ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ χρῄζουσι αἱ ι΄ κάναι, οὐ μετὰ τῶν ια΄ κανῶν, καθὼς πρότερον ἐπολλ(α)πλασίασας τὰ φμδ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ια΄ κανῶν, ἀλλὰ τὸ ἐναντίον νῦν μᾶλλον ποίησον.

πολλ(α)πλασίασον γὰρ τὰ τνβ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ιζ΄ κανῶν, ὧν ἔχει τὸ καθόλου βηλάριν, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα γράμματα ε ϑ η δ΄. μέρισον ταῦτα οὐ μετὰ τῶν ιζ΄ κανῶν, καθὼς οὕτως ἐποίησας πρότερον, ἀλλὰ μετὰ τῶν ια΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς φμδ΄. καὶ ἰδοὺ ἐὰν κάναι ια΄ χρῄζωσι ὑπέρπυρα τνβ΄, αἱ ιζ΄ κάναι, τὸ καθόλου βηλάριν, χρῄζ(ο)σι ὑπέρπυρα φμδ΄, ὥσπερ πρότερον τὸ ἀνάπαλι(ν)· ἐὰν τὸ καθόλου βηλάριν χρῄζῃ ὑπέρπυρα φμδ΄, αἱ ια΄ κάναι χρῄζ(ο)σι ὑπέρπυρα τνβ΄.

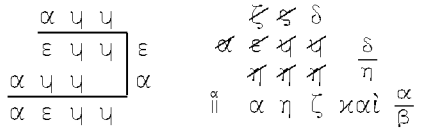


καὶ τοῦτο μὲν οὕτως, ὅταν ἐστὶ τὰ ζητούμενα μέρη ἀκέραια. ὅταν δέ ἐστι μισὸν καὶ τρίτον ἢ τέταρτον, γίνεται διὰ τῆς ἑτέρας μεταχειρίσεως, ἧς εἴπομεν ἄνωθεν.

Cγ **Περὶ τοῦ ἐὰν τὰ η΄ ὑπέρπυρα αὐξανόμενα γίνωνται ιε΄ ὑπέρπυρα, τὰ ρ΄ ὑπέρπυρα κατὰ τὸν ὅμοιον λόγον πόσα ὑπέρπυρα γίνονται**

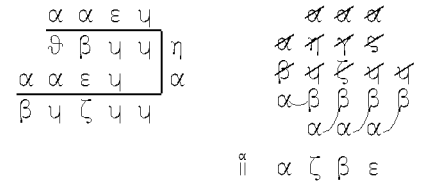
Ἔστω ὅτι πραγματευτής τις ἐζήτησεν ἀν(θρώπ)ου τινὸς εὐπόρου ὑπέρπυρά τινα μετὰ συμφωνίας τοιαύτης, ὅτι μετὰ τὸ πραγματεύεσθαι χρόνον ἕνα ἀποδοῦναι ἀντὶ τῶν η΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα ιε΄, τουτέστι κέρδος ὑπέρπυρα ζ΄. ζητ(εῖ) δὲ ὁ πραγματευτὴς λαβεῖν ἐκ τοῦ εὐπόρου ὑπέρπυρα ρ΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, ἐὰν τὰ η΄ ὑπέρπυρα μετὰ τοῦ κέρδους αὐτῶν γίνωνται ιε΄, ὡς ὑπέσχετο || δοῦναι, τὰ ρ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ζητ(εῖ) λαβεῖν, πόσα γίνονται αὐξανόμενα ἀναλόγως. ἔχεις δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι διὰ τῆς μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν. **f. 48^{v}**

πολλ(α)πλασίασον τὰ ρ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἔλαβεν ὁ πραγματευτής, μετὰ τῶν ιε΄, ὧν ὑπέσχετο δοῦναι ἀντὶ τῶν η΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τὰ παρόντα γράμματα α ε ι ι΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν η΄ ὑπερπύρων, ὧν εἴπομεν, ὅτι τὰ η΄ γίνονται ιε΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ρπζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$. καὶ ἰδοὺ ἐὰν εἰς τὰ η΄ ὑπέρπυρα ὑπέσχετο δοῦναι ὑπέρπυρα ιε΄, εἰς τὰ ρ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἔλαβεν ὁ πραγματευτής, ὀφείλει δοῦναι τῷ εὐπόρῳ ὑπέρπυρα ρπζ΄ καὶ κουκκιὰ ι΄.



Ἐὰν δὲ πάλιν εἰς ὑπέρπυρα ιβ΄ ὑπέσχετο δοῦναι ὑπέρπυρα ιη΄, εἰς τὰ ,αρν΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἔλαβεν ὁ πραγματευτής, κατὰ τὸν ὅμοιον λόγον πόσα ὑπέρπυρα ὀφείλει δοῦναι;

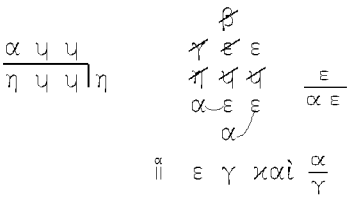
πολλ(α)πλασίασον τὰ ,αρν΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ιη΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς β ι ζ ι ι΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ιβ΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ,αψκε΄. καὶ ἰδοὺ ἐὰν τὰ ιβ΄ ὑπέρπυρα διδῶσ(ι) κέρδος ὑπέρπυρα ς΄ καὶ γίνωνται ὑπέρπυρα ιη΄, τὰ ,αρν΄ ὑπέρπυρα κατὰ τὸν ὅμοιον λόγον γίνονται ὑπέρπυρα ,αψκε΄.



καὶ ταῦτα μὲν οὕτως, ὅταν καὶ τὰ τρία μέρη ἐστὶ ἀκέραια. ὅταν δὲ ἔχωσι μισὸν καὶ τρίτον καὶ τέταρτον, γίνονται διὰ τῆς ἑτέρας μεταχειρίσεως, ἥτις πολλ(α)πλασιάζει στ(αυ)ροειδῶς τὰς ἄνωθεν καὶ κάτωθεν τῶν κεραίων γραμμῶν ψήφους, καθὼς ἐκεῖσε ὁρᾶται σαφέστερον.

Cδ **Καὶ τὸ ἀνάπαλι(ν)· ἐὰν τὰ ιε΄ ὑπέρπυρα φθειρόμενα γίνωνται η΄, τὰ ρ΄ ὑπέρπυρα πόσα γίνονται κατὰ τὸν ὅμοιον λόγον;**

Ἐὰν δὲ τὸ ἀνάπαλι(ν) ζητῇς, ὅτι ἐὰν τὰ ιε΄ ὑπέρπυρα φθειρόμενα γίνωνται η΄, τὰ ρ΄ ὑπέρπυρα κατὰ τὸν ὅμοιον λόγον φθειρόμενα πόσα γίνονται, πολλ(α)πλασίασον τὰ ρ΄ ὑπέρπυρα οὐ μετὰ τῶν ιε΄ ὑπερπύρων ὡς τὸ πρότερον, ἀλλὰ τὸ ἀνάπαλι(ν) μετὰ τῶν η΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς η υ υ΄. μέρισον ταῦτα οὐ μετὰ τῶν η΄ ὑπερπύρων ὡς τὸ πρότερον, ἀλλὰ μετὰ τῶν ιε΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς νγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ ἐὰν τὰ ιε΄ ὑπέρπυρα φθειρόμενα γίνωνται η΄, τὰ ρ΄ ὑπέρπυρα κατὰ τὸν ὅμοιον λόγον φθειρόμενα γίνονται ὑπέρπυρα νγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνὸς ὑπερπύρου.



εἰ δὲ οὐκ ἐστι ἀκέραια τὰ τρία μέρη αὐτῶν, ἀλλ᾽ ἔχοσι καὶ μισὸν καὶ τρίτον ἢ τέταρτον, γίνεται διὰ τῆς ἑτέρας μεταχειρίσεως, ἥτις πολλ(α)πλασιάζει στ(αυ)ροειδῶς τὰς ἄνωθεν καὶ κάτωθεν τῶν κεραίων γραμμῶν ψήφους, καθὼς ἐκεῖσε δηλοῦται σαφέστερον.

Cε **Περὶ τοῦ δανείσαντος φλουριὰ ρ΄, τὸ δὲ χρονικὸν κέρδος αὐτῶν φλουριὰ κ΄ – ἐν ᾧ καὶ πόσον ἐστὶ τὸ χρονικὸν κέρδος καὶ μηνιαῖον οὐχὶ τῶν ρ΄ φλουριῶν, ἀλλ᾽ ἑνὸς ἑκάστου τῶν ρ΄ φλουριῶν;**

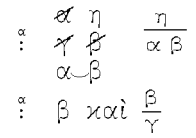
Ἔστω ὅτι τις ἐδάνεισεν πρὸς ἕτερόν τινα φλουριὰ ρ΄. ὑπέσχετο δὲ ὁ λαβὼν δοῦναι πρὸς τὸν ἔχοντα ταῦτα ὀφειλῆς χάριν ἕκαστον ἐνιαυτὸν φλουριὰ κ΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, τί ἐστι τὸ χρονικὸν καὶ μην(ι)αῖον κέρδος ἑκάστου τῶν ρ΄ φλουριῶν· ἕκαστον δὲ φλουρὶ ἔστω ὅτι χρῄζει ὑπέρπυρα η΄. ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι δι(τ)ῶς.

καὶ πρῶτος μὲν τρόπος. ζήτει, τίνα λόγον ἔχοσι τὰ κ΄ φλουριά, τὸ χρονικὸν δηλονότι κέρδος, πρὸς τὰ ρ΄ φλουριά, τὸ κεφάλαιον δηλονότι. ἐστὶ δὲ τὰ κ΄ πρὸς τὰ ρ΄ φλουριὰ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$· ε΄κις γὰρ κ΄ ρ΄ γίνονται. καὶ ἰδοὺ ἕκαστον τῶν ρ΄ φλουριῶν – τὸ χρονικὸν αὐτοῦ κέρδος ἐστὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἑνὸς φλουριοῦ, ὥσπερ καὶ τὰ κ΄ φλουριά ἐστι $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν ρ΄ φλουριῶν. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ, τουτέστι τῶν η΄ ὑπερπύρων, ὧν ποιῶσι κουκκιὰ ρξ΄, ἐστὶ κουκκιὰ λβ΄· ε΄κις γὰρ κουκκιὰ λβ΄ γίνονται κουκκιὰ ρξ΄. καὶ ἰδοὺ ἕκαστον τῶν ρ΄ φλουριῶν ἔχει χρονικὸν κέρδος κουκκιὰ λβ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ ιβ΄.

ὁ δεύτερος δὲ τρόπος. λάβε τὸ πέμπτον μέρος τῶν κ΄ φλουριῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ χρονικὸν κέρδος τῶν ρ΄ φλουριῶν. τὸ πέμπτον δὲ μέρος τῶν κ΄ φλουριῶν ἐστι δ΄· ε΄κις γὰρ δ΄ κ΄ γίνονται. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ η΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ χρῄζει φλουρὶ α΄, μετὰ τῶν δ΄, ἅπερ ἐστὶ πέμπτον μέρος τῶν κ΄· δ΄κις οὖν η΄ γίνονται λβ΄. καὶ ἰδού, ὥσπερ τὰ δ΄ ἐστὶ πέμπτον μέρος τῶν κ΄, οὕτως καὶ τὰ λβ΄ κουκκιά ἐστι πέμπτον μέρος τῶν ρξ΄ κουκκιῶν, ὧν ποιῶσι ὑπέρπυρα η΄. ἐστὶ δὲ τὸ χρονικὸν κέρδος ἑκάστου τῶν ρ΄ φλουριῶν κουκκιὰ λβ΄, καθὼς οὕτως καὶ πρότερον εὗρες.

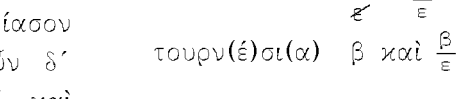
ἐπεὶ οὖν τὸ χρονικὸν κέρδος ἑκάστου τῶν ρ΄ φλουριῶν ἐστι κουκκιὰ λβ΄, μέρισον τὰ λβ΄ κουκκιὰ εἰς τοὺς ιβ΄ μῆνας τοῦ χρόνου καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς β΄ καὶ

$\frac{\beta}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ ἕκαστον φλουρὶ τῶν ρ΄ κερδᾷ τὸν μῆναν κουκκιὰ β΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς κουκκιοῦ. τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τοῦ ἑνὸς κουκκιοῦ ἐστι τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου). καὶ ἰδοὺ ἕκαστον τῶν ρ΄ φλουριῶν – τὸ μὲν χρονικὸν κέρδος αὐτοῦ ἐστι κουκκιὰ λβ΄, τὸ δὲ μηνιαῖόν ἐστι κουκκιὰ β΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνὸς τουρνεσίου.



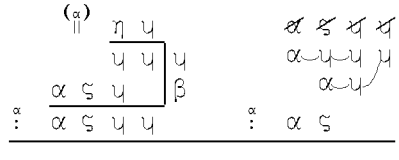
Ἔστω δὲ τὸ χρονικὸν κέρδος τῶν ρ΄ φλουριῶν φλουριὰ ιε΄. λάβε πάλιν τὸ πέμπτον μέρος τῶν ιε΄ φλουριῶν, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ γ΄· ε΄κις γὰρ γ΄ ιε΄ γίνονται. πολλ(α)πλασίασον δὲ ἑνὸς φλουριοῦ ὑπέρπυρα, τουτέστι η΄, μετὰ τῶν γ΄ φλουριῶν, ὧν ἐστι πέμπτον μέρος τῶν ιε΄ φλουριῶν· τρὶς οὖν η΄ γίνονται κδ΄. ἕκαστον οὖν τῶν ρ΄ φλουριῶν ἔχει κέρδος τὸν χρόνον κουκκιὰ κδ΄. μέρισον ταῦτα εἰς τοὺς ιβ΄ μῆνας τοῦ χρόνου· δὶς οὖν ιβ΄ γίνονται κδ΄. ἕκαστον οὖν τῶν ρ΄ φλουριῶν ἔχει κέρδος τὸν μῆναν κουκκιὰ β΄. καὶ ἰδοὺ ἐὰν τὰ ρ΄ φλουριὰ κερδῶσι τὸν χρόνον φλουριὰ ιε΄, ἕκαστον φλουρὶ τῶν ρ΄ τὸν μὲν χρόνον κερδᾷ κουκκιὰ κδ΄, τὸν δὲ μῆναν κουκκιὰ β΄. ἔστω δὲ πάλιν ‖ τὸ χρονικὸν κέρδος τῶν ρ΄ φλουριῶν φλουριὰ ις΄. λάβε τὸ πέμπτον **f. 49^{r}** μέρος τῶν ις΄ φλουριῶν, ὅπερ ἐστὶ φλουριὰ γ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἑνὸς φλουριοῦ· ε΄κις γὰρ γ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ γίνονται ις΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ μετὰ τῶν γ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τὰ η΄ ὑπέρπυρα τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ· η΄κις οὖν γ΄ γίνονται κδ΄ καὶ η΄κις $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ γίνονται $\frac{\eta}{\varepsilon}$, ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α΄ καὶ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ἑνὸς ἀκεραίου. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ κε΄ καὶ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ἑνὸς ἀκεραίου. τὸ χρονικὸν δὲ κέρδος τῶν ρ΄ φλουριῶν ἐστι κουκκιὰ κε΄ καὶ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ἑνὸς κουκκιοῦ.

ἐὰν δὲ ζητῇς εἰδέναι τὰ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ τοῦ ἑνὸς κουκκιοῦ, πόσα ἐστί· τὸ ἕνα κουκκί ἐστι τουρν(έ)σ(ια) δ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ δ΄ τουρν(έ)σ(ια) μετὰ τῶν ἄνωθεν γ΄· τρὶς οὖν δ΄ γίνονται ιβ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κάτωθεν ε΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς β΄ καὶ $\frac{\beta}{\varepsilon}$. καὶ ἰδοὺ τὰ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ τοῦ ἑνὸς κουκκιοῦ, τουτέστι τῶν δ΄ τουρν(ε)σί(ων), ἐστὶ τουρν(έ)σ(ια) β΄ καὶ $\frac{\beta}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου). ἐὰν οὖν φλουριὰ ρ΄ κερδῶσι τὸν χρόνον φλουριὰ ις΄, ἕκαστον τῶν ρ΄ φλουριῶν κερδᾷ τὸν χρόνον κουκκιὰ κε΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ $\frac{\beta}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρν(ε)σίου.



ϛϛ Περὶ τοῦ ἐὰν τὰ ρ΄ φλουριὰ τοὺς ϑ΄ μῆνας διδῶσι κέρδος φλουριὰ ι΄, πόσον κερδᾷ ἕκαστον φλουρὶ τὸν μῆνα καὶ πόσον τὸν χρόνον – ὁμοῦ δὲ καὶ τὰ ρ΄ φλουριά, πόσα κερδῶσι τὸν χρόνον

Ἔστω δὲ πάλιν, ἐὰν τὰ ρ΄ φλουριὰ κερδῶσι τοὺς ϑ΄ μῆνας φλουριὰ ι΄, ζητεῖς εἰδέναι ἕκαστον τῶν ρ΄ φλουριῶν, πόσα κερδᾷ τὸν μῆνα καὶ πόσα τὸν χρόνον ἀναλόγως – ὁμοῦ δὲ καὶ τὰ ρ΄ φλουριά, πόσα κερδῶσι τὸν χρόνον. ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. ποίησον τὰ ι΄ φλουριὰ ὑπέρπυρα. ἕκαστον οὖν φλουρί ⟨ἐστι⟩ ὑπέρπυρα η΄. ι΄κις η΄ γίνονται ὑπέρπυρα π΄· ἐστὶ δὲ ταῦτα τῶν ρ΄ φλουριῶν κέρδος μηνῶν ϑ΄. ποίησον ταῦτα κουκκιά· πολλ(α)πλασίασον γὰρ τὰ π΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου καὶ γίνονται τὰ π΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,αχ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρ΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ις΄. ἕκαστον οὖν φλουρὶ τῶν ρ΄ κερδᾷ τοὺς ϑ΄ μῆνας κουκκιὰ ις΄.



1.12.13 μῆναν] sic **C** 4 τὸ ... χρονικὸν κέρδος] τῶν ... χρονικὸν κέρδος **C** 16 ις΄] ιε **falso C** divisio tertia: ϡϛϡϡ] ϡϛυυ **C**

μέρισον δὲ πάλιν τὰ ις΄ κουκκιὰ εἰς τοὺς ϑ΄ μῆνας καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκὶ α΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ζ΄, ἅπερ ἐστὶ τουρν(έ)σ(ια) κη΄. μέρισον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ϑ΄ μηνῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ια) γ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\vartheta}$ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου). καὶ ἰδοὺ ἕκαστον τῶν ρ΄ φλουριῶν κερδᾷ τὸν μῆνα κουκκὶ α΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\vartheta}$ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου).

ζ ⋮ α ϛ ϑ $\frac{\zeta}{\vartheta}$ τουρν(έ)σι(α) α ⋮ α ϑ $\frac{\alpha}{\vartheta}$ τουρν(έ)σι(α) γ καὶ $\frac{\alpha}{\vartheta}$

ἐπεὶ δὲ ζητεῖς εἰδέναι καὶ τὸ χρονικὸν κέρδος ἑκάστου τῶν ρ΄ φλουριῶν· τοὺς μὲν ϑ΄ μῆνας ἕκαστον τῶν ρ΄ φλουριῶν εὗρες, ὅτι κερδᾷ κουκκιὰ ις΄, τὸν δὲ μῆναν κουκκὶ α΄ τουρν(έ)σ(ια) γ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\vartheta}$ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου). ὑπὲρ οὖν τῶν γ΄ μηνῶν, ὧν λείπονται τοὺς ϑ΄ πρὸς τὸ γενέσθαι μῆναι ιβ΄, τριπλασίασον ἑνὸς μήνου κέρδος· τρὶς οὖν κουκκὶ α΄ γίνονται κουκκιὰ γ΄ καὶ τρὶς τουρν(έ)σι(α) γ΄ γίνονται τουρν(έ)σ(ια) ϑ΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ β΄ καὶ τουρν(έ)σ(ι) α΄. ἔχεις μέχρι τοῦ νῦν κουκκιὰ ε΄ καὶ τουρν(έ)σ(ι) α΄. τρὶς δὲ $\frac{\alpha}{\vartheta}$ γίνονται $\frac{\chi}{\vartheta}$· ἔχεις κουκκιὰ ε΄ τουρν(έ)σ(ι) α΄ καὶ $\frac{\chi}{\vartheta}$ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου). ὑπὲρ οὖν τῶν τριῶν μηνῶν κερδᾷ ἕκαστον φλουρὶ ταῦτα. ἕνωσον οὖν ταῦτα μετὰ τῶν ις΄ κουκκιῶν, ὧν κερδᾷ ἕκαστον φλουρὶ τοὺς ϑ΄ μῆνας, καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ κα΄ τουρν(έ)σι α΄ καὶ $\frac{\chi}{\vartheta}$ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου). καὶ ἰδοὺ ἕκαστον τῶν ρ΄ φλουριῶν κερδᾷ τὸν χρόνον κουκκιὰ κα΄ τουρν(έ)σι α΄ καὶ $\frac{\chi}{\vartheta}$ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου). τὰ δὲ ρ΄ φλουριὰ ἔχοσ(ι) κέρδος τὸν χρόνον τὸ τέταρτον πλέον τῶν ι΄ φλουριῶν, καθ᾽ ὃν λόγον οἱ ιβ΄ μῆνες τοῦ χρόνου πρὸς τοὺς ϑ΄ ἔχοσι $\frac{\alpha}{\delta}$ μέρος πλέον· γ΄ γὰρ τρὶς γίνονται ϑ΄ καὶ γ΄ δ΄κις γίνονται ιβ΄. τὸ δὲ τέταρτον τῶν ι΄ φλουριῶν ἐστι φλουριὰ β΄ϛ″, τουτέστι φλουριὰ β΄ καὶ ὑπέρπυρα δ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ι΄ φλουριῶν καὶ γίνεται τὸ χρονικὸν κέρδος τῶν ρ΄ φλουριῶν φλουριὰ ιβ΄ καὶ ὑπέρπυρα δ΄ – ἕκαστον δὲ φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα η΄ –, τὰ ιβ΄ φλουριὰ καὶ τὰ δ΄ ὑπέρπυρα γίνονται ὑπέρπυρα ρ΄.

ϛζ Περὶ τοῦ ἐάν – φλουριὰ ρνϛ΄ καὶ ὑπέρπυρα δ΄ καὶ κουκκιὰ ι΄ – ἕκαστον φλουρὶ κερδᾷ τὸν μῆνα κουκκιὰ β΄, πόσον ἐστὶ τὸ κέρδος τούτων τοὺς ι΄ϛ″ μῆνας

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι· ἐὰν ἕκαστον φλουρὶ κερδᾷ τὸν μῆνα κουκκιὰ β΄, φλουριὰ ρνϛ΄ καὶ ὑπέρπυρα δ΄ καὶ κουκκιὰ ι΄ πόσα ἔχοσι κερδῆσαι τοὺς ι΄ϛ″ μῆνας ἀναλόγως; ἕκαστον δὲ φλουρὶ ἔστω ὅτι χρῄζει ὑπέρπυρα η΄, ὡς εἴπομεν καὶ ἐπὶ τῶν προγενεστέρων. ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως.

ζήτει ἑνὸς μήνου κέρδος. ἐπεὶ οὖν ἕκαστον φλουρὶ τὸν μῆνα κερδᾷ κουκκὰ β΄, δὶς ρνϛ΄ γίνονται κουκκιὰ τιβ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ιε΄ κουκκιὰ ιβ΄. τὰ δὲ δ΄ ὑπέρπυρά ἐστι μισὸν μέρος τῶν η΄ ὑπερπύρων τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ μηνικὸν κέρδος τῶν δ΄ ὑπερπύρων μισόν· εἰ γὰρ ἕκαστον φλουρὶ ἔχει κέρδος τὸν μῆνα κουκκιὰ β΄, τὰ δ΄ ὑπέρπυρα ἔχοσι κέρδος κουκκὶ α΄. ἕνωσον καὶ τοῦτο μετὰ τῶν ιβ΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ιε΄ κουκκιὰ ιγ΄. τὰ ι΄ δὲ πάλιν κουκκιά ἐστι ἕκτον καὶ δέκατον μέρος τῶν η΄ ὑπερπύρων τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ· ἐστὶ δὲ καὶ τὸ κέρδος αὐτῶν

---

12 μῆναι] **sic pro** μῆνες, μήνου] **sic pro** μηνὸς **C, cf. 33**

20 τὸ τέταρτον πλέον] **falso C pro** τὸ τρίτον πλέον: **sequitur solutio falsa** φλουριὰ ιβ΄ καὶ ὑπέρπυρα δ΄ **pro** φλουριὰ ιγ΄ ὑπέρπυρα β΄ κουκκιὰ ιγ΄ τουρνέσι α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνὸς τουρνεσίου.

38/39 ἕκτον καὶ δέκατον] $\overset{\text{ον}}{\text{ις}}$ **hic et passim C**

ἕκτον καὶ δέκατον μέρος τῶν β΄ κουκκιῶν, τουτέστι τουρν(έ)σ(ι) ϛ″. κερδῶσι δὲ τὰ ρνς΄ φλουριὰ καὶ ὑπέρπυρα δ΄ καὶ κουκκιὰ ι΄ τὸν μῆνα ὑπέρπυρα ιε΄ κουκκιὰ ιγ΄ τουρν(έ)σι ϛ″.

δεκαπλασίασον δὲ ταῦτα ὑπὲρ τῶν δέκα μηνῶν· ι΄κις οὖν ὑπέρπυρα ιε΄ γίνονται ὑπέρπυρα ρν΄ καὶ ι΄κις κουκκιὰ ιγ΄ γίνονται κουκκιὰ ρλ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ϛ΄ κουκκιὰ ι΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ρν΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ρνς΄ κουκκιὰ ι΄. ι΄κις δὲ τουρν(έ)σ(ι) ϛ″ γίνονται τουρν(έ)σ(ια) μισὰ μὲν ι΄, ἀκέραια δὲ ε΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκὶ α΄ τουρν(έ)σ(ι) α΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν προγενεστέρων καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ρνς΄ κουκκιὰ ια΄ τουρν(έ)σι α΄. καὶ ἰδοὺ φλουριὰ ρνς΄ ὑπέρπυρα δ΄ κουκκιὰ ι΄ κερδῶσι τοὺς ι΄ μῆνας ὑπέρπυρα ρνς΄ κουκκιὰ ια΄ τουρν(έ)σι α΄.

τὸν δὲ ϛ″ μῆνα κερδῶσι τὸ ἥμισυ, τοῦ ἑνὸς μηνὸς τὸ κέρδος, τουτέστι τῶν ιε΄ ὑπερπύρων καὶ κουκκιῶν ιγ΄ καὶ τουρν(ε)σ(ίου) ϛ″. τὸ δὲ ἥμισυ τούτων ἐστὶ ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ις΄ τουρν(έ)σ(ια) β΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου). ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ι΄ μηνῶν τὸ κέρδος, ὅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ρνς΄ κουκκιὰ ια΄ τουρν(έ)σι α΄, καὶ γίνεται ὁμοῦ τῶν ι΄ϛ″ μηνῶν τὸ κέρδος ὑπέρπυρα ρξδ΄ κουκκιὰ ζ΄ τουρν(έ)σια γ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου).

τὸ δὲ χρονικὸν κέρδος τῶν ρνς΄ φλουριῶν καὶ δ΄ ὑπερπύρων καὶ κουκκιῶν ι΄ – τοὺς μὲν ι΄ μῆνας εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ ὑπέρπυρα ρνς΄ κουκκιὰ ια΄ τουρν(έ)σι α΄. λείπονται δύο μῆνες μέχρι τῶν ιβ΄ μηνῶν τοῦ χρόνου. διπλασίασον δὲ ἑνὸς μήνου κέρδος· δὶς οὖν ὑπέρπυρα ιε΄ γίνονται ὑπέρπυρα λ΄ καὶ δὶς κουκκιὰ ιγ΄ γίνονται κουκκιὰ κς΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρον α΄ κουκκιὰ ϛ΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν λ΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὑπέρπυρα λα΄ κουκκιὰ ϛ΄. δὶς δὲ τουρν(έ)σ(ι) ϛ″ γίνονται β΄ μὲν μισά, α΄ δὲ ἀκέραιον. ‖ ἕνωσον καὶ τοῦτο μετὰ τῶν προγενεστέρων καὶ γίνονται f. 49^{v} ὁμοῦ τῶν β΄ μηνῶν ὑπέρπυρα λα΄ κουκκιὰ ϛ΄ τουρν(έ)σι α΄. ἕνωσον δὲ ταῦτα, ἅπερ ἐστὶ μηνῶν δύο κέρδος, μετὰ τῶν ρνς΄ ὑπερπύρων καὶ κουκκιῶν ια΄ καὶ τουρν(ε)σ(ίου) α΄, τῶν ι΄ μηνῶν τὸ κέρδος, καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ρπζ΄ κουκκιὰ ιζ΄ καὶ τουρν(έ)σι(α) β΄. καὶ

ι μηνῶν	‖ ρνς	⋮ ια	τουρν(έ)σ(ι)	α
β μηνῶν	$\overset{(\alpha)}{\|}$ λα	$\overset{(\alpha)}{\vdots}$ ς	τουρν(έ)σ(ι)	α
ιβ μηνῶν	‖ ρπζ	⋮ ιζ	τουρν(έ)σι(α)	β

ἰδοὺ τὰ ρνς΄ φλουριὰ καὶ ὑπέρπυρα δ΄ καὶ κουκκιὰ ι΄ κερδῶσι τὸν χρόνον ὑπέρπυρα ρπζ΄ κουκκιὰ ιζ΄ τουρν(έ)σι(α) β΄.

εὗρες οὖν, πόσα κερδῶσι τὸν μῆνα καὶ πόσα τοὺς ι΄ϛ″ μῆνας καὶ πόσα τὸν χρόνον, οὐ μετὰ προχείρου μεταχειρίσεως, ἀλλ᾽ ὡς ἐνδέχεται γενέσθαι.

Cη Περὶ τοῦ ἐὰν φλουριὰ ρ΄ ἔχωσι τὸν χρόνον κέρδος φλουριὰ ιε΄, τὰ ρν΄ φλουριὰ πόσα κερδῶσι μῆνας ϛ΄ καὶ ἡμέρας ιε΄

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι· ἐὰν τὰ ρ΄ φλουριὰ κερδῶσι τὸν χρόνον φλουριὰ ιε΄, τὰ ρν΄ φλουριὰ πόσα ἔχοσι κερδῆσαι μῆνας ϛ΄ καὶ ἡμέρας ιε΄;

τὰ ιε΄ φλουριά, ἅπερ ἐστὶ χρονικὸν κέρδος τῶν ρ΄ φλουριῶν, ἕκαστον ἀνὰ ὑπέρπυρα η΄ – η΄κις ιε΄ γίνονται ὑπέρπυρα ρκ΄. τὰ δὲ ν΄ φλουριά – ἐστὶ τὸ χρονικὸν κέρδος αὐτῶν τὰ ἡμίση τῶν ρκ΄ ὑπερπύρων, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ξ΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ρκ΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁμοῦ τὸ χρονικὸν κέρδος τῶν ρν΄ φλουριῶν ὑπέρπυρα ρπ΄. μέρισον ταῦτα εἰς τοὺς ιβ΄ μῆνας τοῦ ἐνιαυτοῦ καὶ γίνεται ὁ τούτων δια-

---

4 δεκαπλασίασον] $\overset{\alpha}{\iota}$πλασί$\overset{\alpha}{\sigma}$ων **C** 12.13 τὸ ἥμισυ] τὸ ἡμισην **C**

μερισμὸς ὑπέρπυρα ιε΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ρν΄ φλουριὰ κερδῶσι τὸν μῆνα ὑπέρπυρα ιε΄. τοὺς ς΄ δὲ μῆνας· ς΄κις ὑπέρπυρα ιε΄ γίνονται ὑπέρπυρα Ϛ΄. τὰς ιε΄ δὲ ἡμέρας κερδῶσι τὰ ἡμίση τῶν ιε΄ ὑπερπύρων, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ι΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ρν΄ φλουριὰ κερδῶσι τοὺς ς΄ μῆνας καὶ ιε΄ ἡμέρας ὑπέρπυρα Ϛζ΄ κουκκιὰ ι΄.

ἐὰν δὲ καὶ τὸ ἡμερήσιον κέρδος τῶν ρν΄ φλουριῶν ζητῇς, μέρισον τὸ μηνικὸν κέρδος, τὰ ιε΄ δηλονότι ὑπέρπυρα, εἰς τὰς λ΄ ἡμέρας τοῦ μηνὸς καὶ γίνεται τὸ ἡμερήσιον κέρδος τῶν ρν΄ φλουριῶν κουκκιὰ ι΄.

ἐὰν δὲ καὶ πόσον κερδᾷ τὸν χρόνον ἕκαστον φλουρὶ τῶν ρν΄ ζητῇς, μέρισον τὰ ρπ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ρν΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρον α΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\gamma\,\iota\,\eta}{\alpha\,\varepsilon\,\iota}$, ἅπερ σχιζόμενα εἰς μέρη λ΄ γίνεται $\frac{\alpha}{\varepsilon}$. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου, τῶν κ΄ δηλονότι κουκκιῶν, ἐστὶ κουκκιὰ δ΄.

ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί· τὰ λ΄, ἅπερ ἀπομένοσι τζάκισμα, ἐστὶ ὑπέρπυρα. ποίησον ταῦτα κουκκιά· κ΄κις οὖν λ΄ γίνονται χ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρν΄ φλουριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ δ΄. καὶ ἰδοὺ ἕκαστον τῶν ρν΄ φλουριῶν κερδᾷ τὸν χρόνον ὑπέρπυρον α΄ καὶ κουκκιὰ δ΄, τουτέστι κουκκιὰ κδ΄.

μέρισον τὰ κδ΄ εἰς τοὺς ιβ΄ μῆνας καὶ γίνεται ἑκάστη μερὶς τῶν ιβ΄ ἀνὰ κουκκιὰ β΄· ιβ΄κις γὰρ β΄ κδ΄ γίνονται. ἕκαστον δὲ τῶν ρν΄ φλουριῶν κερδᾷ τὸν μῆνα κουκκιὰ β΄.

Ϛθ Περὶ τοῦ ἐὰν φλουριὰ ρ΄ ἔχωσι τὸν χρόνον κέρδος φλουριὰ ιε΄, τὰ τ΄ φλουριὰ εἰς πόσους χρόνους διπλάζονται

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι· ἐὰν φλουριὰ ρ΄ κερδῶσι ἕκαστον ἐνιαυτὸν φλουριὰ ιε΄, τὰ τ΄ φλουριὰ εἰς πόσους χρόνους γενήσονται ἐπὶ τὸ διπλάσιον;

τὸ χρονικὸν οὖν κέρδος τῶν τ΄ φλουριῶν ἐστι τρὶς ιε΄, με΄ φλουριά. μέρισον τὰ τ΄ φλουριὰ μετὰ τῶν με΄ φλουριῶν, τὸ χρονικὸν κέρδος αὐτῶν δηλονότι, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$· καὶ γὰρ δὶς ιε΄ γίνονται λ΄ καὶ τρὶς ιε΄ γίνονται με΄. καὶ ἰδοὺ εἰς χρόνους ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς χρόνου, ἅπερ ἐστὶ μῆνες η΄, διπλάζονται τὰ τ΄ φλουριὰ καὶ γίνονται χ΄.

ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί. τὸ χρονικὸν κέρδος τῶν τ΄ φλουριῶν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ φλουριὰ με΄· ς΄κις οὖν με΄ γίνονται σο΄, τὰ δὲ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν με΄ φλουριῶν ἐστι φλουριὰ λ΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν σο΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ τ΄. καὶ ἰδοὺ χρόνους ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς χρόνου κερδῶσι τὰ τ΄ φλουριὰ ἕτερα τ΄, τουτέστι διπλάζονται, καθὼς οὕτως εὗρες καὶ διὰ τῆς προχείρου μεταχειρίσεως.

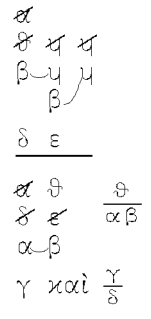
Ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο ζητῇς, ὅτι ἐὰν εἰς χρόνους ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς χρόνου διπλάζωνται τὰ τ΄ φλουριὰ καὶ γίνωνται χ΄, τὸ χρονικὸν αὐτῶν κέρδος ἄρα πόσον ἐστί;

μέρισον τὰ τ΄ φλουριὰ μετὰ τῶν ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$· τρὶς οὖν ς΄ γίνονται ιη΄, καὶ β΄ – τὰ ἄνωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς – ὁμοῦ τρίτα κ΄ τὰ ς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. ποίησον τρίτα καὶ τὰ τ΄ φλουριά· τρὶς οὖν τ΄ γίνονται τρίτα ≫΄. μέρισον τὰ ≫΄ τρίτα μετὰ τῶν κ΄ τρίτων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς με΄. καὶ ἰδοὺ μεριζόμενα τὰ τ΄ φλουριὰ μετὰ τῶν ς΄

---

10 ζητῇς] ζητες **C**

χρόνων καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, ὧν διπλάζονται, γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς φλουριὰ με΄, ἅπερ ἐστὶ χρονικὸν κέρδος τῶν τ΄ φλουριῶν.



ἐὰν δὲ καὶ τὸ μηνιαῖον κέρδος τῶν τ΄ φλουριῶν ζητῇς, μέρισον τὸ χρονικὸν κέρδος αὐτῶν, τουτέστι τὰ με΄ φλουριά, εἰς τοὺς ιβ΄ μῆνας τοῦ χρόνου καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς φλουριὰ γ΄ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ἑνὸς φλουριοῦ. τὰ γὰρ θ΄ πρὸς τὰ ιβ΄ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἰσί· τρὶς γὰρ γ΄ γίνονται θ΄ καὶ δ΄κις γ΄ γίνονται ιβ΄. τὰ δὲ $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν η΄ ὑπερπύρων τοῦ ἑνὸς φλουριοῦ ἐστι ὑπέρπυρα ς΄. καὶ ἰδοὺ τὸ μηνιαῖον κέρδος τῶν τ΄ φλουριῶν ἐστι φλουριὰ γ΄ καὶ ὑπέρπυρα ς΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα λ΄.

ἐὰν δὲ καὶ τὸ ἡμερήσιον κέρδος τῶν τ΄ φλουριῶν ζητῇς, μέρισον τὸ μηνιαῖον κέρδος, τουτέστι τὰ λ΄ ὑπέρπυρα, εἰς τὰς λ΄ ἡμέρας τοῦ μηνὸς καὶ γίνεται τὸ ἡμερήσιον κέρδος τῶν τ΄ φλουριῶν ὑπέρπυρον α΄.

ρ

Περὶ τοῦ πῶς ἔστι συνάψαι τὰ ἐν διαφόροις μησὶ καὶ ἡμέραις δοθέντα μέρη καὶ ποιῆσαι τὸ κέρδος τούτων ἄρξασθαι ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ

Ἔστω ὅτι δανειστὴς μετὰ τόκου, ὅστις ἔχει κατάστιχον διαφόρων χρεῶν, ὧν δέδωκε κατὰ διαφόρους μῆνάς τε καὶ ἡμέρας, ὡς δηλοῦται καταμέρος ἐν τὸ ἐκείνου κατάστιχον. ζητεῖ δὲ συνάψαι τὰ ἐν διαφόροις μησὶ καὶ ἡμέραις δοθέντα διάφορα ‖ χρέα f. 50r καὶ ποιῆσαι τὸ κέρδος τούτων ἄρξασθαι ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ. ἔχεις οὖν τοῦτο ποιῆσαι οὕτως. ἔστω ὅτι κατὰ τὴν πρώτην ἰνδικτιῶνα ἐν διαφόροις μησὶ δέδωκε δανειακῶς πρός τινα φλουριά τινα, ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα η΄. συνε[μ]φώνησε δὲ εἰς τὰ ρ΄ φλουριὰ τὸν χρόνον κέρδος φλουριὰ ιε΄, κερδᾷ δὲ ἕκαστον φλουρὶ τὸν μῆνα κουκκιὰ β΄. δέδω-

εἰς τὰς ι τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου)	φ	ο				
εἰς τὰς κ τοῦ ὀκτ(ωβ)ρί(ου)	φ	ξ ·	κέρδος φ	α	ἤτοι ℥	η
εἰς τὰς λ τοῦ νοε(μβ)ρί(ου)	φ	ς ·	κέρδος φ	γ	ἤτοι ℥	κδ
εἰς τὰς ι τοῦ δεκ(εμβ)ρί(ου)	φ	π ·	κέρδος φ	γ	ἤτοι ℥	κδ
			ὁμοῦ φ	ζ	ἤτοι ℥	νς

κε δὲ τὰς διαφόρους οὕτως· τῇ δεκάτῃ τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου) φλουριὰ ο΄, τῇ εἰκοστῇ τοῦ ὀκτ(ωβ)ρί(ου) φλουριὰ ξ΄, τῇ τριακοστῇ τοῦ νοε(μβ)ρί(ου) φλουριὰ ς΄, τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρί(ου) φλουριὰ π΄.

ἄφες οὖν τὰ ο΄ φλουριὰ καὶ ζήτει τὸ κέρδος τῶν ξ΄ φλουριῶν τῆς δευτέρας δόσεως. τὰ ξ΄ οὖν φλουριὰ δέδωκαν κέρδος ἀπὸ τῆς δεκάτης τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου) μέχρι τῆς εἰκοστῆς τοῦ ὀκτ(ωβ)ρί(ου), ἅπερ εἰσὶ ἡμέραι μ΄, – τὰς μὲν λ΄ ἡμέρας, τουτέστι ἑνὸς μήνου κέρδος, κουκκιὰ δὶς ξ΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρκ΄. τῶν ι΄ δὲ ἡμερῶν τὸ κέρδος, ὧν λείπονται μέχρι τῶν μ΄, ἐστὶ τρίτον μέρος τῶν λ΄ ἡμερῶν, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ κέρδος αὐτῶν τρίτον μέρος τῶν ρκ΄ κουκκιῶν, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ μ΄. καὶ ὁμοῦ τὸ κέρδος τῶν ξ΄ φλουριῶν τὰς μ΄ ἡμέρας κουκκιὰ ρξ΄, τουτέστι φλουρὶ α΄ ἤτοι ὑπέρπυρα η΄.

---

divisio prima: ⟨illegible⟩] ⟨illegible⟩ **C** 16 δανειστὴς] δανησθης **hic et passim C** 17/18 ἐν τὸ ... κατάστιχον **sic C** 18 χρέα] **sic pro** χρέη **C** 20 ἰνδικτιῶνα] ⟨illegible⟩ **C in figura:** ἤτοι] ὕτι **C** 23 τὰς διαφόρους] **sc.** ἡμέρας 23–25 δεκάτῃ] ι **C** εἰκοστῇ] κ **C** τριακοστῇ] λ **C, similiter passim alia ordinalia** 27 δέδωκαν] **sic pro** δεδώκασιν **C** δεκάτης] ι **C** 28 εἰκοστῆς] κ **C** 32 ἤτοι] **iterum** ὕτι **C**

τὰ δὲ ς΄ φλουριὰ ἀπὸ τῆς δεκάτης τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου) μέχρι τῆς τριακοστῆς τοῦ νοε(μβ)ρ(ίου) ἔχοσι ἡμέρας π΄. τὰ ς΄ οὖν φλουριὰ κερδῶσι τὸν μῆνα κουκκιὰ δὶς ς΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρπ΄, τοὺ<ς> δύο δὲ μῆνας – τὰς ξ΄ δηλονότι ἡμέρας – κερδῶσι δὶς ρπ΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ τξ΄. τὰς δὲ κ΄ ἡμέρας, ἃς λείπονται μέχρι τῶν π΄ ἡμερῶν – ὥσπερ ἐστὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λ΄ ἡμερῶν τοῦ ἑνὸς μήνου, ἐστὶ καὶ τὸ κέρδος αὐτῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν ρπ΄ κουκκιῶν, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρκ΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν τξ΄ κουκκιῶν, καὶ ὁμοῦ τὸ κέρδος τῶν ς΄ φλουριῶν τὰς π΄ ἡμέρας κουκκιὰ υπ΄, ἅπερ ἐστὶ φλουριὰ γ΄ ἤτοι ὑπέρπυρα κδ΄.

τὰ δὲ π΄ φλουριά – ἴσως τὸ δίκαιον ἀπαιτεῖ, ἵνα οὐδὲν ἔχωσι κέρδος, ἐπεὶ οὐδὲ ἡμέρας παρελθούσας ἔχοσι· κατ᾽ αὐτὴν γὰρ τὴν δεκάτην τοῦ δεκ(εμβ)ρί(ου) δοθέντα οὐ κερδῶσι τὸ τυχόν. διὰ δὲ τὸ συνάψαι τὸ κέρδος τῶν διαφόρων τεσσάρων τούτων δόσεων εἰς μιᾶς ἡμέρας ἀρχὴν ἀπαιτεῖ ἡμῖν ἡ μεταχείρισις αὐτή, ὅτι τὰ μὲν ο΄ φλουριά, ἅπερ μάλιστα δικαίως ἔχοσι κέρδος, ἵνα οὐκ ἀπαιτήσωμεν ἐξ αὐτῶν κέρδος ζητῆσαι δὲ μᾶλλον τὸ κέρδος τῶν π΄ φλουριῶν ἀπὸ τῇ δεκάτῃ τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου) μέχρι τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρ(ίου), ἅπερ ἐστὶ ἡμέραι ς΄, τουτέστι μῆνες γ΄. ἔχοσι δὲ τὰ π΄ φλουριὰ τὸν μῆνα κέρδος κουκκιὰ δὶς π΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρξ΄, τοὺς τρεῖς δὲ μῆνας τρὶς κουκκιὰ ρξ΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ υπ΄, ἅπερ ἐστὶ φλουριὰ γ΄ ἤτοι ὑπέρπυρα κδ΄.

καὶ ὁμοῦ τὸ κέρδος τῶν τεσσάρων διαφόρων δόσεων τῷ τρόπῳ τούτῳ φλουριὰ ζ΄ ἤτοι ὑπέρπυρα νς΄. ἕνωσον τὰς τέσσαρες διαφόρους δόσεις· ο΄ δὲ καὶ ξ΄ καὶ ς΄ καὶ π΄ φλουριὰ γίνονται ὁμοῦ φλουριὰ τ΄. ζήτει οὖν τῶν τ΄ φλουριῶν τὸ ἀνάλογον κέρδος πρὸς ιε΄ τὰ ρ΄, πόσων ἡμερῶν κέρδος τῶν τ΄ φλουριῶν ἐστι τὰ νς΄ ὑπέρπυρα. τὰ τ΄ οὖν φλουριὰ τὸν μῆνα κερδῶσι κουκκιὰ χ΄, καθ᾽ ὃν λόγον εἴπομεν, ὅτι ἕκαστον φλουρὶ κερδᾷ τὸν μῆνα κουκκιὰ β΄. τὰ δὲ χ΄ κουκκιά ἐστι ὑπέρπυρα λ΄. καὶ ἰδοὺ ἑκάστην ἡμέραν κερδῶσι τὰ τ΄ φλουριὰ ὑπέρπυρον α΄. τὰ νς΄ οὖν ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐστὶ κέρδος τῶν τεσσάρων διαφόρων δόσεων, ἐστὶ νς΄ ἡμερῶν κέρδος τῶν τ΄ φλουριῶν. ἄρξου δὲ ἀπὸ τῇ δεκάτῃ τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου) καὶ σκόπει, ποῦ καταλήγοσι αἱ νς΄ ἡμέραι, κἀκεῖσε σημείωσαι τὴν ἀρχὴν πάντων καὶ ἄρχου ἀπ᾽ ἐκεῖσε τὸ κέρδος τῶν τ΄ φλουριῶν. καταλήγοσι δὲ αἱ νς΄ ἡμέραι ἀπὸ τῇ δεκάτῃ τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου) ἀρχόμεναι μέχρι τῇ ἕκτῃ τοῦ νοε(μβ)ρί(ου)· πάντας γὰρ τοὺς ιβ΄ μῆνας τοῦ ἐνιαυτοῦ ἐπὶ τῶν λογαριασμῶν τε καὶ καταστίχων ἀνὰ λ΄ ἡμέρας ἀριθμῶσι αὐτούς. διὰ τὸ ἀσύγχυτον· κ΄ δὲ τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου) καὶ λ΄ τοῦ ὀκτ(ωβ)ρί(ου) – ὁμοῦ ἡμέραι ν΄. λάβε καὶ ἀπὸ τὸν νοέ(μβ)ρι(ον) ἡμέρας ς΄ – ὁμοῦ ἡμέραι νς΄. καὶ ἰδοὺ ἐγένετο ἡ σύναψις καὶ ἡ ἀρχὴ τοῦ κέρδους τῶν διαφόρων τεσσάρων δόσεων τῇ ἕκτῃ τοῦ νοε(μβ)ρί(ου).

Ἵνα δὲ ἴδῃς τὸ ἀληθὲς τῆς παρούσης μεταχειρίσεως· ἀπὸ τῇ ἕκτῃ τοῦ νοε(μβ)ρί(ου), ἣν διωρισάμεθα εἶναι τὴν ἀρχὴν τοῦ κέρδους τούτων πάντων, μέχρι τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρ(ίου) εἰσὶ ἡμέραι λδ΄. καὶ ἐπεὶ τὰ τ΄ φλουριὰ ἑκάστην ἡμέρα(ν) δίδωσι κέρδος ὑπέρπυρον α΄, τὰς λδ΄ ἡμέρας κερδῶσι ὑπέρπυρα λδ΄. οὕτως οὖν δίδωσι καὶ αἱ τέσσαρες διάφοραι δόσεις τῇ ἀληθείᾳ ἀπὸ τῇ δεκάτῃ τοῦ σεπτ(εμβ)ρ(ίου) μέχρι τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρ(ίου) ὑπέρπυρα λδ΄.

ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι οὕτως ἐστί· τὰ ο΄ φλουριὰ τῆς πρώτης δόσεως ἀπὸ τῇ δεκάτῃ τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου) μέχρι τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρί(ου) ἔχοσι ἡμέρας ς΄, τουτέστι μῆνας τρεῖς. δίδωσι δὲ κέρδος τὸν μῆνα τὰ ο΄ φλουριὰ κουκκιὰ δὶς ο΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ

14/15 **hic et aliubi** ἀπό, μέχρι **c. dat. sic C** 33 ἀπό **c. acc. C** 20 τέσσαρες] τέσσαραις **C, hic et passim pro** τέσσαρας

ρμ΄, τοὺς δὲ γ΄ μῆνας δίδωσι κέρδος τρὶς ρμ΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ υκ΄, τουτέστι ὑπέρπυρα κα΄.

εἰς τὰς ι τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου)	φ ο ·	κέρδος $\overset{(α)}{\parallel}$ κα
εἰς τὰς κ τοῦ ὀκτ(ωβ)ρί(ου)	φ ξ ·	κέρδος $\overset{(α)}{\parallel}$ ι
εἰς τὰς λ τοῦ νοε(μβ)ρί(ου)	φ ς ·	κέρδος $\overset{(α)}{\parallel}$ γ
εἰς τὰς ι τοῦ δεκ(εμβ)ρί(ου)	φ π	ὁμοῦ $\overset{(α)}{\parallel}$ λδ

τὰ δὲ ξ΄ φλουριὰ ἀπὸ τῇ εἰκοστῇ τοῦ ὀκτ(ωβ)ρί(ου) μέχρι τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρί(ου) ἔχοσι ἡμέρας ν΄. κερδῶσι δὲ τὰ ξ΄ φλουριὰ τὸν μῆνα κουκκιὰ δὶς ξ΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρκ΄. αἱ δὲ κ΄ ἡμέραι ἐστὶ $\frac{β}{γ}$ τῶν λ΄ ἡμερῶν τοῦ ἑνὸς μήνου. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ κέρδος αὐτῶν $\frac{β}{γ}$ τῶν ρκ΄ κουκκιῶν, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ π΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ρκ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται τὸ κέρδος τῶν ξ΄ φλουριῶν τὰς ν΄ ἡμέρας κουκκιὰ σ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ι΄.

τὰ δὲ ς΄ φλουριὰ ἀπὸ τῇ τριακοστῇ τοῦ νοε(μβ)ρ(ίου) μέχρι τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρ(ίου) ἔχοσι ἡμέρας ι΄. αἱ ι΄ δὲ ἡμέραι ἐστὶ $\frac{α}{γ}$ τῶν λ΄ ἡμερῶν τοῦ ἑνὸς μήνου. τὸν δὲ μῆνα κερδῶσι τὰ ς΄ φλουριὰ κουκκιὰ δὶς ς΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ρπ΄. τὸ δὲ $\frac{α}{γ}$ τῶν ρπ΄ κουκκιῶν ἐστι κουκκιὰ ξ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα γ΄. κερδῶσι δὲ τὰ ς΄ φλουριὰ τὰς ι΄ ἡμέρας ὑπέρπυρα γ΄.

τὰ δὲ π΄ φλουριά, ἐπεὶ οὐ παρῆλθον ἡμέραι ἀπὸ τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρί(ου), οὐδὲ κέρδος ἔχοσι. ἕνωσον δὲ τὰ ὑπέρπυρα αὐτῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα λδ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ἀληθῶς αἱ διάφοραι τέσσαρες δόσεις κερδῶσι μέχρι τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρί(ου) ὑπέρπυρα λδ΄.

κἄντε οὖν ἀπὸ τῇ δεκάτῃ || τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου) διειρημ[μ]ένως ἀρξάμενον τὸ κέρδος τῶν τεσσάρων διαφόρων δόσεων μέχρι τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρ(ίου) ἐστὶ ὑπέρπυρα λδ΄, κἄντε ἀπὸ τῇ ἕκτῃ τοῦ νοε(μβ)ρ(ίου) – οὐ διειρημ[μ]ένως, ἀλλὰ ὁμοῦ ἀρξάμενον – τῶν τεσσάρων διαφόρων δόσεων τὸ κέρδος μέχρι τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρί(ου) καὶ οὕτως πάλιν ἐστὶ ὑπέρπυρα λδ΄. f. 50^{v}

Ἐπεὶ οὖν εὗρες τῇ ἀληθείᾳ, ὅτι αἱ τοιαῦται τέσσαρες διάφοραι δόσεις διειρημένως μὲν ἀπὸ τῇ δεκάτῃ τοῦ σεπτ(εμβ)ρί(ου) ἀρξάμενον τὸ κέρδος αὐτῶν μέχρι τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρ(ίου) ἐστὶ ὑπέρπυρα λδ΄, ὁμοῦ δὲ αἱ τέσσαρες δόσεις τῶν τ΄ φλουριῶν ἑκάστην ἡμέραν κερδῶσι ὑπέρπυρον α΄, δῆλόν σοι γίνεται, ὅτι ταῦτα τὰ λδ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐστὶ κέρδος τῶν τεσσάρων διαφόρων δόσεων, ἐστὶ κέρδος τῶν τ΄ φλουριῶν ἡμερῶν λδ΄.

ὀπισθαπόδησε οὖν ὀπισθορμήτως ἀπὸ τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρί(ου) ἀρξάμενος, ἥτις ἐστὶ τελευταία ἡμέρα πάντων τῶν διαφόρων δόσεων, μέχρις ἂν πληρώσῃς ταύτας τὰς λδ΄ ἡμέρας, ταὐτὸν δ᾽ εἰπεῖν τὰ λδ΄ ὑπέρπυρα, καὶ ἔνθα ἂν καταλήξωσι ὀπισθορμήτως αἱ λδ΄ ἡμέραι – μᾶλλον δὲ τὰ λδ΄ ὑπέρπυρα –, ἐκεῖσέ ἐστι ἡ ἀρχή τε καὶ σύναψις τοῦ κέρδους τῶν διαφόρων τεσσάρων δόσεων. καταλήγοσι δὲ ὀπισθορμήτως ἀπὸ τῇ δεκάτῃ τοῦ δεκ(εμβ)ρ(ίου) ἀρξάμενα τὰ λδ΄ ὑπέρπυρα μέχρι τῇ ἕκτῃ τοῦ νοε(μβ)ρί(ου), καθὼς οὕτως εὗρες καὶ διὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως.

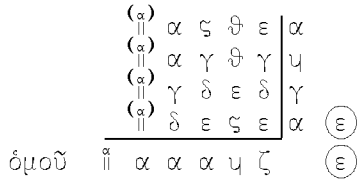
καὶ ἰδού ἐστι καὶ αὕτη δευτέρα μεταχείρισις καὶ σαφεστέρα τῆς πρώτης, δι᾽ ἧς ἔχεις συνάψαι τὰς διειρημ[μ]ένας διαφόρους τέσσαρες δόσεις τῶν τ΄ φλουριῶν καὶ ποιῆσαι τὸ κέρδος τούτων ἄρξασθαι ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ.

ρα

Περὶ τοῦ πῶς ἔστι ἑνῶσαι ὁμάδας διαφόρους καὶ εἰδέναι, πόση γίνεται ἡ ποσότης τούτων πάντων μία ὁμὰς γενομένη

Ἔστω ὅτι ἐκ διαφόρων λογαριασμῶν ἐξῆλθον ὁμάδαι διάφοραι, καὶ ἡ μὲν πρώτη ὁμάς

22.36 ἕκτῃ] ς **C**



ἐστι ὑπέρπυρα ,αχϛε΄, ἡ δευτέρα δὲ ὁμάς ἐστι ὑπέρπυρα ,ατϛγ΄, ἡ δὲ τρίτη ἐστὶ ὑπέρπυρα ,γυνδ΄, ἡ δὲ τετάρτη ἐστὶ ὑπέρπυρα ,δφξε΄. θὲς οὖν ταύτας ἀκολούθως ἐν τάξει – μονάδα μετὰ μονάδος καὶ δεκάδα μετὰ δεκάδος καὶ ἑξῆς ὁμοίως. ἕνωσον οὖν ταύτας τὰς διαφόρους ὁμάδας ἀπὸ τῆς μονάδος ἀρξάμενος καὶ εἰπέ· ε΄ καὶ γ΄ γίνονται η΄, καὶ δ΄ γίνονται ιβ΄, καὶ ε΄ γίνονται ιζ΄. θὲς κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς εἰς τόπον μονάδος ζ΄, κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ α΄ ἀντὶ τῶν ι΄. ἕνωσον δὲ πάλιν τὰς δεκάδας ἀπὸ τῶν θ΄ ἀρξάμενος· θ΄ οὖν καὶ θ΄ γίνονται ιη΄, καὶ ε΄ γίνονται κγ΄, καὶ ϛ΄ γίνονται κθ΄. πρόσθες καὶ τὸ α΄, ὅπερ κρατεῖς ἀντὶ τῶν ι΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ λ΄. τὰ δὲ λ΄ γράφονται οὕτως· γ μ΄. θὲς οὖν κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς εἰς τόπον δεκάδος μ΄, κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ γ΄ ἀντὶ τῶν λ΄. ἕνωσον δὲ καὶ τὰς ἑκατοντάδας· ϛ΄ οὖν καὶ γ΄ γίνονται θ΄, καὶ δ΄ γίνονται ιγ΄, καὶ ε΄ γίνονται ιη΄, καὶ γ΄, ἅπερ ἀντὶ τῶν λ΄ κρατεῖς, ὁμοῦ κα΄. θὲς κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς εἰς τόπον ἑκατοντάδος α΄, κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. ἕνωσον δὲ καὶ τὰς χιλιάδας· α΄ οὖν καὶ α΄ γίνονται β΄, καὶ γ΄ γίνονται ε΄, καὶ δ΄ γίνονται θ΄, καὶ β΄, ἅπερ ἀντὶ τῶν κ΄ κρατεῖς, ὁμοῦ ια΄. θὲς οὖν κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς χιλιάδος τόπον α΄ καὶ εἰς τὸν τῆς μυριάδος τόπον α΄ ἀντὶ τῶν ι΄. καὶ ἰδοὺ ἡ καθόλου ποσότης τῶν διαφόρων τεσσάρων ὁμάδων ἐστὶ ὑπέρπυρα ,ι,α΄ καὶ ρζ΄ ὑπέρπυρα.

Ἡ δὲ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον, ἔστι αὕτη.

ζήτει ἀνὰ δύο γράμματα, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ πολλ(α)πλασιασμοῦ καὶ διαμερισμοῦ εἰώθαμεν ποιεῖν μαρτ(υ)ριῶν, καὶ μέριζε ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν δύο πρώτων γραμμάτων οὕτως κείμενα α ϛ΄ περισσεύοσι β΄. τὰ β΄ δὲ ταῦτα μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τρίτου γράμματος οὕτως κείμενα β θ΄ δηλῶσι κθ΄. μέρισον καὶ ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ – περισσεύει α΄. τὸ δὲ α΄ μετὰ τοῦ ἐφεξῆς τετάρτου γράμματος οὕτως κείμενα α ε΄ δηλῶσι ιε΄. μέρισον ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύει καὶ α΄. θὲς οὖν ἔμπροσθεν τῆς τοιαύτης ὁμάδος τὸ α΄, ὅπερ περισσεύει ἐκ τῆς τελευταίας συζυγίας τῶν ἀνὰ δύο γραμμάτων.

οὕτως δὲ ποιῶν καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας ὁμάδος τῆς δηλούσης ὑπέρπυρα ,ατϛγ΄ εἰς τὰ τῆς τελευταίας συζυγίας δύο γράμματα ἀπομένει μ΄· θὲς ἔμπροσθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τῆς δευτέρας ὁμάδος μ΄. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῆς τρίτης ὁμάδος τῆς δηλούσης ,γυνδ΄ ἐπὶ τῆς τελευταίας συζυγίας περισσεύοσι γ΄· θὲς ἔμπροσθεν τῆς τρίτης ὁμάδος γ΄. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῆς τετάρτης ὁμάδος τῆς δηλούσης ,δφξε΄ ἐπὶ τῆς τελευταίας συζυγίας τῶν ἀνὰ δύο γραμμάτων περισσεύει α΄· θὲς ἔμπροσθεν τῆς τετάρτης ὁμάδος α΄. ἕνωσον δὲ τὰ ἐκ τῶν τεσσάρων ὁμάδων περιττεύοντα· α΄ οὖν καὶ γ΄ γίνονται δ΄, καὶ α΄ γίνονται ε΄. θὲς ε΄ ἐντὸς κύκλου τινός.

ζήτει δὲ καὶ τὰ ἐξελθόντα ἐκ τῶν τεσσάρων ὁμάδων, ἅπερ δηλῶσι ,ι,α΄ καὶ ρζ΄, καὶ μέρισον καὶ ταῦτα ἀνὰ δύο γράμματα ἐπὶ τῶν ζ΄ ἀπὸ τῆς πρώτης συζυγίας ἀρξάμενος, ἥτις δηλοῖ ια΄, μέχρι τῆς τελευταίας, ὡς εἰώθαμεν ποιεῖν. καὶ εὑρήσεις, ὅτι περισσεύοσι καὶ ἐνταῦθα ε΄. θὲς καὶ ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός. καὶ ἐπεὶ αἱ δύο μαρτ(υ)ρίαι αὐτῶν ἐγένοντο ἴσαι καὶ ὅμοιαι, ἔχουσα ἑκάστη ἀνὰ ε΄, ἤδη ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ ἡ μὲν εἶχε ε΄, ἡ δὲ ἄλλον τι ἀνόμοιον γράμμα, οὐδὲ ἡ ὁμὰς τῶν

---

in sinistro marg. fol. 50^{v} ad 21: ζήτει τὴν μαρτ(υ)ρίαν τούτου διὰ τοῦ θ΄ καὶ οὐ διὰ τοῦ ζ΄.

,ι,α΄ καὶ ρζ΄ ὑπερπύρων ἐγένετο ἂν καλῶς.
καὶ ἰδοὺ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις τῆς ὁμάδος.

Ἕτερον τούτου ὅμοιον. Ἔστω δὲ πάλιν ἡ μὲν πρώτη ὁμὰς ὑπέρπυρα ≫νγ΄, ἡ δὲ δευτέρα ὑπέρπυρα ωις΄, ἡ δὲ τρίτη ὑπέρπυρα ,ζχλα΄, ἡ δὲ τετάρτη ὑπέρπυρα ,ϛτιε΄, ἡ δὲ πέμπτη ὑπέρπυρα ,εσοδ΄, ἡ δὲ ἕκτη ὑπέρπυρα ,δρξγ΄, ἡ δὲ ἑβδόμη ὑπέρπυρα ,ι,γ΄ καὶ σμε΄. ἕνωσον οὖν ταύτας τὰς διαφόρους ὁμάδας ἀπὸ τοῦ τέλους τῶν μονάδων ἀρξάμενος ὡς τὸ πρότερον. καὶ γίνεται ὁμοῦ ἡ ποσότης τῶν ἑπτὰ γραμμάτων τῶν μονάδων || κζ΄. θὲς κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς μονάδος τόπον τὰ ζ΄, κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. ὡσαύτως ἕνωσον καὶ τὰ ζ΄ τῶν δεκάδων γράμματα· γίνονται δὲ ὁμοῦ κζ΄. πρόσθες καὶ τὰ β΄, ἅπερ ἀντὶ τῶν κ΄ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ κθ΄. θὲς κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον τὰ θ΄, κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. ὡσαύτως ἕνωσον καὶ τὰ ζ΄ τῶν ἑκατοντάδων γράμματα· γίνονται δὲ ὁμοῦ λα΄. πρόσθες καὶ τὰ β΄, ἅπερ ἀντὶ τῶν κ΄ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ λγ΄. θὲς τὰ γ΄ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον, κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ γ΄ ἀντὶ τῶν λ΄. ὡσαύτως ἕνωσον καὶ τὰ ε΄ γράμματα τῶν χιλιάδων· γίνονται δὲ ὁμοῦ κε΄. πρόσθες καὶ τὰ γ΄, ἅπερ ἀντὶ τῶν λ΄ κρατεῖς, καὶ γίνονται ὁμοῦ κη΄. θὲς τὰ η΄ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς, κράτει δὲ παρὰ σεαυτῷ β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. ἕνωσον ταῦτα τὰ β΄ μετὰ τοῦ α΄, ὅπερ ἐστὶ εἰς πέμπτον τόπον τῆς κατωτέρας ὁμάδος, καὶ γίνονται ὁμοῦ γ΄. θὲς ταῦτα τὰ γ΄ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς εἰς πέμπτον τόπον. καὶ ἰδοὺ ἐγένοντο αἱ ἑπτὰ αὗται διάφοραι ὁμάδαι μία ὁμάς, ἥτις δηλοῖ ὑπέρπυρα ,λ,η΄ καὶ τϛζ΄ ὑπέρπυρα. f. 51r

(α)= θ ε γ α
(α)= η α ϛ δ
(α)= ζ ϛ γ α α
(α)= ϛ γ α ε α
(α)= ε β ζ δ γ
(α)= δ α ϛ γ ε
(α)= α γ β δ ε α ὁμοῦ α ϛ (β)
ὁμοῦ (α)= γ η γ θ ζ (β)

Ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία τῆς προτέρας. ἀπὸ γὰρ τῆς πρώτης ὁμάδος περισσεύει α΄, ἀπὸ δὲ τῆς δευτέρας περισσεύουσι δ΄, ἀπὸ δὲ τῆς τρίτης περισσεύει α΄, ἀπὸ δὲ τῆς τετάρτης περισσεύει α΄, ἀπὸ δὲ τῆς πέμπτης περισσεύουσι γ΄, ἀπὸ δὲ τῆς ἕκτης περισσεύουσι ε΄, ἀπὸ δὲ τῆς ἑβδόμης περισσεύει α΄. ἕνωσον ταῦτα πάντα καὶ γίνονται ὁμοῦ ις΄. ἄφελε καὶ ταῦτα ἐπὶ τῶν ζ΄ καὶ περισσεύουσι καὶ β΄. θὲς τὰ β΄ ταῦτα ἐντὸς κύκλου.

ζήτει δὲ καὶ ἀπὸ τῆς τῶν ἑπτὰ ὁμάδων γενομένης ὁμάδος, ἥτις δηλοῖ ,λ,η΄ καὶ τϛζ΄, τὸ περισσεῦον γράμμα τῆς τελευταίας συζυγίας τῶν ἀνὰ δύο γραμμάτων· εὑρήσεις δὲ καὶ τοῦτο β΄. θὲς οὖν καὶ ταῦτα τὰ β΄ ἐντὸς κύκλου. ἐπεὶ οὖν αἱ δύο μαρτυρίαι εἰσὶ ὅμοιαι, ἔχουσα ἑκάστη ἐντὸς κύκλου ἀνὰ β΄, ἐγένετο καλῶς ἡ ποσότης τῆς ὁμάδος, ἧς ἐποίησας, ἥτις δηλοῖ ὑπέρπυρα ,λ,η΄ καὶ τϛζ΄ ὑπέρπυρα.

τὸ αὐτὸ δὲ ἔχεις καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων πάντων ὁμάδων καὶ τῶν τούτων μαρτ(υ)ριῶν ποιεῖν καὶ εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

ρβ

Περὶ τοῦ πῶς ἔστι ἀφελεῖν ὁμάδα ἐξ ὁμάδος καὶ εἰδέναι τὸ ἐν[ν]απομεῖναν μέρος, πόσον ἐστί

Ὅταν βούλ(ῃ) ἀφελεῖν ὁμάδα τινὰ ἐξ ἑτέρας ὁμάδος, οὐ δύνασαι ἀφελεῖν τοσαύτην καὶ ὁμοίαν ποσότητα ἐξ ἑτέρας τοσαύτης ὁμοίας ποσότητος· ρ΄ γὰρ ἐκ τῶν ρ΄ καὶ σ΄ ἐκ τῶν σ΄ ἀφελόμενος τὸ ἐναπομένον ἔσται οὐδέν. δεῖ οὖν ἀνομοίους εἶναι τὰς τούτων ποσότητας καὶ ἡ μὲν ἔχειν πλεῖο, ἡ δὲ ἔλαττο. θὲς οὖν τὰ μὲν πλείονα ἄνωθεν,

τὰ δὲ ἐλάττονα κάτωθεν.

ἔστω γὰρ ὅτι ζητεῖς ἀφελεῖν ,αχνε΄ ὑπέρπυρα ἐκ τῶν ,αψκδ΄ ὑπερπύρων. θὲς τὰ μὲν πλείονα ἄνωθεν, τὰ δὲ ἐλάττονα κάτωθεν. καὶ τὰ μὲν ἄνω-

‖ α ζ β δ	ὁμοῦ α δ	ὁμοῦ δὲ ⓔ
‖ α ϛ ε ε	η	
‖ ψ ψ ϛ θ	ϛ	} ὁμοῦ α δ ὁμοῦ δὲ ⓔ

θεν ἔχοσι τὰ μείζονα μέρη περὶ τὴν ἀρχήν, τὰ δὲ κάτωθεν ἔχοσι τὰ μείζονα περὶ τὸ τέλος. οὐ δύνασαι οὖν ἀφελεῖν τὰ κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν κείμενα περὶ τὸ τέλος, ἅπερ δηλῶσι νε΄, ἐκ τῶν ἄνωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν κειμένων, ὧν δηλῶσι κδ΄· τὰ γὰρ νε΄ μείζονά ἐστι τῶν κδ΄. εἶχες δὲ καλῶς καὶ προχείρως ἀφελεῖν τὰ κάτωθεν ἐκ τῶν ἄνωθεν, εἰ τὰ ἄνωθεν μὲν ἦσαν ἀπαρχῆς μέχρι τέλους μείζω, τὰ κάτωθεν δὲ ἀπαρχῆς μέχρι τέλους ἐλάττω. νῦν δὲ ἀνωμάλως ἔχουσαι τὰ μείζονα καὶ ἐλάττονα, ἡ μὲν περὶ τὴν ἀρχὴν ἔχουσα τὰ μείζω, ἡ δὲ περὶ τὸ τέλος, ἔχεις ἀφελεῖν τὰ κάτωθεν ἐκ τῶν ἄνωθεν οὕτως.

λάβε ἐκ τῶν ἄνωθεν β΄, ὥνπερ εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον εὑρίσκονται, α΄. τοῦτο δὲ τὸ α΄ μετὰ τῶν δ΄, ὥνπερ ἐστὶ περὶ τὸ τέλος, οὕτως κείμενα α δ΄ δηλῶσι ιδ΄. ἄφελε τὰ ε΄, ἅπερ ἐστὶ κάτωθεν τῶν δ΄, ἐκ τῶν ιδ΄ καὶ ἀπομένοσι θ΄. θὲς οὖν τὰ θ΄ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς μονάδος τόπον.

οὐκ ἔχεις οὖν πάλιν ἀφελεῖν τὰ κάτωθεν ε΄, ἅπερ ἐστὶ εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον, ἐκ τοῦ ἄνωθεν α΄, ὅπερ ἦν πρότερον β΄· ἀφεῖλες γὰρ α΄ καὶ ἀπέμεινεν καὶ α΄. κόψε οὖν ἐκ τῶν ἄνωθεν ζ΄ τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον α΄ καὶ ἀπομένοσι ϛ΄. τὸ α΄ δὲ τοῦτο, ὅπερ ἔκοψας ἐκ τῶν ζ΄, μετὰ τοῦ ἑτέρου α΄, οὗπερ ἀπέμεινε ἐκ τῶν β΄, οὕτως κείμενα α α΄ δηλῶσι ια΄. ἄφελε τὰ κάτωθεν ε΄, ἅπερ ἐστὶ εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον καὶ δηλῶσι ν΄, ἐκ τῶν ἄνωθεν ια΄, ὧν ἐποίησας, καὶ ἀπομένοσι ϛ΄. θὲς ϛ΄ κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς δεκάδος τόπον.

ἄφελε δὲ τὰ κάτωθεν ϛ΄, ἅπερ ἐστὶ εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον καὶ δηλῶσι χ΄, ἐκ τῶν ἄνωθεν ϛ΄, ὧν ἀπέμειναν ἐκ τῶν ζ΄· ἀφεῖλες γὰρ α΄ καὶ ἀπέμειναν ϛ΄, ἅπερ καὶ ταῦτα εἰς τόπον ὄντα ἑκατοντάδος δηλῶσι χ΄. χ΄ δὲ ἐκ τῶν χ΄ – μᾶλλον δὲ ϛ΄ ἐκ τῶν ϛ΄ – ἀφελόμενος ἀπομένει οὐδέν. θὲς κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς εἰς τὸν τῆς ἑκατοντάδος τόπον ἀντὶ ἄλλου τινὸς γράμματος ψ΄.

ἄφελε δὲ τὸ κάτωθεν α΄, ὅπερ ἐστὶ εἰς τὸν τῆς χιλιάδος τόπον καὶ δηλοῖ ,α΄, ἐκ τοῦ ἄνωθεν α΄, ὅπερ καὶ αὐτὸ εἰς τὸν τῆς χιλιάδος τόπον εὑρισκόμενον δηλοῖ ,α΄. ,α΄ δὲ ἐκ τῶν ,α΄ – μᾶλλον δὲ α΄ ἐκ τοῦ α΄ – ἀφελόμενος ἀπομένει οὐδέν. θὲς κάτωθεν εἰς τὸν τῆς χιλιάδος τόπον ἀντὶ ἄλλου τινὸς δηλωτικοῦ γράμματος ψ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι – ἐὰν ἀφέλῃς ,αχνε΄ ὑπέρπυρα ἐκ τῶν ,αψκδ΄ ὑπερπύρων – τὰ ἐναπομένοντά ἐστι ὑπέρπυρα ξθ΄.

Εἰ οὖν ζητεῖς εἰδέναι, εἰ καλῶς ἐγένετο ἡ ἀφεξαίρεσις τούτων· ἔστι μὲν καὶ ἄλλη τις μαρτυρία τε καὶ ἀπόδειξις, ὡς σαφεστέραν δὲ οὖσαν καὶ πρόχειρον ἐροῦμεν τὴν κρείττονα, ‖ ἥτις ἐστὶ ἡ παροῦσα. f. 51^{v}

10.12 μείζω] μυζων **C** 11 ἔχουσαι] **sc.** ὁμάδαι 14 δεκάδος] **hic et aliubi** $^{\alpha}$ἰδος **C** 20 ἑκατοντάδος] **hic et aliubi** $^{\omega\nu}$ρτάδος **C** 30 χιλιάδος] **hic et aliubi** ,$^{\omega\varsigma}$αδ **C** 36 ἀφεξαίρεσις] αφεξέρϊσης **C** 35 ἐναπομένοντά] ἐναπομένοσι **sic C**

in inferiore marg. fol. 51^{r}: + ἔστι καὶ ἑτέρα ἀπόδειξις· α ϛ ε ε΄ ὁμοῦ γίνονται α ζ΄, ὁμοῦ δὲ τὰ α ζ΄ γίνονται η΄. ψ ψ ϛ θ΄ ὁμοῦ γίνονται α ε΄, ὁμοῦ δὲ τὰ α ε΄ γίνονται ϛ΄. ἕνωσον τὰ η΄ καὶ ϛ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ α δ΄, ὁμοῦ δὲ τὰ α δ΄ γίνονται ⓔ. α ζ β δ΄ ὁμοῦ γίνονται α δ΄, ὁμοῦ δὲ τὰ α δ΄ γίνονται ⓔ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

θὲς ἄνωθεν μὲν τὰ ,αχνε΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἀφεῖλες ἐκ τῶν ἄνωθεν ,αψκδ΄ ὑπερπύρων, κάτωθεν δὲ τούτων θὲς τὰ ϛ ϛ ϛ ϑ΄, ἅπερ ἀπέμειναν ἐκ τῶν ,αψκδ΄ ὑπερπύρων, καὶ ἕνωσον ταῦτα. ε΄ δὲ καὶ ϑ΄ γίνονται ιδ΄. θὲς κάτωθεν δ΄, κράτει δὲ α΄ ἀντὶ τῶν ι΄. α΄ δὲ καὶ ε΄ καὶ ϛ΄ γίνονται ὁμοῦ ιβ΄. θὲς κάτωθεν β΄, κράτει δὲ α΄ ἀντὶ τῶν ι΄. α΄ δὲ καὶ ϛ΄ γίνονται ζ΄. θὲς κάτωθεν ζ΄. ὡσαύτως θὲς κάτωθεν καὶ τὸ α΄, ὅπερ δηλοῖ ,α΄. καὶ ἰδοὺ ἐγένοντο πάλιν ὑπέρπυρα ,αψκδ΄ ὡς τὸ πρότερον. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

͵	α	ϛ	ε	ε			
͵	υ	υ	ϛ	ϑ			
͵	α	ζ	β	δ			

Ἕτερον τούτου ὅμοιον. Ἔστω ὅτι χνη΄ χιλιάδων καὶ ≫λδ΄ ὑπερπύρων ζητεῖς ἀφελεῖν υλε΄ χιλιάδας καὶ ψμθ΄ ὑπέρπυρα. θὲς οὖν πάλιν καὶ ἐνταῦθα ἄνωθεν μὲν τὰ πλείονα, κάτωθεν δὲ τὰ ἐλάττονα. οὐ δύνασαι οὖν ἀφελεῖν τὰ κάτωθεν ϑ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν δ΄. κόψε οὖν ἐκ τῶν ἄνωθεν γ΄ γράμμα α΄ καὶ ἀπομένοσι β΄. τὸ δὲ α΄, ὅπερ ἀφεῖλες ἐκ τῶν γ΄, μετὰ τῶν δ΄ οὕτως κείμενα α δ΄ δηλῶσι ιδ΄. ἄφελε τὰ κάτωθεν ϑ΄ ἐκ τῶν ιδ΄ καὶ ἀπομένοσι ε΄. θὲς ε΄ κάτωθεν.

͵	ϛ	ε	η	ϑ	γ	δ		ὁμοῦ (η)
͵	δ	γ	ε	ζ	δ	ϑ	ε	} ὁμοῦ (η)
͵	β	β	γ	α	η	ε	γ	

οὐκ ἔχεις οὖν ἀφελεῖν τὰ κάτωθεν δ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν β΄, ὧν ἀφεῖλες α΄ ἐκ τῶν γ΄ καὶ ἀπέμειναν β΄. κόψε οὖν ἐκ τῶν ἄνωθεν ϑ΄ α΄ καὶ ἀπομένοσι η΄. τὸ δὲ α΄, ὅπερ ἔκοψας ἐκ τῶν ϑ΄, μετὰ τῶν β΄, ὧν ἀπέμειναν ἐκ τῶν γ΄, οὕτως κείμενα α β΄ δηλῶσι ιβ΄. ἄφελε δὲ τὰ κάτωθεν δ΄ ἐκ τῶν ιβ΄ καὶ ἀπομένοσι η΄. θὲς η΄ κάτωθεν. ἄφελε δὲ πάλιν τὰ κάτωθεν ζ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν η΄, ὧν ἀφεῖλες α΄ ἐκ τῶν ϑ΄ καὶ ἀπέμειναν η΄. ἀφελόμενος δὲ ζ΄ ἐκ τῶν η΄ ἀπομένει α΄. θὲς α΄ κάτωθεν. ἄφελε δὲ τὰ κάτωθεν ε΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν η΄ καὶ ἀπομένοσι γ΄. θὲς γ΄ κάτωθεν. ἄφελε δὲ τὰ κάτωθεν γ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν ε΄ καὶ ἀπομένοσι β΄. θὲς β΄ κάτωθεν. ἄφελε δὲ τὰ κάτωθεν δ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν ϛ΄ καὶ ἀπομένοσι β΄. θὲς β΄ κάτωθεν. καὶ ἰδοὺ ἀφελόμενος υλε΄ χιλιάδας καὶ ψμθ΄ ὑπέρπυρα ἐκ τῶν χνη΄ χιλιάδων καὶ ≫λδ΄ ὑπερπύρων ἀπομένοσι καὶ ὑπέρπυρα σκγ΄ χιλιάδαι καὶ ρπε΄ ὑπέρπυρα.

ἡ δὲ ἀπόδειξις πάλιν ἐστὶ ὁμοία τῆς προτέρας. θὲς ἄνωθεν μὲν τὰς υλε΄ χιλ(ι)άδας καὶ ψμθ΄ ὑπέρπυρα, κάτωθεν δὲ θὲς τὰς σκγ΄ χιλιάδας καὶ ρπε΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἀπέμειναν ἐκ τῆς πρώτης μεγ(ά)λης ὁμάδος. ἕνωσον δὲ τὰ δύο μέρη αὐτῶν καὶ πάλιν γίνονται ὡς τὸ πρότερον ὑπέρπυρα χνη΄ χιλιάδαι καὶ ≫λδ΄ ὑπέρπυρα. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις τούτων, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

͵	δ	γ	ε	ζ	δ	ϑ
͵	β	β	γ	α	η	ε
͵	ϛ	ε	η	ϑ	γ	δ

καὶ ταῦτα μὲν οὕτως, ὁπόταν ἀνωμάλως ἔχῃ ἡ ἄνω μεῖζο ὁμὰς τῆς κάτωθεν ἔλαττο οὔσης ὁμάδος. ὅταν δὲ ὁμαλῶς ἀεὶ τὰ ἄνωθεν ἔχωσι πλέον ἀπαρχῆς μέχρι τέλους τῶν κάτωθεν, τότε προχείρως ἔχεις ἀφελεῖν τὰ ἐλάττονα ἐκ τῶν πλειόνων, τουτέστι τὰ κάτωθεν ἐκ τῶν ἄνωθεν· τὰ γὰρ ἐλάττονα ἀεί, ὡς εἴπομεν, κάτωθεν τίθενται.

Ἵνα δὲ ἴδῃς, πῶς γίνεται τοῦτο προχείρως· θὲς ἄνωθεν ψϛς΄ χιλιάδας καὶ υνγ΄

---

multiplicatio sine contextu alia manu velociter exarata in superiore marg. fol. 51^{v} invenitur:

	α	ε
	α	ϛ
	ϑ	·
α	ε	
β	δ	·

in sinistro marg. fol. 51^{v} ad additionem secundam: μαρτ(υ)ρία ἑνώσεως· εὑρέθησαν δὲ αἱ δύο μαρτ(υ)ρίαι ἀνὰ (η).

ὑπέρπυρα, κάτωθεν δὲ πάλιν θὲς φπδ΄ χιλιάδας καὶ τκα΄ ὑπερπύρων. καὶ ἐπεὶ τὰ ἄνωθεν ἔχοσι ὁμαλῶς ἀεὶ τὰ μείζω[ν] ἐκ τῶν κάτωθεν, ἄφελε τὸ κάτωθεν α΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν γ΄ καὶ ἀπομένοσι β΄· θὲς κάτωθεν β΄. ἄφελε δὲ τὰ κάτωθεν β΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν ε΄ καὶ ἀπομένοσι γ΄· θὲς κάτωθεν γ΄. ἄφελε δὲ τὰ κάτωθεν γ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν δ΄ καὶ ἀπομένει α΄· θὲς α΄ κάτωθεν. ἄφελε καὶ τὰ κάτωθεν δ΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν ς΄ καὶ ἀπομένοσι β΄· θὲς β΄ κάτωθεν. ἄφελε καὶ τὰ κάτωθεν η΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν θ΄ καὶ ἀπομένει α΄· θὲς α΄ κάτωθεν. ἄφελε καὶ τὰ κάτωθεν ε΄ ἐκ τῶν ἄνωθεν ζ΄ καὶ ἀπομένοσι β΄· θὲς β΄ κάτωθεν. καὶ ἰδοὺ ἀφελόμενος φπδ΄ χιλιάδας καὶ τκα΄ ὑπέρπυρα ἐκ τῶν ἄνωθεν ψϛς΄ χιλιάδων καὶ υνγ΄ ὑπερπύρων ἀπομένοσι καὶ ὑπέρπυρα σιβ΄ χιλιάδαι καὶ ρλβ΄ ὑπέρπυρα.

ϡ ζ θ ϛ δ ε γ
ϡ ε η δ γ β α
ϡ β α β α γ β

θὲς οὖν ἄνωθεν μὲν τὰς φπδ΄ χιλιάδας καὶ τκα΄ ὑπέρπυρα, κάτωθεν δὲ τὰς σιβ΄ χιλιάδας καὶ ρλβ΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἀπέμειναν ἐκ τῆς ἄνωθεν πρώτης μεγ(ά)λης ὁμάδος, καὶ ἕνωσον τὰ δύο μέρη αὐτῶν. καὶ πάλιν γίνονται ὡς τὸ πρότερον ψϛς΄ χιλιάδαι καὶ υνγ΄ ὑπέρπυρα. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

ϡ ε η δ γ β α
ϡ β α β α γ β
ϡ ζ θ ϛ δ ε γ

ργ Περὶ τῶν τριῶν τῶν ἐχόντων ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὁ μὲν τρίτον μέρος, ὁ δὲ τέταρτον, ὁ δὲ πέμπτον

Ἔστω ὅτι τρεῖς σύντροφοι ἔχοσι διαμερίσασθαι ὑπέρπυρα ,α΄, καὶ ὁ μὲν πρῶτος οἰκειοῦται λαβεῖν ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων τὸ τρίτον μέρος αὐτῶν, ὁ δὲ δεύτερος τὸ τέταρτον μέρος αὐτῶν, ὁ δὲ τρίτος τὸ πέμπτον μέρος αὐτῶν. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων, καθ᾽ ὃν λόγον εἴπομεν. ἐνταῦθα δὲ ἔστι τι κεκριμ[μ]ένον, ὅπερ δύναται διακλέψαι τὴν ἡμετέραν διάνοιαν καὶ νοῆσαι, ὅπερ εἴπομεν ἔχειν οὕτως, ὅπερ οὐκ ἐστι ἀληθὴς ἐπίνοια. τὸ δέ ἐστι, ὅτι τὸ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρα τλγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνὸς ὑπερπύρου, τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρα σν΄, τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρα σ΄. ἕνωσον ταῦτα πάντα καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ψπγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνὸς ὑπερπύρου. καὶ ἰδοὺ εὕρομεν τῷ τρόπῳ τούτῳ, ὅτι περιέρχεται αὐτοῖς ὑπέρπυρα ψπγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$. περισσεύοσι δὲ ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων καὶ ὑπέρπυρα σις΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς ὑπερπύρου.

ϡ τλγ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$
ϡ σν
ϡ σ
ὁμοῦ ϡ ψπγ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$

λέγεται δὲ λόγος τοιοῦτος, ὅτι τις διανέμων καὶ διαμερίζων αὐτοῖς ἕκαστον τὸ οἰκεῖον μέρος, ὡς μὴ εἰδότας αὐτοὺς τοῦτο ποιῆσαι καλῶς, ἀπέδωκεν αὐτοῖς ἀναλόγως τὸ οἰκεῖον μέρος οὐκ ἀληθῶς, ἀλλὰ δοκήσεν μᾶλλον καλῶς μεριζόμενον ‖ καὶ διδόμενον, f. 52r
οὐχ οὕτως δὲ ἔχον. δέδωκε γὰρ αὐτοῖς, ὡς ἀποδέδεικται, ὑπέρπυρα ψπγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἑνὸς ὑπερπύρου καὶ ἀρκεσθέντας ἔχειν ἕκαστος αὐτῶν τὸ οἰκεῖον καὶ ἀνάλογον μέρος. τὰ ἐν[ν]απομένοντα σις΄ ὑπέρπυρα καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ ἑνὸς ὑπερπύρου χάριν μισθοῦ ὁ μερίζων ταῦτα λελη θότως προσείληφε.

ἵνα δὲ μὴ καὶ ἡμεῖς τοῦτο πάθωμεν, ποιήσωμεν τοῦτο διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως, ἥτις ἔχει ἡμῖν δεῖξαι τὸ ἑκάστου οἰκεῖον μέρος ἀληθῶς καὶ προχείρως.

Θὲς τὰ οἰκεῖα μέρη ἑκάστου αὐτῶν, καὶ τὸ μὲν πρῶτον δηλοῖ ἕνα τρίτον, τὸ δὲ δεύ-

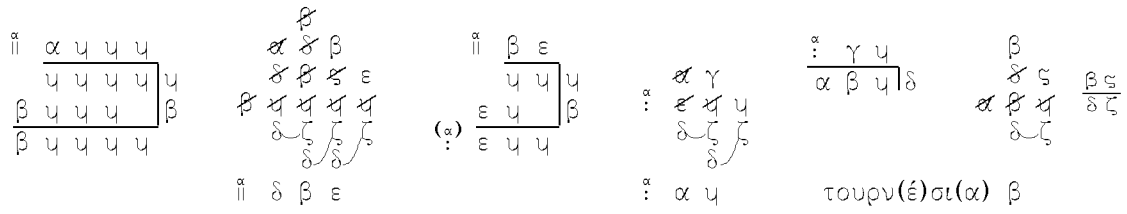
---

10 ὑπέρπυρα] ϡ **C** 40 πάθωμεν] πάθειμεν **C**

τερον ἕνα τέταρτον, τὸ δὲ τρίτον ἕνα πέμπτον. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ κάτωθεν γ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν δ΄· τρὶς οὖν δ΄ γίνονται ιβ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ιβ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ε΄, ὧν δηλοῖ πέμπτον· ε΄κις οὖν ιβ΄ γίνονται ξ΄. ἔστι δὲ ταῦτα ἓν σῶμα τῶν τριῶν. λάβε οὖν ἐκ τῶν ξ΄ τὸ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ὅπερ ἐστὶ κ΄. λάβε δὲ ἐκ τῶν ξ΄ τὸ $\frac{\alpha}{\delta}$, ὅπερ ἐστὶ ιε΄. λάβε πάλιν ἐκ τῶν ξ΄ καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, ὅπερ ἐστὶ ιβ΄. ἕνωσον δὲ

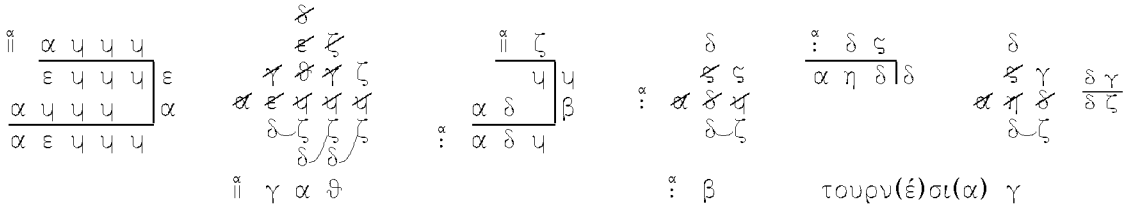
$\frac{\alpha}{\gamma}$ $\frac{\alpha}{\delta}$ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$

α β
ξ ς υ
γ΄ β υ
δ΄ α ε
ε΄ α β
δ ζ ὁ μεριστής



τὰ κ΄ καὶ ιε΄ καὶ ιβ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ μζ΄. ἔστι δὲ τὰ μζ΄ ταῦτα ὁ μεριστὴς τῶν ,α΄ ὑπερπύρων.

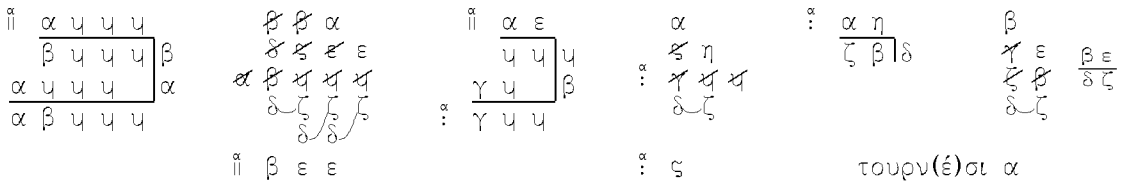
Πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν κ΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ξ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,κ΄. μέρισον ταύτας μετὰ τῶν μζ΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα υκε΄. ἀπομένει καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα β ε΄, ὅπερ δηλοῖ κε΄· ἔστι δὲ ὑπέρπυρα. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ κε΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται κουκκιὰ φ΄. μέρισον τὰ φ΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ι΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ λ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τουρν(έ)σ(ια) ρκ΄. μέρισον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) β΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κς΄. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων οἰκειοῦται ὑπέρπυρα υκε΄ κουκκιὰ ι΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ τζάκισμα κς΄.



Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ιε΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ξ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,ι,ε΄. μέρισον ταύτας μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα τιθ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ζ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ ζ΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ρμ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ β΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα μς΄ κουκκιά. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ μς΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σ(ια) ρπδ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) γ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα μγ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\delta}$ ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων οἰκειοῦται ὑπέρπυρα τιθ΄ κουκκιὰ β΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄ καὶ τζάκισμα μγ΄.

Iterum multiplicatio sine contextu alia manu velociter exarata in superiore marg. (fol. 52^{r}) invenitur: divisio quarta: ✗✗✗ζ] ✗✗✓ζ C

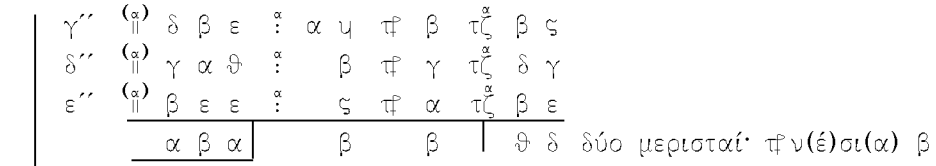
α ς
ζ
α α β



Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ιβ΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν ξ΄, καὶ γί<νεται> ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,ι,β΄. μέρισον ταύτας μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα σνε΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ιε΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ ιε΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ τ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ς΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ιη΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ιη΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σ(ια) οβ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι α΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κε΄. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων οἰκειοῦται ὑπέρπυρα σνε΄ κουκκιὰ ς΄ τουρν(έ)σι α΄ καὶ τζάκισμα κε΄.

Θὲς τὰ οἰκεῖα μέρη ἑκάστου αὐτῶν καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα καὶ γίνονται ὁμοῦ τζακίσματα ϛδ΄.

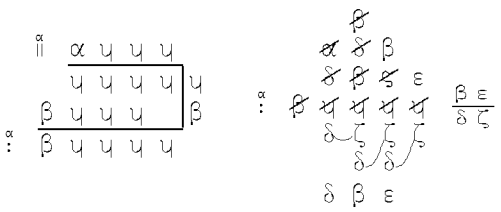
ἔστι οὖν τὰ ϛδ΄ τζακίσματα δύο μερισταί, τουτέστι δύο τουρν(έ)σι(α)· δὶς γὰρ μζ΄ ϛδ΄ γίνονται. θὲς τὰ



β΄ τουρν(έ)σι(α) κάτωθεν τῶν ς΄ τουρν(ε)σ(ίων) καὶ ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σ(ια) η΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ β΄. θὲς τὰ β΄ κουκκιὰ κάτωθεν τῶν ιη΄ κουκκιῶν καὶ ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ κ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρον α΄. θὲς τὸ α΄ ὑπέρπυρον κάτωθεν τῶν ὑπερπύρων καὶ ἕνωσον τὰ τῆς μονάδος ὑπέρπυρα καὶ γίνονται ὁμοῦ κ΄. θὲς κάτωθεν υ΄, κράτει δὲ β΄ ἀντὶ τῶν κ΄. ἕν(ω)σον καὶ τὰ τῆς δεκάδος ὑπέρπυρα μετὰ τῶν β΄, ὧν κρατεῖς ἀντὶ τῶν κ΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ ι΄. θὲς κάτωθεν υ΄, κράτ(ει) δὲ α΄ ἀντὶ τῶν ι΄. ἕνωσον καὶ τὰ τῆς ἑκατοντάδος ὑπέρπυρα μετὰ τοῦ α΄, οὗ κρατεῖς ἀντὶ τῶν ι΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν ι΄. θὲς κάτωθεν εἰς μὲν τῆς ἑκατοντάδος τόπον τὸ υ΄, εἰς δὲ τῆς χιλιάδος τὸ α΄, ὅπερ μετὰ τοῦ υ΄ οὕτως κείμενον α υ΄ δηλοῖ ι΄. νῦν δὲ εἰς τόπον τέταρτον εὑρισκόμενον δηλοῖ ,α΄. ‖ f. 52^{v} καὶ ἰδοὺ ἑνωθέντων τῶν οἰκείων μερῶν, ὧν οἰκειοῦται ἕκαστος ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων, πάλιν γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,α΄ ὡς τὸ πρότερον.

καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

Τοῦτο καὶ ἄλλως πάλιν γίνεται. Τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ εἴπομεν, ὅτι ἐξ αὐτῶν ὁ μὲν ἔχει $\frac{\alpha}{\gamma}$, ὁ δὲ $\frac{\alpha}{\delta}$, ὁ δὲ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, ποίησον ταῦτα κουκκιά. πολλ(α)πλασίασον γὰρ ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ κουκκιῶν τοῦ ἑνὸς ὑπερπύρου καὶ γίνονται τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,κ΄. μέρισον τὰς ,κ΄ τὰ κουκκιά, ἅπερ ἐστὶ ,α΄ ὑπερπύρων κουκκιά, μετὰ τῶν μζ΄, ὧν εἶχες καὶ πρότερον μεριστήν· ὁ γὰρ μεριστὴς καὶ ἐπὶ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως οὕτως λαμβάνεται ὡς καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης,



καθὼς ἕνωσας τὰ κ΄ καὶ ιε΄ καὶ ιβ΄ καὶ ἐγένοντο ὁμοῦ μζ΄. μεριζόμεναι δὲ αἱ ,κ΄ τὰ κουκκιὰ μετὰ τῶν μζ΄ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς υκε΄. ἀπομένει δὲ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\beta\,\varepsilon}{\delta\,\zeta}$. καὶ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης μεταχειρίσεως ἐπολλ(α)πλασίασας τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ξ΄, ὅπερ ἐστὶ κ΄. ἐπὶ δὲ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως·

Πολλ(α)πλασίασον τὰ υκε΄, ἅπερ ἐξῆλθον ἐκ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν, μετὰ τῶν κ΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ξ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,ηφ΄ κουκκιά. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ κε΄ τὸ τζάκισμα, ἅπερ ἀπέμειναν ἐκ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν, μετὰ τῶν κ΄, ὧν ἐπολλ(α)πλασίασας καὶ τὰ υκε΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς φ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄, ὧν ἔχεις μεριστήν, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ι΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν ,ηφ΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,ηφι΄. ἀπομένει δὲ καὶ τζάκισμα κουκκιὰ λ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ λ΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) ρκ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) β΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κς΄. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων, ὅνπερ ἐστὶ κουκκιὰ ,κ΄, οἰκειοῦται κουκκιὰ ,ηφι΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ τζάκισμα κς΄.

Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ υκε΄ μετὰ τῶν ιε΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ξ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ,ςτοε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ κε΄ τὸ τζάκισμα μετὰ τῶν ιε΄, ὧν ἐπολλ(α)πλασίασας καὶ τὰ υκε΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τοε΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ζ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ,ςτοε΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,ςτπβ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ μς΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ μς΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) ρπδ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ια) γ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα μγ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\delta}$ ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων, ὅνπερ ἐστὶ κουκκιὰ ,κ΄, οἰκειοῦται κουκκιὰ ,ςτπβ΄ τουρν(έ)σ(ια) γ΄ καὶ τζάκισμα μγ΄.

Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ υκε΄ μετὰ τῶν ιβ΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν ξ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς κουκκιὰ ,ερ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ κε΄ τὸ τζάκισμα μετὰ τῶν ιβ΄, ὧν ἐπολλ(α)πλα-

1 ἕνωσας] ἔννοσας **C**

σίασας καὶ τὰ υκε΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς τ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ς΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ,ερ΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,ερς΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ιη΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ιη΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) οβ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι α΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κε΄. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων, ὅνπερ ἐστὶ κουκκιὰ ,κ΄, οἰκειοῦται κουκκιὰ ,ερς΄ τουρν(έ)σι α΄ καὶ τζάκισμα κε΄.

Θὲς οὖν καὶ ἐνταῦθα τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα καὶ γίνονται πάλιν ὡς τὸ πρότερον ϛδ΄, ἅπερ ἐστὶ δύο μερισταί, τουτέστι τουρν(έ)σι(α) β΄. ἕνωσον τὰ β΄ τουρν(έ)σι(α) μετὰ τῶν ς΄ τουρν(ε)σ(ίων) καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σ(ια) η΄, τουτέστι κουκκιὰ β΄. ἕνωσον τὰ β΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν κουκκιῶν καὶ θὲς κάτωθεν τῶν μονάδων καὶ δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων καὶ χιλιάδων τὴν ἑνωθεῖσαν ὁμάδαν τῶν καθόλου κουκκιῶν, καθὼς οὕτως καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης ὁμάδος ἐποίησας, καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν κουκκιὰ ,κ΄, καθὼς ἐποίησας τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,κ΄.

γ΄΄ (α) η ε α υ ⁋ β τζ α β ς
δ΄΄ (α) ς γ η β ⁋ γ τζ α δ γ
ε΄΄ (α) ε α υ ς ⁋ α τζ α β ε
α α α β | β | ϑ δ δύο μερισταί
α β υ υ υ

καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

καὶ ἰδοὺ καὶ ἡ δευτέρα αὕτη μεταχείρισις ἀπέδωκεν ἡμῖν καὶ τὰ τζακίσματα καὶ τὰ τουρν(έ)σ(ια) ὅμοια, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως εὕραμεν οὕτως, τζακίσματα μὲν κς΄ καὶ μγ΄ καὶ κε΄, τουρν(έ)σι(α) δὲ β΄ καὶ γ΄ καὶ α΄. τὰ δὲ ἐπὶ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως ἐξελθόντα κουκκιὰ ἐπὶ τῆς προτέρας μεταχειρίσεως ἐξῆλθον ὑπέρπυρα. ‖ f. 53r

ἐὰν δὲ ζητῇς ποιῆσαι καὶ τὰ παρόντα κουκκιὰ ὑπέρπυρα, εὑρήσεις καὶ ταῦτα ὥσπερ κἀκεῖνα. καὶ πρῶτον μὲν λάβε τῶν τριῶν τὰ τζακίσματα καὶ θὲς ταῦτα ἰδίως. θὲς οὖν καὶ τὰ τουρν(έ)σ(ια) εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν, καθὼς καὶ πρότερον οὕτως ἐποίησας. ἔπειτα μέρισον ,ηφι΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα υκε΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ι΄. μέρισον καὶ τὰ ,ϛτπβ΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα τιϑ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ β΄. μέρισον καὶ τὰ ,ερς΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα σνε΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ς΄. θὲς οὖν τὰ κουκκιὰ εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν, ὡσαύτως καὶ τὰ ὑπέρπυρα, καὶ γίνεται καταπάντα ὅμοιον καὶ εἰς τὰ ὑπέρπυρα καὶ εἰς τὰ κουκκιὰ καὶ εἰς τὰ τουρν(έ)σ(ια) καὶ εἰς τὰ τζακίσματα ὡς καὶ

γ΄΄ (α) δ β ε ‖ α υ ⁋ β τζ α β ς
δ΄΄ (α) γ α ϑ ‖ β ⁋ γ τζ α δ γ
ε΄΄ (α) β ε ε ‖ ς ⁋ α τζ α β ε
(α) α υ υ υ | β | β | ϑ δ δύο μερισταί

---

26 ὥσπερ] ὡς πέρ **C**

ἐπὶ [τὸ] τῆς ἑτέρας μεταχειρίσεως. ἕνωσον δὲ ταῦτα πάντα ἀπὸ τῶν τζακισμάτων ἀρξάμενος καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,α΄.

Εὑρήσεις δὲ τὸ ζητούμενον καὶ μετὰ ὑπερπύρων ἀκεραίων μὴ γενομένων κουκκιῶν, καθὼς ἐποίησας τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,κ΄. μέρισον γὰρ τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν μζ΄, καθὼς ἐμέρισας καὶ τὰς ,κ΄ τὰ κουκκιά, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κα΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\iota\gamma}{\mu\zeta}$. ἔστι δὲ τὰ κα΄ καὶ $\frac{\iota\gamma}{\mu\zeta}$ ἓν σῶμα τῶν τριῶν ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν τὰ υκε΄ καὶ $\frac{\kappa\varepsilon}{\mu\zeta}$. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ κ΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ξ΄, μετὰ τῶν κα΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ὑπέρπυρα υκ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ ιγ΄ τὸ τζάκισμα μετὰ τῶν κ΄, ὧν ἐπολλαπλασίασας μετὰ τῶν κα΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς σξ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ε΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν υκ΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα υκε΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα κε΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ κε΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ φ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ι΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ λ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ λ΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) ρκ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν μζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) β΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κς΄. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων οἰκειοῦται ὑπέρπυρα υκε΄ κουκκιὰ ι΄ τουρν(έ)σ(ια) β΄ καὶ τζάκισμα κς΄. ὡσαύτως ποίησον καὶ ἐπὶ τοῦ ἔχοντος $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ξ΄, ἅπερ ἐστὶ ιε΄, καὶ ἐπὶ τοῦ ἔχοντος $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν ξ΄, ἅπερ ἐστὶ ιβ΄. καὶ εὑρήσεις τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν, ἅπερ οἰκειοῦται ἕκαστος ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων, ὅμοια ὡς καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως, καθὼς εὗρες καὶ νῦν τοῦ ἔχοντος $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων τὰ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ καὶ τουρν(έ)σι(α) καὶ τζακίσματα ὅμοια ὡς καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως.

τούτῳ οὖν τῷ τρόπῳ γίνεται καὶ μετὰ ἀκεραίων ὑπερπύρων ὡς καὶ μετὰ τῶν κουκκιῶν καὶ εὑρίσκεται ἡ ἑκάστου οἰκεία μερὶς διὰ ὑπερπύρων καὶ κουκκιῶν καὶ τουρν(ε)σί(ων) καὶ τζακίσματος, ὡς προχειρότερον δὲ κρεῖττον γενέσθαι μετὰ τῶν κουκκιῶν ἢ μετὰ τῶν ὑπερπύρων.

Ἕτερον τούτου ὅμοιον. Ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων εἴπομεν, ὅτι ὁ μὲν ἔχει $\frac{\alpha}{\gamma}$, ὁ δὲ $\frac{\alpha}{\delta}$, ὁ δὲ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$. ἔστω δὲ νῦν, ὅτι ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὁ μὲν ἔχει $\frac{\alpha}{\beta}$, ὁ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ὁ δὲ $\frac{\alpha}{\delta}$, ὁ δὲ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσον μέρος οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν τεσσάρων ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων.

κοινῶς δὲ τοῦτο ζητούμενον καὶ οὐ τεχνικῶς εἶπεν ἄν τις, ὅτι τὸ μὲν $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ἐστὶ ὑπέρπυρα φ΄, τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ὑπέρπυρα τλγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$, τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\delta}$ ὑπέρπυρα σν΄, τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ὑπέρπυρα σ΄. ἕνωσον ταῦτα πάντα καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,ασπγ΄ καὶ

---

divisio prima: auctor numeros exstinguere oblitus est.

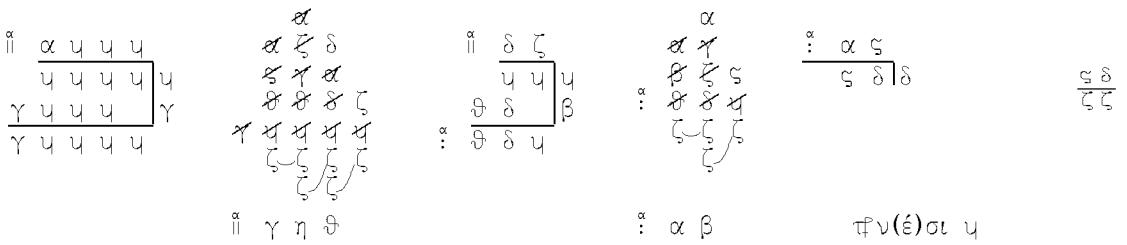
34 εἶπεν ἄν τις] υπεν αντης **C**, **pro** εἴπῃ ἄν τις

$\frac{\alpha}{\gamma}$. δοκεῖ δὲ ἀπὸ τῆς ἀτέχνου ταύτης ζητ(ή)σεως, ὅτι οὐκ ἐστι ἱκανὰ τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα ἀποδοῦναι ἑκάστῳ αὐτῶν τὸ οἰκεῖον μέρος· λείπονται γὰρ ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα σπγ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τὸ δοκοῦν, ὅπερ οὐκ ἐστι ἀληθές. ποίησον δὲ τοῦτο τεχνικῶς καὶ εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον.

Θὲς τὰ οἰκεῖα μέρη ἑκάστου αὐτῶν καὶ πολλ(α)πλασίασον τὰ κάτωθεν β΄ μετὰ τῶν κάτωθεν γ΄· δὶς οὖν γ΄ γίνονται ς΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ς΄ μετὰ τῶν κάτωθεν δ΄· δ΄κις οὖν ς΄ γίνονται κδ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ κδ΄ μετὰ τῶν κάτωθεν ε΄· ε΄κις οὖν κδ΄ γίνονται ρκ΄. ἔχεις οὖν καὶ ἐκ τῶν ρκ΄ λαβεῖν τὸ οἰκεῖον μέρος ἑκάστου τῶν τεσσάρων. διὰ δὲ τὸ μὴ γενέσθαι τὸν μεριστὴν γράμματα τρία καὶ γένηταί σοι δυσχερὲς διαμερίζειν τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων διὰ τριῶν γραμμάτων τοῦ μεριστοῦ, λάβε ἐκ τῶν ρκ΄ τὰ ἡμίση, ἅπερ ἐστὶ ξ΄, καὶ θὲς ταῦτα κάτωθεν τῶν ρκ΄. κάτωθεν δὲ τούτων ποίησον κεραίαν γραμμήν. λάβε δὲ $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν ξ΄, ὅπερ ἐστὶ λ΄. λάβε καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ξ΄, ὅπερ ἐστὶ κ΄. λάβε καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ξ΄, ὅπερ ἐστὶ ιε΄. λάβε καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν ξ΄, ὅπερ ἐστὶ ιβ΄. ἕνωσον δὲ τὰ λ΄ καὶ κ΄ καὶ ιε΄ καὶ ιβ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ οζ΄. ἔστι δὲ τὰ οζ΄ ὁ μεριστὴς πάντων τούτων. ἔστι δὲ νῦν δύο γράμματα διὰ τὸ λαβεῖν τὰ οἰκεῖα μέρη τούτων ἐκ τῶν ξ΄. εἰ δὲ ἐκ τῶν ρκ΄ ἔλαβες τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν, ἐγένοντο ἂν ‖ ὁμοῦ ρνδ΄, ἅπερ νῦν ἐστι οζ΄, τουτέστι τὰ ἡμίση τῶν ρνδ΄· δὶς γὰρ οζ΄ ρνδ΄ γίνονται. ἴσως οὖν καὶ διὰ τῶν τριῶν γραμμάτων τῶν δηλούντων ρνδ΄ εἶχες ἂν καλῶς διαμερίζειν τὰ ζητούμενα μέρη. νῦν δὲ ἔχων μεριστὴν οζ΄ ἀντὶ τῶν ρνδ΄ προχειροτέρως ἔχεις διαμερίσαι τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα καὶ τὰ τούτων τζακίσματα διὰ τῶν δύο γραμμάτων τῶν δηλώντων οζ΄ ἢ μετὰ τῶν τριῶν τῶν δηλώντων ρνδ΄· δι᾽ οὐδὲν γὰρ ἕτερον λαμβάνονται τὰ οζ΄ καὶ οὐ τὰ ρνδ΄ ἢ μόνον διὰ τὸ προχειρέστερον.

$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\gamma}$	$\frac{\alpha}{\delta}$	$\frac{\alpha}{\varepsilon}$
			ς
		β	δ
	α	β	μ
	ξ·	ς	μ
	ς″	γ	μ
	γ″	β	μ
	δ″	α	ε
	ε″	α	β
	ζ	ζ	ὁ μεριστής

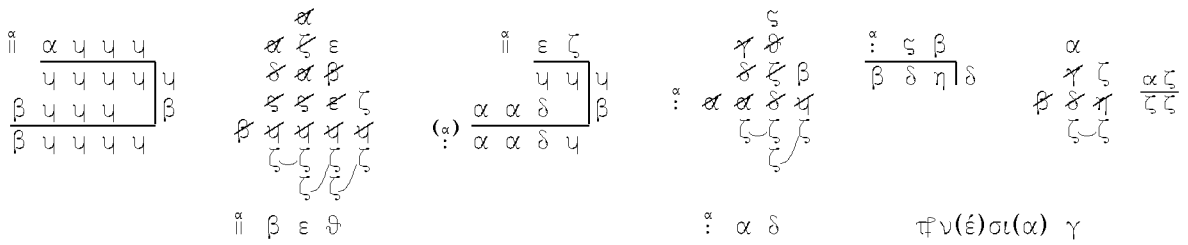
Πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν λ΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν ξ΄, καὶ γίνεται



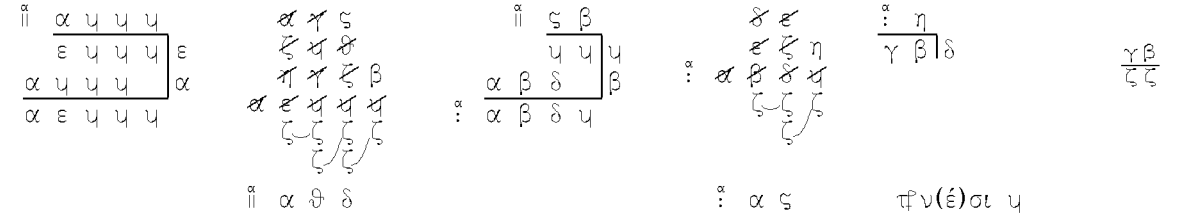
ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γ μ μ μ μ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα τπθ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα μζ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ μζ΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,αμ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιβ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ις΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ις΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) ξδ΄. καὶ ἐπεί ἐστι ἐλάττονα τῶν οζ΄, ἀπομένοσι τζάκισμα. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων τὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων οἰκειοῦται ὑπέρπυρα τπθ΄ κουκκιὰ ιβ΄ τουρν(έ)σι μ΄ καὶ τζάκισμα ξδ΄.

Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν κ΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ξ΄, καὶ

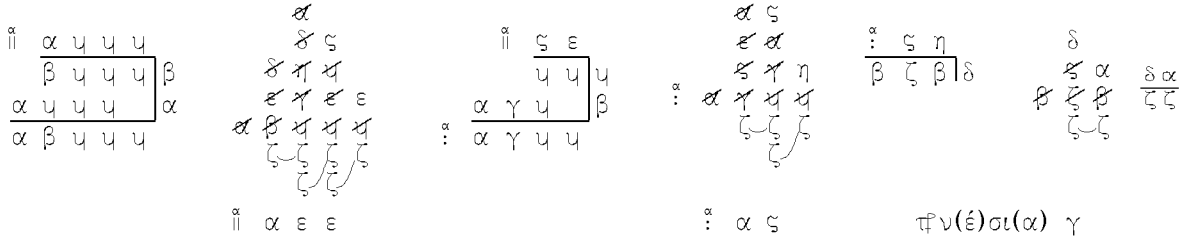
30 ,αμ΄] ,α falso C



γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς β υ υ υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα σνθ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα νζ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ νζ΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,αρμ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιδ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ξβ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ξβ΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σ(ια) σμη΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ια) γ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ιζ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων οἰκειοῦται ὑπέρπυρα σνθ΄ κουκκιὰ ιδ΄ τουρν(έ)σ(ια) γ΄ καὶ τζάκισμα ιζ΄. Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ιε΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ξ΄, καὶ



γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς α ε υ υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ρϛδ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ξβ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ ξβ΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,ασμ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ις΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ η΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ η΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) λβ΄. ἐπεὶ δέ ἐστι ἐλάττονα τῶν οζ΄, ἀπομένοσι τζάκισμα. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων οἰκειοῦται ὑπέρπυρα ρϛδ΄ κουκκιὰ ις΄ τουρν(έ)σ(ι) υ΄ καὶ τζάκισμα λβ΄.



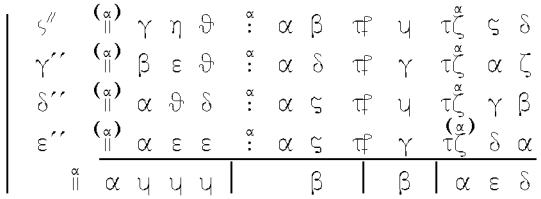
Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ιβ΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν ξ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α β υ υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ρνε΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ξε΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ ξε΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,ατ΄.

---

s/6 ξβ΄ κουκκιὰ] ις ⁝ **falso C**

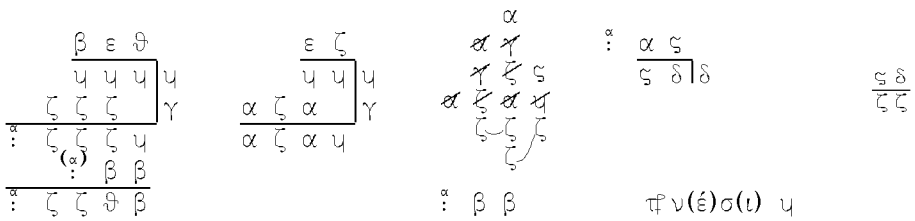
μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ις΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ξη΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ξη΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) σοβ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) γ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα μα΄. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων οἰκειοῦται ὑπέρπυρα ρνε΄ κουκκιὰ ις΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄ καὶ τζάκισμα μα΄.

Θὲς οὖν τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν ἐν τάξει καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα καὶ γίνονται ὁμοῦ ρνδ΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστοὶ δύο, τουτέστι τουρν(έσ)ι(α) β΄· δὶς γὰρ οζ΄ ρνδ΄ γίνονται. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ς΄ τουρν(ε)σί(ων) καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σι(α) η΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ β΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ξ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα γ΄. θὲς ταῦτα εἰς τὰ τῆς μονάδος ὑπέρπυρα καὶ ἕνωσον τὰς μονάδας καὶ δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας, ὡς εἰώθαμεν ποιεῖν ἐπὶ τῶν ὁμάδων, καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν ὑπέρπυρα ,α΄ ὡς τὸ πρότερον.



καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ‖ ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον. f. 54r

Καὶ ἄλλως πάλιν, καθ' ἅπερ καὶ τὸ πρῶτον. Ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων εἴπομεν, ὅτι ὁ μὲν ἔχει $\frac{\alpha}{\beta}$, ὁ δὲ $\frac{\alpha}{\gamma}$, ὁ δὲ $\frac{\alpha}{\delta}$, ὁ δὲ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$. πολλ(α)πλασίασον τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν κ΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ἑνὸς ὑπερπύρου, καὶ γίνονται τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,κ΄. μέρισον τὰς ,κ΄ τὰ κουκκιὰ μετὰ τῶν οζ΄, ὧν ἔχεις μεριστήν· ὁ γὰρ μεριστὴς καὶ ἐπὶ τῆς παρούσης ταύτης δευτέρας μεταχειρίσεως οὕτως λαμβάνεται ὡς καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης, ἧς εἴπομεν, ὅτι ἕνωσον τὰ λ΄ καὶ κ΄ καὶ ιε΄ καὶ ιβ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ οζ΄. μεριζόμεναι δὲ αἱ ,κ΄ τὰ κουκκιὰ μετὰ τῶν οζ΄ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς σνθ΄. ἀπομένει καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\varepsilon\ \zeta}{\zeta\ \zeta}$, τουτέστι νζ΄ μὲν τζάκισμα, οζ΄ δὲ μεριστής. ἔπειτα ἄρξου ποιεῖν οὕτως.



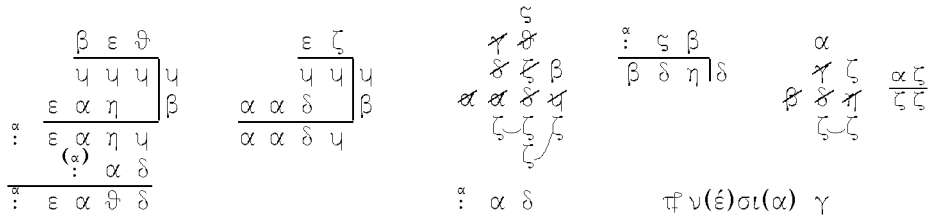
Πολλ(α)πλασίασον τὰ σνθ΄, ἅπερ ἐξῆλθον ἐκ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν, μετὰ τῶν λ΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν ξ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ,ζψο΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ νζ΄ τὸ τζάκισμα μετὰ τῶν λ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α ζ α υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ κβ΄. ἕνωσον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ

---

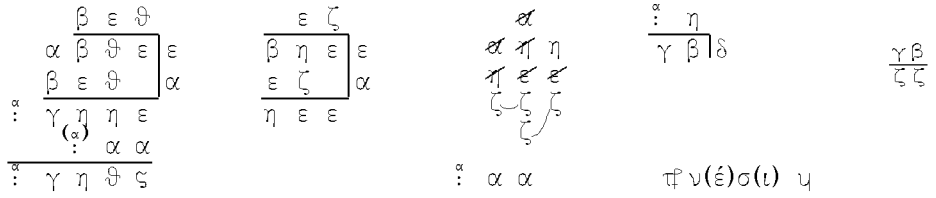
in suprema figura: ς δ] δ ς **falso C** 13 τουρν(ε)σί(ων), τουρν(έ)σι(α)] ν̈γ̈ **C** 31 ἄρξου **sic C**

,ζψϛβ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ις΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ις΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σ(ια) ξδ΄. ἐπεὶ δέ ἐστι ἐλάττονα τῶν οζ΄, ἀπομένοσι τζάκισμα. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν οἰκειοῦται κουκκιὰ ,ζψϛβ΄ τουρν(έ)σ(ι) υ΄ καὶ τζάκισμα ξδ΄.

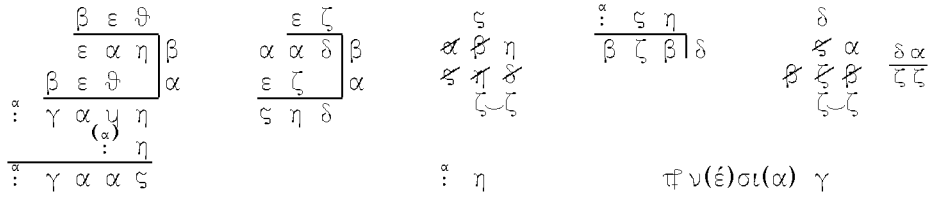
Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλ(ιν) τὰ σνθ΄ μετὰ τῶν κ΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ξ΄, καὶ γίνεται



ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ,ερπ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ νζ΄ τὸ τζάκισμα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α α δ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιδ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,ερϛδ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ξβ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ξβ΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) σμη΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ια) γ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ιζ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\gamma}$ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν οἰκειοῦται κουκκιὰ ,ερϛδ΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄ καὶ τζάκισμα ιζ΄.



Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ σνθ΄ μετὰ τῶν ιε΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ξ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ,γωπε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ νζ΄ τὸ τζάκισμα μετὰ τῶν ιε΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς η ε ε΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ια΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,γωϛς΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ η΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ η΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) λβ΄. ἐπεὶ δέ ἐστι ἐλάττονα τῶν οζ΄, ἀπομένοσι τζάκισμα. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\delta}$ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν οἰκειοῦται κουκκιὰ ,γωϛς΄ τουρν(έσι) υ΄ καὶ τζάκισμα λβ΄.



Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ σνθ΄ μετὰ τῶν ιβ΄, ἅπερ ἐστὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν ξ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ,γρη΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ νζ΄ τὸ τζάκισμα μετὰ τῶν ιβ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ϛ η δ΄. μέρισον

ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ η΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,γρις΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ξη΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ξη΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σ(ια) σοβ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρνέσια γ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα μα΄. καὶ ἰδοὺ ὁ ἔχων $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν οἰκειοῦται κουκκιὰ ,γρις΄ τουρν(έσια) γ΄ καὶ τζάκισμα μα΄.

Θὲς τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν ἐν τάξει καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα καὶ πάλιν γίνονται ὡς τὸ πρότερον ρνδ΄, ἅπερ ἐστὶ μερισταὶ δύο, τουτέστι τουρν(έ)σι(α) β΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ς΄ τουρν(ε)σ(ίων) καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σ(ια) η΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ β΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν κουκκιῶν ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρξάμενος, ὡς εἰώθαμεν ποιεῖν ἐπὶ τῶν ὁμάδων, καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν κουκκιὰ ,κ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ,α΄.

ϛ″	(α)⋮	ζ	ζ	ϑ	β	ͱ	υ	τζ α	ϛ	δ
γ′′	(α)⋮	ε	α	ϑ	δ	ͱ	γ	τζ α	α	ζ
δ′′	(α)⋮	γ	η	ϑ	ϛ	ͱ	υ	τζ α	γ	β
ε′′	(α)⋮	γ	α	α	ϛ	ͱ	γ	τζ α	δ	α
	(α)⋮	β	υ	υ	υ	υ	β		α	ε δ

δύο μερισταί

καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ μαρτ(υ)ρί(α) τε καὶ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον. ‖ f. 54v

Ἐὰν δὲ ζητῇς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος ἀντὶ τῶν κουκκιῶν, ὧν οἰκει-

⋮	α̸	α̸	α	⋮ α β	⋮	α̸	α	⋮ α δ	⋮	α̸	α	⋮ α ς	(α)⋮	α̸		⋮ α ς			
	ξ̸	ξ̸	ϑ̸ β			ε̸	α̸	ϑ̸ δ		η̸	η̸	ϑ̸ ς		η̸	α̸	α ς			
	β	υ	υ			β	υ	υ		β	υ	υ		β	υ	υ			
		β	β				β	β			β	β			β	β			
‖	γ	η	ϑ	⋮ α β	‖	β	ε	ϑ ⋮ α δ	‖	α	ϑ	δ ⋮ α ς	‖	α	ε	ε ⋮ α ς			

ώσατο, λάβε πρῶτον τὰ τζακίσματα αὐτῶν καὶ θὲς ταῦτα ἐν τάξει, καθὼς καὶ πρότερον οὕτως ἐποίησας ὁμοίως. θὲς καὶ τὰ τουρν(έ)σι(α) αὐτῶν ἐν τάξει. ἔπειτα μέρισον μετὰ τῶν κ΄ τὰ τοῦ πρώτου κουκκιά, ἅπερ ἐστὶ ,ζψϙβ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα τπϑ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ιβ΄. μέρισον καὶ τὰ ,ερϙδ΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα σνϑ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ιδ΄. μέρισον καὶ τὰ ,γωϙς΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ρϙδ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ις΄. μέρισον καὶ τὰ ,γρις΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ρνε΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ις΄.

ϛ″	(α)‖	γ	η	ϑ	(α)⋮	α	β	ͱ	υ	τζ α	ϛ	δ
γ′′	(α)‖	β	ε	ϑ	(α)⋮	α	δ	ͱ	γ	τζ α	α	ζ
δ′′	(α)‖	α	ϑ	δ	(α)⋮	α	ς	ͱ	υ	τζ α	γ	β
ε′′	(α)‖	α	ε	ε	(α)⋮	α	ς	ͱ	γ	(α)τζ	δ	α
	‖	α	υ	υ	υ		β		β		α	ε δ

δύο μερισταί

θὲς οὖν τὰ κουκκιὰ εἰς τοὺς οἰκείους τόπους αὐτῶν, ὁμοίως καὶ τὰ ὑπέρπυρα, καὶ ἕνωσον ταῦτα πάντα καὶ γίνεται καταπάντα ὅμοιον καὶ ἐπὶ τῶν ὑπερπύρων καὶ κουκκιῶν καὶ τουρν(ε)σίων καὶ τζακισμάτων καὶ εὑρίσκεται καὶ οὕτως ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,α΄ καὶ διειρημένως ἡ ἑκάστου μερίς.

εὑρήσεις δὲ τὸ ζητούμενον καὶ μετὰ ἀκεραίων ὑπερπύρων μὴ γενομένων κουκκιῶν, καθὼς τὸ περὶ τούτου σαφέστερον εἴπομεν περὶ τὸ τέλος τοῦ πρώτου, ἐν ᾧπερ εἴπομεν τῶν τριῶν τῶν ἐχόντων $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων.

4/5 τουρνέσια] ͱ C 12.13 τουρν(ε)σ(ίων), τουρν(έ)σ(ια)] ͱσ hic et passim C

ρδ

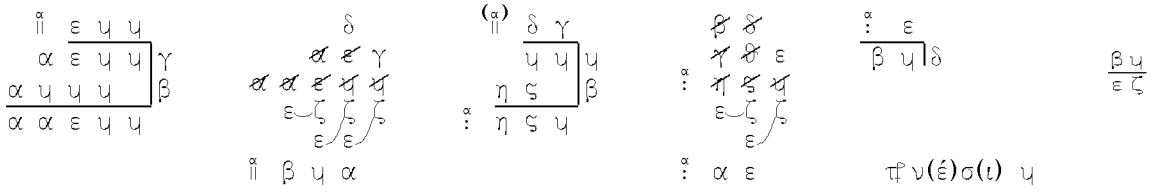
Περὶ τῶν προσφερόντων – ὁ μὲν ὑπέρπυρα κγ΄, ὁ δὲ ὑπέρπυρα λε΄, ὁ δὲ ὑπέρπυρα νς΄ – πῶς ἔστι εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν ἀναλόγως ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων;

Θὲς τὰ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἕκαστος αὐτῶν δέδωκεν, καὶ ὁ μὲν πρῶτος δέ<δωκεν> ὑπέρπυρα κγ΄, ὁ δὲ δεύτερος ὑπέρπυρα λε΄, ὁ δὲ τρίτος ὑπέρπυρα νς΄. ἕνωσον ταῦτα πάντα καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ριδ΄. ταῦτα οὖν τὰ ριδ΄ ὑπέρπυρά ἐστι ὁ μεριστὴς τῶν ,α΄ ὑπερπύρων· δι᾽ αὐτῶν γὰρ τῶν ριδ΄ ὑπερπύρων μερίζονται τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα καὶ εὑρίσκεται, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν ἀναλόγως ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων.

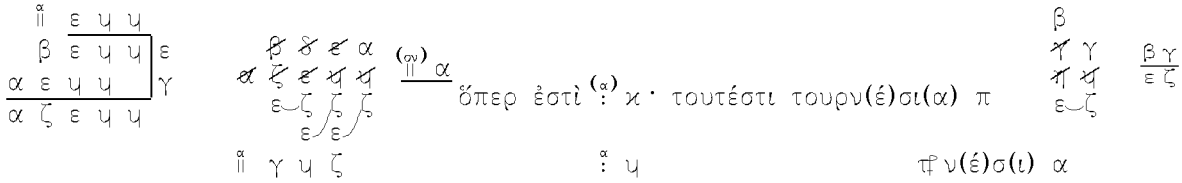
(α)‖	β	γ
(α)‖	γ	ε
(α)‖	ε	ς
α	α	δ
	ε	ζ

μεριστής

ἵνα δὲ γένηται προχειρεστέρως ἡ τῶν πολλ(α)πλασιαζομένων καὶ διαμεριζομένων τούτων ζήτησις, σχίσον τὰ ριδ΄, ἅπερ εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, εἰς μέρη δύο καὶ γίνονται τὰ ἡμίση τῶν ριδ΄ νζ΄. σχίσον καὶ τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα εἰς μέρη δύο καὶ γίνονται τὰ ἡμίση τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα φ΄. κράτει οὖν ἀντὶ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα φ΄ καὶ ἀντὶ τῶν ριδ΄ τὸν μεριστὴν νζ΄. ὅπερ οὖν ἔχεις ποιῆσαι μετὰ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων καὶ μετὰ τῶν ριδ΄ τὸν μεριστ<ήν>, ταὐτὸν ἔχεις ποιῆσαι προχ(ει)ρ(ο)τέρως καὶ μετὰ τῶν φ΄ ὑπερπύρων καὶ νζ΄ μεριστ<οῦ>.



Πολλ(α)πλασίασον γὰρ ἀντὶ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων τὰ φ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν κγ΄ ὑπερπύρων τοῦ πρώτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α α ε υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα σα΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα μγ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ μγ΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ωξ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιε΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ε΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ε΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) κ΄. ἐπεὶ δὲ ἐλάττονά εἰσι τῶν νζ΄, ἀπομένοσι τζάκισμα. καὶ ἰδοὺ ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα κγ΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα σα΄ κουκκιὰ ιε΄ τουρν(έ)σι υ΄ καὶ τζάκισμα κ΄.

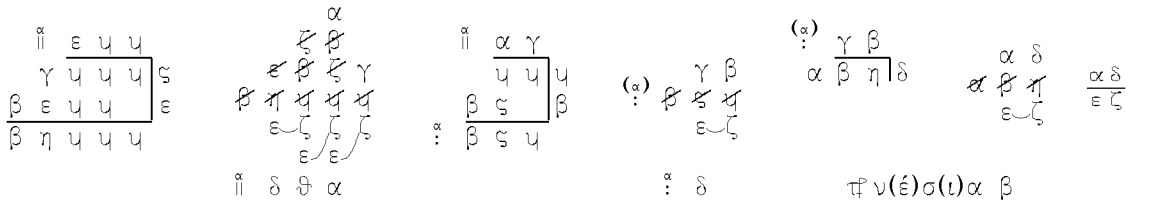


Πολλ(α)πλασία<σον> δὲ πάλιν τὰ φ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν λε΄ ὑπερπύρων τοῦ δευτέρου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α ζ ε υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα τζ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρον α΄, ὅπερ ἐστὶ κουκκιὰ κ΄. καὶ ἐπεὶ τὰ κ΄ κουκκιὰ οὐ δύνανται διαμερισθῆναι

---

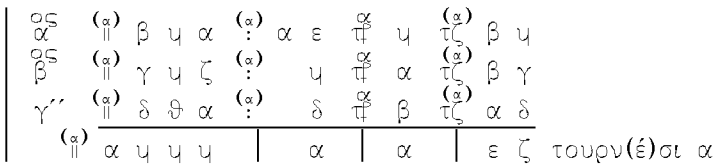
divisio quarta: β] ℱ falso C

μετὰ τῶν νζ΄, ποίησον ταῦτα τουρν(έ)σ(ια) καὶ γίνονται τὰ κ΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) π΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι α΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κγ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα λε΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα τζ΄ κουκκὶ μ΄ τουρν(έ)σι α΄ καὶ τζάκισμα κγ΄.



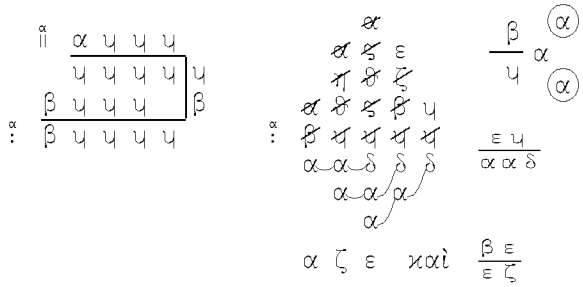
Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ φ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν νς΄ ὑπερπύρων τοῦ τρίτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς β η υ υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα υϚα΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ιγ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ ιγ΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ σξ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ δ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ λβ΄, ἅπερ ἐστὶ τουρν(έσια) ρκη΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ια) β΄ καὶ τζάκισμα ιδ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα νς΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα υϚα΄ κουκκιὰ δ΄ τουρν(έ)σ(ια) β΄ καὶ τζάκισμα ιδ΄.

Θὲς οὖν τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν ἐν τάξει καὶ ἔνωσον τὰ τζακίσματα καὶ γίνονται ὁμοῦ νζ΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστὴς εἷς, τουτέστι τουρν(έ)σι α΄. θὲς τοῦτο εἰς τὰ τουρν(έ)σι(α) καὶ γίνονται τουρν(έ)σι(α) δ΄, τουτέστι κουκκὶ α΄. θὲς τοῦτο εἰς τὰ κουκκιὰ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ κ΄, τουτέστι ὑπέρπυρον α΄. θὲς τοῦτο εἰς τὰ ὑπέρπυρα καὶ ἔνωσον ‖ τὴν καθόλου ὁμάδαν τῶν ὑπερπύρων ἀρξάμενος ἀπὸ τῆς μονάδος, ὡς εἰώθαμεν ποιεῖν, καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,α΄. **f. 55r**

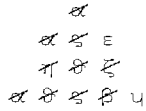


καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

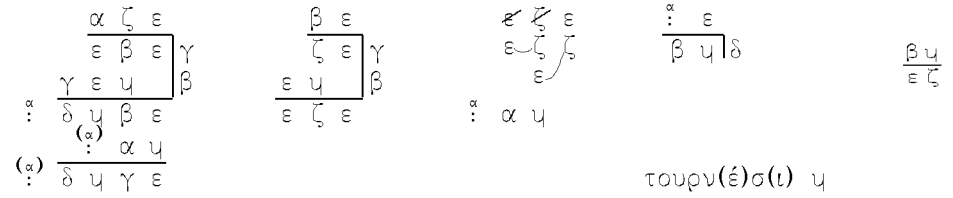
Καὶ ἄλλως. Ποίησον τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα κουκκιά. πολλ(α)πλασίασον γὰρ τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς β υ υ υ υ΄, ἅπερ ἐστὶ ,κ΄· γίνονται δὲ τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,κ΄. μέρισον τὰς ,κ΄ τὰ κουκκιὰ μετὰ τῶν ριδ΄, ὧν εἶχες καὶ πρότερον μεριστήν· ὁ γὰρ μεριστὴς καὶ ἐπὶ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως οὕτως λαμβάνεται ὡς καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης. καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ροε΄· ἀπομένει καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\varepsilon\ \upsilon}{\alpha\ \alpha\ \delta}$. σχίσον τὰ ε υ΄ καὶ τὰ



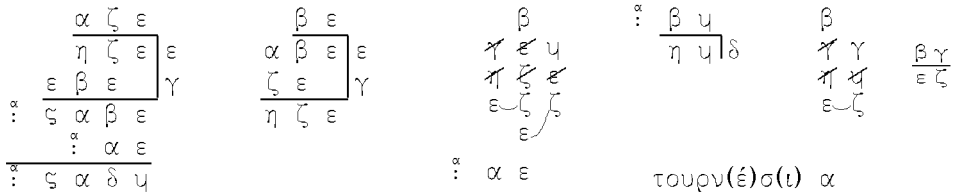
α ζ ε καὶ $\frac{\beta\ \varepsilon}{\varepsilon\ \zeta}$

divisio quarta:  **C**

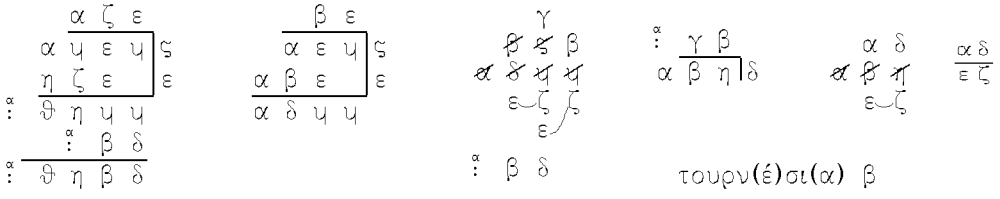
α α δ΄ εἰς δύο καὶ γίνονται $\frac{\text{κε}}{\text{νζ}}$. κράτει οὖν ροε΄ καὶ τζάκισμα $\frac{\text{κε}}{\text{νζ}}$· ὃν γὰρ λόγον ἔχοσι τὰ ν΄ πρὸς τὰ ριδ΄, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοσι καὶ τὰ κε΄ πρὸς τὰ νζ΄.
Πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ροε΄, ἅπερ ἐξῆλθον ἐκ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν, μετὰ τῶν



κγ΄ ὑπερπύρων, ὧν δέδωκεν ὁ πρῶτος, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ δ υ β ε΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ κε΄ τὸ τζάκισμα μετὰ τῶν κγ΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ε ζ ε΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ α υ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν δ υ β ε΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,δλε΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ε΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σι(α) κ΄. ἐπεὶ δὲ εἶναι ἐλάττονα τῶν νζ΄, ἀπομένοσι τζάκισμα. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα κγ΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν κουκκιὰ ,δλε΄ καὶ τζάκισμα κ΄.
Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ροε΄ μετὰ τῶν λε΄ ὑπερπύρων τοῦ δευτέρου καὶ γίνε-



ται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ς α β ε΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ κε΄ τὸ τζάκισμα μετὰ τῶν λε΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς η ζ ε΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ α ε΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ς α β ε΄ κουκκιῶν καὶ [καὶ] γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,ϛρμ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ κ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σ(ια) π΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ι) α΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κγ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα λε΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν κουκκιὰ ,ϛρμ΄ τουρν(έ)σ(ι) α΄ τζάκισμα κγ΄.



Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ροε΄ μετὰ τῶν νς΄ ὑπερπύρων τοῦ τρίτου καὶ γίνεται

---

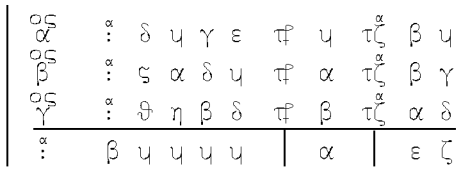
9 εἶναι] ἐναι] **C**

multiplicatio quarta: ε β ε] γ β ε **falso C**

in inferiore marg. fol. 55^{r} sine contextu: $\overset{\text{ον}}{\text{ϛ}}$

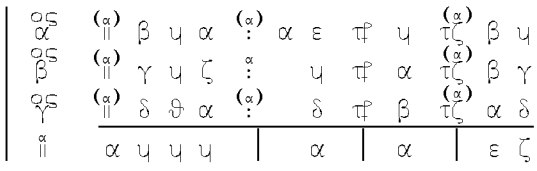
ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ϑ η ψ ψ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ κε΄ τὸ τζάκισμα μετὰ τῶν νς΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α δ ψ ψ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ β δ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ϑ η ψ ψ΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,ϑωκδ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα λβ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σ(ια) ρκη΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ια) β΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ιδ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα νς΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν κουκκιὰ ,ϑωκδ΄ τουρν(έ)σ(ια) β΄ τζάκισμα ιδ΄.

Θὲς οὖν τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν ἐν τάξει καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα καὶ γίνονται ὁμοῦ νζ΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστὴς εἷς, τουτέστι τουρν(έ)σι α΄. θὲς τοῦτο εἰς τὰ τουρν(έ)σ(ια) καὶ γίνονται τουρν(έ)σ(ια) δ΄, τουτέστι κουκκὶ α΄. ἕνωσον τὸ α΄ κουκκὶ μετὰ τῶν κουκκιῶν ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρξάμενος καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,κ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ,α΄.



καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

Ἐὰν δὲ ζητῇς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος ἀντὶ τῶν κουκκιῶν, ὧν οἰκειώσατο, θὲς τὰ τζακίσματα αὐτῶν ἐν τάξει, καθὼς καὶ ἀνωτέρω οὕτως ἐποίησας. ὁμοίως θὲς καὶ τὰ τουρν(έ)σ(ια) αὐτῶν ἐν τάξει. ἔπειτα μέρισον μετὰ τῶν κ΄ τὰ τοῦ πρώτου κουκκιά, ἅπερ ἐστὶ δ ψ γ ε΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα σα΄ κουκκιὰ ιε΄. μέρισον καὶ τὰ ς α δ ψ΄ κουκκιὰ τοῦ δευτέρου μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα τζ΄. μέρισον καὶ τὰ ϑ η β δ΄ κουκκιὰ τοῦ τρίτου μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα υϛα΄ κουκκιὰ δ΄. θὲς τὰ κουκκιὰ εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν. ὁμοίως θὲς καὶ τὰ ὑπέρπυρα εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν. καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα καὶ γίνονται ὁμοῦ νζ΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστὴς εἷς, τουτέστι τουρν(έ)σ(ι) α΄. θὲς τοῦτο εἰς τὰ τουρν(έ)σ(ια) καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σι(α) δ΄, τουτέστι κουκκὶ α΄. θὲς τοῦτο εἰς τὰ κουκκιὰ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ κ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρον α΄. θὲς τοῦτο εἰς τὰ ὑπέρπυρα καὶ ἕνωσον τὰ ὑπέρπυρα καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,α΄. ‖ f. 55ᵛ



Ἕτερον τούτου ὅμοιον. Τέσσαρες σύντροφοι προσέφερον ὡς ἐν ταὐτῷ· ὁ μὲν ὑπέρπυρα ρμ΄, ὁ δὲ ὑπέρπυρα σλ΄, ὁ δὲ ὑπέρπυρα τκ΄, ὁ δὲ ὑπέρπυρα υι΄. ἐκέρδεσαν δὲ ὑπέρπυρα ,α΄. ἕνωσον ταῦτα πάντα καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,αρ΄. ἔστι δὲ ταῦτα ὁ μεριστὴς τῶν ,α΄ ὑπερπύρων· δι᾽ αὐτῶν γὰρ τῶν ,αρ΄ ὑπερπύρων μερίζονται τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα καὶ εὑρίσκεται, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν ἀναλόγως.

ἵνα δὲ γένηται προχειρεστέρως ἡ τῶν πολλ(α)πλασιαζομένων καὶ διαμεριζομένων τούτων ζήτησις, σχίσον τὰ ,αρ΄, ἅπερ εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, εἰς μέρη ρ΄ καὶ γίνον-

---

divisio secunda: ⸗ϰϰδϰ] ⸗ϰϰδψ **C**

30 κουκκιὰ δ΄] ᵑ ⋮ α **falso C**

ται ια΄. σχίσον καὶ τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐκέρδεσαν, εἰς μέρη ρ΄ καὶ γίνονται ι΄. κράτ(ει) οὖν ἀντὶ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα ι΄ καὶ ἀντὶ τῶν ,αρ΄ τὸν μεριστὴν ια΄· ὅπερ οὖν ἔχεις ποιῆσαι μετὰ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων καὶ μετὰ τῶν ,αρ΄ τὸν μεριστήν, ταὐτὸν ἔχεις ποιῆσαι προχειρεστέρως καὶ μετὰ τῶν ι΄ ὑπερπύρων καὶ ια΄ μεριστήν.

(α)‖ α δ υ
(α)‖ β γ υ
(α)‖ γ β υ
(α)‖ δ α υ

α	α	υ	υ
		α	α

μεριστής

Πολλ(α)πλασίασον γὰρ ἀντὶ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων τὰ ι΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ρμ΄ ὑπερπύρων τοῦ πρώτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς

‖ α δ υ
υ υ υ | υ
α δ υ | α
α δ υ υ

‖ α β ζ

(α)‖ γ
υ | υ
ς | β
(α)⋮ ς υ

⋮ ε

(α)⋮ ε
β υ | δ

τουρν(έ)σ(ι) α

α δ υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ρκζ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα γ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ γ΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ξ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ε΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ε΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ε΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) κ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ι) α΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ϑ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα ρμ΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα ρκζ΄ κουκκιὰ ε΄ τουρν(έ)σ(ι) α΄ τζάκισμα ϑ΄.

Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν ἀντὶ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων τὰ ι΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν σλ΄

‖ β γ υ
υ υ υ | υ
β γ υ | α
β γ υ υ

‖ β υ ϑ

(α)‖ α
υ | υ
β | β
(α)⋮ β υ

⋮ α

(α)⋮ ϑ
γ ς | δ

γ

τουρν(έ)σ(ια) γ

ὑπερπύρων τοῦ δευτέρου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς β γ υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα σϑ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρον α΄. πολλ(α)πλασίασον τοῦτο μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται τὸ α΄ ὑπέρπυρον κουκκιὰ κ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκὶ α΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ϑ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ϑ΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σ(ια) λς΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) γ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα γ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα σλ΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα σϑ΄ κουκκὶ α΄ τουρν(έ)σ(ια) γ΄ τζάκισμα γ΄.

‖ γ β υ
υ υ υ | υ
γ β υ | α
γ β υ υ

‖ β ϑ υ

‖ α υ
υ υ | υ
β υ | β
(α)⋮ β υ υ

⋮ α η

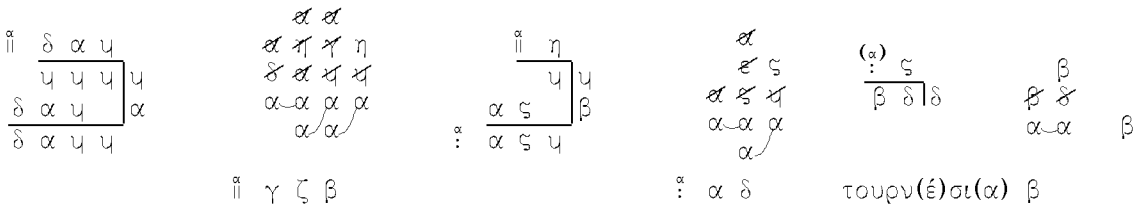
(α)⋮ β
η | δ

η

τουρν(έ)σι υ

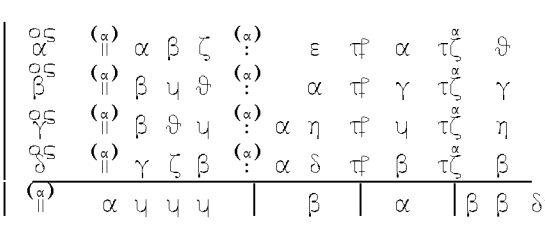
Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν ἀντὶ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων τὰ ι΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν τκ΄ ὑπερπύρων τοῦ τρίτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γ β υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα σϛ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ι΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ ι΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ σ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιη΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ β΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ β΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) η΄. ἐπεὶ δέ ἐστι ἐλάττονα τῶν ια΄, ἀπομένοσι τζάκισμα. καὶ ἰδοὺ ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα τκ΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα σϛ΄ κουκκιὰ ιη΄ τουρν(έ)σι υ΄ τζάκισμα η΄.

Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν ἀντὶ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων τὰ ι΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν υι΄



ὑπερπύρων τοῦ τετάρτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς δ α υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα τοβ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα η΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ η΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ρξ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιδ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ϛ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ϛ΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) κδ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) β΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα β΄. καὶ ἰδοὺ ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα υι΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα τοβ΄ κουκκιὰ ιδ΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ τζάκισμα β΄.

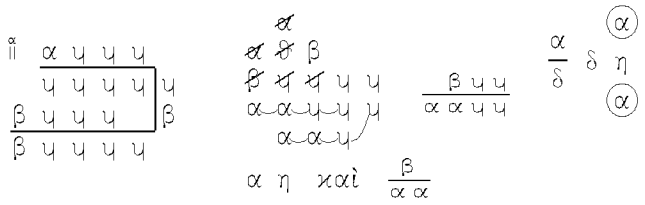
Θὲς τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν ἐν τάξει καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα αὐτῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ τζακίσματα κβ΄, τουτέστι μεριστα὿ δύο· ὁ γὰρ μεριστής ἐστι ια΄. ἐπεὶ δὲ τὰ κβ΄ τζακίσματά ἐστι μεριστα὿ β΄, ἔστι τουρν(έ)σι(α) β΄. θὲς ταῦτα εἰς τὰ τουρν(έ)σι(α) καὶ ἕνωσον τὰ τουρν(έ)σι(α) καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σι(α) η΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ β΄. θὲς ταῦτα εἰς τὰ κουκκιὰ καὶ ἕνωσον τὰ κουκκιὰ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ μ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα β΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ὑπερπύρων ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρξάμενος καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,α΄.



δύο μεριστα὿

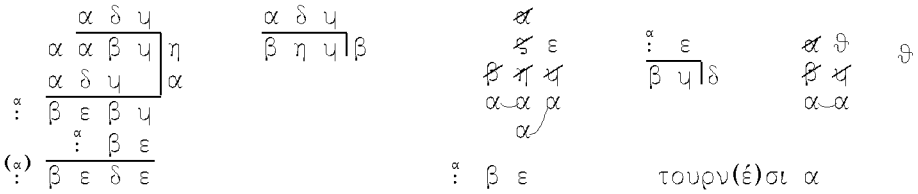
καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

Καὶ ἄλλως. Ποίησον τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα κουκκιά. πολλ(α)πλασίασον γὰρ ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,κ΄. μέρισον τὰς ,κ΄ τὰ κουκκιὰ μετὰ τῶν ,αρ΄, ὧν εἴπομεν ἄνωθεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιη΄ καὶ

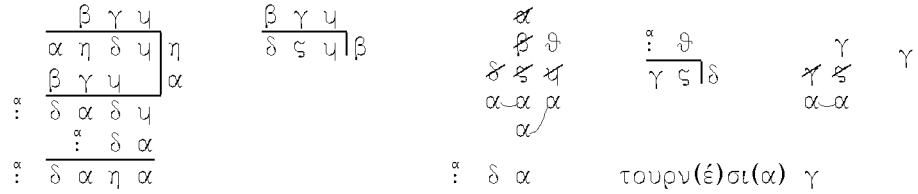


α η καὶ $\frac{\beta}{\alpha\,\alpha}$

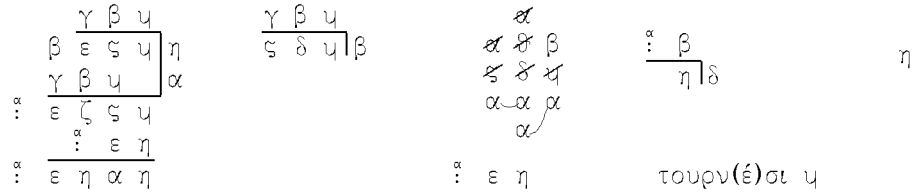
$\frac{\beta\ \upsilon\ \upsilon}{\alpha\ \alpha\ \upsilon\ \upsilon}$, τουτέστι ιη΄ καὶ $\frac{\beta}{\iota\alpha}$· σχιζόμενα γὰρ τὰ $\frac{\beta\ \upsilon\ \upsilon}{\alpha\ \alpha\ \upsilon\ \upsilon}$ εἰς ρ΄ γίνονται οὕτως. ‖ **f. 56^{r}**
Πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ρμ΄ ὑπέρπυρα τοῦ πρώτου μετὰ τῶν ιη΄, ὧνπερ ἐξῆλθον ἐκ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ,βφκ΄.



πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ β΄ τὸ τζάκισμα μετὰ τῶν ρμ΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς σπ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ κε΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ,βφκ΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,βφμε΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ε΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σι(α) κ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι α΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ϑ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα ρμ΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν κουκκιὰ ,βφμε΄ τουρν(έ)σ(ι) α΄ καὶ τζάκισμα ϑ΄.



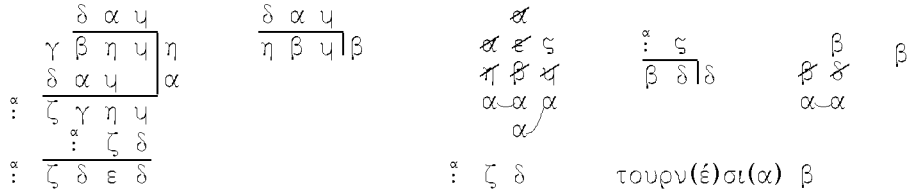
Πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ σλ΄ ὑπέρπυρα τοῦ δευτέρου μετὰ τῶν ιη΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ,δρμ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ τζάκισμα τὰ β΄ μετὰ τῶν σλ΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς υξ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ μα΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ,δρμ΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,δρπα΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ϑ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σ(ια) λς΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ια) γ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα γ΄. καὶ ἰδοὺ ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα σλ΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν κουκκιὰ ,δρπα΄ τουρν(έ)σ(ια) γ΄ καὶ τζάκισμα γ΄.



Πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ τκ΄ ὑπέρπυρα τοῦ τρίτου μετὰ τῶν ιη΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ὑπέρπυρα ,εψξ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ τζάκισμα τὰ β΄ μετὰ τῶν τκ΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς χμ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ νη΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ,εψξ΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,εωιη΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα

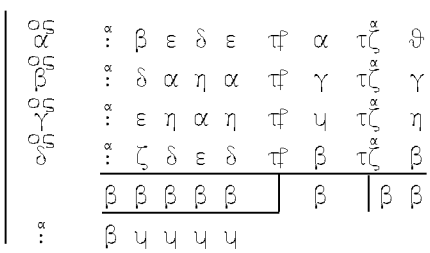
κουκκιὰ β΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σι(α) η΄. ἐπεὶ δέ ἐστι ἐλάττονα τῶν ια΄, ἀπομένοσ(ι) τζάκισμα. καὶ ἰδοὺ ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα τκ΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν κουκκιὰ ,εωιη΄ τουρν(έ)σ(ι) ι΄ καὶ τζάκισμα η΄.

Πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ υι΄ ὑπέρπυρα τοῦ τετάρτου μετὰ τῶν ιη΄ καὶ γίνεται ὁ



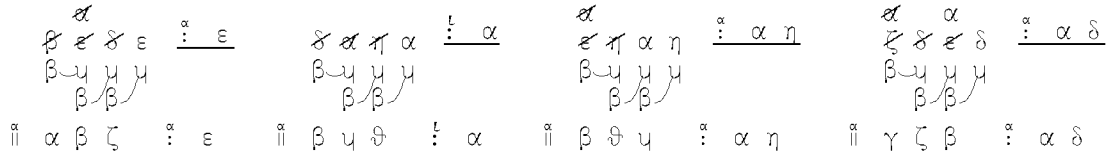
τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ,ζτπ΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὸ τζάκισμα τὰ β΄ μετὰ τῶν υι΄ ὑπερπύρων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ωκ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ οδ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ,ζτπ΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,ζυνδ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ς΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σ(ια) κδ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ια΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) β΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα β΄. καὶ ἰδοὺ ὁ δεδωκὼς ὑπέρπυρα υι΄ οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,κ΄ τῶν κουκκιῶν κουκκιὰ ,ζυνδ΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ τζάκισμα β΄.

Θὲς τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν ἐν τάξει καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα αὐτῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ τζακίσματα κβ΄, ἅπερ ἐστὶ μερισταὶ β΄, τουτέστι τουρν(έ)σ(ια) β΄· δὶς γὰρ ια΄ γίνονται κβ΄. θὲς τὰ β΄ τουρν(έ)σ(ια) εἰς τὰ τουρν(έ)σ(ια) καὶ ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σ(ια) η΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ β΄. θὲς ταῦτα εἰς τὰ κουκκιὰ καὶ ἕνωσον ταῦτα πάντα ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρξάμενος, ὡς εἰώθαμεν ποιεῖν ἐπὶ τῆς ὁμάδος, καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,κ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ,α΄.



καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

Ἐὰν δὲ ζητῇς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν ἀντὶ τῶν κουκκιῶν, ὧν οἰκειώσατο, θὲς τὰ τζακίσματα αὐτῶν ἐν τάξει, καθὼς ἀνωτέρω οὕτως ἐποίησας. ὡσαύτως θὲς καὶ τὰ τουρν(έ)σι(α) αὐτῶν εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν καὶ ἕνωσον τὰ



τζακίσματα αὐτῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κβ΄, τουτέστι τουρν(έ)σ(ια) β΄. ἔπειτα μέρισον τὰ ,βφμε΄ κουκκιὰ τοῦ πρώτου μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ρκζ΄ κουκκιὰ ε΄. μέρισον δὲ καὶ τὰ ,δρπα΄ κουκκιὰ τοῦ δευτέρου μετὰ τῶν κ΄

---

12 β΄] γ **falso C**

καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμε-
ρισμὸς ὑπέρπυρα σϑ´ κουκκὶ
α´. μέρισον δὲ καὶ τὰ ,εωιη´
κουκκιὰ τοῦ τρίτου μετὰ τῶν
κ´ καὶ γίνεται ὁ τούτων δια-
μερισμὸς ὑπέρπυρα σς´ κουκ-

ϙ	(α)	α	β	ζ	(α)		ε	⳱	α	τζ͵	ϑ	
β	(α)	β	υ	ϑ	(ι)		α	⳱	γ	τζ͵	γ	
ϙ	(α)	β	ϑ	υ	(α)	α	η	⳱	υ	τζ͵	η	
δ	(α)	γ	ζ	β	(α)	α	δ	⳱	β	τζ͵	β	
‖		α	υ	υ	υ		β		α		β β	δύο μερισταί

κιὰ ιη´. μέρισον δὲ καὶ τὰ ,ζυνδ´ κουκκιὰ τοῦ τετάρτου μετὰ τῶν κ´ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα τοβ´ κουκκιὰ ιδ´. ϑὲς τὰ κουκκιὰ καὶ τὰ ὑπέρπυρα εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν. ϑὲς δὲ τὰ β´ τουρν(έσια), ἅπερ ποιῶσι τὰ κβ´ τὰ τ<ζα>κίσματα, εἰς τὰ τουρν(έ)σι(α) καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σ(ια) η´, τουτέστι κουκκιὰ β´. ϑὲς ταῦτα εἰς τὰ κουκκιὰ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ μ´, τουτέστι ὑπέρπυρα β´. ἔνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ὑπερπύρων ‖ ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρξάμενος καὶ γίνον- **f. 56ᵛ**
ται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,α´.

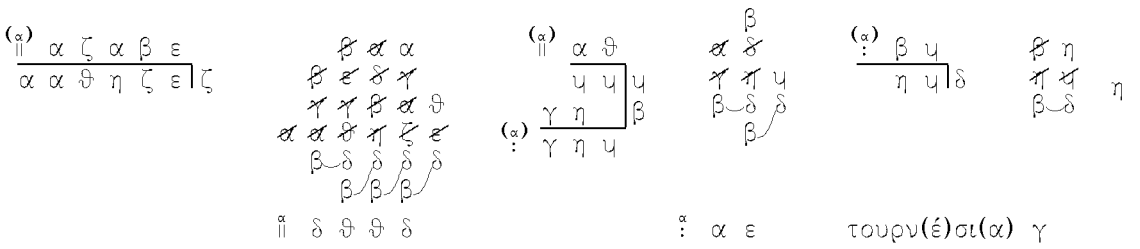
γίνεται δὲ τοῦτο καὶ μετὰ ὑπερπύρων ἀκεραίων μὴ γενομένων κουκκιῶν καὶ εὑρίσκεται καλῶς τὸ ζητούμενον διὰ τῆς παρούσης δευτέρας μεταχειρίσεως, καϑὼς σαφέστερον εἴπομεν. μετὰ δὲ τῶν κουκκιῶν γίνεται προχειρέστερον ἢ μετὰ τῶν ὑπερπύρων.

ρε **Περὶ τῶν ἓξ συντρόφων τῶν ἐχόντων ἐκ τῶν κδ´ κουκκιῶν τοῦ ὅλου σώματος τῆς νηὼς ὁ μὲν κουκκιὰ πλείω, ὁ δὲ ἐλάττω – ὁμοῦ δὲ οἱ ἓξ κουκκιὰ κδ´. πῶς ἔστι εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν <ἐκ τῶν> ,ι,ζ´ καὶ ρκε´ ὑπερπύρων, ὧν ἐκέρδεσαν;**

Ἔστω ὅτι ἓξ σύντροφοι πραγματευταὶ ἔχοσι διὰ νηώς τινος πραγματεύσασϑαι. καὶ ὁ μὲν πρῶτος μετέχει κουκκιὰ ζ´, ὁ δὲ δεύτερος κουκκιὰ ς´, ὁ δὲ τρίτος κουκκιὰ ε´, ὁ δὲ τέταρτος κουκκιὰ γ´, ὁ δὲ πέμπτος κουκκιὰ β´, ὁ δὲ ἕκτος κουκκὶ α´. ἔνωσον ταῦτα πάντα καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ κδ´. ἔστι δὲ τὸ μὲν καϑόλου σῶμα τῆς νηὼς κουκκιὰ κδ´, ἕκαστος δὲ τῶν ἓξ πραγματευομένων συντρόφων μετέχει ἐκ τοῦ σώματος τῶν κδ´ κουκκιῶν, ἅπερ καταμέρος εἴπομεν. οὕτως γὰρ πέφυκε γίνεσϑαι, ὅταν τινὲς πολλοὶ καὶ διάφοροι πραγματευταὶ ἔχωσι ποιήσασϑαι κοινῶς διὰ νηὼς πραγματείαν τινά.

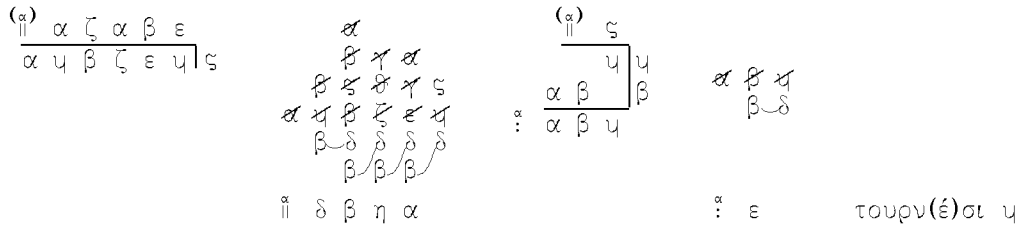
ζ ς ε γ β α
⁝ κδ

γενομένου δὲ τούτου ἔστω ὅτι ἐκέρδεσαν ὑπέρπυρα ,ι,ζ´ καὶ ρκε´ ὑπέρπυρα. ζητεῖς δέ, πῶς ἔστι εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν ἀναλόγως ἐκ τῶν ,ι,ζ´ καὶ ρκε´ ὑπερπύρων, ὧν ἐκέρδεσαν κοινῶς οἱ ἓξ σύντροφοι.



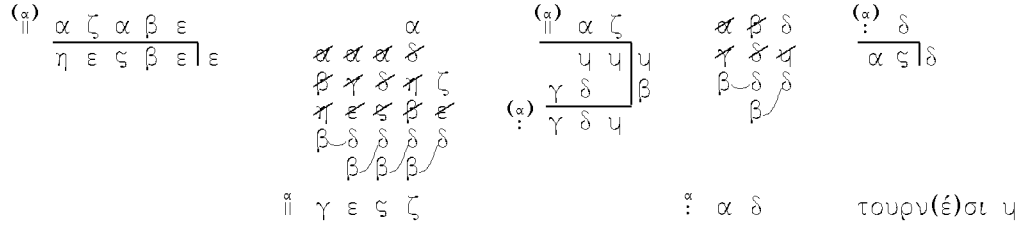
Πολλ(α)πλασίασον τὰς ,ι,ζ´ καὶ ρκε´ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ζ´ κουκκιῶν τοῦ πρώτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α α ϑ η ζ ε´. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ´ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ,δ≫ςδ´· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ιϑ´. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ´ καὶ γίνονται κουκκιὰ τπ´. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ´ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιε´·

ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ κ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σ(ια) π΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ια) γ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα η΄. οἰκειοῦται δὲ ταῦτα ὁ ἔχων τὰ ζ΄ κουκκιά.



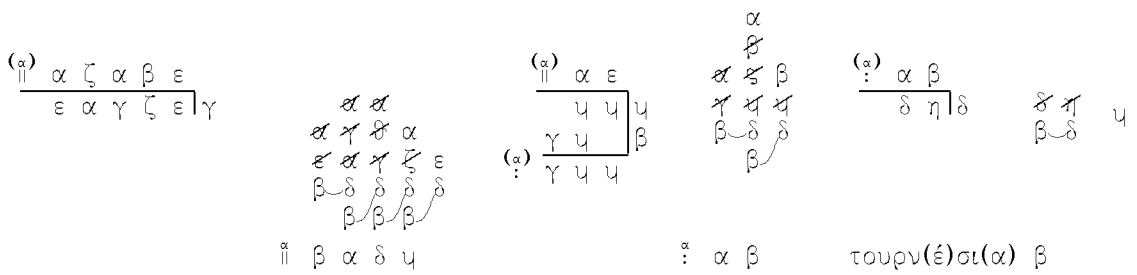
Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰς ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ς΄ κουκκιῶν τοῦ δευτέρου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α υ β ζ ε υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ,δσπα΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ς΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται κουκκιὰ ρκ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ε΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα υ΄. οἰκειοῦται δὲ ταῦτα ὁ ἔχων τὰ ς΄ κουκκιά.

Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰς ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ε΄ κουκκιῶν τοῦ



τρίτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς η ε ς β ε΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ,γφξζ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ιζ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται κουκκιὰ τμ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιδ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ δ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σι(α) ις΄. ἐπεὶ δέ ἐστι ἐλάττονα τῶν κδ΄ κουκκιῶν, ἀπομένοσι τζάκισμα. οἰκειοῦται δὲ ταῦτα ὁ ἔχων τὰ ε΄ κουκκιά.

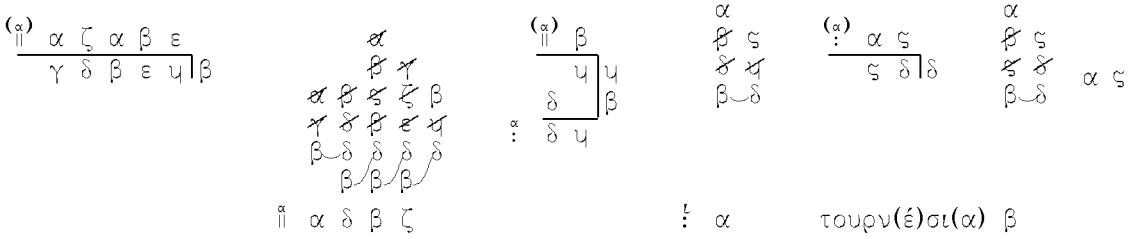
Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰς ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν γ΄ κουκκιῶν τοῦ



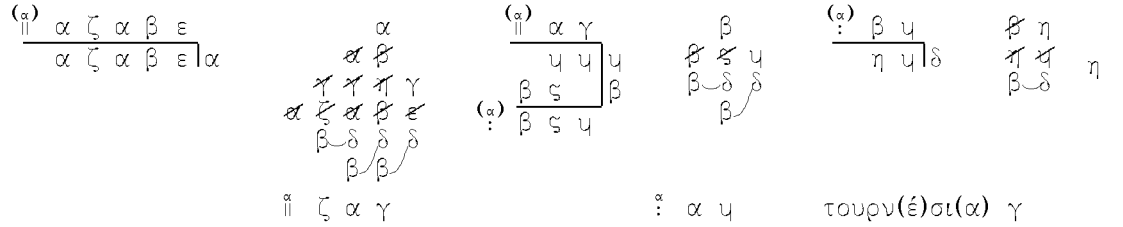
---

divisio prima: ϰ in superiore linea falso supra ϛ positum est C

τετάρτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ε α γ ζ ε΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ,βρμ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ιε΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται κουκκιὰ τ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιβ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ιβ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σι(α) μη΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) β΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ι΄. οἰκειοῦται δὲ ταῦτα ὁ ἔχων τὰ γ΄ κουκκιά.



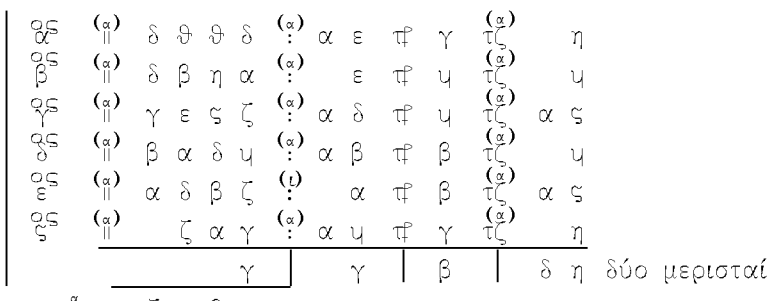
Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰς ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν β΄ κουκκιῶν τοῦ πέμπτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γ δ β ε ι΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ,αυκζ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα β΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται κουκκιὰ μ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκὶ α΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ις΄. πολλαπλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σι(α) ξδ΄. ‖ μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ f. 57r τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) β΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ις΄. οἰκειοῦται δὲ ταῦτα ὁ ἔχων τὰ β΄ κουκκιά.



Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰς ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπέρπυρα μετὰ τοῦ α΄ κουκκιοῦ τοῦ ἕκτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς πάλιν α ζ α β ε΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα ψιγ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ιγ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται κουκκιὰ σξ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ι΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ κ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σι(α) π΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) γ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα η΄. οἰκειοῦται δὲ ταῦτα ὁ ἔχων κουκκὶ α΄.

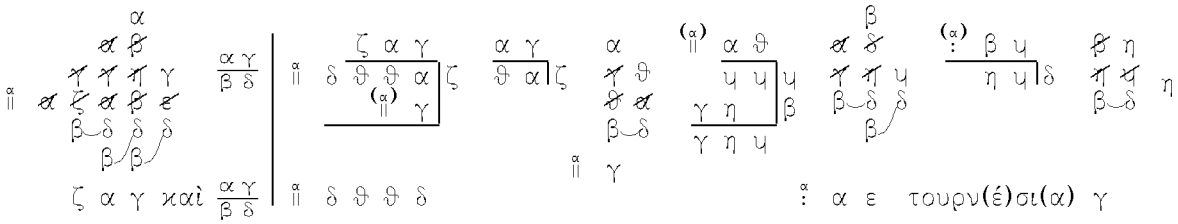
Θὲς οὖν ἐν τάξει τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα καὶ γίνονται ὁμοῦ μη΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστὰ β΄, τουτέστι τουρν(έ)σι(α) β΄· δὶς γὰρ κδ΄ γίνονται μη΄. θὲς τὰ β΄ τουρν(έ)σι(α) εἰς τὰ τουρν(έ)σι(α) καὶ ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σι(α) ιβ΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ γ΄. θὲς τὰ γ΄ κουκκιὰ εἰς τὰ κουκκιὰ καὶ

ἕνωσον ταῦτα καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ξ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα γ΄. ἕνωσον τὰ γ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν ὑπερπύρων ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρξάμενος, ὡς εἰώθαμεν ποιεῖν ἐπὶ τῆς ὁμάδος, καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπέρπυρα, καθὼς εἴπομεν, ὅτι ἐκέρδεσαν ὑπέρπυρα ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπέρπυρα.



καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

Καὶ ἄλλως. Μέρισον τὰς ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ψιγ΄ καὶ $\frac{\iota\gamma}{\kappa\delta}$. ἔστι δὲ ταῦτα πολλ(α)πλασιαστὴς κοινὸς τῶν διαφόρων κουκκιῶν, ὧν οἰκειοῦται ἕκαστος τῶν ἓξ συντρόφων ἐκ τοῦ ὅλου σώματος τῶν κδ΄ κουκκιῶν.

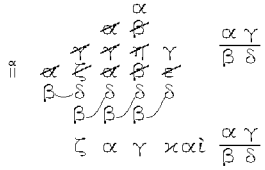


Πολλαπλασίασον γὰρ τὰ ψιγ΄ μετὰ τῶν ζ΄ κουκκιῶν τοῦ πρώτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ὑπέρπυρα ,δ≫ϛα΄. πολλ(α)πλασίασον καὶ τὰ ιγ΄ τὸ τζάκισμα, ἅπερ ἐστὶ ἄνωθεν, μετὰ τῶν ζ΄ κουκκιῶν τοῦ πρώτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ϛα΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄, ἅπερ ἐστὶ κάτωθεν, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα γ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ,δ≫ϛα΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,δ≫ϛδ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ιϑ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται κουκκιὰ τπ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κάτωθεν κδ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιε΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ κ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σι(α) π΄. μέρισον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ια) γ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα η΄. καὶ ἰδοὺ ὁ πρῶτος ὁ ἔχων κουκκιὰ ζ΄ ἐκ τῶν κδ΄ κουκκιῶν οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα ,δ≫ϛδ΄ κουκκιὰ ιε΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄ καὶ τζάκισμα η΄, καθὼς καὶ διὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως οὕτως εὗρες.

ὡσαύτως πολλ(α)πλασίασον τὰ ψιγ΄ μετὰ τῶν ϛ΄ κουκκιῶν τοῦ δευτέρου καὶ εὑρήσεις κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται καὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μέχρι

---

divisio prima:

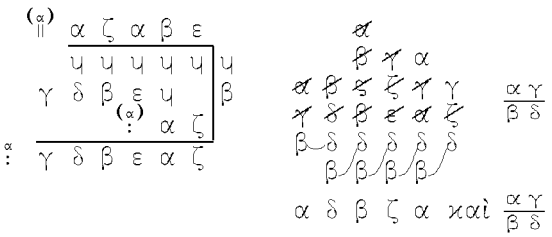


falso C

23 κουκκιὰ] τουρν(έ)σι(α) **C**

τῶν ἓξ συντρόφων ἀναλόγως, ἕκαστος αὐτῶν ἐκ τῶν ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπερπύρων. ὅταν οὖν ἐστι τὸ κέρδος αὐτῶν ὑπέρπυρα ἀκέραια ἄνευ κουκκιῶν, εὑρίσκεται καλῶς τὸ ζητούμενον καὶ μετὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως καὶ μετὰ τῆς δευτέρας. ὅταν δὲ τὸ κέρδος ἔχει καὶ κουκκιά τινα – ἔστω γὰρ τὸ κέρδος αὐτῶν ὑπέρπυρα ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ιζ΄ –, εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον καλῶς μετὰ τῆς δευτέρας μεταχειρίσεως.

πολλ(α)πλασίασον γὰρ τὰς ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν κ΄. πρόσθες καὶ τὰ ιζ΄ κουκκιὰ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ γ δ β ε α ζ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν τοῦ ὅλου σώματος τῶν ἓξ συντρόφων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς α δ β ζ α΄ καὶ $\frac{\alpha\,\gamma}{\beta\,\delta}$.

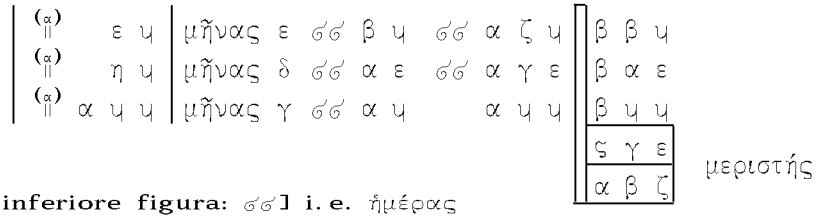


πολλ(α)πλασίασον τὰ ζ΄ κουκκιὰ τοῦ πρώτου μετὰ τῶν α δ β ζ α΄, καθὼς ἀνωτέρω ἐπολλ(α)πλασίασας τὰ ζ΄ κουκκιὰ τοῦ πρώτου μετὰ τῶν ψιγ΄ καὶ εὗρες, πόσα ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ καὶ τουρν(έ)σ(ια) καὶ τζακίσματα οἰκειοῦται ὁ πρῶτος ὁ ἔχων τὰ ζ΄ κουκκιά – ὡσαύτως καὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μέχρι τῶν ἓξ. καὶ εὑρήσεις νῦν κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον ποιήσας, πόσα κουκκιὰ καὶ πόσα τουρν(έ)σι(α) καὶ πόσα τζακίσματα οἰκειοῦται ὁ πρῶτος ὁ ἔχων τὰ ζ΄ κουκκιὰ ἐκ τῶν ,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ ὑπερπύρων καὶ κουκκιῶν ιζ΄ – ὡσαύτως καὶ οἱ λοιποὶ μέχρι τῶν ἓξ. εὑρὼν δέ, πόσα κουκκιὰ οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν καὶ πόσα τουρν(έ)σι(α) καὶ πόσα τζακίσματα, ῥᾴδιόν ἐστι εἰδέναι τὰ κουκκιά, ἅπερ οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν, πόσα ὑπέρπυρα γίνονται.

ἔχεις οὖν εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως, κἄντε ἀκέραια ὑπέρπυρά ἐστι τὸ κέρδος αὐτῶν κἄντε ἔχει καὶ κουκκιά τινα περισσεύοντα, οὐκ ἐπὶ ἓξ μόνον συντρόφων, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ πλειόνων. καὶ οὐκ ἐπὶ κδ΄ κουκκιῶν μόνον σῶμα, ἀλλὰ καὶ λ΄ κουκκιῶν σῶμα ἢ καὶ ιε΄ κουκκιῶν σῶμα ὑποθεὶς εἶναι τὸ τῆς νηώς, ὅπερ ἀμφότεροι κοινῶς ἔχοσι, εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως. ‖ f. 57^{v}

ρς **Περὶ τῶν τριῶν, ὧν ὁ μὲν δέδωκεν ὑπέρπυρα ν΄, ὁ δὲ ὑπέρπυρα π΄, ὁ δὲ ὑπέρπυρα ρ΄, κατὰ διαφόρους μῆνάς τε καὶ ἡμέρας καὶ οὐχ ὡς ἐν ταὐτῷ – πῶς ἔστι εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν ἀναλόγως ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων, ὧν ἐκέρδεσαν;**

Ἔστω ὅτι τρεῖς ἐγένοντο σύντροφοι οὐχ ὡς ἐν ταὐτῷ ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ, ἀλλ᾽ ὁ μὲν πρῶτος ἔχων ὑπέρπυρα ν΄ πραγματεύσασθαι, μετὰ ἡμέρας τινὰς ἐλθὼν ὁ δεύτερος δέδωκεν ὑπέρπυρα π΄, ἐλθὼν δὲ καὶ ὁ τρίτος μετὰ ἡμέρας τινὰς τῶν δύο προγενεστέρων δέδωκεν ὑπέρπυρα ρ΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν ἀναλόγως ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων, ὧν ἐκέρδεσαν, ὡς πρὸς τὰ ὑπέρπυρα, ἅπερ δέδωκεν, καὶ ὡς πρὸς τοὺς μῆνας καὶ τὰς ἡμέρας, ἃς παρῆλθον, μεθ᾽ οὓς τὰ ὑπέρπυρα αὐτοῦ δέδωκεν ἕκαστος.



θὲς οὖν ἀκολούθως ἐν τάξει τὰ ὑπέρπυ-

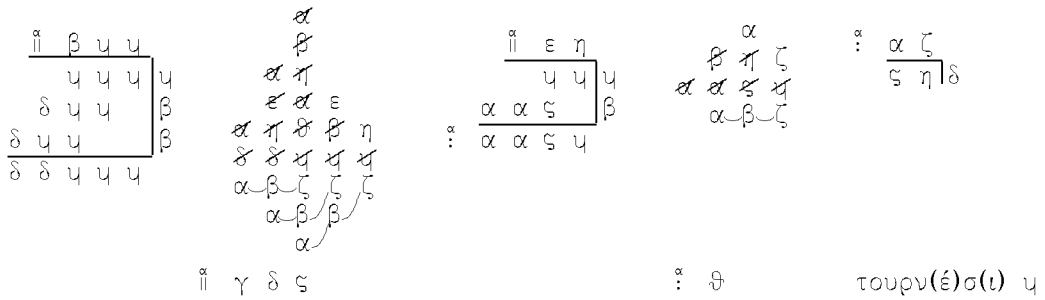
μεριστής

39 ἃς] sic C pro αἳ in inferiore figura: ℊℊ] i. e. ἡμέρας

ρα, ἅπερ δέδωκεν ἕκαστος, καὶ τοὺς μῆνας καὶ τὰς ἡμέρας, ἃς εἶχον ἑκάστου ὑπέρπυρα. καὶ ὁ μὲν πρῶτος ὁ ἔχων τὰ ν΄ ὑπέρπυρα ἔπραττον τὰ ὑπέρπυρα αὐτοῦ μῆνας ε΄ καὶ ἡμέρας κ΄, τουτέστι ἡμέρας ρο΄. ἕνωσον τὰ ρο΄ ἡμέρας μετὰ τῶν ν΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὁμοῦ τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι τοῦ πρώτου σκ΄. ὁ δὲ δεύτερος ὁ μετὰ ἡμέρας τινὰς εἰσφέρων ὑπέρπυρα π΄ ἔπραττον τὰ ὑπέρπυρα αὐτοῦ μῆνας δ΄ καὶ ἡμέρας ιε΄, τουτέστι ἡμέρας ρλε΄. ἕνωσον τὰς ρλε΄ ἡμέρας μετὰ τῶν π΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὁμοῦ τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι τοῦ δευτέρου σιε΄. ὁ δὲ τρίτος ὁ μετὰ ἡμέρας τινὰς εἰσφέρων ὑπέρπυρα ρ΄ ἔπραττον τὰ ὑπέρπυρα αὐτοῦ μῆνας γ΄ καὶ ἡμέρας ι΄, τουτέστι ἡμέρας ρ΄. ἕνωσον τὰς ρ΄ ἡμέρας μετὰ τῶν ρ΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὁμοῦ τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι τοῦ τρίτου σ΄.

ἕνωσον δὲ τὰς τρεῖς ὁμάδας, ἃς ἐποίησαν τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι ἑκάστου αὐτῶν, καὶ γίνονται ὁμοῦ τῶν τριῶν τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι χλε΄. ταῦτα τὰ χλε΄ ἐστὶ ὁ μεριστὴς τῶν ,α΄ ὑπερπύρων, ὧν ἐκέρδεσαν κοινῶς οἱ τρεῖς· δι᾽ αὐτῶν γὰρ τῶν χλε΄ μερίζονται τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα καὶ εὑρίσκεται, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν ἀναλόγως ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων, ὧν ἐκέρδεσαν.

ἵνα δὲ γένηται προχειρεστέρως ἡ τῶν πολλ(α)πλασιαζομένων καὶ διαμεριζομένων τούτων ζήτησις, σχίσον τὰ χλε΄, ἅπερ εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, εἰ<ς> μέρη πέντε καὶ γίνεται τὸ πέμπτον ρκζ΄. σχίσον καὶ τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐκέρδεσαν, εἰς μέρη πέντε καὶ γίνεται τὸ πέμπτον ὑπέρπυρα σ΄. κράτ(ει) οὖν ἀντὶ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα σ΄ καὶ ἀντὶ τῶν χλε΄ τὸν μεριστὴν ρκζ΄. ὅπερ οὖν ἔχεις ποιῆσαι μετὰ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων καὶ μετὰ τῶν χλε΄ τὸν μεριστήν, ταὐτὸν ἔχεις ποιῆσαι προχειρεστέρως καὶ μετὰ τῶν σ΄ ὑπερπύρων καὶ ρκζ΄ μεριστήν.

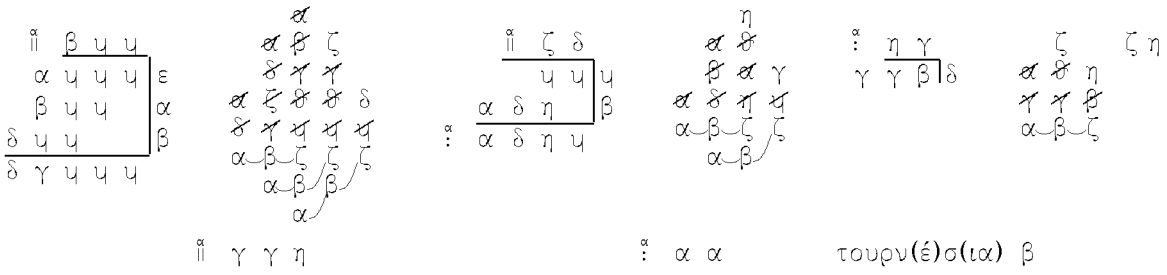


Πολλ(α)πλασίασον γὰρ ἀντὶ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων τὰ σ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν σκ΄ ἡμερῶν τε καὶ ὑπερπύρων τοῦ πρώτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς δ δ υ υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρκζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα τμς΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα νη΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ νη΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,αρξ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρκζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ϑ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ιζ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ ιζ΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σ(ι)α ξη΄. ἐπεὶ δέ ἐστι ἐλάττονα τῶν ρκζ΄, ἀπομένοσι τζάκισμα. οἰκειοῦται δὲ ὁ πρῶτος ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ταῦτα πάντα.

Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ σ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν σιε΄ ἡμερῶν τε καὶ ὑπερπύρων τοῦ δευτέρου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς δ γ υ υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρκζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα τλη΄· ἀπομένει καὶ τζά-

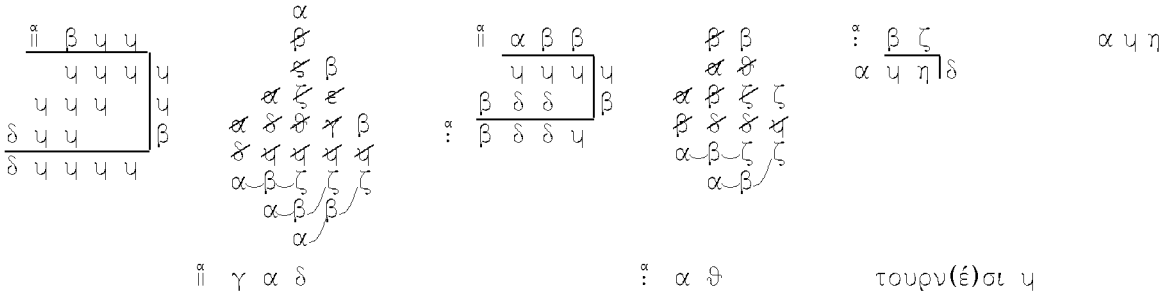
---

3 ἕνωσον ... **incipit solutio falsa** 4.7.10.11.12 αἱ μέραι] **i.e.** ἡμέραι



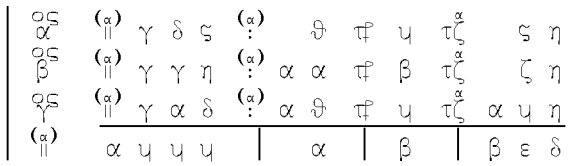
κισμα ὑπέρπυρα οδ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ οδ΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,αυπ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρκζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ια΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ πγ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ πγ΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) τλβ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρκζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) β΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα οη΄. οἰκειοῦται δὲ ὁ δεύτερος ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ταῦτα πάντα.

Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ σ΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν σ΄ ἡμερῶν τε καὶ ὑπερπύρων



τοῦ τρίτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς δ υ υ υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρκζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα τιδ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ρκβ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ ρκβ΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,βυμ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρκζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιϑ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ κζ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τὰ κζ΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι(α) ρη΄. ἐπεὶ δέ ἐστι ἐλάττονα τῶν ρκζ΄, ἀπομένοσι τζάκισμα. οἰκειοῦται δὲ ὁ τρίτος ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων ταῦτα πάντα.

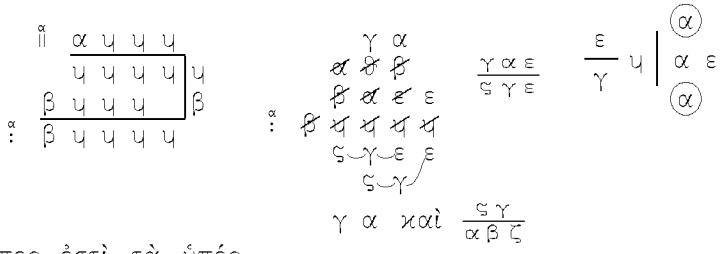
Θὲς οὖν τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν ἐν τάξει καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα καὶ γίνονται ὁμοῦ συνδ΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστὰ β΄, τουτέστι τουρν(έ)σι(α) β΄· δὶς γὰρ ρκζ΄ γίνονται συνδ΄. θὲς τὰ β΄ τουρν(έ)σι(α) εἰς τὰ τουρν(έ)σι(α) καὶ ‖ ἕνωσον τὰ τουρν(έ)σι(α) καὶ γίνον- f. 58r
ται ὁμοῦ τουρν(έ)σι(α) δ΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκὶ α΄. θὲς τὸ α΄ κουκκὶ εἰς τὰ κουκκιὰ καὶ ἕν(ω)σον τὰ κουκκιὰ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ μ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα β΄. θὲς τὰ β΄ ὑπέρπυρα εἰς τὰ ὑπερπύρα καὶ ἕνωσον τὰ ὑπέρπυρα ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρξάμενος, ὡς εἰώθαμεν ποιεῖν ἐπὶ τῆς ὁμάδος, καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν ὑπέρ-



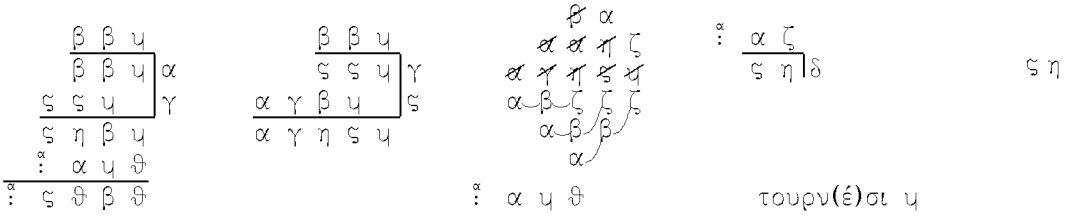
πυρα ,α΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες τὰ οἰκεῖα μέρη, ἅπερ ἕκαστος αὐτῶν οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων, ἃ καὶ ἐνώσας ἐγένοντο πάλιν ὑπέρπυρα ,α΄.

καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

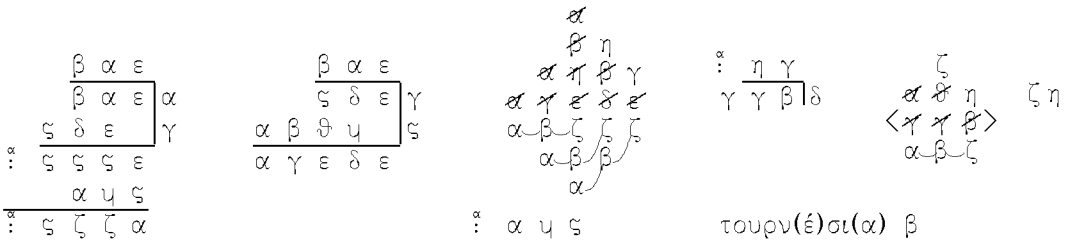
Καὶ ἄλλως. Ποίησον τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα κουκκιά. πολλ(α)πλασίασον γὰρ ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ,κ΄. μέρισον τὰς ,κ΄ τὰ κουκκιὰ μετὰ τῶν ϛ γ ε΄, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λα΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\gamma\,\alpha\,\varepsilon}{\varsigma\,\gamma\,\varepsilon}$, ἅπερ ἀμφότερα σχιζόμενα εἰς μέρη πέντε γίνονται λα΄ καὶ $\frac{\varsigma\,\gamma}{\alpha\,\beta\,\zeta}$.



Πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ σκ΄, ἅπερ ἐστὶ τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι τοῦ πρώτου, μετὰ τῶν λα΄, ὥνπερ ἐξῆλθον ἐκ τοῦ διαμερισμοῦ τῶν



,κ΄ τῶν κουκκιῶν, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ,ϛωκ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ σκ΄ μετὰ τῶν ξγ΄, ἅπερ ἐστὶ τζάκισμα, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α γ η ϛ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κάτωθεν ρκζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ρϑ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ,ϛωκ΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,ϛ≫κϑ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα ιζ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σι(α) ξη΄· ἐλάττονα δὲ ὄντα τῶν ρκζ΄ ἀπομένοσι τζάκισμα. καὶ ἰδοὺ ὁ πρῶτος ἀναλόγως ὡς πρὸς τὰ ν΄ ὑπέρπυρα καὶ τὰς ἡμέρας αὐτῶν οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων κουκκιὰ ,ϛ≫κϑ΄ τουρν(έ)σι υ΄ τζάκισμα ξη΄.

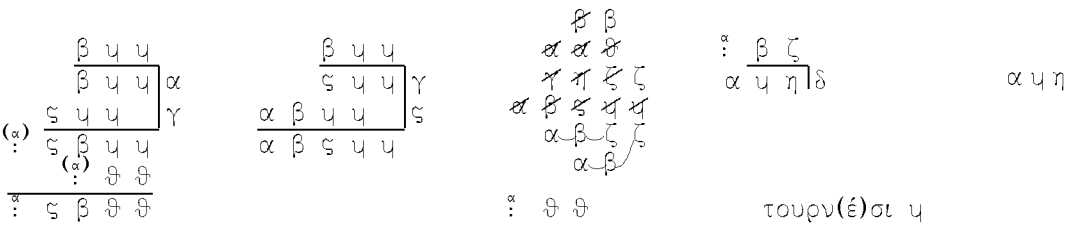


Πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ σιε΄, ἅπερ ἐστὶ τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι τοῦ δευτέρου, μετὰ τῶν λα΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ,ϛχξε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ σιε΄ μετὰ τῶν ξγ΄ τὸ τζάκισμα καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς α γ ε δ ε΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρκζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ρϛ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ,ϛχξε΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,ϛψζα΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ πγ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σ(ια) τλβ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρκζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ια) β΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα οη΄. καὶ ἰδοὺ ὁ δεύτερος ἀναλόγως ὡς πρὸς τὰ π΄ ὑπέρπυρα καὶ τὰς ἡμέρας αὐτῶν οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων κουκκιὰ ,ϛψοα΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ τζάκισμα οη΄.

---

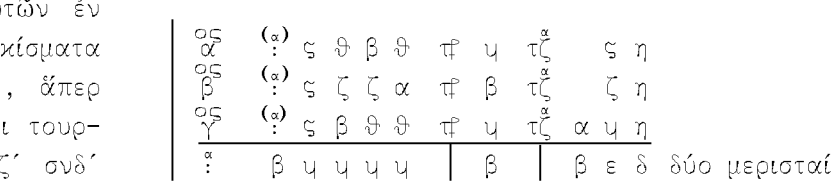
25 ,ϛψζα΄] sic C pro ,ϛψοα΄ sive ϛ ζ ζ α΄

Πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ σ΄, ἅπερ ἐστὶ τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι τοῦ τρίτου, μετὰ



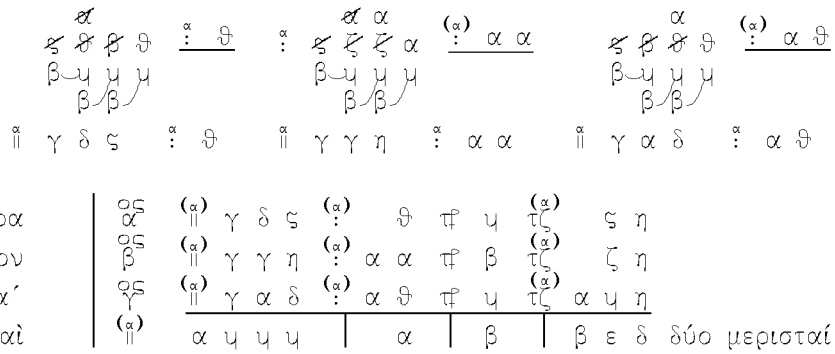
τῶν λα΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς κουκκιὰ ,ϛσ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ σ΄ μετὰ τῶν ξγ΄ τὸ τζάκισμα καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α β ϛ υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ρκζ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ϛϑ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ,ϛσ΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,ϛσϛϑ΄. ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ κζ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σι(α) ρη΄· ἐλάττονα δὲ ὄντα τῶν ρκζ΄ ἀπομένοσι τζάκισμα. καὶ ἰδοὺ ὁ τρίτος ἀναλόγως ὡς πρὸς τὰ ρ΄ ὑπέρπυρα καὶ τὰς ἡμέρας αὐτῶν οἰκειοῦται ἐκ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων κουκκιὰ ,ϛσϛϑ΄ τουρν(έ)σι υ΄ καὶ τζάκισμα ρη΄.

Θὲς τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν ἐν τάξει καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα καὶ γίνονται ὁμοῦ σνδ΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστα‹ὶ› β΄, τουτέστι τουρν(έ)σι(α) β΄· δὶς γὰρ ρκζ΄ σνδ΄ γίνονται. θὲς τὰ β΄ τουρν(έ)σι(α) εἰς τὰ τουρν(έ)σι(α) καὶ ἕνωσον τὰ τουρν(έ)σι(α) καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σι(α) δ΄, τουτέστι κουκκὶ α΄. ἕνωσον τὸ α΄ κουκκὶ μετὰ τῶν κουκκιῶν ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρξάμενος, ὡς εἰώθαμεν ποιεῖν ἐπὶ τῆς ὁμάδος, καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν κουκκιὰ ,κ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ,α΄.



καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

Ἐὰν δὲ ζητῇς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν ἀντὶ τῶν κουκκιῶν, ὧν οἰκειώσατο, θὲς τὰ τζακίσματα αὐτῶν ἐν τάξει, ὡσαύτως καὶ τὰ τουρν(έ)σι(α). μέρισον δὲ μετὰ τῶν κ΄ τὰ ,ϛ≫κϑ΄ κουκκιὰ καὶ γίνονται ὑπέρπυρα τμϛ΄ κουκκιὰ ϑ΄. μέρισον μετὰ τῶν κ΄ καὶ τὰ ,ϛψοα΄ κουκκιὰ τοῦ δευτέρου καὶ γίνονται ὑπέρπυρα τλη΄ κουκκιὰ ια΄. μέρισον μετὰ τῶν κ΄ καὶ τὰ ,ϛσϛϑ΄ κουκκιὰ τοῦ τρίτου καὶ ‖ γίνονται ὑπέρπυρα τιδ΄ κουκκιὰ ιϑ΄. θὲς οὖν τὰ κουκκιὰ εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν, ὡσαύτως θὲς καὶ τὰ ὑπέρπυρα εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν. καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα, ἔπειτα τὰ τουρν(έσια), εἰθ᾽ οὕτως τὰ κουκκιά, ἔσχατον δὲ πάντων τὰ ὑπέρπυρα, ὡς



f. 58v

---

21 κουκκιῶν] ωνǁ **falso C** 26 γ α δ] γ δ α **falso C**

εἰώθαμεν ποιεῖν ἐπὶ τῆς ὁμάδος, καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,α΄.

Ἕτερον τούτου ὅμοιον.

Ἔστω ὅτι τέσσαρες ἐγένοντο σύντροφοι οὐχ ὡς ἐν ταὐτῷ ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ, ἀλλ᾽ ὁ μὲν πρῶτος ἔχων ὑπέρπυρα ργ΄ πραγματεύσασθαι, μετὰ ἡμέρας τινὰς ἐλθὼν ὁ δεύτερος δέδωκεν ὑπέρπυρα ρν΄, ὡσαύτως καὶ ὁ τρίτος μετὰ ἡμέρας τινὰς δέδωκεν ὑπέρπυρα ση΄, ὡσαύτως καὶ ὁ τέταρτος μετὰ ἡμέρας τινὰς δέδωκεν ὑπέρπυρα τιε΄. ἐκέρδεσαν δὲ

ϙ α	(α) ‖	α	ι	γ	μῆνας	ϛ	ↀ	ϑ	ὁμοῦ	ↀ	α	η	ϑ	β ϑ β	
ϙ β	(α) ‖	α	ε	ι	μῆνας	ε	ↀ	ζ	ὁμοῦ	ↀ	α	ε	ζ	γ ι ζ	
ϙ γ	(α) ‖	β	ι	η	μῆνας	δ	ↀ	ϛ	ὁμοῦ	ↀ	α	β	ϛ	γ γ δ	
ϙ δ	(α) ‖	γ	α	ε	μῆνας	γ	ↀ	η	ὁμοῦ	ↀ		ϑ	η	δ α γ	
														α γ δ ϛ	ὁ μεριστής
														ϛ ζ γ	

οἱ τέσσαρες ὑπέρπυρα ,β΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα ἐκέρδεσεν ἕκαστος αὐτῶν ἀναλόγως ἐκ τῶν ,β΄ ὑπερπύρων, ὧν ἐκέρδεσαν.

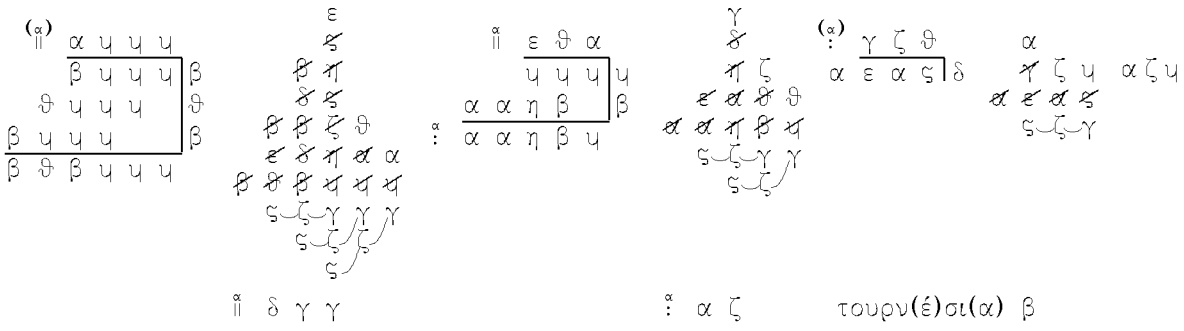
ποίησον ὡς καὶ πρότερον. ὁ μὲν πρῶτος ὁ ἔχων τὰ ργ΄ ὑπέρπυρα ἔπραττον τὰ ὑπέρπυρα αὐτοῦ μῆνας ϛ΄ καὶ ἡμέρας ϑ΄, τουτέστι ἡμέρας ρπϑ΄. ἕνωσον τὰς ρπϑ΄ ἡμέρας μετὰ τῶν ργ΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὁμοῦ τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι τοῦ πρώτου σϙβ΄. ὁ δὲ δεύτερος ὁ μετὰ ἡμέρας τινὰς εἰσφέρων ὑπέρπυρα ρν΄ ἔπραττον τὰ ὑπέρπυρα αὐτοῦ μῆνας ε΄ καὶ ἡμέρας ζ΄, τουτέστι ἡμέρας ρνζ΄. ἕνωσον τὰς ρνζ΄ ἡμέρας μετὰ τῶν ρν΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὁμοῦ τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι τοῦ δευτέρου τζ΄. ὁ δὲ τρίτος ὁ μετὰ ἡμέρας τινὰς εἰσφέρων ὑπέρπυρα ση΄ ἔπραττον τὰ ὑπέρπυρα αὐτοῦ μῆνας δ΄ καὶ ἡμέρας ϛ΄, τουτέστι ἡμέρας ρκϛ΄. ἕνωσον τὰς ρκϛ΄ ἡμέρας μετὰ τῶν ση΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὁμοῦ τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι τοῦ τρίτου τλδ΄. ὁ δὲ τέταρτος ὁ μετὰ ἡμέρας τινὰς εἰσφέρων ὑπέρπυρα τιε΄ ἔπραττον τὰ ὑπέρπυρα αὐτοῦ μῆνας γ΄ καὶ ἡμέρας η΄, τουτέστι ἡμέρας Cη΄. ἕνωσον τὰς Cη΄ ἡμέρας μετὰ τῶν τιε΄ ὑπερπύρων καὶ γίνονται ὁμοῦ τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι τοῦ τετάρτου υιγ΄. ἕνωσον δὲ τὰς τέσσαρες ὁμάδες, ἃς ἐποίησαν τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι ἑκάστου αὐτῶν, καὶ γίνονται ὁμοῦ τῶν τεσσάρων τὰ ὑπέρπυρα καὶ αἱ μέραι ,ατμϛ΄. ἔστι δὲ ταῦτα ὁ κοινὸς μεριστής· δι᾽ αὐτῶν γὰρ μερίζονται τὰ ,β΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐκέρδεσαν, καὶ εὑρίσκεται, πόσα ὑπέρπυρα ἐκέρδεσεν ἕκαστος αὐτῶν ἀναλόγως ἐκ τῶν ,β΄ ὑπερπύρων.

ἵνα δὲ γένηται προχειρεστέρως ἡ τῶν πολλ(α)πλασιαζομένων καὶ διαμεριζομένων τούτων ζήτησις, σχίσον τὰ ,ατμϛ΄, ἅπερ εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ μεριστής, εἰς μέρη δύο καὶ γίνεται τὸ ἥμισυ χογ΄. σχίσον καὶ τὰ ,β΄ ὑπέρπυρα, ἅπερ ἐκέρδεσαν, εἰς μέρη δύο καὶ γίνεται τὸ ἥμισυ ὑπέρπυρα ,α΄. κράτει οὖν ἀντὶ τῶν ,β΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα ,α΄ καὶ ἀντὶ τῶν ,ατμϛ΄ τὸν μεριστὴν χογ΄. ὅπερ οὖν ἔχεις ποιῆσαι μετὰ τῶν ,β΄ ὑπερπύρων καὶ μετὰ τῶν ,ατμϛ΄ τὸν μεριστήν, ταὐτὸν ἔχεις ποιῆσαι προχειρεστέρως μετὰ τῶν ,α΄ ὑπερπύρων καὶ μετὰ τῶν χογ΄ τὸν μεριστήν.

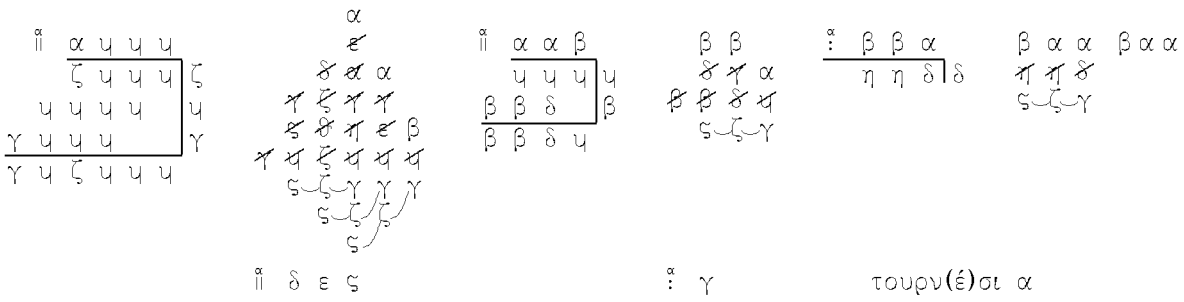
Πολλ(α)πλασίασον γὰρ ἀντὶ τῶν ,β΄ ὑπερπύρων τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν σϙβ΄ ἡμερῶν τε καὶ ὑπερπύρων τοῦ πρώτου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς β ϑ β ι ι υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν [μετὰ τῶν] χογ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμε-

---

10 ἕνωσον ... **iterum incipit solutio falsa** 14 δευτέρου] πρώτου **falso C** 21 τὰς τέσσαρες ὁμάδες] τὰς τέσσαραις ὁμάδαις **C**



ρισμὸς ὑπέρπυρα υλγ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα φϛα΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται κουκκιὰ ,ι,α΄ καὶ ωκ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν χογ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιζ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ τοθ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σ(ια) ,αφιϛ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν χογ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σ(ια) β΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ρο΄. οἰκειοῦται δὲ ὁ πρῶτος ταῦτα πάντα.



Πολλ(α)πλασίασον δὲ πάλιν τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν τζ΄ ἡμερῶν τε καὶ ὑπερπύρων τοῦ δευτέρου καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς γ υ ζ υ υ υ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν χογ΄ καὶ γίν(ε)ται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα υνϛ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ριβ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κ΄ καὶ γίνονται κουκκιὰ ,βσμ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν χογ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ γ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ σκα΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν δ΄ καὶ γίνονται τουρν(έ)σι(α) ωπδ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν χογ΄ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι α΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα σια΄. οἰκειοῦται δὲ ὁ δεύτερος ταῦτα πάντα.

Ὡσαύτως δὲ πολλ(α)πλασιάσας τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν τλδ΄ ἡμερῶν τε καὶ ὑπερπύρων τοῦ τρίτου καὶ διαμερίσας τὰ πολλ(α)πλασιαζόμενα μετὰ τῶν χογ΄, καθὼς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου οὕτως ἐποίησας, εὑρήσεις, ὅτι οἰκειοῦται ὁ τρίτος ἐκ τῶν ,β΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα υϛς΄ κουκκιὰ ε΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ τζάκισμα φνδ΄.

Ὡσαύτως δὲ πολλ(α)πλασιάσας τὰ ,α΄ ὑπέρπυρα μετὰ τῶν υιγ΄ ἡμερῶν τε καὶ ὑπερπύρων τοῦ τετάρτου καὶ διαμερίσας τὰ πολλ(α)πλασιαζόμενα μετὰ τῶν χογ΄

---

divisio tertia: α **C**

εὑρήσεις, ὅτι οἰκειοῦται ὁ τέταρτος ἐκ τῶν ,β΄ ὑπερπύρων ὑπέρπυρα χιγ΄ κουκκιὰ ιγ΄ τουρν(έ)σι α΄ καὶ τζάκισμα υια΄.

Θὲς οὖν τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν ἐν τάξει καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα καὶ γίνονται ὁμοῦ ,ατμς΄, ἅπερ ἐστὶ μεριστα‖ὶ β΄, ‖ τουτέστι τουρν(έ)σι(α) β΄· δὶς γὰρ χογ΄ ,ατμς΄ γίνον- f. 59r
ται. θὲς τὰ β΄ τουρν(έ)σι(α) εἰς τὰ τουρν(έ)σ(ια) καὶ ἕνωσον τὰ τουρν(έ)σ(ια) καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σ(ια) η΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ β΄. θὲς τὰ β΄ κουκκιὰ εἰς τὰ κουκκιὰ καὶ ἕνωσον τὰ κουκκιὰ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ μ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα β΄. θὲς τὰ β΄ ὑπέρπυρα εἰς τὰ ὑπέρπυρα καὶ ἕνωσον τὰ ὑπέρπυρα ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρξάμενος, ὡς εἰώθαμεν ποιεῖν ἐπὶ τῆς ὁμάδος, καὶ γίνονται ὁμοῦ πάλιν ὑπέρπυρα ,β΄ ὡς τὸ πρότερον.

ϙ	(α)‖	δ	γ	γ	(α)⁝	α	ζ	͵π	β	τ͵ζ	α	ζ	ι	
ϙ	(α)‖	δ	ε	ς	(α)⁝		γ	͵π	α	τ͵ζ	β	α	α	
ϙ	(α)‖	δ	ϑ	ς	(α)⁝		ε	͵π	β	τ͵ζ	ε	ε	δ	
ϙ	(α)‖	ς	α	γ	(α)⁝	α	γ	͵π	α	τ͵ζ	δ	α	α	
	(α)‖	β	ι	ι	ι		β		β		α	γ	δ	ς

καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτων ὅμοιον ζήτ(η)μαν καὶ διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως καὶ διὰ τῆς δευτέρας, ἧς εἶπο<μεν>, ὅτι καὶ ἄλλως γίνεται τοῦτο, ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον, καθ' ὃν τρόπον διὰ τῶν διαφόρων ὑποδειγμάτων, ὧν ὑπεθέμεθα, ὁρᾶται σαφέστερον ἡ τῶν δύο μεταχειρίσεων εὕρεσις.

ρζ Περὶ τοῦ ἐὰν μαργαριτάριν ἐξάγιον α΄ χρῄζῃ ὑπέρπυρα ζ΄, λίτραι β΄ οὐγγίαι δ΄ ἑξάγια ε΄ πόσα ὑπέρπυρα χρῄζοσι ἀναλόγως

Ἔ[ε]στω ὅτι πωλεῖ τις μαργαριτάριν, ἕκαστον ἑξάγιον εἰς ὑπέρπυρα ζ΄. βούλ(ει) δὲ ἀγοράσαι λίτρας β΄ οὐγγίας δ΄ ἑξάγια ε΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα χρῄζοσι ἀναλόγως αἱ β΄ λίτραι καὶ οὐγγίαι δ΄ καὶ ἑξάγια ε΄.

ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. αἱ β΄ λίτραι ἐστὶ οὐγγίαι κδ΄. ἕνωσον καὶ τὰς δ΄ οὐγγίας καὶ γίνονται οὐγγίαι κη΄. ἐπεὶ δὲ ἑκάστη οὐγγία ἐστὶ ἑξάγια ς΄, ς΄κις κη΄ γίνονται ρξη΄ ἑξάγια. πρόσθες καὶ τὰ ε΄ ἑξάγια καὶ γίνονται αἱ β΄ λίτραι καὶ οὐγγίαι δ΄ καὶ ἑξάγια ε΄ ὁμοῦ ἑξάγια ρογ΄. πολλ(α)πλασίασον τὰ ρογ΄ ἑξάγια μετὰ τῶν ζ΄ ὑπερπύρων, ὧν εἴπομεν, ὅτι χρῄζ(ει) ἑξάγιον α΄· ζ΄κις οὖν ρογ΄ γίνονται ,ασια΄. καὶ ἰδοὺ αἱ β΄ λίτραι οὐγγίαι δ΄ ἑξάγια ε΄ χρῄζ(ο)σι ὑπέρπυρα ,ασια΄.

Γ			
ς	α	ζ	γ
α	β	α	α ζ

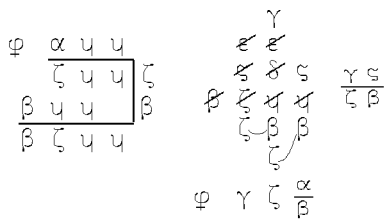
ρη Περὶ τοῦ ἐὰν μαργαριτάριν λίτρα α΄ χρῄζ(ῃ) φλουριὰ ρ΄, οὐγγίαι δ΄ ἑξάγια γ΄ πόσα χρῄζοσι ἀναλόγως

Ἔστω ὅτι ἔχεις μαργαριτάριν λίτρα α΄, ἥτις χρῄζ(ει) φλουριὰ ρ΄, ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα ζ΄, τουτέστι τὰ ρ΄ φλουριὰ ὑπέρπυρα ψ΄. βούλ<εται> δέ τις ἀγοράσαι ἐξ αὐτῆς τῆς α΄ λίτρας οὐγγίας δ΄ καὶ ἑξάγια γ΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα χρῄζ(ο)σι ἀναλόγως αἱ δ΄ οὐγγίαι καὶ ἑξάγια γ΄.

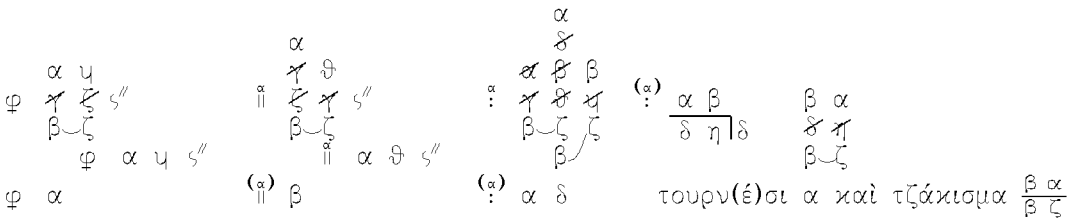
ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. λίτρα α΄ ἐστὶ οὐγγίαι ιβ΄, αἱ ιβ΄ δὲ οὐγγίαι ἐστὶ ἑξάγια οβ΄, αἱ δὲ δ΄ οὐγγίαι, ἃς ζητεῖ ἀγοράσαι, ἐστὶ ἑξάγια κδ΄. πρόσθες καὶ τὰ γ΄ ἑξάγια· ὁμοῦ ἑξάγια κζ΄. ἐὰν οὖν ἑξάγια οβ΄ χρῄζ(ω)σι φλουριὰ ρ΄, τὰ κζ΄ ἑξάγια πόσα φλουριὰ χρῄζ(ο)σι;

21.22 ἑξάγιον, ἑξάγια] **hic et aliubi** $\overset{\Gamma}{\varsigma}$ **vel** $\overset{\ddot{\Gamma}}{\varsigma}$ **C**

καὶ ὥσπερ εἰώθαμεν ποιεῖν ἐπὶ τῶν ὑπερπύρων διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν, οὕτως καὶ νῦν ποίησον. πολλ(α)πλασίασον γὰρ τὰ ρ΄ φλουριὰ μετὰ τῶν κζ΄ ἐξαγίων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς ,βψ΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν οβ΄ ἐξαγίων τῆς α΄ λίτρας καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λζ΄ς″. καὶ ἰδοὺ ἐὰν λίτρα α΄ χρῄζ(ῃ) φλουριὰ ρ΄, αἱ δ΄ οὐγγίαι καὶ ἐξάγια γ΄, ἅπερ ἐστὶ ἐξάγια κζ΄, χρῄζοσι φλουριὰ λζ΄ς″, τουτέστι φλουριὰ λζ΄ ὑπέρπυρα γ΄ κουκκιὰ ι΄· ἕκαστον γὰρ φλουρὶ χρῄζ(ει) ὑπέρπυρα ζ΄.



Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα χρῄζ(ει) ἕκαστον ἐξάγιον τῶν κζ΄, ὧν



εὗρες, ὅτι χρῄζ(ο)σι φλουριὰ λζ΄ς″.

μέρισον τὰ λζ΄ς″ φλουριὰ μετὰ τῶν κζ΄ ἐξαγίων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς φλουρὶ α΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα φλουριὰ ι΄ς″. ποίησον ταῦτα ὑπέρπυρα· ζ΄κις οὖν ι΄ς″ γίνονται ογ΄ς″ ὑπέρπυρα. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κζ΄ ἐξαγίων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ὑπέρπυρα β΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ὑπέρπυρα ιθ΄ς″. ποίησον ταῦτα κουκκιά· γίνονται δὲ τὰ ιθ΄ς″ ὑπέρπυρα κουκκιὰ τς΄. μέρισον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν κζ΄ ἐξαγίων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κουκκιὰ ιδ΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα κουκκιὰ ιβ΄. ποίησον ταῦτα τουρν(έ)σ(ια)· δ΄κις οὖν ιβ΄ γίνονται μη΄ τουρν(έ)σι(α). μέρισον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν κζ΄ ἐξαγίων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι α΄· ἀπομένει καὶ τζάκισμα ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου) $\frac{\kappa\alpha}{\kappa\zeta}$. καὶ ἰδοὺ ἐὰν τὰ κζ΄ ἐξάγια χρῄζ(ω)σι φλουριὰ λζ΄ς″, τὸ α΄ ἐξάγιον χρῄζ(ει) φλουρὶ α΄ ὑπέρπυρα β΄ κουκκιὰ ιδ΄ τουρν(έ)σι α΄ καὶ τζάκισμα ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου) $\frac{\kappa\alpha}{\kappa\zeta}$.

ρϑ

Περὶ τοῦ ἐὰν μαργαριτάρ(ι)ν λίτραι β΄ οὐγγίαι δ΄ ἐξάγια ε΄ κουκκιὰ ιε΄ χρῄζωσι φλουριὰ ρν΄ ὑπέρπυρα ε΄ κουκκιὰ δ΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄, πῶς ἔστι εἰδέναι, πόσα χρῄζ(ει) λίτρα α΄, οὐγγία α΄, ἐξάγιον α΄, κουκκὶ α΄

Ἔστω ὅτι ἔχεις μαργαριτάριν λίτρας β΄ οὐγγίας δ΄ ἐξάγια ε΄ κουκκιὰ ιε΄, ἃ καὶ καράτα λέγονται. ἀγόρασας δὲ ταῦτα, ἅπερ εἴπομεν, εἰς φλουριὰ ρν΄ ὑπέρπυρα ε΄ κουκκιὰ δ΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄. ζητεῖς δέ, πῶς ἔστι εἰδέναι, πόσα χρῄζ(ει) ἀναλόγως λίτρα α΄ καὶ πόσα οὐγγία α΄ καὶ πόσα ἐξάγιον α΄ καὶ πόσα καράτον α΄. ἕκαστον δὲ φλουρὶ χρῄζ(ει) ὑπέρπυρα ζ΄.

αι β	Γ Γ δ	Γ ε	καρ(ά)τα α ε
Γ Γ α β	Γ ς	καρ(ά)τα β δ	

ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. θὲς ἄνωθεν τὰς β΄ λίτρας, κάτωθεν δὲ α΄ λίτρας οὐγγίας, τουτέστι οὐγγίας ιβ΄. θὲς ἄνωθεν τὰς δ΄ οὐγγίας, κάτωθεν δὲ α΄ οὐγγίας

28 ἀγόρασας **pro** ἠγόρασας] ἀγορὰσες **C**

ἐξάγια, τουτέστι ἐξάγια ς΄. θὲς ἄνωθεν τὰ ε΄ ἐξάγια, κάτωθεν δὲ α΄ ἐξαγίου καράτα, τουτέστι καράτα κδ΄. θὲς ἄνωθεν καὶ τὰ ιε΄ καράτα. ζήτει οὖν, πόσα καράτα γίνονται αἱ β΄ λίτραι καὶ οὐγγίαι δ΄ καὶ ἐξάγια ε΄ καὶ καράτα ιε΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς ἄνωθεν β΄ λίτρας μετὰ τῶν κάτωθεν ιβ΄ οὐγγιῶν· δὶς οὖν ιβ΄ γίνονται κδ΄ οὐγγίαι. πρόσθες καὶ τὰς ἄνωθεν δ΄ οὐγγίας καὶ γίνονται ὁμοῦ οὐγγίαι κη΄. πολλ(α)πλασίασον ταύτας μετὰ τῶν κάτωθεν ἐξαγίων ς΄· ς΄κις οὖν κη΄ οὐγγίαι γίνονται ἐξάγια ρξη΄. πρόσθες καὶ τὰ ἄνωθεν ἐξάγια ε΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ἐξάγια ρογ΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κάτωθεν καράτων κδ΄· κδ΄κις οὖν ἐξάγια ρογ΄ γίνονται καράτα ,δρνβ΄. πρόσθες καὶ τὰ ἄνωθεν ιε΄ καράτα καὶ γίνονται ὁμοῦ καράτα ,δρξζ΄. καὶ ἰδοὺ αἱ β΄ λίτραι καὶ οὐγγίαι δ΄ καὶ ἐξάγια ε΄ καὶ καράτα ιε΄ γίνονται καράτα ,δρξζ΄. κράτει οὖν ταῦτα ἰδίως παρὰ σεαυτῷ.

ὡσαύτως δὲ κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον καὶ ἐπὶ τῆς τιμῆς τούτου ποίησον. θὲς γὰρ ἄνωθεν ‖ τὰ ρν΄ φλουριά, κάτωθεν δὲ ἑνὸς φλουριοῦ ὑπέρπυρα, τουτέστι ὑπέρπυρα ζ΄. θὲς ἄνωθεν τὰ ε΄ ὑπέρπυρα, κάτωθεν δὲ ἑνὸς ὑπερπύρου κουκκιά, τουτέστι κουκκιὰ κ΄. θὲς ἄνωθεν τὰ δ΄ κουκκιά, κάτωθεν δὲ ἑνὸς κουκκιοῦ τουρν(έ)σι(α) δ΄. θὲς ἄνωθεν καὶ τὰ γ΄ τουρν(έ)σι(α). ζήτει οὖν, πόσα τουρν(έ)σ(ια) γίνονται τὰ ρν΄ φλουριὰ καὶ ὑπέρπυρα ε΄ καὶ κουκκιὰ δ΄ καὶ τουρν(έ)σ(ια) γ΄. πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ ἄνωθεν ρν΄ φλουριὰ μετὰ τῶν κάτωθεν ζ΄ ὑπερπύρων· ζ΄κις οὖν φλουριὰ ρν΄ γίνονται ὑπέρπυρα ,αν΄. πρόσθες καὶ τὰ ἄνωθεν ὑπέρπυρα ε΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα ,ανε΄. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κάτωθεν κουκκιῶν κ΄· κ΄κις οὖν ὑπέρπυρα ,ανε΄ γίνονται κουκκιὰ ,κ,α΄ καὶ ρ΄ κουκκιά. πρόσθες καὶ τὰ ἄνωθεν κουκκιὰ δ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,κ,α΄ καὶ ρδ΄ κουκκιά. πολλ(α)πλασίασον ταῦτα μετὰ τῶν κάτωθεν τουρν(ε)σίων δ΄· δ΄κις οὖν κουκκιὰ ,κ,α΄ καὶ ρδ΄ κουκκιὰ γίνονται τουρν(έ)σι(α) ,π,δ΄ καὶ υιϛ΄ τουρν(έ)σ(ια). πρόσθες καὶ τὰ ἄνωθεν τουρν(έ)σι(α) γ΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σι(α) ,π,δ΄ καὶ υιθ΄ τουρν(έ)σι(α). καὶ ἰδοὺ τὰ ρν΄ φλουριὰ καὶ ὑπέρπυρα ε΄ καὶ κουκκιὰ δ΄ καὶ τουρν(έ)σ(ια) γ΄ γίνονται τουρν(έ)σ(ια) ,π,δ΄ καὶ υιθ΄ τουρν(έ)σι(α).

φ α ε υ	⸍ ε	⸎ δ	τουρν(έ)σι(α) γ
⸍ ζ	⸎ β υ	τουρν(έ)σι(α) δ	

μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ,δρξζ΄ καράτων τῶν β΄ λιτρῶν καὶ οὐγγιῶν δ΄ καὶ ἐξαγίων ε΄ καὶ καράτων ιε΄, ὧν ἰδίως κρατεῖν εἴπομεν, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κ΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\alpha\,\upsilon\,\zeta\,\vartheta}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$. ἕκαστον οὖν καράτον μαργαριτάριν τῶν ,δρξζ΄ χρῄζ(ει) τουρν(έ)σ(ια) β υ΄ καὶ τζάκισμα ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου) $\frac{\alpha\,\upsilon\,\zeta\,\vartheta}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$, τουτέστι κουκκιὰ ε΄ καὶ τζάκισμα ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου) $\frac{\alpha\,\upsilon\,\zeta\,\vartheta}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$.

α υ
β β ζ
τουρν(έ)σι(α) ~~η δ δ α~~ ϑ
καρ(ά)τα δ α ς ζ ζ
δ α ς
τουρν(έ)σι(α) β υ τζάκισμα $\frac{\alpha\,\upsilon\,\zeta\,\vartheta}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$
ἤγουν (α) ⸎ ε

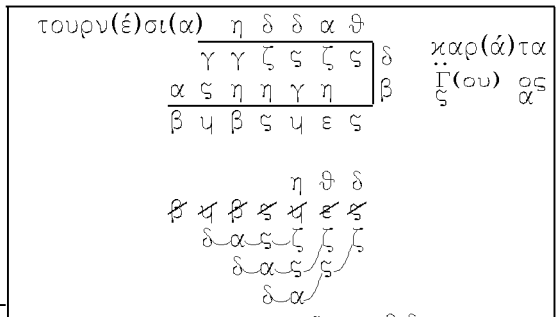
ζήτει οὖν ἐξάγιον α΄, πόσα τουρν(έ)σι(α) χρῄζ(ει). τὸ δὲ ἐξάγιον α΄ ἐστὶ καράτα κδ΄. ἐὰν οὖν τουρν(έ)σι(α) η δ δ α ϑ΄ χρῄζ(ω)σι καράτα δ α ς ζ΄, τὰ β δ΄ καράτα τοῦ α΄ ἐξαγίου πόσα χρῄζ(ο)σι;

καθὼς οὖν εἰώθαμεν ποιεῖν διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν, οὕτως καὶ νῦν ποίησον. πολλ(α)πλασίασον γὰρ τὰ η δ δ α ϑ΄ τουρν(έ)σι(α) μετὰ τῶν κδ΄ καράτων καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς β υ β ς υ ε ς΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν δ α ς ζ΄ καράτων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς δ η ς΄ καὶ τζάκισμα $\frac{\eta\,\vartheta\,\delta}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$. καὶ ἰδοὺ

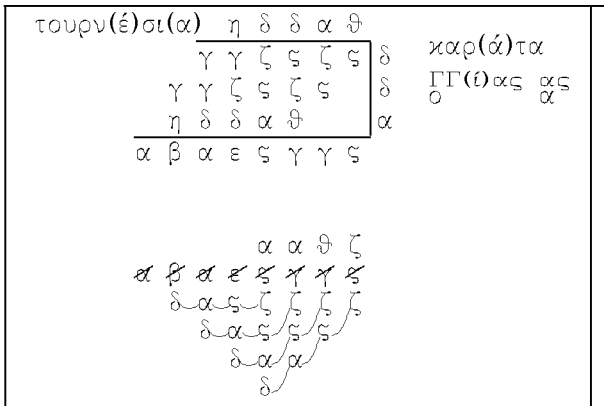
f. 59v

ἐξάγιον α΄ χρῄζ(ει) τουρν(έ)σι(α) δ η ς΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ς΄ κουκκὶ α΄ τουρν(έ)σι(α) β΄, καὶ τζάκισμα ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου) $\frac{\eta\,\vartheta\,\delta}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$.

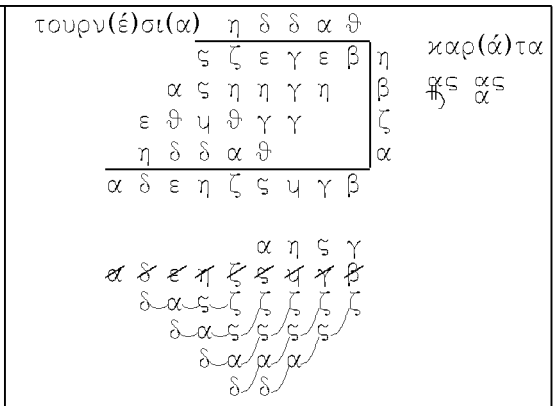
ς΄κις δὲ κδ΄ καράτα γίνονται ρμδ΄ καράτα· οὐγγία οὖν α΄ ἐστὶ καράτα ρμδ΄. κατὰ τὸν ὅμοιον οὖν τρόπον πολλ(α)πλασίασον τὰ η δ δ α ϑ΄ τουρν(έ)σι(α) μετὰ τῶν α δ δ΄ καράτων τῆς α΄ οὐγγίας



τουρν(έ)σι(α) β υ τζ α α υ ζ ϑ / δ α ς ζ ⁝ ε	καρ(ά)του ος α τιμή
τουρν(έ)σι(α) δ η ς τζ α η ϑ δ / δ α ς ζ ἅ ς ⁝ α τουρν(έ)σι(α) β	Γ(ίου) ος ς α τιμή



ΓΓ(ί)ας ας ο α τιμή	



	ας ας α τιμή

καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α β α ε ς γ γ ς΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν δ α ς ζ΄ καράτων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς β ϑ α ζ΄ καὶ τζάκισμα $\frac{\alpha\,\alpha\,\vartheta\,\zeta}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$.

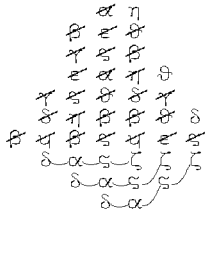
οὐγγία οὖν α΄ χρῄζ(ει) τουρν(έ)σι(α) β ϑ α ζ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα λς΄ κουκκιὰ ϑ΄ τουρν(έ)σ(ι) α΄, καὶ τζάκισμα ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου) $\frac{\alpha\,\alpha\,\vartheta\,\zeta}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$.

κδ΄κις δὲ ἐξάγια οβ΄ γίνονται καράτα ,αψκη΄· λίτρα οὖν α΄ ἐστὶ καράτα ,αψκη΄.

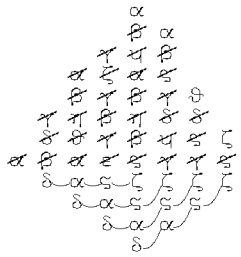
---

4 $\frac{\eta\,\vartheta\,\delta}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$] $\frac{\eta\,\delta\,\vartheta}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$ **perperam C**

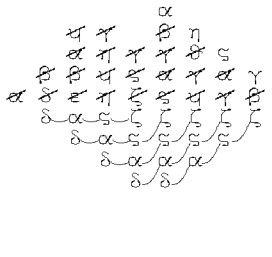
divisiones non integre scriptae hoc modo suppleri possunt:



τουρν(έ)σι(α) δ η ς
τζ $\frac{\eta\,\vartheta\,\delta}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$
ἅ ς ⁝ α τουρν(έ)σι(α) β



τουρν(έ)σι(α) β ϑ α ζ
τζ $\frac{\alpha\,\alpha\,\vartheta\,\zeta}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$
ἅ γ ς (α)⁝ ϑ τουρν(έ)σ(ι) α



τουρν(έ)σι(α) γ ε υ υ ζ
τζ $\frac{\alpha\,\eta\,\varsigma\,\gamma}{\delta\,\alpha\,\varsigma\,\zeta}$
ἅ δ γ ζ (α)⁝ α α τουρν(έ)σ(ια) γ

κατὰ τὸν ὅμοιον οὖν τρόπον πολλ(α)πλασίασον τὰ η δ δ α ϑ′ τουρν(έ)σι(α) μετὰ τῶν α ζ β η′ καράτων τῆς α′ λίτρας καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλ(α)πλασιασμὸς α δ ε η ζ ϛ ɥ γ β′. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν δ α ϛ ζ′ καράτων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς γ ε ɥ ɥ ζ′ καὶ τζάκισμα $\frac{\alpha\ \eta\ \varsigma\ \gamma}{\delta\ \alpha\ \varsigma\ \zeta}$. λίτρα οὖν α′ χρῄζ(ει) τουρν(έ)σι(α) γ ε ɥ ɥ ζ′, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα υλζ′ κουκκιὰ ια′ τουρν(έ)σι(α) γ′, καὶ τζάκισμα ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου) $\frac{\alpha\ \eta\ \varsigma\ \gamma}{\delta\ \alpha\ \varsigma\ \zeta}$. καὶ ἰδοὺ εὗρες, πόσα ὑπέρπυρα καὶ πόσα κουκκιὰ καὶ πόσα τουρν(έ)σ(ια) καὶ πόσα τζακίσματα οἰκειοῦται καράτον α′ ἑξάγιον α′ οὐγγία α′ καὶ λίτρα α′.

ἐὰν δὲ ζητήσῃς πρῶτον μὲν τῆς α′ λίτρας τὴν τιμήν, ἔπειτα δὲ τῆς α′ οὐγγίας τὴν τιμήν, εἶθ᾽ οὕτως τοῦ α′ ἑξαγίου τὴν τιμὴν καὶ ἀκολούθως τοῦ α′ καράτου τὴν τιμήν, κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον εὑρήσεις τὴν τιμὴν ἑκάστου τούτων ἀπὸ τῆς λίτρας ἀρξάμενος – ὥσπερ νῦν ἀπὸ τοῦ καράτου μᾶλλον ἀρξάμενος καὶ οὐκ ἀπὸ τῆς λίτρας.

ἐὰν δὲ ζητῇς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα χρῄζ(ο)σι ὁμοῦ καράτον α′ καὶ ἑξάγιον α′ καὶ οὐγγία α′ καὶ λίτρα α′· θὲς τὴν τιμὴν τούτων ἐν τάξει καὶ ἕνωσον τὰ τζακίσματα καὶ γίνονται ὁμοῦ ε ɥ γ γ′.

καρ(ά)τον	α					$\overset{(\alpha)}{\vdots}$	ε	ͱ	ɥ	τζ$^{\alpha}$	α	ɥ	ζ	ϑ
Γ ς	α	‖		ς		$\overset{(\iota)}{\vdots}$	α	ͱ	β	τζ$^{\alpha}$		η	ϑ	δ
ΓΓ ο	α	‖		γ	ς	$\overset{(\alpha)}{\vdots}$	ϑ	ͱ	α	τζ$^{(\alpha)}$	α	α	ϑ	ζ
α ℏ	α	‖	δ	γ	ζ	$\overset{(\alpha)}{\vdots}$	α	α	ͱ	γ	τζ$^{\alpha}$	α	η	ϛ	γ
		$\overset{(\alpha)}{\|}$	δ	η	ɥ	$\overset{(\iota)}{\vdots}$	α	α καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$				ε	ɥ	γ	γ
		$\overset{(\alpha)}{\|}$	δ	η	ɥ	⋮	ζ	ͱ	γ	καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$					

μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν δ α ϛ ζ′ καράτων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς α′ καὶ τζά<κισμα> $\frac{\eta\ \varsigma\ \varsigma}{\delta\ \alpha\ \varsigma\ \zeta}$, τουτέστι τουρν(έ)σι α′ καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἔγγιστα ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου). ἕνωσον μετὰ τῶν τουρν(ε)σ(ίων) τὸ α′ τουρν(έ)σι καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἔγγιστα καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σι(α) ζ′ καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, ἅπερ ἐστὶ κουκκὶ α′ τουρν(έ)σι(α) γ′ καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἔγγιστα ἑνὸς τουρν(ε)σ(ίου). ἕνωσον τὸ α′ κουκκὶ μετὰ τῶν κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ κζ′, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρον α′ κουκκιὰ ζ′. ἕνωσον τὸ α′ ὑπέρπυρον μετὰ τῶν ὑπερπύρων καὶ ‖ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα υπ′. καὶ ἰδοὺ λίτρα α′ οὐγγία α′ ἑξάγιον α′ καράτον α′ χρῄζ(ο)σι ὑπέρπυρα υπ′ κουκκιὰ ζ′ τουρν(έ)σι(α) γ′ καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἑνὸς τουρν(ε)σί(ου) ἔγγιστα. f. 60^{r}

ἐὰν δὲ ζητῇς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα χρῄζοσι ἰδίως αἱ β′ λίτραι καὶ πόσα αἱ δ′ οὐγγίαι καὶ πόσα τὰ ε′ ἑξάγια καὶ πόσα τὰ ιε′ καράτα, ἔχεις καὶ τοῦτο εἰδέναι διὰ τῆς μεταχειρίσεως τοῦ διὰ τῶν τριῶν, καθὼς εὗρες καὶ τὴν α′ λίτραν καὶ οὐγγίαν α′ καὶ ἑξάγιον α′.

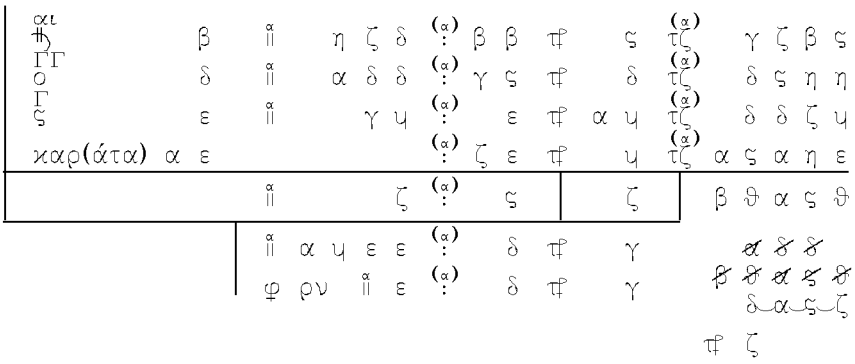
ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι καὶ διὰ τῆς τολέτας προχειρότατα.

Θὲς ἄνωθεν μὲν ἀκολούθως λίτρας α′ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ καὶ τουρν(έ)σι(α) καὶ τζακίσματα. ὡσαύτως θὲς κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν καὶ οὐγγίας α′ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ καὶ τουρν(έ)σ(ια) καὶ τζακίσματα. ὁμοίως κατωτέρω

α ℏ	α	‖	δ	γ	ζ	$\overset{(\alpha)}{\vdots}$	α	α	ͱ	γ	τζ$^{(\alpha)}$	α	η	ϛ	γ
ΓΓ ο	α	‖		γ	ς	$\overset{(\alpha)}{\vdots}$	ϑ	ͱ	α	τζ$^{(\alpha)}$	α	α	ϑ	ζ
Γ ς	α	‖			ς	$\overset{(\iota)}{\vdots}$	α	ͱ	β	τζ$^{(\alpha)}$		η	ϑ	δ
καρ(ά)τ(ον)	α					$\overset{(\alpha)}{\vdots}$	ε	ͱ	ɥ	τζ$^{(\alpha)}$	α	ɥ	ζ	ϑ

---

in priore figura: ⋮ ζ] ⋮ ϛ **falso C item** 26/27 κουκκιὰ κζ′ ... κουκκιὰ ζ′] ⋮ κϛ ... ⋮ ϛ **falso C item** 29 κουκκιὰ ζ′] ⋮ ϛ **falso C** 33 τοῦ] **sic C; auctor** τοῦ κανόνος **pro** τῆς μεταχειρίσεως **scripsisse putat – cf. p. 167, l. 43.**



θὲς ἐξαγίου α΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ καὶ τουρν(έ)σι(α) καὶ τζακίσματα. κατωτέρω δὲ τούτων θὲς καρ(ά)του α΄ κουκκιὰ καὶ τουρν(έ)σ(ια) καὶ τζακίσματα. ἔμπροσθεν δὲ κατ᾽ εὐθεῖαν ἑκάστης τάξεως θὲς τὰς β΄ λίτρας, ἃς ζητεῖς εἰδέναι, πόσα χρῄζ(ο)σι, ὡσαύτως καὶ τὰς δ΄ οὐγγίας καὶ τὰ ε΄ ἐξάγια καὶ τὰ ιε΄ καράτα.

πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς β΄ λίτρας μετὰ τῆς α΄ λίτρας τὰ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ καὶ τουρν(έ)σ(ια) καὶ τζακίσματα. δὶς οὖν ὑπέρπυρα δ γ ζ΄ γίνονται ὑπέρπυρα η ζ δ΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν τῶν β΄ λιτρῶν. δὶς δὲ κουκκιὰ α α΄ γίνονται κουκκιὰ β β΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν τῶν η ζ δ΄ ὑπερπύρων. δὶς δὲ τουρν(έ)σι(α) γ΄ γίνονται τουρν(έ)σι(α) ς΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν τῶν η ζ δ΄ ὑπερπύρων καὶ β β΄ κουκκιῶν. δὶς δὲ τζα<κίσματα> α η ς γ΄ γίνονται τζα<κίσματα> γ ζ β ς΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν τῶν ὑπερπύρων καὶ κουκκιῶν καὶ τουρν(ε)σί(ων). καὶ ἰδοὺ β΄ λίτραι χρῄζ(ο)σι ταῦτα, ἅπερ ἀκολούθως ἐξέθηκας.

πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰς δ΄ οὐγγίας μετὰ τῆς α΄ οὐγγίας τὰ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ καὶ τουρν(έ)σι(α) καὶ τζακίσματα. δ΄κις οὖν ὑπέρπυρα γ ς΄ γίνονται ὑπέρπυρα α δ δ΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν τῶν δ΄ οὐγγιῶν. δ΄κις δὲ κουκκιὰ θ΄ γίνονται κουκκιὰ γ ς΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν τῶν α δ δ΄ ὑπερπύρων. δ΄κις δὲ τουρν(έ)σι α΄ γίνονται τουρν(έ)σι(α) δ΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν. δ΄κις δὲ τζα<κίσματα> α α θ ζ΄ γίνονται τζα<κίσματα> δ ζ η η΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν. αἱ δ΄ οὖν οὐγγίαι χρῄζ(ο)σι ταῦτα, ἅπερ ἀκολούθως ἐξέθηκας.

πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ ε΄ ἐξάγια μετὰ τοῦ α΄ ἐξαγίου τὰ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ καὶ τουρν(έ)σι(α) καὶ τζακίσματα. ε΄κις οὖν ὑπέρπυρα ς΄ γίνονται ὑπέρπυρα γ μ΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν τῶν ε΄ ἐξαγίων. ε΄κις δὲ κουκκὶ α΄ γίνονται κουκκιὰ ε΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν. ε΄κις δὲ τουρν(έ)σι(α) β΄ γίνονται τουρν(έ)σι(α) α μ΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν. ε΄κις δὲ τζάκισμα η θ δ΄ γίνονται τζάκισμα δ δ ζ μ΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν. τὰ ε΄ οὖν ἐξάγια χρῄζ(ο)σι ταῦτα, ἅπερ ἀκολούθως ἐξέθηκας.

πολλ(α)πλασίασον δὲ καὶ τὰ α ε΄ καράτα μετὰ τῶν ε΄ κουκκιῶν τοῦ α΄ καράτου. α ε΄κις οὖν κουκκιὰ ε΄ γίνονται κουκκιὰ ζ ε΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν τῶν α ε΄ καράτων εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν. α ε΄κις δὲ τζάκισμα α μ ζ θ΄ γίνονται τζάκισμα α ς α η ε΄· θὲς ταῦτα ἔμπροσθεν εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον αὐτῶν. τὰ α ε΄ οὖν καράτα χρῄζ(ο)σι ταῦτα, ἅπερ ἀκολούθως ἐξέθηκας.

ἕνωσον δὲ τὰ τζακίσματα αὐτῶν πάντων καὶ γίνονται ὁμοῦ τζακίσματα β θ α ς θ΄.

---

10 γ ζ β ς΄] γ ζ ς β **falso C** 26 γίνονται τζάκισμα] **formae singularis et pluralis interdum promiscue adhibentur C**

μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν δ α ς ζ΄ καράτων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς τουρν(έ)σι(α) ζ΄. θὲς ταῦτα εἰς τὰ τουρν(έ)σι(α) καὶ ἕνωσον τὰ τουρν(έ)σι(α) καὶ γίνονται ὁμοῦ τουρν(έ)σ(ια) β ζ΄, ἅπερ ἐστὶ κουκκιὰ ς΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄. θὲς τὰ ς΄ κουκκιὰ εἰς τὰ κουκκιὰ καὶ ἕνωσον τὰ κουκκιὰ αὐτῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ α δ δ΄, ἅπερ ἐστὶ ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ δ΄. θὲς τὰ ζ΄ ὑπέρπυρα εἰς τὰ ὑπέρπυρα καὶ ἕνωσον τὰ ὑπέρπυρα αὐτῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ ὑπέρπυρα α υ ε ε΄ κουκκιὰ δ΄ τουρν(έ)σ(ια) γ΄. ἐπεὶ δὲ ἕκαστον φλουρὶ τῶν ρν΄ εἴπομεν, ὅτι χρῄζ(ει) ὑπέρπυρα ζ΄ – ζ΄κις ρν΄ γίνονται α υ ε υ΄ –, ἀπομένοσι καὶ ὑπέρπυρα ε΄ κουκκιὰ δ΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄. καὶ ἰδού, καθὼς εἴπομεν, ὅτι αἱ β΄ λίτραι καὶ οὐγγίαι δ΄ καὶ ἐξάγια ε΄ καὶ καράτα α ε΄ χρῄζ(ο)σι φλουριὰ ρν΄ καὶ ὑπέρπυρα ε΄ καὶ κουκκιὰ δ΄ καὶ τουρν(έ)σι(α) γ΄, οὕτως καὶ νῦν διὰ τῆς τολέτας εὗρες, καὶ πόσα ὑπέρπυρα χρῄζ(ει) ἑκάστη τάξις αὐτῶν ἰδίως καὶ πόσα ὁμοῦ. ἑνώσας γὰρ τὰ ὑπέρπυρα αὐτῶν πάντων καὶ τὰ κουκκιὰ καὶ τὰ τουρν(έ)σ(ια) καὶ τὰ τζακίσματα ἐγένοντο πάλιν φλουριὰ ρν΄ ὑπέρπυρα ε΄ κουκκιὰ δ΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄.

καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

ὡσαύτως δὲ καὶ ὅσας λίτρας καὶ οὐγγίας καὶ ἐξάγια καὶ καράτα ζητεῖς εἰδέναι, πόσα ὑπέρπυρα χρῄζ(ο)σι, ἔχεις εἰδέναι ταύτας καὶ διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν καὶ διὰ τῆς τολέτας. ὥσπερ γὰρ νῦν διὰ τῆς τολέτας εὗρες ἀπὸ τῆς α΄ λίτρας τὴν τιμὴν τῶν β΄ λιτρῶν καὶ ἀπὸ τῆς α΄ οὐγγίας τῶν δ΄ οὐγγιῶν καὶ ἀπὸ τοῦ α΄ ἐξαγίου τῶν ε΄ ἐξαγίων καὶ ἀπὸ τοῦ α΄ καράτου τῶν α ε΄ καράτων, οὕτως καὶ ἀπὸ τοῦ α΄ καράτου, ὅπερ χρῄζ(ει) κουκκιὰ ε΄ τουρν(έ)σι υ΄ τζάκισμα α υ ζ θ΄, πολλ(α)πλασιάσας ταῦτα μετὰ τῶν β δ΄ καράτων τοῦ α΄ ἐξαγίου εὑρήσεις, ὅτι τὰ β δ΄ καράτα, ἅπερ ἐστὶ ἐξάγιον α΄, πολλ(α)πλασιαζόμενα μετὰ τοῦ α΄ καράτου τὰ ε΄ κουκκιὰ τουρν(έ)σι υ΄ τζάκισμα α υ ζ θ΄ γίνονται ὑπέρπυρα ς΄ κουκκὶ α΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ τζάκισμα η ϑ δ΄, καθὼς οὕτως εὗρες καὶ διὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν. πολλ(α)πλασιάσας δὲ τὰ ς΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκὶ α΄ τουρν(έ)σ(ια) β΄ καὶ τζάκισμα η ϑ δ΄ τοῦ α΄ ἐξαγίου μετὰ τῶν ς΄ ἐξαγίων τῆς α΄ οὐγγίας εὑρήσεις, ὅτι τὰ ς΄ ἐξάγια, ἅπερ ἐστὶ οὐγγία α΄, πολλ(α)πλασιαζόμενα μετὰ τῆς α΄ οὐγγίας τὰ ς΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκὶ α΄ τουρν(έ)σι(α) β΄ καὶ τζάκισμα η ϑ δ΄ γίνονται ὑπέρπυρα γ ς΄ κουκκιὰ ϑ΄ τουρν(έ)σι α΄ καὶ τζάκισμα α α ϑ ζ΄, καθὼς οὕτως εὗρες καὶ διὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν. πολλ(α)πλασιάσας δὲ τὰ γ ς΄ ὑπέρπυρα καὶ κουκκιὰ ϑ΄ καὶ τουρν(έ)σ(ι) α΄ καὶ τζάκισμα α α ϑ ζ΄ τῆς α΄ οὐγγίας μετὰ τῶν α β΄ οὐγγιῶν τῆς α΄ λίτρας εὑρήσεις, ὅτι αἱ α β΄ οὐγγίαι, ἅπερ ἐστὶ λίτρα α΄, πολλ(α)πλασιαζόμεναι μετὰ τῆς α΄ οὐγγίας τὰ γ ς΄ ὑπέρπυρα κουκκιὰ ϑ΄ τουρν(έ)σι α΄ τζάκισμα α α ϑ ζ΄ γίνονται ὑπέρπυρα δ γ ζ΄ κουκκιὰ α α΄ τουρν(έ)σι(α) γ΄ καὶ τζάκισμα α η ς γ΄, καθὼς οὕτως εὗρες καὶ διὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν.

κἄντε οὖν διὰ τῆς πρώτης || μεταχειρίσεως τῆς διὰ τῶν τριῶν κἄντε διὰ τῆς δευτέρας μεταχειρίσεως τῆς τολέτας ζητῇς εἰδέναι ἐξαγίων καὶ οὐγγιῶν καὶ λίτρας τιμήν, ὅσον ἂν ἔχῃς εἰπεῖν, εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον καὶ μετὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως καὶ μετὰ τῆς δευτέρας. **f. 60^{v}**

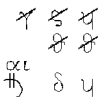
19/20 ἀπὸ τῆς α΄ οὐγγίας τῶν δ΄ οὐγγιῶν κτλ.] **sc.** ἀπὸ τῆς α΄ οὐγγίας τὴν τιμὴν τῶν δ΄ οὐγγιῶν **etc.** 25 η ϑ δ΄] η δ ϑ **falso C**

ρι **Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι, πόσας λίτρας χάλκωμαν χρὴ προσθεῖναι ἐπὶ τῶν λ΄ λιτρῶν καθαρὸν ἀσήμιν πρὸς τὸ γενέσθαι ἑκάστη λίτρα οὐγγιῶν θ΄, ἥτις ἐστὶ οὐγγιῶν ιβ΄.**

Τὸ καθαρότατον ἀσήμιν, ὅπερ παρὰ Λατίνοις φίνον λέγεται, ὡς ἂν εἴπῃ τις τέλειον – τοῦτο γὰρ φίνον δηλοῖ –, ἐστὶ οὐγγιῶν ιβ΄, ὥσπερ τὸ φίνον καὶ τέλειον μάλαγμά ἐστι κουκκιῶν κδ΄.

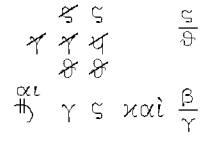
Ἔστω τοίνυν, ὅτι ἔχεις λ΄ λίτρας ἀσήμιν καθαρόν τε καὶ τέλειον, ἑκάστη λίτρα οὐγγιῶν ιβ΄. βούλει δὲ ποιῆσαι τὴν τελείαν καὶ καθαροτάτην λίτραν τῶν ιβ΄ οὐγγιῶν οὐγγιῶν θ΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσας λίτρας χάλκωμαν ἔχεις προσθεῖναι, ὅπερ χρυσοχ(ο)ϊκῶς ἐπιβολὴ λέγεται, πρὸς τὸ γενέσθαι αἱ λ΄ λίτραι – τὸ καθαρότατον ἀσήμιν, ὅπερ ἔχεις – ἑκάστη λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν θ΄, ἥτις – ὡς εἴπομεν – ἐστὶ ιβ΄, καὶ ὅτι ἐπιπροσθέντος τῆς ἐπιβολῆς τοῦ χαλκώματος πόσαι λίτραι πλεῖο γενήσονται αἱ λ΄ λίτραι τὸ καθαρότατον ἀσήμιν καὶ τέλειον, ὅπερ ἔχεις.

ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι οὕτως. ποίησον τὰς λ΄ λίτρας οὐγγίας· ιβ΄κις οὖν λ΄ γίνονται τξ΄ οὐγγίαι. μέρισον τὰς τξ΄ οὐγγίας μετὰ τῶν θ΄ οὐγγιῶν, ὧν ζητεῖς γενέσθαι ἑκάστη λίτρα, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς μ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, ὅτι αἱ λ΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν οὖσαι ιβ΄ γενομένη ἑκάστη λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν θ΄ μετὰ τῆς ἐπιβολῆς τοῦ χαλκώματος γίνονται ὁμοῦ λίτραι μ΄. ἄφελε τὰς λ΄ λίτρας ἐκ τῶν μ΄ καὶ ἀπομένουσι λίτραι ι΄. ι΄ οὖν λίτρας χάλκωμαν ἔχεις προσθεῖναι ἐπιβολὴν πρὸς τὸ ποιῆσαι τὴν τῶν ιβ΄ οὐγγιῶν λίτρα(ν) οὐγγιῶν θ΄ – ὁμοῦ δὲ ὅλον μετὰ τῆς ἐπιβολῆς λίτραι μ΄.



ἡ δὲ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον, ἐστὶ αὕτη. ἑκάστη λίτρα τῶν μ΄ ἐστὶ ἀνὰ οὐγγιῶν θ΄, ὡς ἐζήτησας ποιῆσαι. θ΄κις οὖν μ΄ γίνονται τξ΄ οὐγγίαι, καθὼς εἴπομεν, ὅτι αἱ λ΄ λίτραι ἔχουσι ἀσήμιν οὐγγίας τξ΄.

Ἕτερον τούτου ὅμοιον. Ἔστω ὅτι οὐκ εἰσὶ αἱ λ΄ λίτραι ἀσήμιν τέλειον – ἑκάστη λίτρα οὐγγιῶν ιβ΄, ὡς εἴπομεν –, ἀλλ᾽ ἐστὶ ἑκάστη λίτρα οὐγγιῶν ια΄. βούλ(ει) δὲ ποιῆσαι ἑκάστην λίτραν ἀνὰ οὐγγιῶν θ΄. ἐπεὶ οὖν ἑκάστη λίτρα τῶν λ΄ ἔχει ἀσήμιν καθαρὸν οὐγγίας ια΄, ια΄κις λ΄ γίνονται τλ΄ οὐγγίαι ἀσήμιν καθαρόν. μέρισον τὰς τλ΄ οὐγγίας μετὰ τῶν θ΄ οὐγγιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ αἱ λ΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν ια΄ γενόμεναι ἀνὰ οὐγγιῶν θ΄ ἐπιπροσθέντος ἔτι καὶ τῆς ἐπιβολῆς τοῦ χαλκώματος γίνονται ὁμοῦ λίτραι λς΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ μιᾶς λίτρας, τουτέστι οὐγγίαι η΄. ἄφελε τὰς λ΄ λίτρας ἐκ τῶν λς΄ λιτρῶν καὶ η΄ οὐγγιῶν καὶ ἀπομένουσι λίτραι ς΄ καὶ οὐγγίαι η΄. ς΄ οὖν λίτρας καὶ οὐγγίας η΄ χάλκωμαν ἔχεις προσθεῖναι ἐπιβολὴν πρὸς τὸ ποιῆσαι τὴν τῶν ια΄ οὐγγιῶν λίτραν οὐγγιῶν θ΄ – ὁμοῦ δὲ ὅλον μετὰ τῆς ἐπιβολῆς λίτραι λς΄ καὶ οὐγγίαι η΄.



ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία. θ΄κις λς΄ γίνονται τκδ΄ οὐγγίαι, αἱ δὲ η΄ οὐγγίαι ἔχουσι ἀσήμιν καθαρὸν οὐγγίας ς΄. ἕνωσον καὶ ταύτας μετὰ τῶν τκδ΄ οὐγγιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ οὐγγίαι τλ΄, καθὼς εἴπομεν, ὅτι αἱ λ΄ λίτραι ἔχουσι ἀσήμιν καθαρὸν οὐγγίας τλ΄.

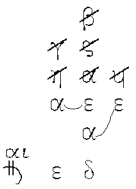
Ἕτερον τούτου ὅμοιον. Ἔστω ὅτι ἔχεις ἀσήμιν λίτρας μ΄ καὶ οὐγγίας ς΄, ἑκάστη λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄. βούλ(ει) δὲ ποιῆσαι ἑκάστην λίτραν ἀνὰ οὐγγιῶν ζ΄ς″. ι΄κις μ΄ γίνονται υ΄ οὐγγίαι καθαρὸν ἀσήμιν. πρόσθες καὶ ε΄ οὐγγίας, ἃς ἔχουσι αἱ ς΄

---

divisio prima: auctor υ exstinguere oblitus est.

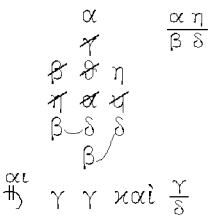
39 λίτραι] $\overset{\Gamma\Gamma\alpha\iota}{\sigma}$ falso C

οὐγγίαι, καὶ γίνονται ὁμοῦ οὐγγίαι υε΄ καθαρὸν ἀσήμιν, ἃς ἔχοσι αἱ μ΄ λίτραι καὶ οὐγγίαι ϛ΄. ποίησον ταύτας μισάς· γίνονται δὲ αἱ υε΄ οὐγγίαι μισαὶ ωι΄. ποίησον καὶ τὰς ζ΄ϛ″ οὐγγίας μισάς· γίνονται δὲ αἱ ζ΄ϛ″ οὐγγίαι μισαὶ ιε΄. μέρισον τὰ ωι΄ μισὰ μετὰ τῶν ιε΄ μισῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λίτραι νδ΄. γίνονται δὲ αἱ μ΄ϛ″ λίτραι τῶν ἀνὰ ι΄ οὐγγιῶν λίτραι νδ΄ ἀνὰ ζ΄ϛ″ οὐγγιῶν. ἄφελε τὰς μ΄ϛ″ λίτρας ἐκ τῶν νδ΄ λιτρῶν καὶ ἀπομένοσι λίτραι ιγ΄ϛ″. ιγ΄ οὖν ϛ″ λίτρας χάλκωμαν ἔχεις προσθεῖναι ἐπιβολὴν πρὸς τὸ ποιῆσαι τὰς μ΄ϛ″ λίτρας ἀνὰ οὐγγιῶν ζ΄ϛ″ – ὁμοῦ δὲ μετὰ τῆς ἐπιβολῆς τοῦ χαλκώματος λίτραι νδ΄.



ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία. αἱ νδ΄ λίτραι ἀνὰ ζ΄ϛ″ οὐγγιῶν· νδ΄κις ζ΄ϛ″ γίνονται οὐγγίαι υε΄, καθὼς εἴπομεν, ὅτι αἱ μ΄ λίτραι καὶ οὐγγίαι ϛ΄ ἔχοσι καθαρὸν ἀσήμιν οὐγγίας υε΄. καὶ αὕτη ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον.

Καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Ἔστω ὅτι τὰς νδ΄ λίτρας, αἵτινές εἰσι ἀνὰ οὐγγιῶν ζ΄ϛ″, βούλ(ει) καθαραὶ ταύτας, ὅπερ χρυσοχ(ο)ϊκῶς λαγαρίσαι λέγεται, πρὸς τὸ γενέσθαι φίνον, τουτέστι τέλειον, ἑκάστη λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν ιβ΄, ἥτις νῦν ἐστι ἀνὰ οὐγγιῶν ζ΄ϛ″. πολλ(α)πλασίασον τὰς νδ΄ λίτρας οὐ μετὰ τῶν ζ΄ϛ″ ἀκεραίων οὐγγιῶν, ἀλλὰ μετὰ τῶν ιε΄ μισῶν· ιε΄κις οὖν νδ΄ γίνονται ωι΄ μισά. ἔχοσι δὲ αἱ νδ΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν οὖσαι ζ΄ϛ″ οὐγγίας καθαρὸν ἀσήμιν μισὰς μὲν ωι΄, ἀκεραίας δὲ υε΄. ποίησον καὶ τὰς ιβ΄ οὐγγίας, ἃς ζητεῖς γενέσθαι ἑκάστη λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν ιβ΄, μισὰς καὶ γίνονται αἱ ιβ΄ οὐγγίαι μισαὶ κδ΄. μέρισον τὰ ωι΄ μετὰ τῶν κδ΄ μισῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λγ΄ καὶ $\frac{\text{γ}}{\text{δ}}$. γίνονται δὲ αἱ νδ΄ λίτραι τῶν ἀνὰ οὐγγιῶν ζ΄ϛ″ λίτραι λγ΄ καὶ $\frac{\text{γ}}{\text{δ}}$, ἑκάστη λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν ιβ΄. τὰ δὲ $\frac{\text{γ}}{\text{δ}}$ ἐστὶ οὐγγίαι θ΄. ἄφελε τὰς λγ΄ λίτρας καὶ $\frac{\text{γ}}{\text{δ}}$, τουτέστι τὰς λγ΄ λίτρας καὶ οὐγγίας θ΄, ἐκ τῶν νδ΄ λιτρῶν καὶ ἀπομένοσι λίτραι κ΄ καὶ οὐγγίαι γ΄. διεφθάρη δὲ εἰς τὸ χωνευτήριον χάλκωμαν λίτραι κ΄ καὶ οὐγγίαι γ΄.



ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία τῆς προτέρας. ιβ΄κις λγ΄ γίνονται οὐγγίαι τϛς΄. πρόσθες καὶ τὰ $\frac{\text{γ}}{\text{δ}}$, τουτέστι τὰς θ΄ οὐγγίας, καὶ γίνονται ὁμοῦ οὐγγίαι υε΄, καθὼς εἴπομεν, ὅτι αἱ νδ΄ λίτραι ἀνὰ οὐγγιῶν ζ΄ϛ″ ἐστὶ οὐγγίαι υε΄.

ρια Περὶ τοῦ πῶς τοῦτο καὶ ἐπὶ μαλάγματός ἐστι χρήσιμον

Ἔστω τοίνυν ὅτι ἔχεις μάλαγμαν ἐξάγια ρ΄. ἕκαστον οὖν ἐξάγιον εἴωθεν ἔχειν κουκκιὰ κδ΄, ἃ καὶ καράτα λέγονται. τὸ δὲ κδ΄ κουκκιῶν τὸ μάλαγμάν ἐστι τέλειον. βούλ(ει) δὲ ποιῆσαι τοῦτο χρυσίον, ὥστε γενέσθαι ἕκαστον ἐξάγιον κουκκιῶν κβ΄. ἡ || δὲ ἐπιβολὴ καὶ προσθήκη τοῦ μαλάγματος πρὸς τὸ γενέσθαι ἐλαττόνων κουκκιῶν τε καὶ καράτων πέφυκε γίνεσθαι μετὰ ἀσημιοῦ καὶ οὐ μετὰ χαλκώματος. ζητεῖς οὖν, πόσα ἐξάγια ἀσήμιν ἔχεις προσθεῖναι ἐπιβολὴν πρὸς τὸ γενέσθαι τὰ ρ΄ ἐξάγια τὰ ἀνὰ κουκκιῶν ὄντα κδ΄ ἕκαστον ἐξάγιον ἀνὰ κουκκιῶν κβ΄ καὶ πόσα ἐξάγια χρυσίον γενήσεται μετὰ καὶ τῆς προσθέσεως καὶ ἐπιβολῆς τοῦ ἀσημιοῦ. **f. 61^{r}**

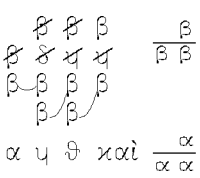
---

13 αἵτινές] ατιναι **C**

16 **in sinistro marg. fol. 60^{v} ad solutionem:** νδ΄κις ζ΄ϛ″ γίνονται υε΄ οὐγγίαι. μέρισον τὰς υε΄ οὐγγίας μετὰ τῶν ιβ΄ οὐγγιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων μερισμὸς λγ΄ καὶ $\frac{\text{γ}}{\text{δ}}$. οὐδὲ γὰρ χρεία ἐστὶ μερίσαι τὰ ωι΄ μισὰ μετὰ τῶν κδ΄ μισῶν.

26 χωνευτήριον] χονευθίριον **C**

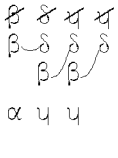
ζήτει οὖν πρῶτον, πόσα κουκκιὰ ἔχοσι καθαρὸν μάλαγμαν τὰ ρ΄ ἐξάγια. ἐπεὶ οὖν ἕκαστον ἐξάγιον ἔχει κουκκιὰ κδ΄, ρ΄κις κδ΄ γίνονται ,βυ΄ κουκκιά. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κβ΄ κουκκιῶν, ὧν ζητεῖς ποιῆσαι ἕκαστον ἐξάγιον ἀνὰ κουκκιῶν κβ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ρϑ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$ ἑνὸς ἐξαγίου. γίνονται δὲ τὰ ρ΄ ἐξάγια τὰ ἀνὰ κουκκιῶν ὄντα κδ΄ ἐξάγια ρϑ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$ ἑνὸς ἐξαγίου, ἕκαστον ἐξάγιον τῶν ρϑ΄ ἀνὰ κουκκιῶν κβ΄. ἄφελε τὰ ρ΄ ἐξάγια ἐκ τῶν ρϑ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$ καὶ ἀπομένοσι ἐξάγια ϑ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$ ἑνὸς ἐξαγίου. καὶ ἰδοὺ ἐξάγια ϑ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$ ἑνὸς ἐξαγίου ἀσήμιν ἐστί σοι χρεία προσθεῖναι ἐπιβολὴν πρὸς τὸ γενέσθαι τῶν κδ΄ κουκκιῶν κουκκιῶν κβ΄. ὁμοῦ δὲ μετὰ τῆς ἐπιβολῆς τοῦ ἀσημιοῦ γίνονται τὰ ρ΄ ἐξάγια ἐξάγια ρϑ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$.



ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία. κβ΄κις ρϑ΄ γίνονται κουκκιὰ ,βτϛη΄, τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$, ταὐτὸν γὰρ εἰπεῖν τὰ $\frac{\beta}{\kappa\beta}$, ἔχοσι κουκκιὰ β΄. πρόσθες καὶ ταῦτα ἐπὶ τῶν ,βτϛη΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,βυ΄, καθὼς εἴπομεν, ὅτι τὰ ρ΄ ἐξάγια ἀνὰ κδ΄ κουκκιῶν γίνονται κουκκιὰ ,βυ΄.

Καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Ἔστω ὅτι τὰ ρϑ΄ ἐξάγια καὶ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$ ἑνὸς ἐξαγίου, ἅτινά εἰσι ἀνὰ κουκκιῶν κβ΄, βούλ(ει) ποιῆσαι ταῦτα μάλαγμαν τέλειον κουκκιῶν κδ΄. ζητεῖς οὖν εἰδέναι, πόσα ἐξάγια φθαρήσονται ἐκ τῶν ρϑ΄ ἐξαγίων καὶ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$, ἅπερ νῦν ἐστι ἕκαστον ἐξάγιον ἀνὰ κουκκιῶν κβ΄, πρὸς τὸ γενέσθαι ἕκαστον ἐξάγιον ἀνὰ κουκκιῶν κδ΄, τουτέστι τέλειον μάλαγμαν.

ζήτει, πόσα κουκκιὰ ἔχοσι τὰ ρϑ΄ ἐξάγια καὶ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$. ἐπεὶ δὲ ἕκαστον ἐξάγιόν ἐστι κουκκιῶν κβ΄, κβ΄κις ρϑ΄ γίνονται κουκκιὰ ,βτϛη΄. τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$, ταὐτὸν δ᾽ εἰπεῖν τὰ $\frac{\beta}{\kappa\beta}$, ἔχοσι κουκκιὰ β΄. εἰ γὰρ τὸ ἐξάγιον ἔχει κουκκιὰ κβ΄, τὸ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$ τῶν κβ΄ κουκκιῶν ἐστι κουκκιὰ β΄· δὶς γὰρ ια΄ κβ΄ γίνονται. ἕνωσον καὶ τὰ β΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν ,βτϛη΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κουκκιὰ ,βυ΄ τὰ ρϑ΄ ἐξάγια καὶ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$. μέρισον τὰ ,βυ΄ κουκκιὰ μετὰ τῶν κδ΄ κουκκιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ρ΄. γίνονται δὲ τὰ ρϑ΄ ἐξάγια καὶ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$ τὰ ἀνὰ κουκκιῶν κβ΄ ἐξάγια ρ΄ ἀνὰ κουκκιῶν κδ΄. διεφθάρη δὲ εἰς τὸ χωνευτήριον ἡ ἐπιβολὴ τοῦ ἀσημιοῦ, ἥτις ἐστὶ ἐξάγια ϑ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\iota\alpha}$ ἑνὸς ἐξαγίου, καὶ ἀπέμειναν καθαρότατον καὶ τέλειον μάλαγμαν ἐξάγια ρ΄, ἕκαστον ἐξάγιον κουκκιῶν κδ΄.

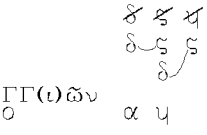


ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία. ρ΄κις κουκκιὰ κδ΄ γίνονται κουκκιὰ ,βυ΄.

ριβ Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι, πόσων οὐγγιῶν γενήσεται ἑκάστη λίτρα τῶν μ΄ λιτρῶν – τὸ ἀσήμιν, ὅπερ ἐστὶ ἑκάστη λίτρα τῶν μ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ια΄ϛ″, προστιθεμένου χαλκώματος ἐπιβολῆς λίτρας ϛ΄

Ἔστω ὅτι ἔχεις ἀσήμιν λίτρας μ΄, ἑκάστη λίτρα οὐγγιῶν ια΄ϛ″. βούλ(ει) δὲ προσθεῖναι ἐπιβολὴν χάλκωμαν λίτρας ϛ΄ ὥστε γενέσθαι ὁμοῦ λίτραι μϛ΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσων οὐγγιῶν γενήσεται ἑκάστη λίτρα τῶν μϛ΄.

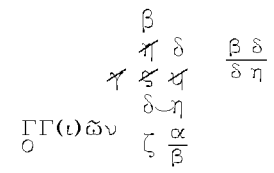
ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. αἱ μ΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν οὖσαι ια΄ϛ″ – μ΄κις ια΄ϛ″ γίνονται υξ΄ οὐγγίαι καθαρὸν ἀσήμιν. μέρισον ταύτας μετὰ τῶν μϛ΄ λιτρῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ι΄. ἑκάστη οὖν λίτρα τῶν μϛ΄ γίνεται οὐγγιῶν ι΄ μετὰ καὶ τῆς ἐπιβολῆς τοῦ χαλκώματος τῶν ϛ΄ λιτρῶν.



ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία. ι΄κις μϛ΄ γίνονται υξ΄ οὐγγίαι, καθὼς εἴπομεν, ὅτι αἱ μ΄ λίτραι ἀνὰ οὐγγιῶν ια΄ϛ″ γίνονται οὐγγίαι υξ΄.

Καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Ἔστω ὅτι ἔχεις ἀσήμιν λίτρας μη΄. βαλὼν δὲ τοῦτο εἰς χωνευτήριον διεφθάρη χάλκωμαν λίτραι ιη΄ καὶ ἐγένοντο αἱ μη΄ λίτραι καθαρότατον ἀσήμιν λίτραι λ΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσων οὐγγιῶν ἦν πρότερον, ὅτε ἦν λίτραι μη΄.

τὸ καθαρότατον ἀσήμιν ἐστὶ οὐγγιῶν ιβ΄. αἱ λ΄ οὖν λίτραι – ιβ΄κις λ΄ γίνονται οὐγγίαι τξ΄, οὐγγίαι καθαρότατον ἀσήμιν. μέρισον ταύτας μετὰ τῶν μη΄ λιτρῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ζ΄ϛ″. ἑκάστη οὖν λίτρα τῶν μη΄ ἦν οὐγγιῶν ζ΄ϛ″. διαφθαρὲν δὲ χάλκωμαν λίτραι ιη΄ ἀπέμειναν λίτραι λ΄ ἀσήμιν τέλειον, ἑκάστη λίτρα οὐγγιῶν ιβ΄.



ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία. πρόσθες λίτρας ιη΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ λίτραι μη΄. μη΄κις οὖν οὐγγίαι ζ΄ϛ″ γίνονται οὐγγίαι τξ΄, καθὼς εἴπομεν, ὅτι αἱ λ΄ λίτραι ἀνὰ οὐγγιῶν ιβ΄ γίνονται οὐγγίαι τξ΄.

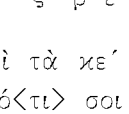
ὡσαύτως καὶ ἐπὶ μαλάγματος ἔχεις ταῦτα χρήσασθαι καὶ εἰδέναι, ἅπερ νῦν καὶ ἐπὶ τοῦ ἀσημιοῦ εἴπομεν.

ριγ Περὶ τοῦ χρυσίου τοῦ μὴ εἰδότος, πόσων κουκκιῶν ἦν. λαβὼν δὲ ἐξ αὐτοῦ ἐξάγια ε΄, προστεθείσης δὲ ἐπιβολῆς μάλαγμαν καθαρὸν ἐξάγια ι΄ ἐγένοντο ὁμοῦ ἐξάγια ιε΄ ἀνὰ κουκκιῶν ιη΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσων κουκκιῶν ἦν τὸ μὴ εἰδὸς χρυσίον.

Ἔστω ὅτι δέδωκέν τις πρό(ς) σε χάριν ἐνεχύρου ἐξάγια ρ΄ ἢ ὅσων ἂν εἴπῃς πλειόνων ἢ ἐλαττόνων ἐξαγίων ποσότητα. γέγονε δέ σοι χρεία ποιῆσαι ἔργον τι χρυσὸν ὡς ἐξαγίων ιε΄. ἔχεις δὲ μάλαγμαν τέλειον κουκκιῶν κδ΄ ἐξάγια ι΄, λείπονταί σοι καὶ ε΄ ἐξάγια. ἔλαβες δὲ τὰ ε΄ ταῦτα ἐξάγια, ἅπερ σοι λείπονται, ἐκ τῶν ρ΄ ἐξαγίων, ὧν κρατεῖς ἐνέχυρον, καὶ ἀπέμειναν ἐξάγια Ϲε΄. ἕνωσας δὲ τὰ ε΄ ἐξάγια, ἅπερ ἔλαβες ἐκ τῶν ρ΄ ἐξαγίων, μετὰ τῶν ι΄ ἐξαγίων, ὧν ἔχεις, καὶ ἐγένοντο ἐξάγια ιε΄, ἕκαστον ἐξάγιον τῶν ιε΄ ἀνὰ κουκκιῶν ιη΄. γενομένου δὲ τοῦ ἔργου, οὗ σοι γέγονε χρεία ποιῆσαι, ἀπώλεσας τὰ Ϲε΄ ἐξάγια, ἅπερ ἐκράτεις ἐνέχυρον. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσων κουκκιῶν ἦν ἕκαστον ἐξάγιον τῶν Ϲε΄, ὧν ἀπώλεσας, πρὸς τὸ ἀποδοῦναι τῷ ἔχοντι τὸ δίκαιον τίμημα.

ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. τὰ ι΄ ἐξάγια, ἅπερ ἕνωσας μετὰ τῶν ε΄, – τέλειον ὄν, ὡς εἴπομεν, – ἦν ἕκαστον ἐξάγιον κουκκιῶν κδ΄. ἐπεὶ οὖν τὰ ιε΄ ἐξάγια ἐγένοντο ἀνὰ κουκκιῶν ιη΄, τὰ ιη΄ πρὸς τὰ κδ΄ κουκκιά ἐστι $\frac{\gamma}{\delta}$. ιε΄κις οὖν $\frac{\gamma}{\delta}$ γίνονται $\frac{\mu\varepsilon}{\delta}$, ἅπερ ἐστὶ ἀκέραια ια΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$· ἔχοσι δὲ τὰ ιε΄ ἐξάγια μάλαγμαν καθαρὸν ἐξάγια ια΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ ἑνὸς ἐξαγίου. ἐπεὶ οὖν προσέθηκας μάλαγμαν τέλειον ἐξάγια ι΄, ἄφελε ταῦτα ἐκ τῶν ια΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ καὶ ἀπομένει ἐξάγιον α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ ἑνὸς ἐξαγίου. καὶ ἰδοὺ τὰ ε΄ ἐξάγια, ἅπερ ἔλαβες ἐκ τῶν ρ΄, εἶχον καθαρὸν μάλαγμαν ἐξάγιον α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ ἑνὸς ἐξαγίου.

νῦν δέ, ὥσπερ || εἰώθαμεν ἐπὶ τῶν ὑπερπύρων ποιεῖν διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν, οὕτως καὶ νῦν ποίησον. ἐὰν γὰρ τὰ ε΄ ἐξάγια γίνωνται ἐξάγιον α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$, τὰ ρ΄ ἐξάγια – πόσα ἐξάγια δεῖ ἔχειν; πολλ(α)πλασίασον τὰ ρ΄ ἐξάγια μετὰ τοῦ α΄ ἐξαγίου καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$· ρ΄κις οὖν ἐξάγιον α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ γίνονται ἐξάγια ρκε΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ε΄ ἐξαγίων, ὧν ἔλαβες ἐκ τῶν ρ΄, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κε΄. καὶ ἰδοὺ τὰ ρ΄ ἐξάγια εἶχον μάλαγμαν καθαρὸν ἐξάγια κε΄ καὶ οε΄ ἐξάγια ἐπιβολήν. ὥσπερ γὰρ τὸ α΄ ἐξάγιον καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ ἐστὶ τέταρτον μέρος τῶν ε΄ ἐξαγίων – δ΄κις γὰρ α΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ γίνονται ε΄ – οὕτως καὶ τὰ κε΄ ἐξάγιά ἐστι τέταρτον μέρος τῶν ρ΄ ἐξαγίων. ὀφείλεις δὲ ἀποδοῦναι τῷ δεδωκό<τι> σοι ἐξάγια ρ΄ ἐξάγια κε΄ καθαρὸν μάλαγμαν καὶ ἐπιβολ(ὴν) ἐξάγια οε΄, ὁμοῦ ἐξάγια ρ΄.



f. 61v

ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι αὕτη. τὰ α΄ ἑξάγια καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$, ὅπερ εὗρες, ὅτι εἶχον τὰ ε΄ ἑξάγια, ἐστὶ κουκκιὰ λ΄· τὸ γὰρ α΄ ἑξάγιόν ἐστι κουκκιὰ κδ΄, τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\delta}$ ἐστὶ κουκκιὰ ς΄, ὁμοῦ κουκκιὰ λ΄. ἕκαστον δὲ ἑξάγιον τῶν ε΄ ἦν κουκκιῶν ς΄· ε΄κις γὰρ ς΄ γίνονται λ΄. ἐπεὶ δὲ ἕκαστον ἑξάγιον τῶν ε΄ ἦν κουκκιῶν ς΄ καὶ ἕκαστον ἑξάγιον τῶν ρ΄ ἀνὰ κουκκιῶν ἦν ς΄, ρ΄κις οὖν κουκκιὰ ς΄ γίνονται κουκκιὰ χ΄. εἶχον δὲ τὰ ρ΄ ἑξάγια καθαρὸν μάλαγμαν κουκκιὰ χ΄. τὰ δὲ με΄ ἑξάγια, ἅπερ ἐστὶ μάλαγμαν τέλειον κουκκιῶν κδ΄, – με΄κις κουκκιὰ κδ΄ γίνονται καὶ ταῦτα κουκκιὰ χ΄.

ἔστι δὲ καὶ ἑτέρα ἀπόδειξις. τὰ ε΄ ἑξάγια, ἅπερ ἔλαβες, ἔχοσι κουκκιὰ λ΄, τὰ δὲ σὰ ι΄ ἑξάγια, ἐπεὶ καθαρὸν μάλαγμαν ἦν, ι΄κις κουκκιὰ κδ΄ γίνονται κουκκιὰ σμ΄. ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν λ΄ κουκκιῶν καὶ γίνονται τὰ ιε΄ ἑξάγια κουκκιὰ σο΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ιε΄ ἑξαγίων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιη΄. καὶ ἰδοὺ ἕκαστον ἑξάγιον τῶν ιε΄ ἐστὶ κουκκιῶν ιη΄, καθὼς εἴπομεν, ὅτι ἥνωσας τὰ ε΄ ἑξάγια, ἅπερ ἔλαβες ἐκ τῶν ρ΄, μετὰ τῶν ι΄ ἑξαγίων τῶν σῶν, ὅπερ ἦν τέλειον μάλαγμαν, καὶ ἐγένετο ἕκαστον ἑξάγιον τῶν ιε΄ ἀνὰ κουκκιῶν ιη΄.

μὴ μόνον δὲ ἐπὶ μαλάγματος, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ ἀσημιοῦ διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι ἀπὸ τοῦ μέρους τὸ ὅλον ἀσήμιν, πόσων οὐγγιῶν ἦν, καθὼς καὶ νῦν ἐπὶ τοῦ μαλάγματος δῆλον ἡμῖν γέγονε.

ριδ

Περὶ τῶν ν΄ λιτρῶν τὸ ἀσήμιν τοῦ ἔχοντος ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγίας ζ΄, πῶς ἔστι γενέσθαι ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄ ἐπιπροσθέντος ἐπιβολῆς ἀσημιοῦ τοῦ ἔχοντος ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας ἀνὰ οὐγγίας ια΄

Ἔστω ὅτι ἔχεις ἀσήμιν λίτρας ν΄, ὅπερ ἔχει ἑκάστη λίτρα καθαρὸν ἀσήμιν οὐγγίας ζ΄. βούλ(ει) δὲ ποιῆσαι τοῦτο ἔχειν ἑκάστη λίτρα καθαρὸν ἀσήμιν οὐγγίας ϑ΄ μετὰ ἐπιβολῆς ἑτέρου ἀσημιοῦ τοῦ ἔχοντος ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγίας ια΄. ζητεῖς οὖν εἰδέναι, πόσας λίτρας ἀσήμιν ἔχεις ἑνῶσαι τῶν ἀνὰ ια΄ οὐγγιῶν πρὸς τὸ γενέσθαι αἱ ν΄ λίτραι αἱ ἀνὰ ζ΄ οὐγγιῶν οὖσαι ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄.

ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. ζήτει πρῶτον, πόσαι οὐγγίαι ἀσήμιν λείπονται τὰς ν΄ λίτρας τὰς ἀνὰ ζ΄ οὐγγιῶν πρὸς τὸ γενέσθαι ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄· λείπονται δὲ τὰς ν΄ λίτρας οὐγγίας ρ΄ πρὸς τὸ γενέσθαι ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄. κράτει οὖν τὰς ρ΄ ταύτας οὐγγίας ἰδίως. ἔπειτα ζήτει τὴν πρὸς τὸ κρεῖττον διαφοράν, ἣν ἔχει τῶν ια΄ οὐγγιῶν, ὧν ἔχεις προσθεῖναι ἐπιβολήν, ἐκ τῶν ϑ΄ οὐγγιῶν, ὧν βούλ(ει) ποιῆσαι τὰς ν΄ λίτρας. ἔστι δὲ κρείττων τῶν ια΄ οὐγγιῶν ἐκ τῶν ϑ΄ οὐγγίας β΄. μέρισον τὰς ρ΄ οὐγγίας, ἃς ἰδίως κρατεῖς, μετὰ τῶν β΄ τούτων οὐγγιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ν΄· δὶς γὰρ ν΄ γίνονται ρ΄. ν΄ οὖν λίτρας ἀσήμιν ἔχεις προσθεῖναι ἐπιβολὴν τῶν ἀνὰ ια΄ οὐγγιῶν πρὸς τὸ γενέσθαι αἱ ν΄ λίτραι αἱ ἀνὰ ζ΄ οὐγγιῶν οὖσαι ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄. γίνονται δὲ ὁμοῦ λίτραι ρ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄.

ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι αὕτη. αἱ ν΄ λίτραι – ν΄κις οὐγγίαι ζ΄ γίνονται τν΄ οὐγγίαι καθαρὸν ἀσήμιν. αἱ δὲ λοιπαὶ ν΄ – ν΄κις οὐγγίαι ια΄ γίνονται φν΄ οὐγγίαι καθαρὸν ἀσήμιν. ἕνωσον ταύτας καὶ γίνονται ὁμοῦ ≫΄ οὐγγίαι καθαρὸν ἀσήμιν, ὅπερ ἔχοσι αἱ [ἐ] ρ΄ λίτραι. μέρισον τὰς ≫΄ οὐγγίας μετὰ τῶν ρ΄ λιτρῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ϑ΄. καὶ ἰδοὺ ἑκάστη λίτρα τῶν ρ΄ λιτρῶν ἐστι ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄, ὡς ἐζήτησας ποιῆσαι

---

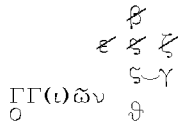
1 τὰ ... ὅπερ **sic C** 30.32 τῶν ια΄ οὐγγιῶν] **sc.** τὸ τῶν ια΄ οὐγγιῶν ἀσήμιν **divisio secunda:** ϑκϛ] ϑιι **C** 42 λίτραι] $\overset{\Gamma\Gamma\alpha}{\text{ο}}$ **falso C**

ἑκάστην λίτραν ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄.

Καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Ἔστω ὅτι ἔχεις ἀσήμιν λίτρας με΄, ἔχει δὲ ἑκάστη τούτων λίτρα καθαρὸν ἀσήμιν οὐγγίας ι΄. βούλ(ει) δὲ ποιῆσαι ταύτας τὰς με΄ λίτρας ἐλαττόνων οὐγγιῶν, ὥστε γενέσθαι ἑκάστη λίτρα οὐγγιῶν ϑ΄, μετὰ ἐπιβολῆς ἀσημιοῦ, ὅπερ ἔχει ἑκάστη λίτρα καθαρὸν ἀσήμιν οὐγγίας ς΄ς″. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσας λίτρας τῶν ἀνὰ ς΄ς″ οὐγγιῶν ἔχεις προσθεῖναι ἐπιβολὴν πρὸς τὸ γενέσθαι αἱ με΄ λίτραι αἱ ἀνὰ ι΄ οὐγγιῶν οὖσαι ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄.

αἱ με΄ δὲ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄ οὖσαι ἀνὰ ϑ΄ οὐγγιῶν γενόμεναι ἐλαττοῦνται οὐγγίας με΄· κράτει ταύτας ἰδίως. ἑκάστη δὲ λίτρα, ἣν ἔχεις προσθεῖναι ἐπιβολήν, ἥτις ἐστὶ οὐγγιῶν ς΄ς″, ἐστὶ χείρων τῶν ϑ΄ οὐγγιῶν, ὧν βούλ(ει) ποιῆσαι, οὐγγίας β΄ς″. μέρισον τὰς με΄ οὐγγίας, ἃς ἰδίως κρατεῖς, μετὰ τῶν β΄ς″ οὐγγιῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιη΄· ιη΄κις γὰρ β΄ς″ με΄ γίνονται. ιη΄ οὖν λίτρας ἀσήμιν ἔχεις προσθεῖναι ἐπιβολὴν ἀνὰ οὐγγιῶν ς΄ς″ πρὸς τὸ γενέσθαι αἱ με΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν οὖσαι ι΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄. γίνονται δὲ ὁμοῦ λίτραι ξγ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄, ὡς ἐζήτησας γενέσθαι αἱ με΄ λίτραι ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄.

ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία. με΄κις οὐγγίαι ι΄ γίνονται οὐγγίαι υν΄ καθαρὸν ἀσήμιν, ιη΄κις δὲ οὐγγίαι ς΄ς″ γίνονται οὐγγίαι ριζ΄ καθαρὸν ἀσήμιν. ἕνωσον τῶν ξγ΄ λιτρῶν τὰς οὐγγίας, τουτέστι τὰς υν΄ καὶ ροζ΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ οὐγγίαι φξζ΄. μέρισον ταύτας μετὰ τῶν ξγ΄ λιτρῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ϑ΄. καὶ ἰδοὺ ἑκάστη λίτρα γίνεται ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄, ὡς ἐζήτησας.



μὴ μόνον δὲ ἐπὶ ἀσημιοῦ γίνεται τοῦτο, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ χρυσίου ἐστὶ χρήσιμον. κατὰ γὰρ τὸν ὅμοιον τρόπον ἔχεις εἰδέναι, πόσα ἐξάγια μάλαγμαν ἔχεις ἑνῶσαι τῶν ἀνὰ κουκκιῶν κδ΄ πρὸς τὸ ποιῆσαι τῶν ις΄ κουκκιῶν τὸ ἐξάγιον γενέσθαι κουκκιῶν κβ΄, καὶ τὸ ἀνάπαλιν, πόσα ἐξάγια χρυσίον ἔχεις ἑνῶσαι τῶν ἀνὰ κουκκιῶν ις΄ – ἢ ὅσων ἂν εἴπῃς – πρὸς τὸ ποιῆσαι τῶν κδ΄ κουκκιῶν τὸ τέλειον μάλαγμαν ἢ τῶν κγ΄ κουκκιῶν γενέσθαι κουκκιῶν κβ΄. ὥσπερ γὰρ ἐπὶ τοῦ ἀσημιοῦ δῆλον ἡμῖν τοῦτο γέγονε, οὕτως καὶ ἐπὶ τοῦ μαλάγματος καὶ ἐπὶ τοῦ χρυσίου δῆλον ἡμῖν τοῦτο γενήσεται. ‖ f. 61/1r

ριε

Περὶ τῶν διαφόρων λιτρῶν τοῦ ἀσημιοῦ τῶν ἐχόντων ἑκάστη μὲν λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν ζ΄, ἑκάστη δὲ λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν η΄, ἑκάστη δὲ λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄, ἑκάστη δὲ λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄. ἑνωθέντων δὲ τούτων πάντων πῶς ἔστι εἰδέναι, ἑκάστη λίτρα πόσων οὐγγιῶν γίνεται;

Ἔστω ὅτι ἔχεις ἀσήμιν λίτρας μ΄, ἑκάστη λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν ζ΄. ἔχεις δὲ καὶ λίτρας λ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν η΄. ἔχεις δὲ καὶ λίτρας ξ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄. ἔχεις δὲ καὶ λίτρας ν΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄ – ὁμοῦ λίτραι ρπ΄. βούλ(ει) δὲ ἑνῶσαι ταύτας τὰς διαφόρους ἰδέας τῶν τεσσάρων τάξεων καὶ ποιῆσαι ἓν σῶμα λιτρῶν ρπ΄. οὕτω δὲ γενομένου ζητεῖς εἰδέναι, ἑκάστη λίτρα τῶν ρπ΄ πόσων οὐγγιῶν ἐστι.

αι μ	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ων ο	ζ	καθ(α)ρ(αὶ)	ΓΓ(ίαι) ο		σπ
αι λ	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ων ο	η	καθ(α)ρ(αὶ)	ΓΓ(ίαι) ο		σμ
αι ξ	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ων ο	ϑ	καθ(α)ρ(αὶ)	ΓΓ(ίαι) ο		φμ
αι ν	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ων ο	ι	καθ(α)ρ(αὶ)	ΓΓ(ίαι) ο		φ
αι ρπ				καθαραὶ	ΓΓ(ίαι) ο		,αφξ

---

6 με΄ λίτραι] μ αι falso C

ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. ζήτει, πόσας οὐγγίας καθαρὸν ἀσήμιν ἔχοσι αἱ [ἐ] ρπ΄ λίτραι, ἃς βούλ(ει) ἑνῶσαι. μ΄κις οὖν οὐγγίαι ζ΄ γίνονται οὐγγίαι σπ΄ καὶ λ΄κις οὐγγίαι η΄ γίνονται οὐγγίαι σμ΄. ὡσαύτως καὶ ξ΄κις οὐγγίαι ϑ΄ γίνονται οὐγγίαι φμ΄, ν΄κις δὲ οὐγγίαι ι΄ γίνονται οὐγγίαι φ΄. ἕνωσον ταύτας καὶ γίνονται ὁμοῦ οὐγγίαι ,αφξ΄. ἔχοσι δὲ αἱ [ἐ] ρπ΄ λίτραι καθαρὸν ἀσήμιν οὐγγίας ,αφξ΄. μέρισον ταύτας μετὰ τῶν ρπ΄ λιτρῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς η΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. καὶ ἰδοὺ ἑκάστη λίτρα τῶν ρπ΄ λιτρῶν ἔχει ἀσήμιν καθαρὸν οὐγγίας η΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ μιᾶς οὐγγίας, τουτέστι οὐγγίας η΄ καὶ ἐξάγια δ΄.

α ξ β ψ — α η ψ — η καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$; $\frac{\alpha\,\beta\,\psi}{\alpha\,\eta\,\psi}$

ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία τῶν προτέρων· ρπ΄κις οὐγγίαι η΄ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ γίνονται οὐγγίαι ,αφξ΄.

μὴ μόνον δὲ ἐπὶ ἀσημιοῦ τοῦτο γίνεται οὕτως, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ διαφόρων χρυσίων – ἕκαστον ἐξάγιον ἀνὰ κουκκιῶν κγ΄, ἕτερον δὲ ἀνὰ κουκκιῶν κβ΄, ἕτερον δὲ ἀνὰ κουκκιῶν κ΄, ἕτερον δὲ ἀνὰ κουκκιῶν ιη΄, ἕτερον δὲ ἀνὰ κουκκιῶν ις΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως. ἑνωθέντων τούτων πάντων καὶ ἓν σῶμα γενόμενον διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς, πόσων κουκκιῶν γίνεται ἕκαστον ἐξάγιον τοῦ ἑνωθέντος σώματος τῶν διαφόρων ἰδεῶν.

ρις

Περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι, πόσας λίτρας ἀσήμιν ἐφ᾽ ἑκάστης τάξεως τῶν ἀνὰ η΄ καὶ ϑ΄ καὶ ι΄ καὶ ια΄ οὐγγιῶν ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας ἔχεις ἑνῶσαι πρὸς τὸ ποιῆσαι λίτρας ξ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄ς″

Ἔστω ὅτι ἔχεις ἀσήμιν, ὅπερ ἐστὶ ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγιῶν η΄. ἔχεις δὲ καὶ

ος α σύντρ(ο)φος	ος β σύντρ(ο)φος	ος γ σύντρ(ο)φος		ος δ σύντρ(ο)φος
ΓΓ(ι)ῶν o η ΓΓί(α) o ς″	ΓΓ(ι)ῶν o ϑ ΓΓί(α) o ς″	ΓΓ(ι)ῶν o ι ΓΓί(α) o ς″	ΓΓ(ι)ῶν o ις″ αι ξ	ΓΓ(ι)ῶν o ια ΓΓ(ί)αι o δς″

ἕτερον ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγιῶν ϑ΄ καὶ ἕτερον ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγιῶν ι΄ καὶ ἕτερον ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγιῶν ια΄. ἔχεις δὲ χρείαν ποιῆσαι λίτρας ξ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄ς″. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσας λίτρας ἀσήμιν ἔχεις ἑνῶσαι ἐφ᾽ ἑκάστης τάξεως τῶν ἀνὰ η΄ καὶ ϑ΄ καὶ ι΄ καὶ ια΄ οὐγγιῶν πρὸς τὸ ποιῆσαι ὁμοῦ λίτρας ξ΄, ἑκάστη(ν) λίτραν ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄ς″.

ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως. ϑὲς ἐν τάξει τὰς διαφόρους οὐγγίας τῶν τεσσάρων ἰδεῶν, τουτέστι οὐγγίας η΄ καὶ ϑ΄ καὶ ι΄ καὶ ια΄. καὶ αἱ μὲν ια΄ οὐγγίαι εἰσὶ κρείττον<ες> τῶν ι΄ς″ οὐγγιῶν, ὧν ζητεῖς ποιῆσαι λίτρας ξ΄, αἱ δὲ λοιπαί, τουτέστι αἱ η΄ καὶ ϑ΄ καὶ ι΄ οὐγγίαι, εἰσὶ χείρονες τῶν ι΄ς″. ζήτει οὖν τὸ κρεῖττον μέρος τῶν ια΄ οὐγγιῶν ἐκ τῶν ι΄ς″ οὐγγιῶν· ἔστι δὲ οὐγγία ς″. κάτωϑεν οὖν κατ᾽ εὐϑεῖαν τῶν τριῶν τάξεων τῶν ἐλαττόνων οὐγγιῶν τῶν η΄ καὶ ϑ΄ καὶ ι΄ ϑὲς τὴν ς″ ταύτη(ν) οὐγγία(ν), ἥτις ἐστὶ τὸ κρεῖττον μέρος τῶν ια΄ οὐγγιῶν ἐκ τῶν ι΄ς″.

ζήτει δὲ καὶ τὸ ἐλλεῖπον μέρος τῶν η΄ οὐγγιῶν πρὸς τὸ γενέσθαι ι΄ς″, ὅπερ ἐστὶ οὐγγίαι β΄ς″. ζήτει καὶ τὸ ἐλλεῖπον μέρος τῶν ϑ΄ οὐγγιῶν πρὸς τὸ γενέσθαι ι΄ς″, ὅπερ ἐστὶ οὐγγία α΄ς″. ζήτει καὶ τὸ ἐλλεῖπον μέρος τῶν ι΄ οὐγγιῶν πρὸς τὸ γενέσθαι ι΄ς″, ὅπερ ἐστὶ οὐγγία ς″. ἕνωσον δὲ τὰ τρία τούτων ἐλλείποντα μέρη, ἅπερ ἐστὶ β΄ς″ καὶ α΄ς″ καὶ ς″, καὶ γίνονται ὁμοῦ οὐγγίαι δ΄ς″. ὥσπερ οὖν τὸ περιττεῦον μέρος

---

30 χείρονες] χειρώναι **C**

τῶν ια΄ οὐγγιῶν ἐκ τῶν ι΄ς″, ὅπερ ἐστὶ οὐγγία ς″, ἔθηκας κάτωθεν τῶν ἔλαττο(ν) ὄντων οὐγγιῶν τῶν ι΄ς″, οὕτως ἐναλλὰξ τὸ ἐναντίον ποίησον καὶ θὲς κάτωθεν κατ᾽ εὐθεῖαν τῶν ια΄ οὐγγιῶν τὰς δ΄ς″ οὐγγίας, ἃς ἀπολείπονται αἱ ἔλαττον οὖσαι πρὸς τὸ γενέσθαι ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄ς″.

ταυθ᾽ οὕτως ποιήσας νόμισαι εἶναι συντρ(ό)φους δ΄ τὰς διαφόρους αὐτῶν δ΄ τάξεις, οἵτινες ἔχοσι διαμερίσασθαι ἀσήμιν λίτρας ξ΄. καὶ ὁ μὲν πρῶτος σύντροφος, τουτέστι αἱ η΄ οὐγγίαι – τὸ οἰκεῖον αὐτῶν μέρος, ὅπερ λαβεῖν ἔχοσι ἐκ τῶν ξ΄ λιτρῶν, ἐστὶ οὐγγία ς″. ὡσαύτως καὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος σύντροφος, αἱ θ΄ καὶ ι΄ οὐγγίαι – τὸ οἰκεῖον αὐτῶν μέρος, ὅπερ λαβεῖν ἐκ τῶν ξ΄ λιτρῶν ἔχοσι, ἐστὶ ἀνὰ οὐγγία ς″. ὁ δὲ τέταρτος σύντροφος, αἱ ια΄ οὐγγίαι – τὸ οἰκεῖον μέρος αὐτῶν ἐστι οὐγγίαι δ΄ς″. ἕνωσον δὲ τὰ οἰκεῖα μέρη αὐτῶν, ἅπερ ἕκαστος οἰκειοῦται ἐκ τῶν ξ΄ λιτρῶν, ὥσπερ εἰώθαμεν ποιεῖν ἐπὶ τῶν δ΄ συντρ(ό)φων τῶν ἐχόντων μερίσασθαι ὑπέρπυρα ,α΄. δ΄ς″ οὖν καὶ ς″ καὶ ς″ καὶ ς″ γίνονται ὁμοῦ ς΄, ἅπερ ς΄ οὐγγίαι ἐστὶ ὁ κοινὸς τούτων μεριστής, δι᾽ ὧν ἔχεις μερίσασθαι τὰς ξ΄ λίτρας, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ὑπερπύρων οὕτως

α σύντρ(ο)φος	β σύντρ(ο)φος	γ σύντρ(ο)φος	δ σύντρ(ο)φος

γίνεται.

πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς ξ΄ λίτρας μετὰ τῆς ς″ οὐγγίας, ἧς ἔχει οἰκεῖον μέρος αἱ η΄ οὐγγίαι· ς″κις οὖν ξ΄ λίτραι γίνονται λ΄ λίτραι. μέρισον τὰς λ΄ λίτρας μετὰ τῶν ς΄ οὐγγιῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ κοινὸς μεριστής, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ε΄· ε΄κις γὰρ ς΄ λ΄ γίνονται. ὁ πρῶτος οὖν σύντροφος – αἱ η΄ οὐγγίαι δηλονότι οἰκειοῦνται ἐκ τῶν ξ΄ λιτρῶν λίτρας ε΄. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος σύντροφος – αἱ θ΄ καὶ ι΄ δηλονότι οὐγγίαι – ς″κις πολλ(α)πλασιάζοσι τὰς ξ΄ λίτρας καὶ γίνονται λ΄ λίτραι, μερίζοσι δὲ τὰς λ΄ λίτρας μετὰ τῶν ς΄ οὐγγιῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ κοινὸς μεριστής, καὶ οὗτοι οἱ δύο σύντρ(ο)φοι – αἱ θ΄ καὶ ι΄ οὐγγίαι – ἀνὰ ε΄ λίτρας οἰκειοῦνται ἐκ τῶν ξ΄ λιτρῶν, ὡς καὶ τὸν πρῶτον σύντροφον – τὰς η΄ δηλονότι οὐγγίας.

πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς ξ΄ λίτρας μετὰ τῶν δ΄ς″, τὸ οἰκεῖον μέρος τοῦ τετάρτου συντρ(ό)φου· δ΄ς″κις οὖν ξ΄ γίνονται σο΄ λίτραι. μέρισον ταύτας μετὰ τῶν ς΄ οὐγγιῶν, τὸν κοινὸν μεριστήν, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς με΄. ὁ τέταρτος οὖν σύντροφος – αἱ ια΄ οὐγγίαι || δηλονότι οἰκειοῦνται ἐκ τῶν ξ΄ λιτρῶν λίτρας με΄. f. 61/1v

ἕνωσον τὰ οἰκεῖα μέρη, ἅπερ εὗρες, ὅτι οἰκειοῦνται ἐκ τῶν ξ΄ λιτρῶν, τουτέστι τὰς ε΄ λίτρας τῶν η΄ οὐγγιῶν καὶ τὰς ε΄ λίτρας τῶν θ΄ οὐγγιῶν καὶ τὰς ε΄ λίτρας τῶν ι΄ οὐγγιῶν καὶ τὰς με΄ λίτρας τῶν ια΄ οὐγγιῶν, καὶ γίνονται ὁμοῦ λίτραι ξ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, πόσας λίτρας ἔχεις ἑνῶσαι ἐφ᾽ ἑκάστης τάξεως τῶν διαφόρων λιτρῶν τῶν ἀνὰ η΄ καὶ θ΄ καὶ ι΄ καὶ ια΄ οὐγγιῶν ὄντων πρὸς τὸ ποιῆσαι λίτρας ξ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄ς″.

ἡ δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία. αἱ ε΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν η΄ – ε΄κις οὐγγίαι η΄ γίνον-

---

23 λίτρας] ων C 24 τὸν ... σύντροφον – τὰς η΄ ... οὐγγίας] sic C

ται οὐγγίαι μ΄ καθαρὸν ἀσήμιν. αἱ ε΄ δὲ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν θ΄ – ε΄κις οὐγγίαι θ΄ γίνονται οὐγγίαι με΄ καθαρὸν ἀσήμιν. αἱ ε΄ δὲ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄ – ε΄κις οὐγγίαι ι΄ γίνονται οὐγγίαι ν΄ καθαρὸν ἀσήμιν. αἱ με΄ δὲ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν ια΄ – με΄κις οὐγγίαι ια΄ γίνονται οὐγγίαι υϚε΄ καθαρὸν ἀσήμιν. ἔνωσον ταύτας καὶ γίνονται ὁμοῦ καθαρὸν ἀσήμιν οὐγγίαι χλ΄, ὅπερ ἔχοσι αἱ διάφοραι ξ΄ λίτραι. μέρισον τὰς χλ΄ οὐγγίας μετὰ τῶν ξ΄ λιτρῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ι΄ς″, καθὼς ἐζήτ(η)σας ποιῆσαι ἐκ τῶν δ΄ διαφόρων ἰδεῶν λίτρας ξ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄ς″.

ΓΓ(ίαι) o	η	ℏι	ε	καθ(α)ρ(αὶ)	ΓΓ(ίαι) o	δ	υ		
ΓΓ(ίαι) o	θ	ℏι	ε	καθ(α)ρ(αὶ)	ΓΓ(ίαι) o	δ	ε		
ΓΓ(ίαι) o	ι	ℏι	ε	καθ(α)ρ(αὶ)	ΓΓ(ίαι) o	ε	υ		
ΓΓ(ίαι) o	ια	ℏι	δ	ε	καθ(α)ρ(αὶ)	ΓΓ(ίαι) o	δ	θ	ε
	ὁμοῦ	ℏι	ς	υ	ὁμοῦ	ΓΓ(ίαι) o	ς	γ	υ

ΓΓ(ίαι) o α υ α/β

Ἕτερον τούτου ὁμοιον. Ἔστω ὅτι ἔχεις ἀσήμιν, ὅπερ ἔχει ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγίας ε΄, ἕτερον δὲ ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγίας ς΄, ἕτερον δὲ ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγίας ζ΄, ἕτερον δὲ ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγίας η΄, ἕτερον δὲ ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγίας ι΄, ἕτερον δὲ ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγίας ια΄. ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσας λίτρας ἔχεις ἑνῶσαι ἐφ᾽ ἑκάστης τάξεως τῶν ε΄ καὶ ς΄ καὶ ζ΄ καὶ η΄ καὶ ι΄ καὶ ια΄ οὐγγιῶν πρὸς τὸ ποιῆσαι ὁμοῦ λίτρας ρ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν θ΄.

ος α σύντρ(ο)φος	ος β σύντρ(ο)φος	ος γ σύντρ(ο)φος	ος δ σύντρ(ο)φος	
ΓΓ(ιῶν) o ε ΓΓ(ίαι) o γ	ΓΓ(ιῶν) o ς ΓΓ(ίαι) o γ	ΓΓ(ιῶν) o ζ ΓΓ(ίαι) o γ	ΓΓ(ιῶν) o η ΓΓ(ίαι) o γ	ΓΓ(ιῶν) o θ ℏι ρ
			ος ε σύντρ(ο)φος	ος ς σύντρ(ο)φος
			ΓΓ(ιῶν) o ι ΓΓ(ίαι) o ι	ΓΓ(ιῶν) o ια ΓΓ(ίαι) o ι

καὶ αἱ μὲν ι΄ οὐγγίαι εἰσὶ κρεῖττον τῶν θ΄ οὐγγιῶν οὐγγία(ν) α΄, αἱ δὲ ια΄ οὐγγίαι εἰσὶ κρεῖττον τῶν θ΄ οὐγγιῶν οὐγγίας β΄. ἕνωσον τὴν α΄ οὐγγίαν καὶ β΄ καὶ γίνονται ὁμοῦ οὐγγίαι γ΄. ἔχοσι δὲ διαφορὰν αἱ ι΄ οὐγγίαι καὶ ια΄ ἐκ τῶν θ΄ οὐγγιῶν, ὧν ζητεῖς ποιῆσαι τὰς ρ΄ λίτρας ἀνὰ οὐγγιῶν θ΄, οὐγγίας γ΄. θὲς τὰς γ΄ ταύτας οὐγγίας κάτωθεν τῶν ἐλαττόνων οὐγγιῶν, τουτέστι τῶν ε΄ καὶ ς΄ καὶ ζ΄ καὶ η΄.

αἱ ε΄ δὲ οὐγγίαι ἐστὶ ἔλαττο τῶν θ΄ οὐγγιῶν οὐγγίας δ΄. αἱ δὲ ς΄ οὐγγίαι ἐστὶ ἔλαττο τῶν θ΄ οὐγγίας γ΄. αἱ δὲ ζ΄ οὐγγίαι ἐστὶ ἔλαττο τῶν θ΄ οὐγγίας β΄. {αἱ δὲ ζ΄ οὐγγίαι ἐστὶ ἔλαττο τῶν θ΄ οὐγγίας β΄.} αἱ δὲ η΄ οὐγγίαι ἐστὶ ἔλαττο τῶν θ΄ οὐγγία(ν) α΄. ἕνωσον τὰς δ΄ καὶ γ΄ καὶ β΄ καὶ α΄ οὐγγίας καὶ γίνονται ὁμοῦ οὐγγίαι ι΄. ἐστὶ δὲ τῶν ἐλαττόνων οὐγγιῶν τῶν ε΄ καὶ ς΄ καὶ ζ΄ καὶ η΄ ἡ πρὸς τὸ χεῖρον διαφορά, ἣν ἔχοσι ἐκ τῶν θ΄ οὐγγιῶν, οὐγγίαι ι΄. ὥσπερ οὖν ἔθηκας τῶν δύο κρειττόνων τῶν ι΄ καὶ ια΄ οὐγγιῶν τὴν διαφοράν, τουτέστι τὰς γ΄ οὐγγίας, κάτωθεν τῶν ἐλαττόνων, οὕτως νῦν τὸ ἐναλλὰξ ποίησον. καὶ θὲς κάτωθεν τῶν ι΄ καὶ τῶν ια΄ οὐγγιῶν τὰς ι΄ οὐγγίας, ἅς εἰσι χεῖρον αἱ ἔλαττον οὖσαι τῶν θ΄ οὐγγιῶν.

ἕνωσον δὲ τὰ οἰκεῖα μέρη, ἅπερ ἕκαστος οἰκειοῦται ἀναλόγως ἐκ τῶν ρ΄ λιτρῶν. γ΄ οὖν καὶ γ΄ καὶ γ΄ καὶ γ΄ καὶ ι΄ καὶ ι΄ γίνονται ὁμοῦ λβ΄· ἔστι δὲ ταῦτα κοινὸς

---

19 οὐγγίας ια΄] ΓΓ(ι)ῶν o ια΄ **C** 22.23 κρεῖττον **vel** κρείττων] **sic C pro** κρείττονες **item** 27.28.29 ἔλαττο **vel** ἐλάττω] **sic C pro** ἐλάττονες – **cf. etiam** 35 χεῖρον, ἔλαττον

μεριστὴς τῶν ἓξ συντρόφων, δι' ὧν μερίζονται αἱ ρ΄ λίτραι ἀναλόγως.

πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς ρ΄ λίτρας μετὰ τοῦ οἰκείου μέρους τοῦ πρώτου συντρ(ό)φου τῶν ε΄ οὐγγιῶν, ὅπερ εἴπομεν, ὅτι ἐστὶ οὐγγίαι γ΄. τρὶς οὖν ρ΄ γίνονται τ΄. μέρισον

α σύντρ(ο)φος	β σύντρ(ο)φος	γ σύντρ(ο)φος	δ σύντρ(ο)φος	ε σύντρ(ο)φος
α β α β γ γ ι ϑ καὶ γ η	ι ϑ καὶ γ η	ι ϑ καὶ γ η	ι ϑ καὶ γ η	α η δ η γ β β γ ι γ α καὶ α δ

ζ σύντρ(ο)φος
ι γ α καὶ α δ

ταῦτα μετὰ τῶν λβ΄, τὸν κοινὸν μεριστήν, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ϑ΄ καὶ $\frac{\chi}{\eta}$· ὁ πρῶτος οὖν σύντροφος – αἱ ε΄ οὐγγίαι δηλονότι οἰκειοῦνται ἐκ τῶν ρ΄ λιτρῶν λίτρας ϑ΄ καὶ $\frac{\chi}{\eta}$ μιᾶς λίτρας. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος σύντροφος – αἱ ς΄ καὶ ζ΄ καὶ η΄ οὐγγίαι δηλονότι – τρὶς πολλ(α)πλασιάζοσι τὰς ρ΄ λίτρας καὶ γίνονται τ΄, μερίζονται δὲ τὰ τ΄ μετὰ τῶν λβ΄, τὸν κοινὸν μεριστήν, καὶ οὗτοι οἱ τρεῖς σύντρ(ο)φοι – αἱ ς΄ καὶ ζ΄ καὶ η΄ δηλονότι οὐγγίαι – ἀνὰ ϑ΄ λίτρας καὶ $\frac{\chi}{\eta}$ μιᾶς λίτρας οἰκειοῦται ἕκαστος αὐτῶν ἐκ τῶν ρ΄ λιτρῶν, ὡς καὶ τὸν πρῶτον σύντρ(ο)φον – τὰς ε΄ δηλονότι οὐγγίας.

πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰς ρ΄ λίτρας μετὰ τῶν ι΄ οὐγγιῶν, τὸ οἰκεῖον μέρος δηλονότι τοῦ πέμπτου συντρόφου· ι΄κις οὖν ρ΄ γίνονται ,α΄. μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν λβ΄, ὧν ἔχεις κοινὸν μεριστήν, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λα΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$· ὁ πέμπτος οὖν σύντρ(ο)φος – αἱ ι΄ δηλονότι οὐγγίαι οἰκειοῦνται ἐκ τῶν ρ΄ λιτρῶν λίτρας λα΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ μιᾶς λίτρας. ὡσαύτως καὶ ὁ ἕκτος σύντρ(ο)φος – αἱ ια΄ δηλονότι οὐγγίαι κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον οἰκειοῦνται ἐκ τῶν ρ΄ λιτρῶν λίτρας λα΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ μιᾶς λίτρας, ὡς καὶ τὸν πέμπτον σύντρ(ο)φον.

ἕνωσον τὰ οἰκεῖα μέρη, ἅπερ εὗρες, ὅτι οἰκειοῦνται ἐκ τῶν ρ΄ λιτρῶν. καὶ τῶν μὲν δ΄ συντρ(ό)φων τῶν ἐχόντων ἕκαστος καὶ $\frac{\chi}{\eta}$· δ΄κις $\frac{\chi}{\eta}$ γίνονται $\frac{\iota\beta}{\eta}$, ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α΄ζ″. τῶν δὲ δύο συντρ(ό)φων· δὶς $\frac{\alpha}{\delta}$ γίνονται $\frac{\beta}{\delta}$, τουτέστι ζ″. α΄ζ″ οὖν καὶ ζ″ γίνονται β΄ ἀκέραια. ϑὲς οὖν ταύτας τὰς β΄ λίτρας ἐπὶ τῶν ἑτέρων λιτρῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ λίτραι ρ΄. καὶ ἰδοὺ εὗρες, πόσας λίτρας ἔχεις ἑνῶσαι ἐφ' ἑκάστης τάξεως τῶν διαφόρων λιτρῶν τῶν ἀνὰ οὐγγιῶν ε΄ καὶ ς΄ καὶ ζ΄ καὶ η΄ καὶ ι΄ καὶ ια΄ οὐγγιῶν ὄντων πρὸς τὸ ποιῆσαι λίτρας ρ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄.

ΓΓ(ί)αι ο	ε	οἰκειοῦνται	ι ϑ καὶ γ η						ΓΓ(ί)αι ο	μς	καὶ	ζ η			
ΓΓ(ί)αι ο	ς	οἰκειοῦνται	ι ϑ καὶ γ η						ΓΓ(ί)αι ο	νς	καὶ	β η			
ΓΓ(ί)αι ο	ζ	οἰκειοῦνται	ι ϑ καὶ γ η						ΓΓ(ί)αι ο	ξε	καὶ	ε η			
ΓΓ(ί)αι ο	η	οἰκειοῦνται	ι ϑ καὶ γ η						ΓΓ(ί)αι ο	οε					
ΓΓ(ί)αι ο	ι	οἰκειοῦνται	ι	λ	α	καὶ	α δ	η	ΓΓ(ί)αι ο	τιβ	καὶ	δ η			
ΓΓ(ί)αι ο	ια	οἰκειοῦνται	ι	λ	α β	καὶ	α δ	η	ΓΓ(ί)αι ο	τμγ	καὶ	α δ η			
			ὁμοῦ	ι	ρ		ὁμοῦ		ΓΓ(ί)αι ο	≫					

---

11 λίτρας] ι ω ν **C** 12/13 τὸν ... σύντρ(ο)φον – τὰς ε΄ ... οὐγγίας] **sic C – cf. etiam**

20 15.16.20 πέμπτου / πέμπτος / πέμπτον] ε ο υ / ε ο ς / ε ο ν **C** 18 ἕκτος] ς ο ς

ἔστι οὖν αὕτη πρώτη ἀπόδειξις.

δευτέρα δὲ ἀπόδειξίς ἐστι ὁμοία τῆς προτέρας.

αἱ ϑ΄ λίτραι καὶ $\frac{\kappa}{\eta}$ αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν ε΄· ε΄κις ϑ΄ καὶ $\frac{\kappa}{\eta}$ γίνονται οὐγγίαι μς΄ καὶ $\frac{\zeta}{\eta}$ μιᾶς οὐγγίας. αἱ δὲ ϑ΄ λίτραι καὶ $\frac{\kappa}{\eta}$ αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν ς΄· ς΄κις ϑ΄ καὶ $\frac{\kappa}{\eta}$ γίνονται οὐγγίαι νς΄ καὶ $\frac{\beta}{\eta}$ μιᾶς οὐγγίας. αἱ δὲ ϑ΄ λίτραι καὶ $\frac{\kappa}{\eta}$ αἱ ἀνὰ ‖ ζ΄ οὐγγιῶν· ζ΄κις ϑ΄ καὶ $\frac{\kappa}{\eta}$ γίνονται οὐγγίαι ξε΄ καὶ $\frac{\varepsilon}{\eta}$ μιᾶς οὐγγίας. αἱ δὲ ϑ΄ λίτραι καὶ $\frac{\kappa}{\eta}$ αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν η΄· η΄κις ϑ΄ καὶ $\frac{\kappa}{\eta}$ γίνονται οὐγγίαι οε΄. αἱ δὲ λα΄ λίτραι καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄· ι΄κις λα΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ γίνονται οὐγγίαι τιβ΄ καὶ $\frac{\delta}{\eta}$ μιᾶς οὐγγίας. αἱ δὲ λα΄ λίτραι καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν ια΄· ια΄κις λα΄ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ γίνονται οὐγγίαι τμγ΄ καὶ $\frac{\varepsilon}{\eta}$ μιᾶς οὐγγίας. f. 62^{r}

ἕνωσον τὰ τζακίσματα, τὰ ζ΄ καὶ β΄ καὶ ε΄ καὶ δ΄ καὶ ς΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ κδ΄ ὄγδοα, ἅπερ ἐστὶ ἀκέραια γ΄. ϑὲς ταῦτα εἰς τὰς οὐγγίας καὶ ἕνωσον ταύτας καὶ γίνονται ὁμοῦ οὐγγίαι ≫΄. μέρισον ταύτας μετὰ τῶν ρ΄ λιτρῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ϑ΄, καθὼς ἐζήτησας γενέσθαι ἑκάστη λίτρα τῶν ρ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄.

δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, ὅτι ἐκεῖνο, ὅπερ εἴπομεν – ε΄κις ϑ΄ καὶ $\frac{\kappa}{\eta}$ γίνονται μς΄ καὶ $\frac{\zeta}{\eta}$ μιᾶς οὐγγίας –· δοκεῖ τοῖς μὴ εἰδόσι καλῶς τὸ γενόμενον, ὅτι οὐ καλῶς ἐγένοντο αἱ μς΄ οὐγγίαι καὶ $\frac{\zeta}{\eta}$. καὶ γὰρ αἱ ϑ΄ λίτραι καὶ $\frac{\kappa}{\eta}$ – ἑκάστη λίτρα τῶν ϑ΄ ἐστὶ οὐγγιῶν ε΄, ε΄κις δὲ ϑ΄ γίνονται οὐγγίαι με΄. τὰ δὲ $\frac{\kappa}{\eta}$ ἐστὶ $\frac{\kappa}{\eta}$ τῶν ε΄ οὐγγιῶν, ὧν ἔχει ἑκάστη λίτρα. δοκεῖ δέ, ὅτι $\frac{\kappa}{\eta}$ χρὴ λαβεῖν τῶν ε΄ οὐγγιῶν, ὧν ἔχει ἑκάστη λίτρα, οὐ μὴν δὲ πολλ(α)πλασιάσαι τὰ $\frac{\kappa}{\eta}$ τῆς μιᾶς λίτρας μετὰ τῶν ε΄ οὐγγιῶν, ὧν ἔχει ἑκάστη λίτρα. ταὐτὸν δέ ἐστι πολλ(α)πλασιάσαι τὰ $\frac{\kappa}{\eta}$ μετὰ τῶν ε΄ οὐγγιῶν καὶ λαβεῖν $\frac{\kappa}{\eta}$ τῶν ε΄ οὐγγιῶν. ε΄κις γὰρ $\frac{\kappa}{\eta}$ γίνονται $\frac{\iota\varepsilon}{\eta}$, ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α΄ καὶ $\frac{\zeta}{\eta}$. λάβε δὲ $\frac{\kappa}{\eta}$ τῶν ε΄ οὐγγιῶν, ἅπερ ἐστὶ πάλιν α΄ καὶ $\frac{\zeta}{\eta}$, καὶ ἰδού – ταὐτόν ἐστι πολλ(α)πλασιάσαι τὰ $\frac{\kappa}{\eta}$ μετὰ τῶν ε΄ οὐγγιῶν τῆς μιᾶς λίτρας καὶ λαβεῖν $\frac{\kappa}{\eta}$ τῶν ε΄ οὐγγιῶν τῆς μιᾶς λίτρας· ἀμφότεραι γὰρ αἱ δύο μεταχειρίσεις ἀποδίδοσι ἡμῖν ἐκ τῶν ε΄ οὐγγιῶν τῆς μιᾶς λίτρας οὐγγία α΄ καὶ $\frac{\zeta}{\eta}$ μιᾶς οὐγγίας, ἣν καὶ ἑνώσας μετὰ τῶν με΄ οὐγγιῶν ἐγένοντο οὐγγίαι μς΄ καὶ $\frac{\zeta}{\eta}$ μιᾶς οὐγγίας.

τούτῳ δὲ τῷ τρόπῳ καὶ ἐπὶ τῶν ἑτέρων τριῶν συντρ(ό)φων τῶν ἐχόντων λίτρας ϑ΄ καὶ $\frac{\kappa}{\eta}$ ἐποίησας καὶ ἀντὶ τοῦ λαβεῖν $\frac{\kappa}{\eta}$ τῶν ς΄ οὐγγιῶν ἢ $\frac{\kappa}{\eta}$ τῶν ζ΄ οὐγγιῶν ἐπολλ(α)πλασίασας τὰς ς΄ οὐγγίας, ὡσαύτως καὶ τὰς ζ΄ οὐγγίας, μετὰ τῶν $\frac{\kappa}{\eta}$. καὶ ἔλαβες προχειρεστέρως διὰ τοῦ πολλ(α)πλασιασμοῦ τὰ $\frac{\kappa}{\eta}$ τῶν ς΄ οὐγγιῶν τῆς μιᾶς λίτρας, ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{\kappa}{\eta}$ τῶν ζ΄ οὐγγιῶν τῆς μιᾶς λίτρας, ἢ λαβεῖν $\frac{\kappa}{\eta}$ τῶν ς΄ οὐγγιῶν ἢ $\frac{\kappa}{\eta}$ τῶν ζ΄ οὐγγιῶν· ταὐτὸν γάρ ἐστι.

Καὶ ἄλλως. Λάβε ἐκ τῶν ἓξ διαφόρων ἰδεῶν, ὧν εἴπομεν, ὅτι γίνονται ὁμοῦ λίτραι ρ΄, λίτρας ι΄, τουτέστι τὸ δέκατον μέρος τῶν ρ΄ λιτρῶν. ζήτει οὖν, πόσον ἀσήμιν καθαρὸν ὀφείλοσιν ἔχειν αἱ ι΄ λίτραι, ἃς λέγομεν λαβεῖν ἐκ τῶν ἓξ διαφόρων ἰδεῶν, πρὸς τὸ γενέσθαι ἑκάστη λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄, καθὼς ζητεῖς καὶ τὰς ρ΄ λίτρας γενέσθαι ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄. ι΄κις οὖν οὐγγίαι ϑ΄ γίνονται οὐγγίαι ς΄· αἱ ι΄ οὖν λίτραι ὀφείλοσιν ἔχειν ἀσήμιν καθαρὸν οὐγγίας ς΄ πρὸς τὸ γενέσθαι ἑκάστη λίτρα

---

in dextro marg. fol. 62^{r} ad 34/35: + κρεῖττόν ἐστι λαμβάνειν πάντοτε λίτρας ι΄ ἢ λαμβάνειν τὸ δέκατον μέρος τῶν ν΄ λιτρῶν ἢ τῶν μ΄ λιτρῶν, ὧν ζητεῖς ποιῆσαι· διὰ γὰρ τῶν ι΄ λιτρῶν ἔχεις λαβεῖν παρὰ πάντων τῶν ἰδεῶν τῶν διαφόρων λιτρῶν, ὧν ἔχεις. – Καὶ εἰ μὲν ζητεῖς ποιῆσαι λίτρας μ΄, τετραπλασίασον τὰς ι΄ λίτρας καὶ γίνονται μ΄. εἰ δὲ ζητεῖς ποιῆσαι λίτρας ν΄, πενταπλασίασον τὰς ι΄ λίτρας καὶ γίνονται λίτραι ν΄ – καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

τῶν ι΄ ἀνὰ οὐγγιῶν θ΄.

λάβε οὖν ἐκ τῶν μειζόνων καὶ ἐλαττόνων λιτρῶν τῶν ὑπὲρ τῶν θ΄ καὶ ὑπὸ τῶν θ΄ οὐγγιῶν ὄντων, τουτέστι ἔλαττο μὲν τῶν θ΄ τὴν τῶν ε΄ οὐγγιῶν λίτραν, μεῖζον δὲ τῶν θ΄ τὴν τῶν ια΄ οὐγγιῶν λίτραν, καὶ ἕνωσον ταύτας καὶ γίνονται ὁμοῦ λίτραι β΄, ἅπερ ἔχοσι οὐγγίας ις΄. ὡσαύτως λάβε καὶ τὰς τῶν ς΄ καὶ ι΄ οὐγγιῶν β΄ λίτρας καὶ ἕνωσον καὶ ταύτας τὰς β΄ λίτρας μετὰ τῶν προτέρων β΄ λιτρῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ λίτραι δ΄, ἅπερ ἔχοσι οὐγγίας λβ΄. ὡσαύτως λάβε καὶ τὰς τῶν ζ΄ καὶ η΄ οὐγγιῶν β΄ λίτρας, ἅπερ ἔχοσι οὐγγίας ιε΄, καὶ ἕνωσον καὶ ταύτας μετὰ τῶν δ΄ λιτρῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ λίτραι ς΄, ἅπερ ἔχοσι οὐγγίας μζ΄.

λείπονται μέχρι τῶν ι΄ λιτρῶν λίτραι δ΄ καὶ μέχρι τῶν ς΄ οὐγγιῶν οὐγγίαι μγ΄. λάβε ἀπὸ τῶν ια΄ οὐγγιῶν <λίτρας> γ΄· ἔχοσι δὲ αὗται οὐγγίας λγ΄. λάβε καὶ ἀπὸ τῶν ι΄ οὐγγιῶν λίτραν α΄ καὶ ἕνωσον ταύτην μετὰ τῶν γ΄ λιτρῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ λίτραι δ΄, ἅπερ ἔχοσι οὐγγίας μγ΄. ἕνωσον τὰς δ΄ ταύτας λίτρας, ἃς ἔχοσι οὐγγίας μγ΄, μετὰ τῶν ς΄ λιτρῶν τῶν ἐχόντων οὐγγίας μζ΄, καὶ γίνονται ὁμοῦ λίτραι ι΄, ἅπερ ἔχοσι καθαρὸν ἀσήμιν οὐγγίας ς΄.

ζήτει οὖν, πόσας λίτρας ἔλαβες ἐφ᾽ ἑκάστης τάξεως τῶν ἓξ διαφόρων ἰδεῶν. ἔλαβες οὖν λίτρας δ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ια΄ καὶ λίτρας β΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄ καὶ λίτρα(ν) α΄ οὐγγιῶν η΄ καὶ λίτραν α΄ οὐγγιῶν ζ΄ καὶ λίτραν α΄ οὐγγιῶν ς΄ καὶ λίτραν α΄ οὐγγιῶν ε΄ – ὁμοῦ λίτραι ι΄ οὐγγιῶν ς΄.

ϡι	δ	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ῶν ο	ια		ϡι	μ	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ῶν ο	ια
ϡι	β	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ῶν ο	ι		ϡι	κ	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ῶν ο	ι
ϡι	α	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ῶν ο	η		ϡι	ι	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ῶν ο	η
ϡι	α	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ῶν ο	ζ		ϡι	ι	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ῶν ο	ζ
ϡι	α	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ῶν ο	ς		ϡι	ι	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ῶν ο	ς
ϡι	α	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ῶν ο	ε		ϡι	ι	ἀνὰ	ΓΓ(ι)ῶν ο	ε

ὁμοῦ ϡι ι ΓΓ(ι)ῶν ο ς · ὁμοῦ ϡι ρ ΓΓ(ι)ῶν ο ⩻

ἐπεὶ δὲ αἱ ι΄ λίτραι ἐστὶ δέκατον μέρος τῶν ρ΄ λιτρῶν, ὧν ζητεῖς ποιῆσαι, δεκαπλασίασον τὰς δ΄ λίτρας τῶν ἀνὰ οὐγγιῶν ια΄· ι΄κις οὖν δ΄ γίνονται λίτραι μ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ια΄. δεκαπλασίασον καὶ τὰς β΄ λίτρας τῶν ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄· ι΄κις οὖν β΄ γίνονται λίτραι κ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄. δεκαπλασίασον καὶ τὰς λοιπὰς δ΄ τῶν η΄ καὶ ζ΄ καὶ ς΄ καὶ ε΄ οὐγγιῶν καὶ γίνονται ἐφ᾽ ἑκάστης ἰδέας λίτραι ι΄. ἕνωσον δὲ τὰς δεκαπλασιασθείσας λίτρας, ἃς ἑκάστη ἰδέα ἐπολλ(α)πλασίασεν, καὶ γίνονται ὁμοῦ λίτραι ρ΄. καὶ ἰδοὺ καὶ διὰ τῆς παρούσης δευτέρας μεταχειρίσεως εὗρες, πόσας λίτρας ἔχεις λαβεῖν ἐφ᾽ ἑκάστης τάξεως τῶν ε΄ καὶ ς΄ καὶ ζ΄ καὶ η΄ καὶ ι΄ καὶ ια΄ οὐγγιῶν πρὸς τὸ ποιῆσαι λίτρας ρ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν θ΄.

ἵνα δὲ ἴδῃς, ὅτι, εἰ καὶ ἐναλλάσσοσι αἱ ληφθεῖσαι λίτραι τῆς πρώτης καὶ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως, ἀλλ᾽ οὖν καὶ αἱ δύο μεταχειρίσεις ἀληθεύουσι· αἱ μ΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν οὖσαι ια΄ – μ΄κις οὐγγίαι ια΄ γίνονται οὐγγίαι υμ΄. αἱ δὲ κ΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν οὖσαι ι΄ – κ΄κις οὐγγίαι ι΄ γίνονται οὐγγίαι σ΄. αἱ δὲ ι΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν οὖσαι η΄ – ι΄κις οὐγγίαι η΄ γίνονται οὐγγίαι π΄. αἱ δὲ ι΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν οὖσαι ζ΄ – ι΄κις οὐγγίαι ζ΄ γίνονται οὐγγίαι ο΄. αἱ δὲ ι΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν οὖσαι ς΄ – ι΄κις

μ	κις	ια	ΓΓ(ι)αι ο	υμ	
κ	κις	ι	ΓΓ(ι)αι ο	σ	
ι	κις	η	ΓΓ(ι)αι ο	π	
ι	κις	ζ	ΓΓ(ι)αι ο	ο	
ι	κις	ς	ΓΓ(ι)αι ο	ξ	
ι	κις	ε	ΓΓ(ι)αι ο	ν	

ὁμοῦ ΓΓ(ι)αι ο ⩻

5.7 τὰς] την **C** 8.9.13.15 ἅπερ **sic C** 26.27.29 δεκαπλασίασον] **notatum** ι α α α πλσίσων **C, sed** 30 δεκαπλασιασθείσας **sic C**

οὐγγίαι ς΄ γίνονται οὐγγίαι ξ΄. αἱ δὲ ι΄ λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν οὖσαι ε΄ – ι΄κις οὐγγίαι ε΄ γίνονται οὐγγίαι ν΄.

ἕνωσον ταύτας καὶ γίνονται ὁμοῦ οὐγγίαι ≫΄, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως οὕτως εὕραμεν. μέρισον τὰς ≫΄ οὐγγίας μετὰ τῶν ρ΄ λιτρῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ϑ΄· ἔστι δὲ ἑκάστη λίτρα τῶν ρ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄, ὡς ἐζήτ(η)σας ἑνῶσαι ἐκ τῶν ἓξ διαφόρων ἰδεῶν τῶν ε΄ καὶ ς΄ καὶ ζ΄ καὶ η΄ καὶ ι΄ καὶ ια΄ οὐγγιῶν καὶ ποιῆσαι λίτρας ρ΄ ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄.

Δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, ὅτι ἡ μὲν πρώτη μεταχείρισις λαμβάνει ἀπὸ πάντων τῶν διαφόρων ἰδεῶν, ὧν ἂν ἑνῶσαι ἔχῃς λιτρῶν, ἡ δὲ παροῦσα δευτέρα μεταχείρισις οὐ λαμβάνει ἀπὸ πάντων διαφόρων ἰδεῶν λιτρῶν, ὧν ἂν ἔχῃς ἑνῶσαι, ἀλλ᾽ ἔστι ὅτε ἐνίων μὲν ἰδεῶν λαμβάνει, ἐνίων δὲ οὐ δύναται λαβεῖν. μάλιστα δέ, ‖ ὅταν ἔχῃς ἑνῶσαι πλείστας διαφόρους ἰδέας λιτρῶν πρὸς τὸ ποιῆσαι ὁμοῦ λίτρας ἐλάττους τῶν ρ΄, τουτέστι λίτρας ξ΄ ἢ ν΄ ἢ μ΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, πλὴν τὸ ζητούμενον γίνεται. γίνονται γὰρ λίτραι ξ΄ – ἢ ὅσα ἂν βούλ(ῃ) ποιῆσαι – τοσούτων οὐγγιῶν ἑκάστη λίτρα, ὅσων βούλ(ει) γενέσθαι, οὐ παρὰ πάντων τῶν διαφόρων ἰδεῶν λαμβανόμεναι, ἀλλ᾽ ἐξ ὧν ἔχει δηλῶσαι ἡ δηλωθεῖσα δευτέρα νῦν μεταχείρισις, ἣν ἐπὶ τοῦ παρόντος ζητήματος ἐξεθέμεθα, καθὼς ἔχεις εἰδέναι διὰ τῆς πείρας σαφέστερον. f. 62v

λάμβανε δὲ ἐπὶ τῆς παρούσης δευτέρας μεταχειρίσεως τὸ δέκατον μέρος τῶν ζητουμένων λιτρῶν, καθὼς καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος ζητήματος ἔλαβες ι΄ λίτρας ἐκ τῶν ρ΄ λιτρῶν, τουτέστι ἐκ τῶν ξ΄ λιτρῶν λάμβανε λίτρας ς΄ καὶ ἐκ τῶν ν΄ λιτρῶν λίτρας ε΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως. αἱ δὲ λίτραι, ἃς λαμβάνεις, ἔστωσαν ἐκ τῶν κρειττόνων καὶ ἐλαττόνων οὐγγιῶν, ἵνα ἑνωθεῖσαι αἱ κρείττονες λίτραι μετὰ τῶν ἐλαττόνων γένηται ἓν σῶμα μέσον τοῦ κρείττονος καὶ ἐλάττονος, ὅμοιον τῆς λίτρας, ἧς ζητεῖς ἑνῶσαι διαφόρους ἰδέας λιτρῶν πρὸς τὸ ποιῆσαι λίτρας ξ΄ – ἢ ὅσα ἂν εἴπῃς –, ἑκάστην λίτραν οὐγγιῶν, ὅσων ἂν βούλ(ῃ) γενέσθαι. ὅσων δὲ οὐγγιῶν βούλ(ει) γενέσθαι ἑκάστη λίτρα τῶν ξ΄ λιτρῶν – ἢ ὅσων ἂν λιτρῶν ζητῇς ποιῆσαι ποσότητα –, τοσαύτας οὐγγίας χρὴ ἔχειν καὶ αἱ λίτραι, ἃς λαμβάνεις ἀναλόγως.

εἰ οὖν ζητεῖς ἑκάστη λίτρα τῶν ξ΄ λιτρῶν ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄, αἱ ς΄ λίτραι, ἃς λαμβάνεις, ἔστωσαν οὐγγιῶν ξ΄. εἰ δὲ ζητεῖς γενέσθαι ἑκάστη λίτρα τῶν ν΄ λιτρῶν ἀνὰ οὐγγιῶν ϑ΄, αἱ ε΄ λίτραι, ἃς λαμβάνεις, ἔστωσαν οὐγγιῶν με΄ καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

οὕτω δὲ γενομένου δεκαπλασίασον ἑκάστην ἰδέαν τῶν λιτρῶν, ὧν ἔλαβες. καὶ ὅσαι λίτραι γένωνται αἱ δεκαπλασιασθεῖσαι λίτραι ἑκάστης ἰδέας, τοσαύτας λίτρας ἔχεις ἑνῶσαι ἐφ᾽ ἑκάστης τάξεως τῶν διαφόρων ἰδεῶν πρὸς τὸ ποιῆσαι, ἃς λίτρας ζητεῖς γενέσθαι – ἑκάστη λίτρα ἀνὰ οὐγγιῶν, ὅσων ἂν βούλ(ῃ) γενέσθαι.

μὴ μόνον δὲ ς΄ λίτρας ἐκ τῶν ξ΄ λιτρῶν καὶ ε΄ ἐκ τῶν ν΄, τουτέστι τὸ δέκατον μέρος – ὡς εἴπομεν – λαβὼν εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῶν ρ΄ καὶ ἐκ τῶν ξ΄ καὶ ἐκ τῶν ν΄ λιτρῶν, ὧν βούλ(ει) ἑνῶσαι διαφόρους ἰδέας πρὸς τὸ ποιῆσαι ταύτας, ὅσων ἂν οὐγγιῶν βούλ(ῃ) γενέσθαι, λαβὼν λίτρας ι΄ εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον, ὥσπερ λαβὼν καὶ τὸ δέκατον μέρος τῶν ζητουμένων λιτρῶν, ὧν βούλ(ει) ποιῆσαι.

ἔστω γὰρ ὅτι ἔλαβες ἐκ τῶν ξ΄ λιτρῶν λίτρας ι΄. βούλ(ει) δὲ ἑκάστη λίτρα τῶν ξ΄ γενέσθαι ἀνὰ οὐγγιῶν ι΄. αἱ ι΄ οὖν λίτραι, ἃς ἔλαβες, ἔστωσαν οὐγγιῶν ρ΄. ἑξαπλασίασον δὲ ἑκάστην ἰδέαν τῶν ι΄ λιτρῶν, ὧν ἔλαβες, καὶ γίνονται λίτραι ξ΄· ς΄κις

---

22 κρείττονες] κρίττοναι **C** 30 με΄] ν **falso C** 32 δεκαπλασιασθεῖσαι] $\overset{\alpha}{\iota}\overset{\alpha}{\pi}\lambda\sigma\iota\alpha\sigma$-θισαι **C**

γὰρ ι΄ ξ΄ γίνονται. καὶ ἰδοὺ ι΄ λίτρας παρὰ πάντων λαβὼν εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον, ὥσπερ λαβὼν καὶ τὸ δέκατον μέρος, ὡς εἴπομεν.

κατὰ τὸν ὅμοιον οὖν τρόπον τῶν δύο τούτων μεταχειρίσεων καὶ ἐπὶ χρυσίου ποιῶν εὑρήσεις καλῶς τὸ ζητούμενον, κἄντε διαφόρους λίτρας χρυσίου βούλ(ῃ) ἑνῶσαι κἄντε οὐγγίας κἄντε ἐξάγια· ταὐτὸν γάρ ἐστι.

τέλος τῆς πρώτης βίβλου

III TEILÜBERSETZUNG UND KOMMENTAR

1 **Vorrede**

Die Methode und Behandlung der Arithmetik hat zwei umfassende Regeln und nicht mehr: Wenn das Kleinere multipliziert wird, wird das Ergebnis größer, als es vorher war, die größeren Teile aber werden nach Durchschneidung und Teilung in jedem Fall kleiner als die erste Größe und deren Wert. Da sich dies nun so verhält, versuchten viele häufig, besonders bequeme und zuverlässige Methoden herauszufinden und sich auszudenken, und so forschten sie zuverlässig und zugleich bequem in den von ihnen aufgesuchten Ländern, gleichviel ob sie den Blick auf das Größere richteten oder auf das Kleinere. Aber die Erfahrung mit den Dingen und die lange Zeit, die alles herausfinden und das noch nicht Bestehende sichtbar machen, aber auch das Bestehende wiederum der Vergessenheit übergeben und das Gewordene verbergen kann, als ob es nicht existiere – wie auch ein Weiser sagt:

Die ganze lange und unermessliche Zeit lässt das Verborgene wachsen und verbirgt das, was ans Licht gekommen ist –,

lehrte uns eine sehr bequeme und zuverlässige Methode, die von den Persern gefunden wurde, die alles bestens wissen und überaus weise sind. Bei uns aber wurde diese Methode nicht früher bekannt, sondern blieb unseren westlichen Ländern weithin verborgen, bis sie bei manchen von den in Italien lebenden Lateinern bekannt wurde; bei jenen aber, die dank des Geschäftsverkehrs und Handels und durch den Verkehr und durch häufige Zusammenkunft mit diesen dort darauf stießen, wurde sie bekannt. Ich glaube aber, dass vor nicht mehr als 100 Jahren diese Methode gefunden und bei manchen bekannt wurde, die in Italien leben; uns aber, die wir die griechische Sprache verstehen, blieb das Unternehmen hier wiederum verborgen. Nun aber hat auch uns die Zeit dieses offenbart. Damit sich aber nicht, wie wir schon früher sagten, die Zeit, die alles vermag, dazu anschickt, dass wir diese Methode wiederum der Vergessenheit übergeben, weil sie bei uns noch nicht gut gefestigt und verbreitet, vielmehr den meisten auch noch unbekannt ist, schien es uns recht und ganz besonders notwendig zu sein, diese aufzuzeichnen, damit sie auch den noch Unwissenden und denen, die sie lernen wollen, bekannt wird.

Die Byzantiner verwendeten noch überwiegend das seit dem 5. Jahrhundert v. Chr. in Griechenland nachgewiesene "milesische" Zahlensystem, ein auf dem Alphabet beruhendes nichtpositionelles additives System mit Zehnerbündelung. Dementsprechend war auch die Null als positionelles Leerzeichen unbekannt:

α΄, β΄, γ΄, δ΄, ε΄, ϛ΄, ζ΄, η΄, ϑ΄: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

ι΄, ϰ΄, λ΄, μ΄, ν΄, ξ΄, ο΄, π΄, ϟ΄: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90

ρ΄, σ΄, τ΄, υ΄, φ΄, χ΄, ψ΄, ω΄, ϡ΄: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900

͵α΄, ͵β΄, ... ͵ϑ΄: 1000, 2000, ... , 9000

$\overset{\alpha}{M}$, $\overset{\beta}{M}$, ... oder ,ι΄, ,κ΄ ... : 10000, 20000, ...
M steht für Μύριοι (Zehntausender), darüber steht der Faktor.
Der Zahlenstrich zur Unterscheidung einer Zahl von einem Buchstaben ist auch als oberer Querstrich zu finden. Zur Zahlendarstellung wurde das griechische Alphabet durch drei Sonderzeichen semitischen Ursprungs ergänzt: ϛ΄ (Stigma), ϟ΄ (Koppa) und ϡ΄ (Sampi).
Zahlenbeispiele: ια΄, ρδ΄, ,σ,ζ΄β΄: 11, 104, 207002
Mit diesem Zahlensystem waren die Multiplikation und vor allem die Division nur mühsam durchzuführen. In der griechischen Logistik galt das Dividieren von und durch größere Zahlen als besondere Kunst, die z. B. dem sagenhaften Palamedes nachgerühmt wurde – vgl. VOGEL (1936, S. 380 f.) und DESCHAUER (1990, S. 6). Mit der obigen Bemerkung, dass die Suche nach bequemeren Methoden auf das *Größere* oder das *Kleinere* ausgerichtet gewesen wäre, dürfte, nachdem von den merkwürdigen *umfassenden Regeln* der Arithmetik die Rede war, das Bemühen um vereinfachte Verfahren der Multiplikation und der Division gemeint sein, das aber erst mit der "persischen Erfindung" zum erfolgreichen Abschluss gekommen sei. Hierbei denkt man vor allem an al-Ḫwārizmī (um 780–850), der aus dem damaligen persischen Raum (Choresmien) stammte: Seine "Algorismus"-Schrift hatte entscheidenden Anteil an der Verbreitung des indischen Zahlensystems im islamischen Raum, und lateinische Überarbeitungen kursierten seit dem 12. Jahrhundert in westlichen Gelehrtenkreisen (siehe VOGEL 1963, ALLARD 1992 und FOLKERTS 1994, 1997). Bezeichnenderweise ist im Einleitungstext dieser Handschriften ebenfalls von großen und kleinen Zahlen sowie von der Multiplikation und der Division die Rede:
... wir haben uns entschlossen, die Rechenweise der Inder mit Hilfe von IX. Buchstaben (Ziffern) *darzustellen und zu zeigen, durch die sie der Leichtigkeit und der Kürze halber ihre sämtlichen Zahlen darstellen, um dieses Unterfangen dem die Arithmetik Erlernenden zu erleichtern, d. h. sowohl große als auch kleine Zahlen und alles, was bei diesen auftritt, von der Multiplikation und der Division, aber auch vom Zusammenzählen und Abziehen usw.* (JUSCHKEWITSCH, S. 189)
Die Auffassung, dass das "neue" Zahlensystem persischen Ursprungs sei, findet sich auch im Scholion des Neophytos (um 1200) – vgl. TANNERY (1885, S. 101) und HEIBERG (1899, S. 165 f.). Auch waren dem Verfasser offenbar weder die früheste byzantinische Algorismusschrift von 1252 (ed. ALLARD 1977) noch deren Überarbeitung durch Maximos Planudes aus dem späten 13. Jahrhundert (ed. ALLARD 1981) bekannt, die beide bereits im Titel auf die indische Herkunft des neuen Zahlensystems hinweisen: Ψηφηφορία κατ' Ἰνδοὺς ἡ λεγομένη μεγάλη (Sogenannte große indische Rechenkunst). Er kannte wohl auch nicht die Schriften von Nikolaos Artabasdos Rhabdas, etwa dessen Neuausgabe des Rechenbuchs von Planudes oder den Brief an Georgios Chatzyke (um 1341, ed. TANNERY IV, 4 - 1886, Band 4, S. 86–117): In diesem Brief verwendet Rhabdas zwar noch das traditionelle System, verweist aber wie unser Schreiber auf die besonderen Vorzüge des neuen, indischen Systems bei der Multiplikation und der Division (S. 114 f.).

Der anonyme Autor vermutet, dass die neue Methode erst im 14. Jahrhundert (*vor nicht mehr als 100 Jahren*) nach Italien gelangt sei und dort Verbreitung fand, bei den Byzantinern zunächst aber unbekannt blieb. Man ist geneigt, an Leonardo von Pisa zu denken, dessen *Liber abbaci* von 1202 (vgl. BONCOMPAGNI 1857) den entscheidenden Anstoß dazu gab, dass sich das neue System – wenn auch anfangs noch zögerlich und teilweise bekämpft – in den folgenden Jahrhunderten allmählich in italienischen Kaufmannskreisen durchsetzte.
Außerdem verweist der Schreiber zu Recht auf die maßgebliche Bedeutung enger Handelsbeziehungen für die Ausbreitung dieser neuen Arithmetik. Hier wenigstens war Byzanz, das als Mittler zwischen Ost und West für die Wissenschaft unschätzbare Dienste geleistet hatte (vgl. VOGEL 1978), einmal in der Lage, selbst zu empfangen.
Der Schreiber möchte wohl seine literarische Bildung unter Beweis stellen, indem er zweimal (etwas ungenau) Sophokles zitiert (Aias 646–647, Fragm. 954) – vgl. PADUANO 1982: Den Topos der Zeit, die alles Verborgene ans Licht bringen, aber auch alles Bestehende wieder in Vergessenheit geraten lassen kann, bezieht er auf die neue Methode, die er nun ein für allemal schriftlich festhalten will, zumal sie den meisten Byzantinern auch jetzt noch unbekannt sei.

2 ***Über die zehn Ziffern, durch die jede Zahl entsteht***

Zuerst muss man wissen, dass diese Methode und Behandlung nur zehn Zahlzeichen benutzt und nicht mehr. Mit diesen zehn Zeichen aber können wir, wenn es möglich ist, dass unsere Vorstellungskraft die aufgezeigte Menge erfasst, sozusagen selbst den Sand auszählen; so weit voranschreiten können diese zehn Ziffern. Es sind aber diese zehn Ziffern die ähnlichen, ja vielmehr dieselben, die sich uns beim Bürgerlichen Rechnen bis zu den (ersten) neun Ziffern zeigen. Die zehnte Ziffer aber hat ein Zeichen, das wir gewöhnlich schreiben, wenn wir Nichts bezeichnen wollen; es ist dies hier: ϗ΄. Damit euch aber das Gesagte klarer wird, schreibe ich dir (!) *dies auf und lege es dar, wie du siehst:*

α΄ β΄ γ΄ δ΄ ε΄ ϛ΄ ζ΄ η΄ ϑ΄ ϗ΄

Die erste Ziffer, nämlich das Alpha, bezeichnet Eins, so wie es auch beim Bürgerlichen Rechnen genommen wird, das Beta aber bezeichnet Zwei und so der Reihe nach bis zum Theta, das Neun bezeichnet. Die kleinste und letzte Ziffer von allen aber, die das vorliegende ϗ΄ ist, kann nur ein Nichts bezeichnen, aber sie hat auch eine eigenständige Bedeutung für die ihr vorangesetzten Ziffern. Selbst aber für sich ist das ϗ΄ nicht imstande, etwas zu bezeichnen, denn das Nichts bezeichnet nichts. Deshalb wird es auch als Nichts geschrieben; an der Stelle nämlich, an der sich das ϗ΄ befindet, ist es eine Bezeichnung für nichts, wie wir entsprechend klarer erläutern werden.

Für jeden, der bisher ausschließlich ein nichtpositionelles System verwendet hatte, mussten beim dekadischen Positionssystem zwei Besonderheiten auffallen, die der Verfasser auch treffend beschreibt:
– Es genügen 10 Ziffern, um jede noch so große Zahl darzustellen.
– Die Null spielt eine besondere Rolle: Sie ist zwar einerseits ein "Nichts", hat

aber andererseits als Leerzeichen für eine unbesetzte Stelle *auch eine eigenständige Bedeutung für die ihr vorangesetzten Ziffern.*

Zur Verdeutlichung der ersten Besonderheit dient dem Autor die Auszählung des Sandes, ein unmissverständlicher Hinweis auf den ψαμμίτης, die "Sandrechnung" des Archimedes – vgl. CZWALINA (1963, S. 347–364). Hier wurden die Zahlen (ohne symbolische Darstellung) in 10^8 Oktaden eingeteilt: die 1. Oktade geht bis $10^8 - 1$, 10^8 ist Einheit der 2. Oktade, die bis $10^{16} - 1$ reicht usw. bis zur 10^8. Oktade, die von $10^{(10^8-1)8}$ bis $10^{10^8 \cdot 8} - 1$ reicht. Die letztere Zahl besteht in unserer Schreibweise aus 800 Millionen Neunern. Archimedes wie auch unser Autor waren sich der Schwierigkeit wohl bewusst, sehr große Zahlen im milesischen System darzustellen. Hier wie auch in jedem anderen nichtpositionellen Bündelungssystem erfordert nämlich jede neue Stufe der Bündelung im Prinzip ein neues Zahlensymbol.

Während in der byzantinischen Algorismusschrift von 1252 und auch im Rechenbuch des Planudes (ed. ALLARD 1977 bzw. 1981) τζίφρα (~ "Ziffer", von arab. *al-ṣifr* = die Leere, das Leersein) als Fachbegriff für die Null auftritt, treffen wir im vorliegenden Rechenbuch nur auf die Umschreibung (τὸ) οὐδέν. Bemerkenswert ist, dass es in Italien eine entsprechende Veränderung der Bezeichnung gegeben hat: Gegenüber früherem *zevero, cevero, cefiro, zero* (vgl. TROPFKE 1980, S. 17 f.) traten allmählich auch *nula* und *nulla* auf. Einen Beleg hierfür finden wir z. B. in der Arithmetik eines anonymen lombardischen Autors, die wahrscheinlich zu Beginn des 15. Jahrhunderts verfasst wurde, also vor unserer Handschrift:

Verbigratia levaremo queste 9 figure, zoè 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · e queste dese figure, le nove sono significative, la decima non significa nula, zoè 0, ma fa le altre significare com ipsa posta ... (ed. RIVOLO 1983, S. 2)

Diese Formulierung liegt sehr nahe bei der unseres Autors. Ganz ähnlich drücken sich auch noch die deutschsprachigen Rechenbuchautoren des 16. Jahrhunderts aus, z. B. Ries 1522 (ed. DESCHAUER 1991, A ij^{v}):

Numerirn Heyst zeln lernt wie man itzliche zal schreybē vñ aussprechen sol / dar zu gehörn zehē figurn. also beschribē 1.2.3.4.5.6.7.8.9.0 Die erstē neun seindt bedeutlich Die zehent gildt allein nichts / sonder so sie andernn furgesatzt wirt / macht sie die selbigen mher bedeuten ...

Es sei noch angemerkt, dass unser Wort "Ziffer", das Ries hier nicht verwendet, ursprünglich natürlich nur für die Null reserviert war – die übrigen Zahlzeichen hießen wie bei Ries "Figuren".

Im vorliegenden Kapitel des Rechenbuchs werden nun aber nicht etwa die westarabischen oder die ostarabischen Ziffernformen eingeführt, wie sie schon in der byzantinischen Algorismusschrift von 1252 bzw. im Rechenbuch des Planudes (ed. ALLARD 1977 bzw. 1981) zu finden sind. Der Verfasser erläutert vielmehr das dekadische Positionssystem unter Verwendung der griechischen Zahlbuchstaben α´ bis ϑ´, die dem Leser zur Bezeichnung der Einer vertraut waren. HUNGER/VOGEL (1963, S. 107) haben zu Recht darauf hingewiesen, dass die Wahl der griechischen Ziffernformen wohl didaktische Gründe hat: Der

Verfasser "... wollte vermeiden, daß die Schwierigkeiten für den Schüler, die schon durch die Einführung neuer Methoden erheblich sind, nicht noch dadurch sich vermehren, daß neue Symbole gelernt werden müssen." Entsprechend verfährt auch der Autor der von HUNGER/VOGEL edierten Aufgabensammlung, aber auch schon in Handschriften der Athener Parlamentsbibliothek aus dem 14. Jahrhundert finden sich positionelle Zahldarstellungen mit griechischen Ziffernformen (vgl. SARTON 1947, Band III, S. 120 f.). Nur an das Symbol ϗ für die neue Ziffer Null musste sich also der Leser gewöhnen. (In der Aufgabensammlung findet sich stattdessen ein Punkt.) Für dieses Zeichen ϗ, das bestimmten traditionellen Formen der ostarabischen 6 oder der westarabischen 5 ähnelt und auch in den erwähnten Athener Handschriften vorkommt, glaubt GARDTHAUSEN (1913, Band 2, S. 378 f.) eine Erklärung gefunden zu haben: Es gehe auf einen senkrechten Strich zurück, der ursprünglich das Fehlen einer Zahl (eine Leerstelle) angezeigt habe; da aber ein einfacher Strich leicht übersehen werden konnte, sei er mit einem Häkchen "differenziert" worden, also ʿ| statt |.
Insgesamt muss man aber einräumen, dass dem dekadischen Positionssystem – unabhängig von den jeweiligen Ziffernformen – in spätbyzantinischer Zeit nur mäßiger Erfolg beschieden war. Weder die Algorismusschrift von 1252 noch das Rechenbuch des Planudes (ed. ALLARD 1977 bzw. 1981) oder die Neuausgabe dieses Buchs von Rhabdas haben zur Popularisierung des neuen Systems wesentlich beitragen können. Viele byzantinische Autoren dieser Zeit (vgl. VOGEL 1960, S. 663 f.) bevorzugen das traditionelle System, so z. B. Georgios Pachymeres (vgl. TANNERY 1940) im 13. Jahrhundert sowie Manuel Moschopulos (vgl. TANNERY 3-1886 u. FOLKERTS 1981), Pediasimus (ed. FRIEDLEIN 1866), Bernardo Barlaam (ed. CHAMBER 1600), Isaak Argyros (vgl. ALLARD 1978) und der anonyme Schreiber eines Rechenbuchs (ed. VOGEL 1968) im 14. Jahrhundert – ja sogar Rhabdas zieht sich in seinen Briefen auf die alte Zahlbezeichnung zurück und begnügt sich, wie erwähnt, mit einem empfehlenden Hinweis auf die Ψηφηφορία κατ' Ἰνδούς für die schriftliche Multiplikation und Division. Erneute Anstöße im 15. Jahrhundert, die von unserem Rechenbuch, von der Aufgabensammlung oder von den bis zuletzt intensiven Handelskontakten mit Italien hätten ausgehen können – vgl. etwa das von 1436–1440 in Konstantinopel entstandene *Libro dei Conti* des Venezianers Giacomo Badoer (ed. DORINI/BERTELÈ 1956), das ausschließlich mit arabischen Ziffern geführt ist –, kamen zu spät. Schließlich haben die türkischen Eroberer das Positionssystem wieder mitgebracht und darüber hinaus auch die Dezimalbrüche eingeführt, die der persische Astronom al-Kāšī um 1427 wiederentdeckt hatte (vgl. LUCKEY 1951 und HUNGER/VOGEL 1963, S. 9, Nr. 36, S. 104).

3 ***Über die Einer-, Zehner-, Hunderter- und Tausenderstellen und welches andere der Reihe nach Größere entsteht und wie es genannt wird***

Die erste Stelle, die die Endziffer ist, bezeichnet die Einer, d. h. Eins und Zwei und Drei bis zu den Neun. Die zweite Stelle aber bezeichnet die Zehner, d. h. ι΄ und κ΄ und λ΄ bis zu den ϛ΄. Die dritte Stelle aber bezeichnet die Hunderter, d. h. ρ' und σ' und τ' bis zu den ϡ'. Die vierte Stelle aber bezeichnet die

Tausender, d. h. ,α´ und ,β´ und ,γ´ bis zu den ,ϑ´; denn die ,ι´ sind eine Myriade und haben die fünfte Stelle inne — leicht verständlich gesagt: Die Stellen sind jene, die uns die Einer, Zehner, Hunderter und Tausender anzeigen und welche anderen größeren Teile auch immer entstehen und wie auch immer sie genannt werden.

Bei der Übersetzung habe ich natürlich die im Text stehenden griechischen Symbole für die Ziffern und Zahlen beibehalten.
Der auch uns vertraute Aufbau der Stellen einer Zahl von rechts nach links geht auf die arabische Schriftrichtung zurück. Demgegenüber werden die Ziffern — ebenfalls wie bei uns — von links nach rechts gezählt, denn die erste Stelle wird ausdrücklich als Endziffer bezeichnet. (Korrekt wäre folgende Formulierung gewesen: An der ersten Stelle oder Einerstelle steht die Endziffer.)

4 ***Wie man Zahlen ausdehnen kann, bis sie einen Zehner von Tausendern und von Myriaden bezeichnen***

Damit euch das, was gesagt wird, klarer wird, wollen wir dies auch durch ein Beispiel sagen. — Angenommen, du willst dir ,αφλβ´ aufschreiben. Setze nun diese Ziffern α ε γ β´, und siehe: diese bezeichnen, was du suchst. Das β´, das sich an der letzten Stelle befindet entsprechend, wie wir lesen, aber gerade an der ersten Stelle, wie wir bei der Behandlung hier gewöhnlich zählen, bezeichnet Zwei. Wenn aber dieselbe erste Stelle, die das β´ hat, γ´ hätte, würde sie Drei bezeichnen und so der Reihe nach bis zum Theta, das Neun bezeichnet. Das γ´ aber, das dem Beta vorangestellt ist — weil es sich an der zweiten Stelle befindet, welche die Zehnerstelle ist, bezeichnet es Dreißig; denn Drei bezeichnet das γ´, wenn es sich an der ersten Stelle des Einers befindet. Da es aber an zweiter Stelle steht, die die Zehnerstelle ist, bezeichnet es drei Zehner, d. h. λ´; denn es bewahrt die eigene Gestalt und bezeichnet Drei — nicht vom Einer, sondern vom Zehner —, d. h. λ´. Wenn aber dieselbe zweite Stelle, die das γ´ hat, ϛ´ hätte, würde sie sechs Zehner bezeichnen, d. h. ξ´, und so der Reihe nach bis zum Theta, d. h. bis zu den Neun — dann würde sie ϟ´ bezeichnen. Das ε´ aber bezeichnet Fünf, aber weil es an dritter Stelle steht, bewahrt es die eigene Gestalt und bezeichnet fünf Hunderter, d. h. φ´. Wenn aber dieselbe dritte Stelle δ´ hätte, würde sie vier Hunderter bezeichnen, d. h. υ´. Wenn sie aber ϛ´ hätte, würde sie χ´ bezeichnen, und so der Reihe nach bis zu den Neun — dann würde sie ϡ´ bezeichnen. Denn so wie die Ziffern, die sich an der ersten Stelle befinden, die die Einerstelle ist, Einer bezeichnen, d. h. α´ β´ γ´ δ´ ε´ ϛ´ bis zu den ϑ´, so würden auch dieselben Ziffern, wenn sie sich an zweiter Stelle befänden, die die Zehnerstelle ist, ι´ κ´ λ´ μ´ ν´ ξ´ bezeichnen. Dieselben Ziffern aber, d. h. das α´ β´ γ´ δ´ ε´ ϛ´, würden, wenn sie sich an dritter Stelle befänden, die die Hunderterstelle ist, ρ´ σ´ τ´ υ´ φ´ χ´ bezeichnen. Die vierte Stelle aber, die das α´ hat, d. h. die vorliegenden Ziffern α ε γ β´, was ,αφλβ´ bezeichnet: Das α´ bezeichnet Eins, wenn es sich an der Einerstelle befindet. Wenn es sich aber wiederum an der zweiten Stelle befindet, die die Zehnerstelle ist, bezeichnet das α´ ι´, wenn es sich aber an der

dritten Stelle befindet, die die Hunderterstelle ist, bezeichnet es ρ´. Nun aber, da es sich an vierter Stelle befindet, die die Tausenderstelle ist, bezeichnet es ,α´. Wenn aber an derselben vierten Stelle, wo das α´ ist, β´ wäre, würde es, da es die Tausenderstelle ist, ,β´ bezeichnen; was immer aber an derselben vierten Stelle des Tausenders gefunden wird, d. h. γ´ oder δ´ oder ε´ bis zu den ϑ´, hat die Bedeutung ,γ´ und ,δ´ und ,ε´ und so der Reihe nach bis zu den ,ϑ´.

Die ,ι´ aber ist eine Myriade und hat ein Verhältnis zu den ,α´, welches die ι´ zum α´ haben. Denn so, wie wir das α´ an die erste Stelle setzen, die die Einerstelle ist und wo es Eins bezeichnet, setzen wir, wenn wir ι´ bezeichnen wollen, das α´ an die zweite Stelle – so gesetzt: α ͵ – mit der Bedeutung ι´. Ebenso bezeichnet das α´, wenn es sich an vierter Stelle befindet, ,α´. Wenn wir aber zehn Tausender bezeichnen wollen, setzen wir das α´ an die fünfte Stelle, und es bezeichnet zehn Tausender bzw. eine Myriade. Denn es ist dasselbe, wenn man zehn Tausender oder eine Myriade sagt. Das α´ nämlich bewahrt die eigene Gestalt und bezeichnet α´ oder ι´ oder ρ´ oder ,α´ oder Zehntausend, wenn es sich an erster, zweiter, dritter, vierter bzw. fünfter Stelle befindet. Wenn aber an fünfter Stelle Drei wäre – so gesetzt: γ ͵ ͵ ͵ ͵´ –: die γ´ bezeichnen ‹γ´› wie auch λ´, τ´, ,γ´ oder dreimal Zehntausend, wenn sie sich an erster, zweiter, dritter, vierter bzw. fünfter Stelle befinden; denn sie bewahren die eigene Gestalt überall, wo sie sich befinden. Denn wenn sie sich bei der Zehnerstelle befinden, bezeichnen die γ´ λ´, wenn sie sich aber bei der Hunderterstelle befinden, welche die dritte Stelle ist, bezeichnen die γ´ drei Hunderter, d. h. τ´, wie auch drei Zehner λ´ sind. Wenn sie sich aber bei der vierten Stelle befinden, welche die Tausenderstelle ist, bezeichnen die γ´ drei Tausender. Wenn sie sich aber bei der fünften Stelle befinden, welche der Zehner eines Tausenders ist – dasselbe ist die Myriadenstelle –, bezeichnen die γ´ λ´ Tausender – es ist dasselbe, wenn man drei Myriaden oder λ´ Tausender sagt. – Diese λ´ Tausender – so gesetzt: γ ͵ ͵ ͵ ͵´ – sind fünf Zahlzeichen. Da nun die erste Stelle eine Ziffer ͵´ hat, bezeichnet sie nichts; denn das Nichts bezeichnet nichts, wie wir sagten. Da ebenso auch die zweite Stelle ͵´ hat, bezeichnet sie nichts; ebenso auch die dritte und die vierte Stelle – da sie ͵´ haben, bezeichnen sie nichts. Dies allein zeigen uns die vier "Nichts" an, dass die γ´, die vor den vier "Nichts" stehen und sich an fünfter Stelle befinden, drei Myriaden bezeichnen, das sind λ´ Tausender. Streiche nun ein ͵´ und schreibe vier Ziffern γ ͵ ͵ ͵´. Nun aber, da es vier Ziffern sind, bezeichnen die γ´ ,γ´. Streiche wiederum ein ͵´ und schreibe drei Ziffern γ ͵ ͵´. Nun aber, da es drei Ziffern sind, bezeichnen die γ´ τ´. Streiche wiederum ein ͵´ und schreibe zwei Ziffern γ ͵´. Nun aber, da es zwei Ziffern sind, bezeichnen die γ´ λ´. Streiche erneut auch noch das eine ͵´ und schreibe allein die γ´. Nun aber bezeichnet die eine übrig gebliebene Ziffer Drei, da sie sich an der Einerstelle befindet. – Wenn du dir aber τ´ Tausender aufschreiben willst, was λ´ Myriaden sind, schreibe sechs Ziffern γ ͵ ͵̇ ͵ ͵ ͵´, kennzeichne dir aber die vierte Stelle des Tausenders mit einem Pünktchen. Da du vor dem Tausender, der die vierte Stelle ist, die du dir auch mit einem Pünktchen gekennzeichnet hast, zwei Ziffern hast, sind es von dem Pünktchen bis zum γ´

drei Ziffern und drei Stellen. Die dritte Stelle aber, die das γ´ hat, ist die Hunderterstelle, wie auch die vierte, die das Pünktchen hat, die Tausenderstelle ist. Das γ´ aber, da es vom Pünktchen aus an der dritten Stelle ist, bezeichnet τ´ Tausender, d. h. λ´ Myriaden. Und siehe, das ϒ´ – wenn es auch selbst keine Zahl bezeichnet, wird es gleichwohl für uns bedeutsam und ursächlich für Zehner, Hunderter, Tausender, Myriaden und was sonst noch Größeres entsteht. Wenn aber dieselbe sechste Stelle, die nun γ´ hat, δ´ hätte, würde sie vierhundert Tausender bezeichnen; wenn sie aber ε´ hätte, würde sie fünfhundert Tausender bezeichnen, und so der Reihe nach bis zu den ϑ´ – dann würde sie ϡ´ Tausender bezeichnen.
Ich glaube, dass wir die Ziffern und die Stellen der Tausender und Myriaden, die sie bezeichnen, damit hinreichend aufgezeigt haben für denjenigen, der sich gründlich mit der Sache beschäftigen kann; in gleicher Weise war es notwendig, euch auch die Tausender- und Myriadenstellen – und was sonst noch Größeres entsteht und wie es genannt wird – klarer durch Beispiele darzulegen, damit sie auch denjenigen bekannt werden, die sich nicht gründlich damit beschäftigen können.

Eine sehr ausführliche und dadurch auch teilweise etwas verwirrende Erläuterung der Stellenwertschreibweise:
Der Verfasser geht vom Beispiel 1532 aus. An späterer Stelle illustriert er die Stellenwerte an der Zahl 30 000, bei der er nacheinander die Nullen wegstreicht. Schließlich führt er am Beispiel 300 000 die Schreibweise mit Pünktchen ein, die der optischen Gliederung und damit der besseren Lesbarkeit der Zahl dient; das Pünktchen steht dabei auf der Tausenderstelle und entspricht dem kleinen Abstand, den wir bei unserer Zahlnotation nach dieser Stelle lassen. (Die vorher erörterte Zahl 30 000 wurde noch ohne Pünktchen geschrieben.) Der Autor spricht einerseits von zwei Ziffern, die vor der mit einem Pünktchen gekennzeichneten Tausenderstelle stehen, andererseits verweist er darauf, dass die Anfangsziffer 3 vom Pünktchen aus an der dritten Stelle steht: Hier wird die Tausenderstelle, die ja die Einerstelle für die Tausender ist, zu Recht mitgezählt.
Die Darstellung großer Zahlen mit Pünktchen war auch in deutschen Rechenbüchern bis weit in die Neuzeit hinein sehr verbreitet.

5 *Wie man Zahlen ausdehnen kann, bis sie Tausender von Tausendern bezeichnen, was bei den Lateinern Millionen, bei uns aber ρ´ Myriaden genannt wird*

Eine sehr große Zahl findet man bei den Lateinern, die bei ihnen Million, bei uns aber ρ´ Myriaden genannt wird, das sind tausend Tausender. – Angenommen, du willst dir ιε´ Millionen und υλβ´ Tausender und ωξζ´ aufzeichnen. Setze nun diese Ziffern α ε̈ δ γ β̇ η ς ζ´. Diese acht Ziffern nun bezeichnen, was du dir aufzuzeichnen suchst. Die vierte Stelle des Tausenders aber kennzeichne dir durch ein Pünktchen. Beginne aber mit der vierten Stelle des Tausenders, bei der du auch das Pünktchen oben gesetzt hast, und prüfe, wo wohl die

Tausenderstelle ist, vom Pünktchen aus angefangen, d. h. von der vorliegenden Ziffer ϐ΄ *aus. Du wirst aber finden, dass das* ε̈΄ *vom* ϐ΄ *aus die vierte Stelle innehat, d. h. die Tausenderstelle, und kennzeichne dir das* ε̈΄*, wie du siehst, mit zwei Pünktchen. Es bezeichnet aber die siebte Stelle, die das* ε̈΄ *hat, fünf Tausender von Tausendern, d. h. fünf Millionen. Wenn aber auch eine dritte Tausenderstelle vorhanden wäre, d. h. mehr als zehn Ziffern, würdest du dir auch die dritte Stelle des Tausenders — vom* ε̈΄ *aus angefangen —, die die zehnte Stelle ist, durch drei Pünktchen kennzeichnen, und die Stelle, die die drei Pünktchen hat, d. h. die zehnte, würde tausend Tausender von Tausendern bezeichnen, d. h.* ,α΄ *Millionen. Denn die Pünktchen, die die Tausender der Tausender kenntlich machen, zeigen uns klarer die gesuchte Größe der aufgezeigten Zahlen an, die wir zu wissen suchen.*

Diese acht Ziffern α ε̈ δ γ ϐ η ϛ ζ΄ *aber, die du oben aufgeschrieben hast — die* ζ΄ *bezeichnen sieben, da sie an der ersten Stelle des Einers stehen, die* ϛ΄ *aber bezeichnen* ξ΄*, da sie an der zweiten Stelle des Zehners stehen: Und siehe, diese zwei Ziffern* ϛ ζ΄ *bezeichnen* ξζ΄*. Die* η΄ *aber bezeichnen* ω΄*, da sie an dritter Stelle stehen, die die Hunderterstelle ist. Mit diesen drei* η ϛ ζ΄ *nun hast du* ωξζ΄*. Die* ϐ΄ *aber bezeichnen* ,β΄*, da sie sich an vierter Stelle befinden, die die Tausenderstelle ist. Mit diesen* δ΄ *—* ϐ̇ η ϛ ζ΄ *— hast du* ,βωξζ΄*. Die* γ΄ *aber, da sie sich an fünfter Stelle befinden, die die Myriadenstelle ist, bezeichnen drei Myriaden, d. h.* ,λ΄*. Mit diesen* ε΄ *—* γ ϐ̇ η ϛ ζ΄ *— hast du* ,λ,βωξζ΄*. Die* δ΄ *aber, da sie von den* ϐ΄ *aus die dritte Stelle innehaben, d. h. die Hunderterstelle, bezeichnen* ,υ΄ *oder — dasselbe gesagt —* μ΄ *Myriaden. Mit diesen sechs —* δ γ ϐ̇ η ϛ ζ΄ *— hast du* ,υ,λ,βωξζ΄*. Die* ε̈΄ *aber haben vom* ϐ΄ *aus die vierte Stelle inne, die Tausender von Tausendern bezeichnet, d. h. fünf Millionen. Mit diesen sieben —* ε̈ δ γ ϐ̇ η ϛ ζ΄ *— hast du* ε΄ *Millionen und* ,υ,λ,βωξζ΄*. Das* α΄ *aber vor dem* ε̈΄*, was fünf Millionen angibt, hat die zweite Stelle inne, die die Zehnerstelle ist, und bezeichnet zehn Millionen. Das* α΄ *aber mit dem* ε̈΄ *— so gesetzt:* α ε̈΄ *— bezeichnet* ιε΄ *Millionen. Mit diesen* η΄ *—* α ε̈ δ γ ϐ̇ η ϛ ζ΄ *— hast du* ιε΄ *Millionen und* ,υ,λ,β΄ *und* ωξζ΄*. Und siehe, du hast gefunden, dass diese acht Ziffern die Zahl bezeichnen, die du am Anfang darzustellen gesucht hast.*

Es gibt aber auch noch eine weitere größere Zahl, die Legion genannt wird, das sind tausend Tausender von Tausendern, was ,α΄ *Millionen sind. Denn angenommen, du suchst dir* ιβ΄ *Legionen und* ρν΄ *Millionen und* ,φ,μ,γ΄ *und* ψξη΄ *aufzuzeichnen. Setze nun diese Ziffern:* α β̈΄ α ε ÿ ε δ γ̇ ζ ϛ η΄*. Diese* ια΄ *Ziffern bezeichnen, was du dir aufzuzeichnen suchst: das sind* ιβ΄ *Legionen* ρν΄ *Millionen und* ,φ,μ,γ΄ *und* ψξη΄*.*

Insgesamt wird der Zahlenraum bis zu 10 Milliarden erweitert.

Zunächst führt der Verfasser die italienische Zahlbezeichnung Million ("Großtausend") für 100 Myriaden ein und erläutert diese neue Bezeichnung und die Stellenwertschreibweise am Beispiel der Zahl 15 432 867, wobei er von den Einern ausgeht. Über die Tausenderstelle setzt er ein und über die Millionenstelle zwei Pünktchen und sagt:

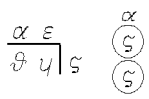
Wenn aber auch eine dritte Tausenderstelle vorhanden wäre, d. h. mehr als

zehn Ziffern (korrekt müsste es heißen: "zehn oder mehr Ziffern"), *würdest du dir auch die dritte Stelle des Tausenders ..., die die zehnte Stelle ist, durch drei Pünktchen kennzeichnen, und die Stelle, die die drei Pünktchen hat, d. h. die zehnte, würde tausend Tausender von Tausendern bezeichnen ...*
Auf jede Tausenderpotenz sind also Pünktchen zu setzen, wobei die jeweils gesetzte Anzahl der Pünktchen – modern gesprochen – dem Exponenten der Tausenderpotenz entspricht. Die dritte Tausenderstelle ist natürlich die Stelle mit dem Wert 10^9. Dagegen ist mit der anfangs genannten "vierten Stelle des Tausenders" die vierte Stelle der Zahl, d. h. die des Tausenders, gemeint.
Der Abstand zwischen den Tausenderpotenzen beträgt nach den Angaben des Autors vier Stellen, wobei jeweils die Stelle der kleineren Tausenderpotenz wieder mitgezählt wird.
Während das Wort *milione* schon um 1250 in Italien gebräuchlich war (TROPFKE 1980, S. 14), scheint die Bezeichnung "Legion" (λεγεών) sonst nur für "eine große Zahl" (DEMETRAKOS), nicht aber wie hier in der speziellen Bedeutung für "Milliarde" belegt zu sein. Das hier untersuchte Zahlenbeispiel ist 12 150 543 768.
Im Übrigen ist die Bezeichnung "Million" im deutschen Sprachraum erst bei Christoff Rudolff (1526) nachweisbar, während sich "Milliarde" erst im Zusammenhang mit den Reparationszahlungen nach dem deutsch-französischen Krieg von 1870/71 durchgesetzt hat (TROPFKE 1980, S. 16).

6 *Wie man einen Zehner mit einem Einer multiplizieren kann, und zwar ιε´ mit den ς´*

(15 · 6 = 90)

Es ist schon an der Zeit, weiter voranzuschreiten und sich mit der Grundlage für die Multiplikation zu befassen. Angenommen, du suchst danach, wie viel ς´ mal ιε´ ergibt. Zuerst muss man wissen, dass es ein Schema gibt, das wir gewöhnlich "zweiseitig" nennen, mit dem jede Multiplikation geschieht. Es ist das hier: Setze oben die ιε´, seitlich aber die ς´; denn so muss man es bei der vorliegenden Methode machen, dass nach oben das Größere, seitlich aber das Kleinere gesetzt wird. Multipliziere aber die ς´ auf der Seite mit den ε´ oben: ς´ mal ε´ gibt nun λ´, was drei Zehner sind. Und da nun von den λ´ nichts übrig bleibt wie etwa bei λβ´ oder λγ´, sondern die λ´ nur Zehner angeben, behalte γ´ anstelle der λ´ bei dir und setze an die Einerstelle "Nichts", was dieses Zeichen hier ist: υ´. Multipliziere aber wiederum die ς´ auf der Seite mit dem α´ oben, das Zehn bezeichnet: ς´ mal α´ gibt nun ς´, dies sind ς´ Zehner, d. h. ξ´. Addiere diese ς´ Zehner zu den γ´ Zehnern, die du anstelle der λ´ bei dir behältst, und es ergeben sich zusammen ϑ´ Zehner. Setze nun an die Zehnerstelle, die die zweite ist, die ϑ´ Zehner, und siehe: Dieses Theta, was Neun bezeichnet, wenn es sich an der Einerstelle befindet, – nun aber, da es an zweiter Stelle steht, die die Zehnerstelle ist, bezeichnet es ϑ´ Zehner, d. h. ϙ´. Die ϑ´ aber mit dem υ´ – so gesetzt: ϑ υ´ – bezeichnen ϙ´. Und siehe, du hast mit der vorliegenden Methode gefunden, dass die ιε´ mit den ς´ multipliziert ϙ´ ergeben.



Wie es bereits in der Vorrede angeklungen war, beginnt der Autor nun tatsächlich gleich mit der schriftlichen Multiplikation. Die schriftliche Addition, die eigentlich als Voraussetzung unerlässlich ist, wird erst im Kapitel 101 thematisiert. Dieses Defizit wird sich bei der Erklärung des Beispiels in Kapitel 12 und der allgemeinen Verfahrensbeschreibung in Kapitel 14 bemerkbar machen.
Mit dieser eigenwilligen Stoffanordnung steht der Schreiber aber nicht allein: Der spanisch-jüdische Philosoph und Astrologe Abraham ben Ezra (geb. um 1090, gest. um 1167) (SILBERBERG 1895) und Leonardo von Pisa (geb. um 1170, gest. nach 1240) (BONCOMPAGNI 1857) behandeln die Addition und Subtraktion erst nach der Multiplikation, Abraham bar Ḥiyya (Savasorda), ein spanisch-jüdischer Mathematiker und Astronom (gest. 1136) (CURTZE 1902) sogar erst – wie unser Autor – nach der Division. In anderen arithmetischen Werken fehlen Addition und Subtraktion sogar ganz – vgl. TROPFKE (1980, S. 159 f.).
Die vorliegende Multiplikationsmethode ist als Methode der "Trennung der Plätze" bereits in indischen Quellen vielfach belegt (TROPFKE 1980, S. 213 f.) und entspricht grundsätzlich auch unserem heutigen Verfahren, wobei die Anordnung der Faktoren allerdings variiert.
Hier wird der größere Faktor nach oben, der kleinere in umgekehrter Reihenfolge der Ziffern (vgl. Kapitel 10, 12 und 14) seitlich geschrieben, wodurch man erreicht, dass man mit den Einern beginnen kann. Die Teilprodukte mit den Ziffern der höheren Stellenwerte des 2. Faktors werden jeweils entsprechend nach links eingerückt.
Dasselbe Verfahren – mit gleicher Anordnung der Faktoren – findet sich auch im byzantinischen Cod. Parisinus suppl. Gr. 652, ebenfalls aus dem 15. Jahrhundert (ALLARD 1973, S. 134–139).
Bei unserer heutigen Anordnung der Faktoren wird dagegen das erste Teilprodukt aus der Einerziffer des ersten und der stellenwerthöchsten Ziffer des zweiten Faktors gebildet.
Die Vorschrift des Autors, den größeren Faktor zuerst (nach oben) zu schreiben, ist nicht zwingend, dient aber dazu, den Schreibaufwand zu verkleinern:

$$\begin{array}{r|l} 1\ 5 & \\ 9\ 0 & 6 \end{array} \qquad \text{vgl. mit} \qquad \begin{array}{r|l} & 6 \\ 3\ 0 & 5 \\ \underline{6} & 1 \\ 9\ 0 & \end{array}$$

Auffällig ist, dass der Verfasser im Text dieses Kapitels weiterhin die traditionellen griechischen Zahlen benutzt, obwohl er ja nun das neue System vollständig eingeführt hat. Auch in allen weiteren Kapiteln hält er im Text ganz überwiegend am milesischen System fest – die Kapitelnummerierung ist stets "milesisch", dagegen sind in den Rechendiagrammen fast ausnahmslos die positionellen Zahlen zu finden.

7 ***Über die Probe davon und den Beweis, ob sich das Gesuchte richtig oder nicht richtig ergeben hat***

Der Beweis und die Probe davon, ob sich das Gesuchte richtig ergeben hat, ist diese.

Suche zuerst, welche Zahl auch immer du oberhalb des geraden Strichs multiplizierst, die nun α ε´ ist. Dividiere das α ε´, so oft es möglich ist, durch die ζ´: zwei mal ζ´ nun gibt ιδ´, als Rest bleibt α´ bis zu den ιε´. Teile auch das auf der Seite, was ϛ´ ist, durch die ζ´. Da aber die ϛ' kleiner sind als die ζ´, können sie nicht als kleinere durch die ζ´ geteilt werden; es bleiben wiederum ϛ´. Multipliziere aber diese ϛ´, die auf der Seite sind, mit dem α´, das von den ιε´ übrig geblieben ist: sechs mal α´ gibt nun ϛ´. Setze dies in einen Kreis, wie du siehst: (ϛ) *. Teile auch die herauskommende Ergebniszahl, das ist das vorliegende ϑ ψ´, was ϛ´ bezeichnet, durch die ζ´. Subtrahiere nun von der ersten Ziffer, dem Theta natürlich, ζ´, und es bleiben β´ übrig. Diese β´ bezeichnen mit der nächstfolgenden Ziffer, die ψ´ ist — so gesetzt: β ψ´ — κ´. Teile auch diese durch die ζ´: zwei mal ζ´ nun gibt ιδ´, und es bleiben als Rest ϛ´ bis zu den κ´. Setze auch diese in einen Kreis:* (ϛ) *. Da aber die zwei Proben davon gleich befunden wurden, weil jede als Ziffer die ϛ´ hat, kam das herausgekommene Produkt, d. h. die ϑ ψ´, richtig und wahrheitsgemäß heraus. Wenn aber die beiden Proben davon ungleich befunden worden wären, etwa wenn eine ϛ´, die andere aber irgendeine andere ungleiche Ziffer gewesen wäre, wäre auch bei den herauskommenden ϑ ψ´ nicht richtig multipliziert worden.*

In diesem Kapitel führt der Schreiber zur Kontrolle der Multiplikation $15 \cdot 6 = 90$ die Siebenerprobe durch: Er vergleicht das Produkt aus dem Siebenerrest von 15 (1) und dem Siebenerrest von 6 (6), also 6, mit dem Siebenerrest von 90 (6). Die beiden Probezahlen, 6 und 6, setzt er jeweils in einen Kreis ans Ende des Multiplikationsdiagramms; über der ersten Probezahl steht außerdem noch der Siebenerrest des ersten Faktors 15 — siehe das Diagramm in Kapitel 6.

Allgemein gilt bei einer Multiplikation $a \cdot b = c$ (a, b, c natürliche Zahlen), dass der Siebenerrest des Produkts aus den Siebenerresten von a und b (1. Probezahl) mit dem Siebenerrest von c (2. Probezahl) übereinstimmt. (Da in unserem Beispiel das Produkt aus den Siebenerresten von a (= 15) und b (= 6) kleiner als 7 ist, erübrigt sich die Bestimmung des Siebenerrestes dieses Produkts.)

Der zahlentheoretische Hintergrund hierzu ist die Multiplikativität der Kongruenzrelation. Mit der Schreibweise $n \equiv n'$ mod m für die Bedingung, dass sich bei der Division der natürlichen Zahlen n und n' durch die natürliche Zahl m jeweils derselbe Rest (0 eingeschlossen) ergibt oder — anders formuliert — dass $n - n'$ durch m teilbar ist (Erweiterung des Teilbarkeitsbegriffs auf ganze Zahlen, da $n - n'$ auch negativ sein kann), erhält man folgende Aussage:

Aus $a \equiv a'$ mod m und $b \equiv b'$ mod m folgt $a \cdot b \equiv a' \cdot b'$ mod m.

Das sieht man leicht ein, wenn man den Term $a \cdot b - a' \cdot b'$ in $a \cdot (b - b') + (a - a')\, b'$ umformt. Nach Voraussetzung sind beide Summanden durch m teilbar und daher auch die Summe.

Wählt man nun a', b' so, dass $0 \leq a', b' < m$ gilt, so sind a' und b' die Reste von a bzw. b nach Division durch m. Der Rest von $a \cdot b$ nach Division durch m lässt

sich also über das Produkt der Reste von a und b berechnen. Falls dieses Produkt größer oder gleich m ist, stimmt erst sein Rest nach Division durch m mit dem Rest von $a \cdot b$ überein.

Die Siebenerprobe ($m = 7$) ist also offenbar nur eine spezielle Rechenprobe für die Multiplikation. (In unserem Beispiel ist $a = 15$, $b = 6$, $a \cdot b = 90$, $a' = 1$, $b' = 6$, $a' \cdot b' = 6$.) So erwähnt Leonardo von Pisa zum Beispiel ausdrücklich, dass auch Restproben mit ($m =$) 11, 13 usw. möglich sind (BONCOMPAGNI 1857, S. 34).

Insbesondere bietet sich aber die Wahl $m = 9$ an: Bei der Neunerprobe brauchen die Neunerreste nicht durch Division bestimmt zu werden, da sie sich viel einfacher mit Hilfe der Quersummen ergeben.

Zum mathematischen Hintergrund:

Wenn eine natürliche Dezimalzahl a die Positionsdarstellung ("Zifferndarstellung") $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ hat, so gilt $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ mit der Quersumme $Q(a) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$. Die Summanden der Differenz $a - Q(a)$ enthalten daher der Reihe nach die Faktoren $10^n - 1$, $10^{n-1} - 1$, ..., $10 - 1$, die stets durch 9 teilbar sind, was man mithilfe der vollständigen Induktion beweisen kann. Also ist $a - Q(a)$ durch 9 teilbar, sodass a und $Q(a)$ denselben Neunerrest haben.

So verwendet unser Autor zur Kontrolle der schriftlichen Addition und Subtraktion in den Kapiteln 101 und 102 im Text zwar die Siebenerprobe, aber in den Marginalien auch die vorteilhaftere Neunerprobe. Wesentlich ausführlicher behandelt er diese jedoch im "Vortext" zum Rechenbuch, und zwar auf fol. $7^r/7^v$:

Über eine andere klare und handliche Methode eines Beweises und einer Probe, von der wir noch nicht sprachen

Bei der Untersuchung der Multiplikation wirst du verschiedene Beweise und Proben finden, die durch die Zahl Sieben entstanden sind, wie du dort klarer erfahren kannst. Es wurde uns aber auch ein anderer Beweis und eine andere Probe bekannt, welche durch die Zahl Neun handlicher und leicht genommen wird; nachdem wir diese dort nicht gezeigt haben, weil sie uns unbekannt war, schien es uns nötig, diese nun zu zeigen, weil sie klarer und handlich ist.

Die Schritte zur Bildung der Quersumme einer Zahl — hier am Beispiel 368 ($368 \Rightarrow 17 \Rightarrow 8$) — formuliert der Schreiber so: ἕνωσον ... τὸν γϛη´ ... ἀριθμὸν καὶ γίνεται ὁμοῦ αζ´. ἕνωσον τὸ α´ καὶ ζ´ καὶ γίνονται ὁμοῦ η´.

Allerdings verkennt unser Autor — wie viele andere seiner Zeit auch —, dass derartige Rechenproben nicht als hinreichendes, sondern nur als notwendiges Kriterium für die Richtigkeit einer Rechnung verwendet werden können: Die beiden letzten Sätze von Kapitel 7 enthalten zwei mathematische Aussagen, von denen nur die zweite richtig ist; z. B. deckt die Siebenerprobe die fehlerhafte Multiplikation $8 \cdot 6 = 90$ nicht auf.

Eine korrekte Bewertung der Rechenproben findet sich bei den Muslimen, z. B. bei al-Uqlīdisī (SAIDAN 1966, S. 381 u. SAIDAN 1978, S. 196) und al-Kāšī (LUCKEY 1951, S. 26 f.), im Westen wohl erst in der *Triparty* (1484) von Chuquet (ed. MARRE 1880, S. 603). Dieser verwendet wie unser Schreiber vorwiegend die Siebenerprobe, während im Rechenbuch des Planudes (ed. ALLARD 1981) nur die Neunerprobe behandelt wird. Die Siebenerprobe scheint in anderen

byzantinischen Texten nicht belegt zu sein.
Bei der Darstellung der Siebenerproben in diesem und den folgenden Kapiteln 9, 11, 13 und 15 wirkt sich nachteilig aus, dass die schriftliche Division nicht zuvor eingeführt worden ist.

8 *Wie man ρν´ mit den ζ´ multiplizieren kann*

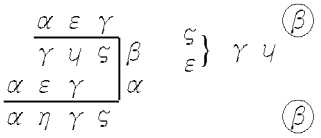
(150 · 7 = 1050)

9 *Über die Probe davon und den Beweis*

Die Siebenerreste von 150 und 7 sind 3 bzw. 0: 3 · 0 = 0. Dies ist die 1. Probezahl, die im Diagramm von Kapitel 8 obere eingekreiste Zahl mit dem Faktor 3 darüber. Bei der Bestimmung des Siebenerrestes von 1050 argumentiert der Autor sinngemäß so: 10 ⇒ Rest 3, 35 ⇒ Rest 0, 00 ist wieder nichts und kann nicht durch 7 geteilt werden. Daher ist als 2. Probezahl (untere eingekreiste Zahl) 0 zu setzen.

10 *Wie man ρνγ´ mit den ιβ´ multiplizieren kann*

(153 · 12 = 1836)



Setze oben die ρνγ´, weil sie größer sind, seitlich aber die ιβ´. Multipliziere aber die β´ auf der Seite mit den γ´ oben: zwei mal γ´ gibt nun ς´. Setze nun unterhalb der γ´ in die Einerstelle ς´. Multipliziere aber wiederum die β´ auf der Seite mit den obigen ε´, die ν´ bezeichnen: zwei mal ε´ gibt nun α υ´. Setze nun in die Zehnerstelle υ´, behalte aber α´ bei dir anstelle der Zehn. Multipliziere aber wiederum die β´ auf der Seite mit dem obigen α´, das ρ´ bezeichnet: zwei mal α´ gibt nun β´. Addiere diese β´ zum α´, das du gesondert anstelle der Zehn behältst, und es gibt zusammen γ´. Aber diese γ´ sind drei Hunderter, d. h. τ´. Setze nun die γ´, die τ´ bezeichnen, unterhalb von α´, d. h. an die dritte Stelle, die die Hunderterstelle ist: Und siehe — du hast die Multiplikation der seitlich zweiten Ziffer, welche β´ bezeichnet, mit den obigen ρνγ´ vollendet. Multipliziere aber wiederum auch die seitlich erste Ziffer, d. h. das α´, das Zehn bezeichnet, mit den γ´ oben, die sich an der Einerstelle finden: einmal γ´ ist nun wiederum γ´. Diese γ´ aber, da du einen Zehner mit einem Einer multiplizierst, sind drei Zehner, d. h. λ´. Rücke nun die Einerstelle vor und setze γ´ unten an die zweite Stelle, welche die Zehnerstelle ist. Multipliziere aber wiederum das seitliche α´, das Zehn bezeichnet, mit den ε´ oben, die ν´ bezeichnen: einmal ε´ ist nun wiederum ε´, d. h. fünf Hunderter, was φ´ ist. Setze nun ε´ an die dritte Stelle der obigen Ziffern, aber an die zweite bezüglich der γ´, die du vorangesetzt hast. Multipliziere aber wiederum das seitliche α´, das Zehn bezeichnet, mit dem α´ oben, das ρ´ bezeichnet: einmal α´ ist nun wiederum α´. Dieses α´ aber ist , α´. Setze nun α´ an die vierte Stelle bezüglich der obigen Ziffern, aber an die dritte bezüglich der beiden unteren. Und siehe — du hast

auch die Multiplikation der seitlich ersten Ziffer, welche Zehn bezeichnet, mit den obigen ρνγ´ vollendet. Addiere aber die zwei Zahlen, die du zustande gebracht hast, und setze unterhalb des anderen geraden Strichs an die erste Stelle, die die Einerstelle ist, ς´. Setze aber wiederum an die Zehnerstelle, die die zweite ist, γ´. An die dritte Stelle aber, die die Hunderterstelle ist, setze η´. An die vierte Stelle aber, die die Tausenderstelle ist, setze α´. Und siehe – du hast gefunden, dass die ρνγ´ mit den ιβ´ multipliziert ,αωλς´ ergeben.

Erstmals multipliziert der Autor hier mit einer mehrstelligen Zahl. Da die Methode darauf beruht, dass zuerst die Einer mit den Einern multipliziert werden, muss der Multiplikator rechts von oben nach unten betrachtet nach seinen Stellen aufgebaut, d. h. in umgekehrter Reihenfolge der Ziffern geschrieben werden. Auf diese eigentümliche Anordnung geht der Autor hier nicht direkt ein, bezeichnet aber nach Abschluss der jeweiligen Teilmultiplikationen die seitlichen Ziffern β´ und α´ als zweite bzw. erste Ziffer (sc. von α β´). Da der Multiplikator zweistellig ist, sind abschließend zwei Teilprodukte stellenweise zu addieren. Die zugehörige Beschreibung im Text ist auch ohne vorherige Behandlung der schriftlichen Addition leicht verständlich, weil hier noch kein Zehnerübertrag auftritt.

11 *Über die Probe davon und den Beweis*

Die Durchführung der Siebenerprobe ist hier in ihrer allgemeinen Form durchzuführen.

Die Siebenerreste von 153 und 12 sind 6 bzw. 5 (siehe Diagramm von Kapitel 10): $6 \cdot 5 = 30$ (siehe Diagramm). Der Siebenerrest von 30 ist 2 (1. Probezahl, im Diagramm oben wieder eingekreist). Der Siebenerrest von 1836 ist 2 (2. Probezahl, im Diagramm unten wieder eingekreist).

12 *Wie man die Jahre seit Christi Geburt, die ,αυλς´ sind, mit den τξε´ Tagen des Jahres multiplizieren und wissen kann, wie viel Tage sich ergeben*

$(1436 \cdot 365 = 524140)$

Erstmals wird hier die Multiplikation bei einer Sachaufgabe angewendet, wobei allerdings die Schaltjahre vernachlässigt werden. Diese Aufgabe ist aber von besonderer Bedeutung, da sie uns das Abfassungsjahr (1436) der Handschrift verrät.

Darüber hinaus macht sich der Autor wieder Gedanken über die Ziffern, die zuerst zu multiplizieren sind: Es sind die letzte Ziffer (Endziffer) der Zahl auf der Seite, nämlich 5, und die Endziffer 6 der oberen Zahl. Damit ist die umgekehrte Ziffernreihenfolge des rechten Multiplikators – von oben nach unten betrachtet – festgelegt.

Der ausführliche Text zur stellengerechten Addition der drei Teilprodukte, bei der Zehnerüberträge auftreten, hätte sich erübrigt, wenn zuvor die schriftliche Addition behandelt worden wäre.

13 *Über die Probe davon und den Beweis*

Schon in den Kapiteln 9 und 11 wurde deutlich, dass sich zur Durchführung der Siebenerprobe das schriftliche Divisionsverfahren anbietet, wobei es schrittweise allerdings nur auf die Reste und nicht auf die Quotienten ankommt. So bestimmt unser Schreiber z. B. den Siebenerrest von 1436 folgendermaßen: 14 : 7 ⇒ Rest 0, (03 =) 3 : 7 "geht nicht", weshalb die nächste Stelle hinzugezogen werden muss: (Bei der schriftlichen Division wäre der Teilquotient 0 zu notieren.) 36 : 7 ⇒ Rest 1

Am Schluss des Kapitels verweist der Autor auch auf die Möglichkeit, die Siebenerprobe im Kopf durchzuführen. Dazu sei jeweils der Zusammenschluss (συζυγία) zweier Ziffern zu nehmen und durch 7 zu teilen (Umkehrung des kleinen Einmaleins!). Hier erwähnt er allerdings nicht, dass mit der ersten Ziffer anders zu verfahren ist, falls diese größer oder gleich 7 ist: In Kapitel 7 bestimmt er den Siebenerrest von 90, indem er zunächst 7 von 9 subtrahiert und dann 20 betrachtet. Natürlich hätte er auch 9 : 7 rechnen können.

Traditionell galt eine schriftliche Rechnung ohne Rechenprobe (z. B. Siebenerprobe, Neunerprobe oder Probe durch die Umkehroperation) als unvollständig, sodass unser Autor, wie andere auch, die Erklärung der Siebenerprobe nicht so lange zurückstellte, bis er die schriftliche Division eingeführt hatte.

14 *Umfassend über alle Teile, die multipliziert werden*

Nachdem wir euch zur Genüge in verschiedenen Beispielen aufgezeigt haben, wie es nun möglich ist, zwei Teile miteinander zu multiplizieren und zuverlässig und leicht das aus ihnen entstandene Endprodukt zu erfahren, schien es uns erforderlich zu sein, euch auch umfassend darzulegen und aufzuzeichnen, wie du (!) zwei zufällige Zahlen sachgerecht durch das zweiseitige Schema multiplizieren und zuverlässig und leicht das aus ihnen entstandene Endprodukt erfahren kannst.

Zuerst, wie wir auch in den Beispielen sagten, setze dir den größeren Teil der zwei Teile, die multipliziert werden, wie groß auch immer er sei, oberhalb des geraden Strichs, seitlich aber setze dir den kleineren Teil, wie man dies auch in den Beispielen sehr deutlich sieht. Danach multipliziere die seitlich oberste Ziffer, die die Einerziffer ist, mit der letzten Ziffer oben, die sich an der Einerstelle befindet, und das daraus entstehende Produkt — die unterhalb des Zehners befindliche einzifferige Zahl setze dir in die Einerstelle ein, anstatt der Zehner aber nimm so viele Einer, d. h. α´ anstatt der ι´ und β´ anstatt der κ´ und γ´ anstatt der λ´ und so der Reihe nach, und behalte diese bei dir. Multipliziere wiederum mit derselben seitlichen Einerziffer die oben vor der Endziffer stehende Ziffer, die sich an der Zehnerstelle befindet: Das Produkt, das sich daraus ergibt, addiere zu den Einern, die du gesondert anstatt der Zehner behältst, und das, was von den Zehnern übrig bleibt, setze dir unterhalb des geraden Strichs an die Zehnerstelle, anstatt der Zehner aber behalte ebenso viele Einer bei dir. Auf die gleiche Weise multipliziere mit derselben seitlichen Einerziffer die Ziffer oben, die sich an der Hunderterstelle befindet, welche die dritte ist. Ebenso multipliziere auch die an vierter und fünfter Stelle — und

wie viel auch immer du oben hast bis zur letzten Ziffer vom Ende her, zur ersten aber vom Anfang her – mit der seitlich obersten Einerziffer und setze dir unterhalb des geraden Strichs an die zugehörigen Stellen entsprechend das, was kleiner ist als die Zehner, anstatt der Zehner aber nimm ebenso viele Einer und behalte diese bei dir. Und zu den multiplizierten Zahlen addiere die Einer, die du anstatt der Zehner bei dir behältst, bis du auf diese Weise alle oberen Ziffern beendest, wie viele auch immer es sind.

Nach der Beendigung der seitlich obersten Ziffer, die an der Einerstelle liegt, mache wiederum mit allen Ziffern oben bei der seitlich tieferen zweiten Ziffer den Anfang, die an der Zehnerstelle steht, und multipliziere diese mit allen Ziffern oben, so wie du es auch bei der ersten gemacht hast. Die auftretenden Zehner- und Einerziffern – da du mit der Ziffer auf der Seite multiplizierst, die sich an der Zehnerstelle befindet, rücke um die Einerstelle vor und beginne diese ab der Zehnerstelle zu schreiben, welche die zweite ist, bis du auf diese Weise entsprechend die seitlich zweite Ziffer, die sich an der Zehnerstelle befindet, mit allen Ziffern oben beendest, so wie du es auch bei der ersten gemacht hast.

Ebenso multipliziere wiederum auch die seitlich dritte Ziffer, die an der Hunderterstelle steht, auf die gleiche Weise mit allen Ziffern oben, die herauskommenden Einer und Zehner aber – da du mit der Hunderterziffer multiplizierst, rücke sowohl um die Einerstelle als auch um die Zehnerstelle vor und beginne diese entsprechend ab der dritten Stelle zu schreiben, welche die Hunderterstelle ist, bis du alle Ziffern oben beendest.

Ebenso wenn du auf der Seite auch eine vierte Ziffer mit den Ziffern oben zu multiplizieren hast: Da die vierte Ziffer zum Tausender gehört, die auftretenden Einer und Zehner – rücke sowohl um die Einer- als auch um die Zehner- als auch um die Hunderterstelle vor und beginne diese entsprechend ab der vierten Stelle zu schreiben, welche die Tausenderstelle ist, bis du alle Ziffern oben beendest.

Wenn du auf der Seite auch eine fünfte Ziffer mit den Ziffern oben zu multiplizieren hast: Die auftretenden Einer und Zehner – rücke um die Einer-, die Zehner-, die Hunderter- und die Tausenderstelle vor und beginne diese entsprechend ab der fünften Stelle zu schreiben, welche die Myriadenstelle ist, bis du alle Ziffern oben beendest.

Nach der Multiplikation aller Ziffern auf der Seite mit allen Ziffern oben addiere all diese, angefangen vom Ende, welches die Einerstelle ist, und die Einer, die von den Zehnern übrig bleiben, setze dir unterhalb des anderen geraden Strichs direkt nach jeder Aufreihung. Anstatt der Zehner aber behalte ebenso viele Einer bei dir. Nachdem du die Einer, die du anstatt der Zehner behältst, mit den anderen Ziffern addiert hast, die du noch nicht addierst hast, setze dir die Einer direkt unterhalb der Ziffern, die du entsprechend aufsuchst, anstatt der Zehner aber behalte ebenso viele Einer bei dir, bis du auf diese Weise entsprechend alle Ziffern von denen addiert hast, die du bei der Multiplikation erhalten hast; und du wirst die im Einzelnen multiplizierten Ziffern davon zu einer einzigen Endzahl machen. Auf diese Weise wirst du jedes gesuchte Produkt zweier Zahlen richtig herausfinden.

Eine sehr ausführliche, vollständige und korrekte allgemeine Beschreibung des "zweiseitigen" Multiplikationsverfahrens, die auch die schriftliche Addition der Teilprodukte mit einschließt

Bei der Multiplikation der Einerziffern wird auf die *unterhalb des Zehners befindliche einzifferige Zahl* (τὸν μὲν κάτωθεν τῆς δεκάδος ὄντα ἁπλὸν ἀριθμόν) hingewiesen: κάτωθεν ist hier und auch an manchen anderen Stellen quantitativ gemeint.

15 ***Umfassend über Probe und Beweis aller Teile, die multipliziert werden***

Nachdem wir die Methode und Behandlung bei der Multiplikation beendet haben, wollen wir fernerhin auch über die Probe und den Beweis von allen deutlicher reden und umfassend aufzeigen, wie du nun die Proben für alle herauskommenden Endzahlen richtig nehmen kannst.

Suche zuerst, welche Zahl du oberhalb des geraden Strichs multiplizierst, nimm von ihr die ersten zwei Ziffern und prüfe, wie viel sie bezeichnen. Teile aber das, was bezeichnet wird, so oft es möglich ist, durch die ζ΄. Und wenn das Ergebnis davon herauskommt, ohne einen Rest unterhalb der ζ΄ zu haben, behalte anstatt irgendeiner Zahl ψ΄; wenn aber eine Zahl übrig bleibt, die kleiner als die ζ΄ ist, behalte diese (Zahl). Nimm aber entsprechend der Reihe nach auch eine weitere Ziffer und prüfe diese zwei — die gegenüber den ζ΄ kleinere natürlich und die andere, die du hinzugenommen hast —, wie viel sie bezeichnen, und teile diese wiederum durch die ζ΄. Und wenn etwas Kleineres unterhalb von den ζ΄ übrig bleibt, behalte dies und nimm wiederum eine weitere Ziffer entsprechend der Reihe nach und teile diese wiederum durch die ζ΄. Wenn aber die zwei Ziffern völlig zu Ende gebracht werden, ohne dass sie etwas gegenüber den ζ΄ Kleineres haben, behalte anstatt irgendeiner Zahl ψ΄, wie wir sagten. Von dem ψ΄ aber kannst du ζ΄ nicht subtrahieren; vernachlässige nun das ψ΄, weil es unbrauchbar ist, nimm der Reihe nach zwei weitere Ziffern, prüfe, wie viel sie bezeichnen, und teile sie durch die ζ΄. Auf diese Weise führe, beginnend von der ersten und zweiten Ziffer, alle Ziffern des geraden Strichs oben bis zur letzten Ziffer zu Ende — und Ende von allem. Wenn etwas unterhalb von den ζ΄ übrig bleibt, schreibe dies gesondert. Wenn aber das Ende davon in den nämlichen ζ΄ aufhört, ohne dass sie etwas übrig haben, schreibe anstatt irgendeiner Zahl ψ΄.

Danach mache auch bei den auf der Seite stehenden Zahlen das Gleiche für alle Ziffern, die sich finden, beginnend von den zwei Ziffern an — der ersten natürlich und der zweiten —, bis du alle vom Anfang bis zur letzten zu Ende gebracht hast, indem du diese durch die ζ΄ dividierst, so wie wir es — wie gesagt — bei den Ziffern oberhalb des geraden Strichs machen — und Ende von allem. Wenn etwas unterhalb von den ζ΄ übrig bleibt, schreibe dieses in die Nähe zu dem, was du aus der letzten Verbindung der letzten zwei Ziffern von oben gesondert geschrieben hast. Wenn sie aber keinen Rest haben, der kleiner als die ζ΄ ist, schreibe anstatt irgendeiner Zahl ψ΄.

Die letzten zwei Ziffern unterhalb von den ζ΄, die aus dem herauskommen, was oberhalb des geraden Strichs und was auf der Seite steht, und die wir, wie wir

sagten, nahe nebeneinander gesondert geschrieben haben — multipliziere die zwei herausgekommenen Teile davon miteinander; und wenn der eine Teil ϒ′ hat, der andere aber irgendeine Zahl, etwa ϒ′ mit γ′ oder mit δ′ oder mit ε′, ergibt sich bei der Multiplikation wiederum ϒ′. Wenn aber der eine α′ hat, der andere aber β′ oder γ′ und so der Reihe nach, ist einmal β′ wieder β′ und einmal γ′ wieder γ′ und so der Reihe nach. Wenn aber der eine δ′ ist, der andere ε′, gibt δ′ mal ε′ ϰ′ und ε′ mal ϛ′ λ′ und so der Reihe nach. Wenn nun die letzten beiden Ziffern unterhalb von den ζ′ von oben und von der Seite multipliziert werden und dieses Produkt kleiner wird als die ζ′, wie bei einmal die β′ wieder gleich β′ und einmal die γ′ wieder gleich γ′ — setze dies in einen Kreis, wie es in den Beispielen gesetzt ist. Wenn es aber größer als die ζ′ wird, wie z. B. δ′ mal ε′ ϰ′ und ε′ mal ϛ′ λ′ ergeben und so der Reihe nach, teile auch dies durch die ζ′, und den Rest unterhalb der ζ′ — setze diesen in einen Kreis. Wenn es aber völlig durch ζ′ teilbar ist, ohne einen Rest zu haben, schreibe anstatt einer anderen Zahl ϒ′ in einen Kreis.

Danach mache es, wie du es bei den Ziffern oberhalb des geraden Strichs und bei den seitlichen Ziffern getan hast, indem du diese zu je zwei Ziffern durch die ζ′ geteilt hast, so auf die gleiche Weise auch bei der herauskommenden Endzahl, die sich aus den beiden durch Multiplikation ergeben hat: Teile alle ihre Ziffern zu je zweien durch die ζ′, angefangen von den ersten bis zur letzten Ziffer. Die äußerste und letzte von all diesen, gleich ob sie auf ϒ′ endet oder ob sie etwas Kleineres als die ζ′ hat — die aus der Endzahl herauskommende Ziffer muss jener gleich sein, die du vorher in den Kreis gesetzt hast. Und wenn β′ die in jenem Kreis gesetzte Zahl bezeichnet, muss auch diese β′ bezeichnen. Kurz gesagt: Bei den beiden herauskommenden Teilen, die sich innerhalb der Kreise befinden, muss in gleicher Weise ein und dieselbe Zahl sein, und es darf nicht eine gegenüber der anderen ungleich und verschieden sein. Wenn sich nun die beiden Proben so verhalten, hat sich die herausgekommene Endzahl, das Produkt aus dem oben und dem seitlich Stehenden, schon richtig ergeben. Wenn aber die eine Probe γ′, die andere aber δ′ hat, oder die eine sich so, die andere aber nicht so verhält, die Proben davon sich also voneinander unterscheiden, hat sich auch die herausgekommene Endzahl bei der Multiplikation nicht richtig ergeben.

Folgendes ist nötig, wenn du zwei Ziffern verbinden willst, um diese durch die ζ′ zu teilen: Wenn die erste Ziffer unterhalb von den ζ′ ist, etwa ϛ′ oder ε′, nimm auch die entsprechende andere Ziffer und teile die von diesen bezeichnete Zahl durch die ζ′; wenn aber die erste Ziffer mehr als die ζ′ bezeichnet, d. h. ϑ′ oder auch η′, subtrahiere von derselben ersten Ziffer einmal ζ′, und der Rest — sei es β′ oder α′ — nimm auch die entsprechende, der Reihe nach zweite Ziffer und vereinige, was von den ϑ′ oder den η′ übrig geblieben ist, mit der der Reihe nach entsprechenden Ziffer und teile dies durch die ζ′.

Angenommen, du willst diese zwei Ziffern ϑ η′, welche ϙη′ bezeichnen, durch die ζ′ teilen. ιδ′ mal ζ′ gibt ϙη′, es bleibt ϒ′, und siehe, du hast die ϑ η′ mühsam durch die ζ′ geteilt, und es blieb ϒ′. Subtrahiere von der ersten Ziffer, die ϑ′ ist, einmal ζ′, und es bleiben β′ übrig; diese β′ mit den η′ — so gesetzt: β η′ — bezeichnen ϰη′. Teile diese durch die ζ′: δ′ mal ζ′ gibt ϰη′, es

bleibt ϛ΄. Und siehe, nun hast du diese sehr viel bequemer durch die ζ΄ dividiert als vorher, als es ϑ η΄ war. Denn sowohl von den ϑ η΄ als auch von β η΄ blieb ϛ΄.
Wenn nun die erste Ziffer, die du zu dividieren suchst, größer als die ζ΄ oder auch ζ΄ ist, subtrahiere einmal ζ΄ von ihr. Wenn sie größer ist als die ζ΄, sodass von ihr etwas übrig bleibt, nimm auch die der Reihe nach entsprechende Ziffer, vereinige sie mit der übrig gebliebenen Ziffer unterhalb der ζ΄ und teile die beiden Ziffern durch die ζ΄, wie wir es gewöhnlich auch bei den anderen Beispielen tun, die wir vorher besprochen haben. Wenn sie aber ζ΄ ist und nach Subtraktion von ζ΄ ϛ΄ übrig bleibt, rücke vor, nimm zwei weitere Ziffern und teile das, was bezeichnet wird, durch die ζ΄, bis du auf diese Weise alle Ziffern vom Anfang bis zum Ende zu Ende bringst, wie wir oben deutlicher aufgezeigt haben.
Man muss auch dies wissen, dass, wenn wir zwei Ziffern nur im Kopf durch die ζ΄ dividieren, wir diese in unserem Kopf gewöhnlich so dividieren: Von den α δ΄ bleibt ϛ΄, von den α ε΄ bleibt α΄ übrig, von den β ϛ΄ bleiben ϛ΄ übrig, von den β α΄ bleibt ϛ΄, von den β ε΄ erhältst du δ΄, von den β ζ΄ erhältst du ϛ΄, von den γ ϛ΄ erhältst du β΄, von den γ δ΄ erhältst du ϛ΄, von den δ ϛ΄ erhältst du ε΄, von den δ ε΄ erhältst du γ΄, und so in gleicher Weise dividieren wir gewöhnlich weiter bis zu den ξϑ΄. Denn keinesfalls können die beiden durch die ζ΄ dividierten Ziffern noch mehr bezeichnen, sondern bis zu den ξϑ΄ dehnt sich die größte Zahl von diesen aus. Denn wenn du dich ein wenig in deinem Verstand bemühst, wird dir aufgrund der Erfahrung bei je zwei beliebigen Ziffern der Rest unterhalb der ζ΄ bekannt werden. Denn wir suchen keineswegs danach, wie oft es möglich ist, durch die ζ΄ zu dividieren — dies nämlich hat für uns keinen Nutzen —, sondern nur den Rest aus den beiden Ziffern unterhalb der ζ΄ — diesen müssen wir wissen, wie wir es diesbezüglich auch deutlicher aufgezeigt haben. Wenn du dich aber in deinem Verstand bemühst, kannst du aufgrund der Erfahrung die Reste aus den ζ΄ gut wissen. Wenn du aber aufgrund der Erfahrung die Reste von den ζ΄ richtig zu nehmen weißt, kannst du leicht die Proben davon nehmen, ob das Produkt, das aus den zwei Zahlen herauskommt, sich richtig oder nicht richtig ergeben hat.

Zum 2. Absatz der Übersetzung:
Die Ermittlung einer Probezahl wird hier noch nicht vollständig dargestellt. Am Anfang sind die ersten beiden Ziffern nur dann zu betrachten, wenn die erste Ziffer kleiner als 7 ist. Zutreffend wird beschrieben, dass "zwischendurch" bei einem positiven Rest die nächste Ziffer der Zahl, bei einem Rest 0 die beiden nächsten Ziffern der Zahl hinzuzuziehen sind. Insofern stellt der Rest 0 einen Sonderfall dar — für den Autor gehört 0 nicht zu den Resten, die kleiner als 7 sind.
Zum 4. Absatz:
Fallunterscheidung: Das Produkt aus den Probezahlen, die von den Zahlen oben und an der Seite gewonnen werden, kann kleiner oder größer als 7 sein. Im letzteren Fall muss nochmals der Siebenerrest bestimmt werden.
Der Schreiber berücksichtigt auch die Möglichkeit, dass eine der beiden Probe-

zahlen 0 ist, vernachlässigt aber den Fall, dass sich für beide 0 ergibt. Hierzu sei auf den Kommentar zu Kapitel 30 verwiesen.
Zum 5. Absatz:
Der Autor vertritt wieder die Ansicht, dass die Übereinstimmung der Probezahlen ein Beleg für die korrekte Multiplikation ist, was im Allgemeinen aber nicht zutrifft — vgl. hierzu den Kommentar zu Kapitel 7. Richtig ist hingegen wieder die Feststellung, dass nicht übereinstimmende Probezahlen eine fehlerhafte Multiplikation aufdecken.
Zum 6.—8. Absatz:
Hier wird der Inhalt des 2. Absatzes präzisiert: Beim ersten Divisionsschritt sind nur dann die ersten zwei Ziffern der Zahl zu betrachten, wenn die erste Ziffer kleiner als 7 ist. Andernfalls soll von der ersten Ziffer 7 subtrahiert werden, so wie der Autor es schon bei der Bestimmung der Probezahl von 90 in Kapitel 7 getan hatte. Jetzt wählt er das Beispiel 98 : 7 und betont, dass die Rechenschritte 9 – 7 = 2, 28 : 7 ⇒ Rest 0 bequemer durchzuführen seien als die direkte Rechnung (Kopfrechnung?) 98 : 7 — die Division 9 : 7 usw. diskutiert er allerdings nicht.
Auch weist der Autor — analog zu seinen Ausführungen im 2. Absatz — darauf hin, dass bei einer Anfangsziffer 7 (mit Rest 0) im nächsten Schritt zwei weitere Ziffern hinzuzuziehen sind. Hierbei vernachlässigt er allerdings den Fall, dass die zweite Ziffer 8 oder 9 sein kann: Jetzt wäre erst wieder 7 zu subtrahieren.
Zum 9. Absatz:
Hier findet sich der Hinweis auf die Möglichkeit, den Siebenerrest einer zweistelligen Zahl mithilfe des kleinen Einmaleins schrittweise im Kopf zu bestimmen, wobei die größte Zahl, die dabei überhaupt vorkommen kann, erwähnt wird: $69 = 9 \cdot 7 + 6$
Sehr klar wird noch einmal zwischen der Siebenerrestbestimmung und der allgemeinen Division durch 7 unterschieden.

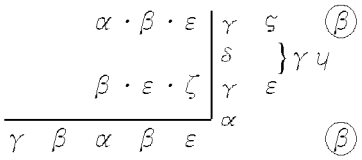
16 *Über eine andere Multiplikationsmethode, die "Haus" genannt wird, nach der auch η′ mit den κα′ multipliziert werden und so weiter*

Es gibt auch eine andere Multiplikationsmethode, die "Haus" genannt wird, da die Ziffern viereckförmig zusammengefasst werden, wie du durch die künftig aufgezeigte Methode klarer erfahren kannst.

1. Beispiel (ohne Überschrift): η′ mal κα′ (8 · 21 = 168)
2. Beispiel: ιγ′ *mit den* ιε′ *multipliziert* (13 · 15 = 195)
3. Beispiel: κε′ *mit den* κε′ *multipliziert* (25 · 25 = 625)
4. Beispiel: μγ′ *mit den* ξε′ *multipliziert* (43 · 65 = 2795)
5. Beispiel: λζ′ *mit den* πε′ *multipliziert* (37 · 85 = 3145)
6. Beispiel: ιε′ *mit den* ρκγ′ *multipliziert* (15 · 123 = 1845)

7. Beispiel: ρκε′ *mit den* σνζ′ *multipliziert* (125 · 257 = 32125)

Setze oben die ρκε′ < der Autor versehentlich: ρκγ′ >, *darunter aber die* σνζ′. *Multipliziere aber die* ε′ *oben mit den* ζ′ *unten:* ε′ *mal* ζ′ *gibt* λε′. *Setze un-*



ten ε´, setze aber γ´ anstatt der λ´ gesondert. Multipliziere aber die vier Ziffern über Kreuz: ε´ mal ε´ gibt κε´, zwei mal ζ´ aber gibt ιδ´. κε´ aber und ιδ´ und γ´, was du anstatt der λ´ gesondert gesetzt hast, gibt zusammen μβ´. Setze unten an die Zehnerstelle β´, setze aber δ´ anstatt der μ´ gesondert. Multipliziere aber die beiden Ränder der sechs Ziffern über Kreuz: zwei mal ε´ gibt ι´, einmal ζ´ aber ist wieder ζ´. Multipliziere aber auch die Ziffern der Mitte: zwei mal ε´ gibt ι´. ι´ aber und ζ´ und ι´ und δ´, was du anstatt der μ´ gesondert gesetzt hast, gibt zusammen λα´. Setze unten an die Hunderterstelle α´, setze aber γ´ anstatt der λ´ gesondert. Kennzeichne aber die ε´ oben und die ζ´ darunter, weil sie nun unnütz sind. Multipliziere aber die vier Ziffern der Mitte und des Anfangs über Kreuz: zwei mal β´ gibt δ´, einmal ε´ aber ist wieder ε´. δ´ aber und ε´ und γ´, was du anstatt der λ´ gesondert gesetzt hast, gibt zusammen ιβ´. Setze unten an die Tausenderstelle β´, setze aber α´ anstatt der Zehn gesondert. Kennzeichne aber die β´ und ε´ der Mitte, weil sie unnütz sind. Multipliziere aber das α´ oben mit den β´ darunter: einmal β´ ist wieder β´. Addiere auch das α´, was du anstatt der Zehn gesondert gesetzt hast, und es gibt zusammen γ´. Setze dies unten an die fünfte Stelle, die zur Myriade gehört. Und siehe, wenn man die ρκε´ mit den σνζ´ multipliziert, ergibt sich als Produkt ,λ,β´ und ρκε´.

Bei dieser Multiplikationsmethode werden die beiden Zahlen zunächst stellengerecht untereinandergeschrieben. In den Beispielen steht die kleinere Zahl stets oben, was aber hinsichtlich des Rechenaufwands keine Rolle spielt. Ist ihre Stellenzahl kleiner als die der unteren, so werden die fehlenden Stellen — wie in den Beispielen 6 und 9 — mit Nullen aufgefüllt. (Bei dem sehr einfachen 1. Beispiel hat dies der Schreiber unterlassen.)

Nun werden die Faktorenziffern so über Kreuz (σταυροειδῶς) multipliziert, dass im Prinzip nur die endgültigen Ziffern des Produkts notiert werden. Alles andere wird im Kopf durchgeführt.

Seien E_1, Z_1, H_1, T_1, $(ZT)_1$ ... und E_2, Z_2, H_2, T_2, $(ZT)_2$ ... die Einer-, Zehner-, Hunderter-, Tausender-, Zehntausenderziffern usw. des ersten bzw. des zweiten Faktors, so ergibt sich die Einerziffer des Produkts aus $E_1 \cdot E_2$, wobei eventuell ein Zehnerübertrag (Z_0) auftritt. Die Zehnerziffer des Produkts ergibt sich über Kreuz aus $E_1 \cdot Z_2 + E_2 \cdot Z_1 + Z_0$, wobei eventuell ein Hunderterübertrag (H_0) auftritt. Die Hunderterziffer des Produkts ergibt sich über Kreuz aus $E_1 \cdot H_2 + Z_1 \cdot Z_2 + E_2 \cdot H_1 + H_0$, wobei eventuell ein Tausenderübertrag (T_0) auftritt. Die Tausenderziffer des Produkts ergibt sich über Kreuz aus $E_1 \cdot T_2 + Z_1 \cdot H_2 + Z_2 \cdot H_1 + E_2 \cdot T_1 + T_0$, wobei eventuell ein Zehntausenderübertrag ($(ZT)_0$) auftritt. Die Zehntausenderziffer des Produkts ergibt sich über Kreuz aus $E_1 \cdot (ZT)_2 + Z_1 \cdot T_2 + H_1 \cdot H_2 + Z_2 \cdot T_1 + E_2 \cdot (ZT)_1 + (ZT)_0$, wobei eventuell ein Hunderttausenderübertrag auftritt usw.

Im vorliegenden Beispiel hat der Autor — offenbar zur Erleichterung der Kopfrechnung — die Überträge $Z_0 = 3$, $H_0 = 4$, $T_0 = 3$, $(ZT)_0 = 1$ rechts von der senkrechten Linie der Reihe nach von oben nach unten notiert. Ebenso hält er die

Überträge bei den anderen Beispielen fest. (Im 8. Beispiel wird der letzte Übertrag aus Platzgründen rechts neben dem vorletzten vermerkt.)
Eine weitere Erleichterung bei der Rechnung stellt die Markierung von verbrauchten, unnütz gewordenen Ziffern dar. (σημείωσον τὰ ἄνωθεν ... καὶ κάτωθεν ... ὡς ἀργὰ νῦν ὄντα.) In unserem Beispiel sind die Faktoren jeweils dreistellig, sodass $T_1 = ZT_1 = T_2 = ZT_2 = 0$ gilt. Die Bestimmung der Tausenderziffer des Produkts reduziert sich damit auf $Z_1 \cdot H_2 + Z_2 \cdot H_1 + T_0$, sodass die (zur Berechnung der Einer-, Zehner- und Hunderterziffern des Produkts mit herangezogenen) Einerziffern der Faktoren nun nicht mehr gebraucht werden. Entsprechend vereinfacht sich die Bestimmung der Zehntausenderziffer des Produkts zu $H_1 \cdot H_2 + (ZT)_0$, sodass zusätzlich auch die vorher herangezogenen Zehnerziffern keine Rolle mehr spielen. Der Autor kennzeichnet diese verbrauchten Ziffern mit einem vorangesetzten Pünktchen.

8. Beispiel: ,ασλς΄ *mit den* ,γυνη΄ *multipliziert* (1236 · 3458 = 4274088)
9. Beispiel: τμ΄ *mit den* ,ι,β΄ *und* τνς΄ *multipliziert*
(340 · 12356 = 4201040)

Bei allen 9 Beispielen finden sich in den Diagrammen ganz rechts die Schemata der Siebenerprobe, auf die im Text aber nicht mehr eingegangen wird.

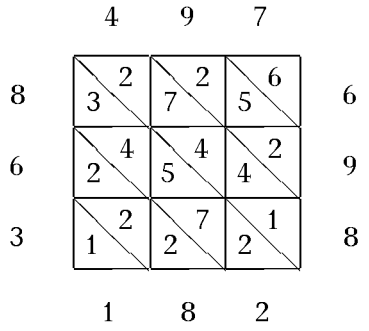
Am Schluss des Kapitels schreibt der Autor:
Nun ist es uns möglich, sowohl mit der ersten Methode zu multiplizieren, die man dreiseitig nennt, als auch mit der vorliegenden, die man "Haus" nennt. Da aber die erste Methode klarer ist als die vorliegende, soll man eher mit der ersten jedes Produkt aufsuchen. Denn überall ist es notwendig und nützlich, die Klarheit aufzusuchen — hierbei aber ist es ganz besonders notwendig, die klarere und bequeme Methode aufzusuchen, damit euch mit ihrer Hilfe das Gesuchte zuverlässig und bequem bekannt wird.
Vorher hatte der Autor die 1. Methode nur als "zweiseitig" bezeichnet. Seine Bewertung der beiden Methoden ist im Wesentlichen zutreffend.

Die Über-Kreuz-Methode ist bereits in Indien ab dem 9. Jahrhundert nachweisbar. Gaṇeśa, ein späterer Kommentator aus dem 16. Jahrhundert, hält sie für schwierig, sodass sie von dummen Schülern nicht ohne mündliche Unterweisung gelernt werden könne (TROPFKE 1980, S. 211 f., S. 683, S. 714 f.). Im byzantinischen Bereich findet sie sich bereits in der anonymen Algorismusschrift von 1252 (ed. ALLARD 1977) und im Rechenbuch des Maximos Planudes aus dem späten 13. Jahrhundert (ed. ALLARD 1981), wobei jeweils der Fachausdruck κατὰ χιασμόν verwendet wird. Die älteste bisher bekannte westeuropäische Quelle für das Verfahren ist Leonardo von Pisas "Il liber abbaci" von 1202 (BONCOMPAGNI 1857). In den späteren italienischen Rechenbüchern (vgl. TROPFKE 1980, S. 220), in denen die Methode häufig als *multiplicazione per crocetta* bezeichnet wird, wird es üblich, die zu multiplizierenden Ziffern mit Strichen zu verbinden, wodurch die vorgeschriebene Rechenreihenfolge leichter eingehalten werden kann. Auch Rechenmeister im deutschen Sprachraum des 15./16. Jahrhunderts kennen das Verfahren (vgl. TROPFKE 1980, S. 220). So

schreibt zum Beispiel Adam Ries (1550, f iij^{v} = 111^{v}):
Es haben die alten Creutzweis eine zal durch die andern Multiplicirt / Nimpt vil kopffs / als du hie in volgenden exempel sehen wirst ...

Im Vortext (fol. 6^{r}–7^{r}) zum Rechenbuch führt der Autor außerdem noch eine dritte schriftliche Multiplikationsmethode ein, die sog. Gittermultiplikation:

Wie man mithilfe des Gitters (διὰ τῆς σχάρας) *leicht multiplizieren kann Viele verschiedene Arten der Multiplikationen, die von uns aufgezeigt werden, wirst du bei der Untersuchung zur Multiplikation finden* (gemeint sind die Kap. 6, 8, 10, 12, 14, 16–20 im vorliegenden Rechenbuch)*, die imstande sind, jede aufgesuchte Zahl gut zu multiplizieren. Denn du wirst eine "zweiseitig" genannte Multiplikationsmethode finden. Du wirst auch eine andere Multiplikationsmethode finden, die "Haus" genannt wird. Du wirst auch andere verschiedene Methoden ohne Gestalt und Bezeichnung finden, die imstande sind, allein im Kopf jede aufgesuchte Zahl zu multiplizieren. Die vorliegende Methode aber, die mithilfe des Gitters entsteht, wurde noch nicht aufgezeigt, obgleich sie gegenüber allen anderen am leichtesten und nützlich ist. Denn alle anderen Methoden, die du bei der Untersuchung zur Multiplikation finden wirst, fallen, indem sie einer Vorstellungskraft und Erinnerung bedürfen, dem Verstand zur Last und rufen uns zur Anstrengung auf.* (αἱ μὲν γὰρ ἄλλαι πᾶσαι μεταχειρίσεις ... φαντασίας καὶ μνήμης δεόμεναι παρενοχλοῦσι τῷ νῷ καὶ εἰς ἀγῶνα ἡμῖν διεγείρουσι.)
Es folgt die Erläuterung der Gittermethode anhand von vier Beispielen – beim ersten wird die Multiplikation von υϛζ΄ mit τξη΄ (497 · 368 = 182 896) vorgeführt. Mit arabischen Ziffern geschrieben hat das zugehörige Multiplikationsschema folgende Gestalt:



Der erste Faktor steht oberhalb des Gitterdiagramms, der zweite, mit Schriftrichtung nach oben, links vom Diagramm. Jede Ziffer des einen Faktors wird mit jeder des anderen multipliziert, und die Produkte werden in die entsprechenden quadratischen Felder eingetragen, und zwar so, dass jeweils die Ziffer des niederen Stellenwerts oberhalb und die Ziffer des höheren Stellenwerts unterhalb der Felddiagonale steht. Dadurch werden die (hier sechs) Diagonalstreifen, in die sich das Diagramm aufteilt, zu Stellenwertordnern:
Der erste Streifen rechts oben enthält den Beitrag für die Einer (6) des Produkts, der nächste die Beiträge für die Zehner (2 + 5 + 2 = 9). Dabei stammt die erste 2 aus dem Produkt 9 · 8 (Zehner des ersten Faktors mal Einer des zweiten), die zweite 2 aus dem Produkt 7 · 6 (Einer des ersten Faktors mal Zehner des zweiten), und 5 ist der Stellenübertrag aus dem Einerprodukt 7 · 8. Damit

sind alle Beiträge zur Zehnerstelle des Produkts erfasst.
Der Hunderterstreifen liefert einen Übertrag (1) für den Tausenderstreifen, der wiederum einen Übertrag (2) für den Zehntausenderstreifen.
Die "Einerziffer" der Summe der Zahlen einen jeden Streifens zuzüglich des evtl. Übertrags werden in der diagonalen Verlängerung außerhalb des Schemas notiert. Das gesuchte Produkt kann nun unten von links nach rechts und weiter von rechts unten nach rechts oben abgelesen werden.
Bei dieser Methode wird alles – bis auf die Stellenüberträge – schriftlich festgehalten, sodass die Merkfähigkeit des Rechners tatsächlich so gut wie gar nicht beansprucht wird. Damit liegt ein extremes Gegenmodell zur Über-Kreuz-Methode vor, bei der im Prinzip nur die endgültigen Ziffern des Produkts notiert werden. Betrachtet man aber – einmal abgesehen von der aufwendigen Diagrammgestaltung – den beträchtlichen Schreibaufwand, so wird man die überaus positive Einschätzung der Gittermethode durch unseren Autor kaum teilen können. Am effektivsten sind zweifellos die Verfahren, bei denen schriftliche Notation und Kopfrechnung in einem ausgewogenen Verhältnis zueinander stehen, wie zum Beispiel bei der "zweiseitigen" Methode.
Die Gittermethode tritt auch in anderen byzantinischen Schriften auf: im Cod. Laurentianus Ashburnhamiani Gr. 1599 (Standort: Biblioteca Nazionale Medicea Laurenziana Florenz, aus dem früheren Besitz von Lord Ashburnham) aus dem 14. und 15. Jahrhundert und im Cod. Parisinus supp. Gr. 652 aus dem 15. Jahrhundert (vgl. ALLARD 1973, S. 119–134 bzw. S. 134–143). Sie dürfte ihren Weg von den Indern über die Araber zu den Byzantinern gefunden haben (vgl. TROPFKE 1980, S. 214, S. 218 f.). Die Italiener sprachen von der *gelosia*-Methode, weil sie das Diagramm an ein Fenstergitter (Jalousie) denken ließ, das die Frauen vor den Blicken fremder Männer schützen sollte: *gelosia* heißt Eifersucht.

17 *Über die Multiplikation, die nur im Kopf entsteht, bei der auch ιγ´ mit den ιγ´ multipliziert werden und so weiter*

Es ist schon an der Zeit, auch über die Multiplikation zu sprechen, die nur im Kopf entsteht: Es gibt nämlich viele verschiedene Arten und Weisen, die imstande sind, ohne Aufzeichnung nur im Kopf zu multiplizieren und uns das Gesuchte richtig aufzuzeigen.
Die erste Methode einer nichtschriftlichen Multiplikation aber, die nur im Kopf entsteht, ist die folgende. Du weißt also gut, dass ι´ mit den ι´ multipliziert ρ´ ergeben. Aber angenommen, dies ist deinerseits bedacht worden, dass bei der Multiplikation von ιγ´ mit den ιγ´ und von ιδ´ mit den ιδ´ und von ιγ´ mit den ιβ´ und von ιζ´ mit den ιγ´ und so der Reihe nach die Zehner davon das Produkt ρ´ haben.
Du suchst nun ιγ´ mit den ιγ´ zu multiplizieren. Die ι´ aber mit den ι´ multipliziert haben, wie wir sagten, das Produkt ρ´. Behalte nun bei dir wegen der zwei Zehner ρ´. Addiere aber die γ´ zu den γ´, und es ergeben sich ς´. Dies aber bedeutet ς´ Zehner, d. h. ξ´. Addiere auch diese zu den ρ´, und es ergeben sich ρξ´. Multipliziere aber die γ´ mit den γ´: drei mal γ´ ergeben nun ϑ´.

Addiere auch diese zu den ρξ´, und es ergeben sich insgesamt ρξϑ´. Und siehe, du hast nur in deinem Kopf — ohne Aufzeichnung — gefunden, dass sich bei der Multiplikation von ιγ´ mit den ιγ´ daraus das Produkt ρξϑ´ ergibt.

Die Berechnung von $13 \cdot 13$ im Kopf verläuft also folgendermaßen: $10 \cdot 10 = 100$, $3 + 3 = 6 \Rightarrow 60$, $100 + 60 = 160$, $3 \cdot 3 = 9$, $160 + 9 = \underline{169}$

2. Beispiel: *ιδ´ mit den ιδ´ multipliziert* ($14 \cdot 14 = 196$)
3. Beispiel: *ιγ´ mit den ιβ´ multipliziert* ($13 \cdot 12 = 156$)
4. Beispiel: *ιζ´ mit den ιβ´ multipliziert* ($17 \cdot 12 = 204$)

Die nur für die Multiplikation von Zahlen zwischen 10 und 20 sinnvolle Rechenvorschrift beruht auf der Formel $(10 + b) \cdot (10 + d) = 10^2 + 10 \cdot (b + d) + b \cdot d$ $(1 \le b, d \le 9)$.

18 *Wie man auch anders allein im Kopf multiplizieren kann, indem man nicht vom Anfang, sondern vielmehr vom Ende her beginnt*

Nun beginnt die Rechnung mit den Einern der Faktoren. Dabei handelt es sich aber eher um ein schriftliches Rechnen im Kopf als um ein eigentliches Kopfrechnen.

1. Beispiel: *ιζ´ mit den ιβ´ multipliziert* ($17 \cdot 12 = 204$)

Der Autor beschreibt das Vorgehen, das teilweise an die schriftliche Über-Kreuz-Methode erinnert, folgendermaßen: $2 \cdot 7 = 14$, $2 + 7 = 9$, $9 + 1 = 10$, $10 + 10 = 20$, $10 \cdot 20 = 200$, $200 + 4 = \underline{204}$.

Sei Z_O der Zehnerübertrag von $b \cdot d$, also $b \cdot d = 10 Z_O + k$, dann gilt $(10 + b) \cdot (10 + d) = 10 (b + d + Z_O + 10) + k$ $(1 \le b, d \le 9,\ 0 \le Z_O \le 8,\ 0 \le k \le 9)$. Im vorliegenden Fall sind $b = 7$, $d = 2$, $Z_O = 1$, $k = 4$.

2. Beispiel: *ιϛ´ mit den ιδ´ multipliziert* ($16 \cdot 14 = 224$)
3. Beispiel: *ιϑ´ mit den ιϑ´ multipliziert* ($19 \cdot 19 = 361$)

Am Ende des Kapitels weist der Schreiber zu Recht darauf hin, dass diese Multiplikationsmethode nur für Faktoren unter 20 geeignet ist:

Ebenso aber auch bei jeder anderen gleichartigen Aufgabe: mithilfe dieser beiden Methoden kannst du allein in deinem Kopf, ohne Aufzeichnung, das Produkt zweier beliebiger Zahlen erfahren, wenn sie unterhalb der ϰ´ sind. Wenn sie aber oberhalb der ϰ´ sind, wie die ϰα´ mit den ϰβ´ multipliziert und so weiter, kannst du das Gesuchte mithilfe dieser beiden Methoden (sc. von Kap. 17 und 18) *nicht gut erfahren.*

19 *Wie man auch anders allein im Kopf jede aufgesuchte Zahl richtig multiplizieren kann, gleich ob sie kleiner oder größer als die ϰ´ ist*

1. Beispiel: *ιε´ mit den ιβ´ multipliziert* ($15 \cdot 12 = 180$)

Der Schreiber rechnet $1 \cdot 15 = 15 \Rightarrow 150$, $2 \cdot 15 = 30$, $150 + 30 = 180$ oder alternativ mit vertauschten Faktoren $1 \cdot 12 = 12 \Rightarrow 120$, $5 \cdot 12 = 60$, $120 + 60 = 180$.

2. Beispiel: *ιγ´ mit den ιϑ´ multipliziert* (13 · 19 = 247)
Der Schreiber rechnet 1 · 19 = 19 ⇒ 190, 3 · 19 = 57 (ohne Zwischenrechnung), 190 + 57 = 247 oder alternativ mit vertauschten Faktoren 1 · 13 = 13 ⇒ 130, 9 · 13 = 117, 130 + 117 = 247.

3. Beispiel: *κβ´ mit den κγ´ multipliziert* (22 · 23 = 506)
Bei Zahlen über 20 (siehe Kapitelüberschrift) lässt sich die Methode unverändert anwenden: 2 · 23 = 46 ⇒ 460, 2 · 23 = 46, 460 + 46 = 506 oder 2 · 22 = 44 ⇒ 440, 3 · 22 = 66, 440 + 66 = 506

4. Beispiel: *κγ´ mit den λε´ multipliziert* (23 · 35 = 805)
Allgemein wird hier das Produkt von zwei zweistelligen Zahlen, die keine Zehnerzahlen sind, wie folgt im Kopf ausgerechnet:
$(10a + b) \cdot (10c + d) = a \cdot (10c + d) \cdot 10 + b \cdot (10c + d)$ oder
$(10a + b) \cdot (10c + d) = c \cdot (10a + b) \cdot 10 + d \cdot (10a + b)$ mit $1 \le a, b, c, d \le 9$

5. Beispiel: *νγ´ mit den ρκ´ multipliziert* (53 · 120 = 6360)
Addition von 5 · 120 mit angehängter Null und von 3 · 120 oder Addition von 1 · 53 mit zwei angehängten Nullen und von 2 · 53 mit angehängter Null

6. Beispiel: *ρλ´ mit den ρν´ multipliziert* (130 · 150 = 19500)
Addition von 1 · 150 mit zwei angehängten Nullen und von 3 · 150 mit angehängter Null: Die alternative Rechnung wird hier und im folgenden Beispiel nicht mehr durchgeführt.

7. Beispiel: *,αρ´ mit den ,ασ´ multipliziert* (1100 · 1200 = 1320000)
Addition von 1 · 1200 mit drei angehängten Nullen und von 1 · 1200 mit zwei angehängten Nullen

20 *Wie man auch anders allein im Kopf multiplizieren kann, wenn die aufgesuchte Zahl eine Ziffer ϑ´ hat*

1. Beispiel: *μ´ mit den μ´ multipliziert* (40 · 40 = 1600)
2. Beispiel: *ρ´ mit den σ´ multipliziert* (100 · 200 = 20000)
3. Beispiel: *τ´ mit den ,β´ multipliziert* (300 · 2000 = 600000)
4. Beispiel: *,γ´ mit den ,δ´ multipliziert* (3000 · 4000 = 12000000)
In diesen Beispielen treten bei den Faktoren bis zur zweithöchsten Stelle (einschließlich) nur Nullen auf. Der Schreiber multipliziert die Ziffern der höchsten Stelle und fügt dem Produkt so viele Nullen hinzu, wie beide Faktoren zusammen aufweisen.

Anschließend betrachtet er ein Produkt, bei dem der zweite Faktor in der Weise modifiziert wird, dass (auch) die Ziffer der zweithöchsten Stelle von Null verschieden ist:
5. Beispiel (ohne eigene Überschrift): 30 · 45 = 1350
Rechnung: 3 · 45 = 135 (ohne Zwischenrechnung), 135 ⇒ 1350

6. Beispiel: *ρ´ mit den σν´ multipliziert* (100 · 250 = 25000)
Rechnung: 1 · 25 = 25, 25 ⇒ 25000

7. Beispiel: *σ´ mit den ,ατ´ multipliziert* (200 · 1300 = 260000)
Rechnung: 2 · 13 = 26, 26 ⇒ 260000

Schließlich kündigt der Autor die Multiplikation von Zahlen ohne die Ziffer 0 an, was aber nur für sein folgendes Beispiel zutrifft:

8. Beispiel (ohne eigene Überschrift): 23 · 39 = 897
Es wird gefragt, welcher Faktor näher an einer reinen Zehnerzahl liegt: das ist 39 (an 40). Berechnung von 23 · 40: 4 · 23 = 92, 92 ⇒ 920. Korrektur: 920 − 1 · 23 = 897
Dieses uns heute noch geläufige Ausnutzen von Rechenvorteilen beruht auf dem Distributivgesetz
$(10a + b) \cdot (10c - d) = c \cdot (10a + b) \cdot 10 - d \cdot (10a + b)$ (hier mit $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 1$).

9. Beispiel: *ρο´ mit den τπ´ multipliziert* (170 · 380 = 64600)
Hier liegt 380 näher an einer Hunderterzahl (400, Differenz: 20). Berechnung von 170 · 400: 17 · 4 = 68, 68 ⇒ 68000. Berechnung von 170 · 20: 2 · 17 = 34, 34 ⇒ 3400. Korrektur: 68000 − 3400 = 64600

Im Abschlusstext dieses Kapitels zieht der Autor ein Resümee über alle behandelten Multiplikationsmethoden.
Nun ist es euch möglich, sowohl schriftlich als auch ohne Aufzeichnung, allein im Kopf, mithilfe dieser verschiedenen Methoden zu multiplizieren, die wir darlegen (!), *und das Produkt, das sich aus zwei beliebigen Zahlen ergibt, richtig zu erfahren. Denn wenn auch solche Dinge nur mit Mühe geschrieben und noch viel mühsamer durch Denken bewältigt werden, sind sie trotzdem leicht durch Denken zu finden. Denn jede diesbezügliche Schwierigkeit ergibt sich beim Begreifen. Wenn man aber die Arten und Weisen, diese zu finden, begriffen hat, findet man sie mithilfe der Erfahrung als Lehrmeisterin leicht.*

Im "Vortext" zum Rechenbuch findet sich ein weiteres, umfangreiches Kapitel zur Multiplikation im Kopf (fol. 8^{v}–9^{v}). (Darin bezieht sich der Schreiber rückblickend auf die vorliegenden Kapitel 17–20 unseres Rechenbuchs: *Im 17. und 18. und 19. und 20. Kapitel ist gesagt worden ...*)
Der Inhalt soll im Folgenden kurz skizziert werden:
Quadrieren von Zahlen zwischen 10 und 100 im Wesentlichen nach der 1. binomischen Formel: $(10a + b)^2 = a^2 \cdot 100 + (a + a) \cdot b \cdot 10 + b^2$ (Beispiele: 11^2, 13^2, 22^2, 55^2)
Produkte von zweistelligen Zahlen mit gleichen Endziffern (b) im Wesentlichen nach dem verallgemeinerten Distributivgesetz, wobei in den beiden mittleren Gliedern b ausgeklammert wird: $(10a + b) \cdot (10c + b) = ac \cdot 100 + (a + c) \cdot b \cdot 10 + b^2$
(Beispiele: 13 · 23, 25 · 65)
Alternativ hierzu eine "Halbierungsmethode" – nur das mittlere Glied wird umgeformt: $(10a + b) \cdot (10c + b) = ac \cdot 100 + \frac{1}{2}(a + c)(b + b) \cdot 10 + b^2$ (Beispiel: 27 · 57)

Produkte von zweistelligen Zahlen mit gleichen Anfangsziffern nach einer analogen Halbierungsmethode: $(10a+b)\cdot(10a+d) = a^2\cdot 100 + \frac{1}{2}(a+a)(b+d)\cdot 10 + bd$ (Beispiele: $13\cdot 17$, $25\cdot 28$, $53\cdot 58$, $22\cdot 22$, $35\cdot 35$, $37\cdot 31$)
Die beiden Halbierungsmethoden sind recht geschickt: Man braucht sich nur einzuprägen, dass die Zehnerziffern und die Einerziffern jeweils für sich einmal zu multiplizieren und einmal zu addieren sind und außerdem das Produkt der Summe halbiert werden muss. Dieses mittlere Glied hat aber im allgemeinen Multiplikationsfall $(10a+b)\cdot(10c+d)$ nicht die Gestalt $\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\cdot 10$ – eine naheliegende, aber unzulässige Verallgemeinerung –, es hat vielmehr die Darstellung $(ad+bc)\cdot 10$. Wie man leicht zeigen kann, gilt nun $\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\cdot 10 = (ad+bc)\cdot 10$ genau dann, wenn $a=c$ oder $b=d$ ist, d. h. wenn Faktoren mit gleichen Anfangs- oder Endziffern vorliegen. Dementsprechend warnt der Schreiber davor, etwa $25\cdot 37$ oder $34\cdot 53$ (ungleiche Anfangs- und Endziffern) nach der Halbierungsmethode zu berechnen.

Die hier besprochenen Kapitel zur Multiplikation im Kopf verdienen insofern besondere Beachtung, als die dem Gegenstand entsprechende mündliche Lehrtradition nur recht selten schriftlich fixiert wurde. Zudem war bis zur Erfindung des Buchdrucks die Herstellung von Abschriften zeitraubend und kostspielig, sodass Themen der "höheren Mathematik" bevorzugt wurden. Im Fall der Verwendung des dezimalen Positionssystems begnügte man sich meistens mit einer Tafel des kleinen Einmaleins, das auswendig gelernt werden sollte. Im Übrigen genügte diese Fertigkeit, um auf dem Rechenbrett (Abakus) einfache alltägliche Rechnungen auch ohne schriftliche Verfahren zu bewältigen.
Jedoch ist uns aus der byzantinischen Arithmetik nichts über die Verwendung eines Abakus überliefert, obwohl man im griechischen Kulturraum inzwischen zahlreiche antike Rechentafeln gefunden hat, von denen die salaminische die bekannteste ist (vgl. SCHÄRLIG 2001, S. 61–104). Stattdessen scheint das Fingerrechnen eine Rolle gespielt zu haben – vgl. Rhabdas' Brief an Georgios Chatzyke (um 1341, ed. TANNERY IV, 4 - 1886, Band 4, S. 90–97): er gebraucht hierfür den Fachausdruck δακτυλικὸν μέτρον.
Eine Tafel des kleinen Einmaleins, die man in den Kapiteln unseres Rechenbuchs zur Multiplikation vermisst, ist wieder im Vortext (fol. 5^r) zu finden. Unser Autor überschreibt diese (quadratische) Tafel mit: δύο ἔχει ἀναγνώσεις ... κατὰ συνθήκην τὲ καὶ διαίρεσιν. (*Sie hat zwei Lesarten ... gemäß der Zusammensetzung* (sc. Multiplikation) *und der Teilung.*) Er will also darauf hinweisen, dass man sie auch für die Rechnungen des "kleinen Einsdurcheins" verwenden kann. In seinen Ausführungen bezieht er sich auf Nikomachos (2. Jh. n. Chr.), der eine Einmaleinstafel mit den milesischen Zahlen bis 10 vorgestellt hat (vgl. HOCHE 1866, S. 51), wobei es diesem in erster Linie auf eine Zusammenstellung von Zahlen mit gleicher Teilbarkeitseigenschaft ankam.
Nach unserem Verständnis ist das kleine Einmaleins die Gesamtheit aller Multiplikationen zweier einstelliger Zahlen, gegebenenfalls noch erweitert durch die Zehnerreihe. Unser kleines Einmaleins (mit den Faktoren 1 bis 9) umfasst im Fall einer quadratischen Tafel 81 Produkte. Nutzt man jedoch das Kommutativgesetz aus, so kann man den Umfang auf $1+2+\ldots+9$ Produkte $= 45$ Produkte

reduzieren (und die Tafel in Dreiecksgestalt darstellen). Im traditionellen milesischen Zahlensystem der Griechen, das kein Stellenwertsystem ist, gibt es prinzipiell beliebig viele Zahlen (Ziffern), die nur mit einem Symbol dargestellt werden – "einstellige" Zahlen gibt es ja nicht. Beim milesischen "kleinen" Einmaleins hat man z. B. bis zum Faktor 10000 (einschließlich) folgende 37 Ziffern zu berücksichtigen:

α´, β´, γ´, δ´, ε´, ϛ´, ζ´, η´, ϑ´, ι´, ϰ´, λ´, μ´, ν´, ξ´, ο´, π´, ϟ´, ρ´, σ´, τ´, υ´, φ´, χ´, ψ´, ω´, ϡ´, ,α´, ,β´, ... , ,ϑ´, ,ι´

Damit wären, selbst wenn man den Umfang wieder mit Hilfe des Kommutativgesetzes reduziert, 1 + 2 + ... + 37 = 703 Produkte zu vertafeln.

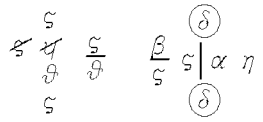
In der Tat findet sich ein solch umfangreiches Tafelwerk, das zweifellos auf alter Überlieferung beruht, wiederum in Rhabdas' Brief an Georgios Chatzyke (TANNERY IV, 4 - 1886, Band 4, S. 110–113, dort auszugsweise ed.).

In Bezug auf weitere Einzelheiten zur Geschichte des Kopfrechnens vgl. auch DESCHAUER (1990).

21 *Die Einführung in die Division, bei der auch ξ´ durch die ϑ´ dividiert werden* (60 : 9) *und so weiter*

Nachdem wir die Regel der Multiplikation schon hinreichend überliefert haben, wie man also zwei beliebige Teile sowohl schriftlich als auch ohne Aufzeichnung allein im Kopf multiplizieren kann und machen kann, dass das Kleinere größer wird, wollen wir auch darüber sprechen, wie man das Größere – in wie viele Teile auch immer du willst – teilen und kleiner machen kann. Dies geschieht mit erheblich mehr Mühe als die Multiplikation, und die Erklärung davon wird keineswegs leicht, mit Papier und Tinte allein reicht sie nicht aus, sondern vielmehr mit der lebendigen Sprache und der dazugehörenden Erfahrung wird sie euch mit Mühe klar. Wir wollen es trotzdem anhand von verschiedenen Beispielen versuchen, um euch zu zeigen, wie die Art und Weise der Methode davon ausführbar ist. Und was immer wir euch nicht aufzeigen können, weil es ganz schwierig und Grund für viel Schreibarbeit ist, wollen wir der Erfahrung überlassen für diejenigen, die dieses gründlich wissen und Lehrer von diesem werden wollen. Denn diese ist selbst eine wahre Lehrmeisterin, die das, was gar nicht gefunden wurde, bewerkstelligen und neu bilden kann, um vieles eher also das Bestehende. Und durch so viele Beispiele, die wir vorzuzeigen haben, wird es euch leicht werden, mithilfe der Erfahrung zu begreifen, was von uns an euch nicht weitergegeben wurde.

Angenommen, du willst ξ´ in ϑ´ Teile teilen. Setze oben die ξ´, nach unten aber die ϑ´; diese ϑ´ nennen wir gewöhnlich Teiler, denn durch ihn wird all das oben geteilt, was es auch ist. Wenn nun die erste Ziffer oben, die ϛ´ ist und ξ´ bezeichnet, ϑ´ gewesen wäre, sodass sie – an der Zehnerstelle befindlich – ϟ´ bezeichnet hätte, hättest du die ϑ´



unten, die der Teiler sind, nicht an die Einerstelle gesetzt, wie sie jetzt liegen, sondern an die Zehnerstelle, die unterhalb der ϛ´ ist, die ξ´ bezeichnen. Die ϑ´ – der Teiler – können nämlich von den oberhalb davon stehenden ϑ´ subtrahiert

werden, die ϛ´ bezeichnen. Nun aber, weil die erste Ziffer ϛ´ ist und unterhalb von ihr ϑ´ gesetzt sind, können die ϑ´ nicht von den ϛ´ subtrahiert werden, da sie größer sind. Deshalb setze auch, indem du die Zehnerstelle aufgibst und entsprechend vorrückst, die ϑ´, die der Teiler der ξ´ sind, an die Einerstelle, d. h. unterhalb des ψ´. Wenn aber die ϑ´ unterhalb des ψ´ gesetzt werden, haben die ϛ´ die Zehnerstelle inne und bezeichnen ξ´, von den ξ´ aber können die ϑ´ vielfach subtrahiert werden. Suche nun, wie oft die ϑ´ in den ξ´ aufgehen. ζ´ mal ϑ´ gibt nun ϛ γ´, und ζ´-mal gehen die ϑ´ in den ϛ ψ´ nicht auf. Aber ϛ´ mal ϑ´ gibt νδ´, und es bleiben ϛ´ bis zu den ξ´. Setze nun ϛ´ unterhalb der ϑ´, die du als Teiler der ξ´ hast, um zu zeigen, dass die ϑ´ sechsmal in den ξ´ aufgehen. Die ϛ´ aber, die von den ξ´ als Rest geblieben sind — setze diese oberhalb des ψ´. Streiche aber die ϛ´, die ξ´ bezeichnen, ebenso auch das ψ´; denn die ϛ ψ´ wurden hergenommen, und es entstanden ϛ´ Teiler (!)*, und es blieben auch ϛ´ übrig, die oberhalb des ψ´ stehen, die wir gewöhnlich Zähler nennen. Ziehe nun einen Querstrich und setze die ϛ´ nach oben, die — wie wir sagten — ein Zähler sind, nach unten aber die ϑ´, die — wie wir sagten — ein Teiler* (oder Nenner) *sind. Und siehe, du hast gefunden, dass die ξ´ durch die ϑ´ dividiert ϛ´ Teile ergeben, wobei jeder Teil jeweils Neun hat. Als Rest bleiben aber auch ϛ´, die mit den ϑ´ — dem Nenner natürlich — ein "zweigeteiltes Verhältnis"* (gemeint ist das Verhältnis 2 : 3) *haben, d. h. zwei Drittel eines Ganzen; denn zwei mal γ´ gibt ϛ´ und drei mal γ´ gibt ϑ´. Wenn aber die ξ´ durch die ϑ´ geteilt werden, ergeben sich ϛ´ Teile und zwei Drittel eines Ganzen.* ($\frac{2}{3}$ fehlt im Diagramm.)

Der Verfasser hält also die schriftliche Division für so schwierig, dass sie auf der Grundlage eines Lehrtextes allein nicht erlernt werden kann. Es müssten mündliche Unterweisung und Erfahrung hinzukommen, aber auch dann erschließe sich diese Methode nur mit Mühe. Bei der Rolle, die der Autor der Erfahrung zuschreibt, klingt wieder der Topos für die Zeit aus dem Proömium (Kap. 1) an.

Das Divisionsbeispiel $60 : 9 = 6\frac{6}{9}$ ($6\frac{2}{3}$) ist einerseits sehr einfach — eine zweistellige Zahl wird durch eine einstellige geteilt —, anderseits würden wir für den Anfang sicher Zahlen wählen, bei denen die Division "aufgeht".

Von unserem Verfahren unterscheidet sich das vorliegende, dass Divisor und Quotient *unter* dem Dividenden, der nach dem Zurückmultiplizieren ($6 \cdot 9 = 54$) entstehende Rest (6) *über* dem Dividenden notiert werden. Außerdem werden verbrauchte Ziffern gestrichen. Weitere Unterschiede werden sich in den folgenden Kapiteln 23, 25, 27, 29, 31, 33, 34, 36 und 37 zeigen. Es handelt sich um die auf die Inder zurückgehende Methode des *Überwärtsdividierens*, deren Verwendung vom europäischen Mittelalter an bis in die 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts nachgewiesen ist (TROPFKE 1980, S. 234–241). Insbesondere sind hier die deutschsprachigen Rechenbücher des 16. Jahrhunderts zu nennen. Im byzantinischen Raum sind Varianten dieses Verfahrens in der anonymen Algorismusschrift von 1252 (ed. ALLARD 1977) und im Rechenbuch des Maximos Planudes aus dem späten 13. Jahrhundert (ed. ALLARD 1981) zu finden.

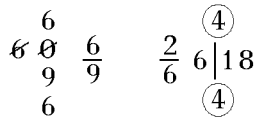
Der Autor diskutiert gut verständlich und sehr ausführlich die Frage, warum

der Divisor hier unter die Einerstelle des Dividenden zu setzen ist. Des Weiteren klingt bei der Überlegung, wie oft 9 in 60 aufgeht, bereits an, dass bei der Division als einziger Grundrechenart i. Allg. ein Abschätzen erforderlich ist — vgl. den gezielten Fehlversuch $7 \cdot 9 = 63$.
Die Darstellung des nichtganzzahligen Anteils des Quotienten als Bruch und dessen Vereinfachung durch Kürzen sind ein Vorgriff auf Kapitel 40, in dem Brüche systematisch eingeführt werden.

22 ***Über die Probe davon und den Beweis***

Der Beweis und die Probe davon, ob sich das Gesuchte richtig ergeben hat, ist diese.
Suche zuerst den Zähler auf, der nun ϛ′ ist und den du oberhalb der ϑ′ gesetzt hast, und dividiere diesen durch ζ′ auf die Art, wie wir sie auch bei der Multiplikation besprochen haben. Da nun aber nur eine Ziffer vorhanden ist und nicht mehrere und du die ϛ′ nicht durch die ζ′ teilen kannst, da sie kleiner als die ζ′ sind, ziehe einen passenden Querstrich und setze diese ϛ′ nahe an das Ende des Querstrichs. Danach teile auch den Nenner, die ϑ′ natürlich, durch die ζ′. Als Rest bleiben β′ von den ϑ′. Setze nun β′ oberhalb des Querstrichs. Danach teile auch den am Ende herausgekommenen Quotienten, der nun ϛ′ ist, welche unterhalb der ϑ′ stehen, durch die ζ′. Da es aber nur eine Ziffer ist, die kleiner als die ζ′ ist, und sie nicht durch die ζ′ geteilt werden kann, setze ϛ′ unterhalb des Querstrichs, d. h. unterhalb der β′. Multipliziere aber die β′ oben mit den ϛ′ unten: zwei mal ϛ′ gibt α β′. Addiere auch die ϛ′ auf der Seite, die zum Zähler gehören, und es ergibt sich zusammen α η′. Dividiere diese durch die ζ′, und es bleiben δ′ als Rest. Setze diese in einen Kreis: (δ). Teile auch die erste Zahl, d. h. die ϛ υ′, durch die ζ′: Von den ϛ υ′ nun bleiben δ′ als Rest. Setze auch diese in einen Kreis: (δ). Und siehe, die beiden Proben wurden als gleich befunden, da jede innerhalb des Kreises (δ) hat. Und dies ist der Beweis dazu, dass die Division dieser Zahlen richtig herausgekommen ist. Wenn sich aber die eine Probe so verhielte, die andere hingegen irgendwie anders, also die Proben sich voneinander unterscheiden würden, wäre der Quotient am Ende nicht richtig herausgekommen, d. h. die ϛ′ und zwei Drittel eines Ganzen.

Im vorigen Kapitel stand rechts vom Divisionsdiagramm ein weiteres Schema, und zwar das Schema der Siebenerprobe. Mit unseren Ziffern sähen die beiden Diagramme so aus:



Der Autor führt die Siebenerprobe zu seinem Divisionsbeispiel folgendermaßen durch: Den Zähler des Bruchs $\frac{6}{9}$, der sich nicht durch 7 dividieren lässt, setzt er an das Ende eines Querstrichs, den Siebenerrest 2 des Nenners über den Querstrich. Auch der Quotient 6 lässt sich nicht durch 7 dividieren — er wird unver-

ändert unter den Querstrich gesetzt. Die Zahlen, die durch den Strich getrennt sind, werden multipliziert, und dazu wird die Zahl nach dem Strich addiert: $2 \cdot 6 + 6 = 18$, 18 wird notiert. Der Siebenerrest von 18 ist 4 — vgl. die obere eingekreiste Zahl. Andererseits ist der Siebenerrest des Dividenden 60 ebenfalls 4 — vgl. die untere eingekreiste Zahl.

Wie schon bei der Siebenerprobe zur Multiplikation schließt der Schreiber aus den übereinstimmenden Probezahlen zu Unrecht, dass die Division korrekt durchgeführt wurde. So ergäbe sich z. B. für die fehlerhafte Division $67 : 9 = 6\frac{6}{9}$ dasselbe Probeschema. Umgekehrt weisen nach der Aussage des Autors nicht übereinstimmende Probezahlen in der Tat auf einen Rechenfehler in der Division hin.

Zum besseren Verständnis der hier durchgeführten Siebenerprobe schreiben wir $60 : 9 = 6\frac{6}{9}$ in der multiplikativen Form $60 = 6 \cdot 9 + 6$. Das Verfahren beruht nun darauf, dass der Siebenerrest der Summe rechts mit dem Siebenerrest der Summe der Siebenerreste der Summanden ($6 \cdot 9$ und 6) übereinstimmt (Additivität der Kongruenzrelation). Der erste Summand ist ein Produkt, sein Siebenerrest kann nach den Überlegungen im Kommentar zu Kapitel 7 (Multiplikativität der Kongruenzrelation) faktorenweise bestimmt werden: $6 \cdot 9 \Rightarrow 6 \cdot 2 = 12 \Rightarrow 5$. Der Siebenerrest des zweiten Summanden ist 6, Addition ergibt 11 mit dem Siebenerrest 4, wie auch 60 auf der linken Seite den Siebenerrest 4 hat. Unser Autor hat aber, was letztlich keinen Unterschied macht, "rechts" mit der 12 weitergerechnet: $12 + 6 = 18 \Rightarrow 4$.

In der Terminologie des Kommentars zu Kapitel 7 besteht die Additivität der Kongruenzrelation allgemein in folgender Aussage:

Aus $a \equiv a'$ mod m und $b \equiv b'$ mod m folgt $a + b \equiv a' + b'$ mod m.

Dies ist sofort einzusehen, denn wenn sowohl $a - a'$ als auch $b - b'$ durch m teilbar sind, dann ist auch die Summe $(a + b) - (a' + b')$ durch m teilbar.

Wählt man nun a', b' so, dass $0 \le a', b' < m$ gilt, so sind a' und b' die Reste von a bzw. b nach Division durch m. Der Rest von $a + b$ nach Division durch m lässt sich also über die Summe der Reste von a und b berechnen. Falls diese Summe größer oder gleich m ist, stimmt erst ihr Rest nach Division durch m, d. h. $a' + b' - m$ (mit der Eigenschaft $0 \le a' + b' - m < m$) mit dem Rest von $a + b$ überein. Mit der speziellen Wahl $m = 7$ kommt man zur Siebenerprobe der Addition.

In unserem Beispiel ist $a = 6 \cdot 9$, $b = 6$, $a + b = 60$, $a' = 5$, $b' = 6$, $a' + b' = 11$, $11 - 7 = 4$. Dies ist auch der Siebenerrest von 60. Der Autor aber nimmt den Siebenerrest des zweiten Faktors von a, multipliziert damit den ersten Faktor und addiert sogleich b' usw. (s. o.)

Die Schrittfolge zur Durchführung der Siebenerprobe soll hier einmal bei einer allgemeinen Division in Kurznotation demonstriert werden.

Seien a der Dividend, b ($\neq 0$) der Divisor, q der (ganzzahlige) Quotient. Dann gilt $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ mit einer natürlichen Zahl r ($0 \le r < b$). (Bei der unvollständigen Division ist $r > 0$ der Rest.) Die Gleichung lässt sich multiplikativ schreiben:

$a = q\,b + r$

Mit $S(n)$ werde der Siebenerrest einer natürlichen Zahl n bezeichnet.

Rechte Seite: (1) $S(qb) = S(q) \cdot S(b)$, falls $S(q) \cdot S(b) < 7$
(1') $S(qb) = S(S(q) \cdot S(b))$, falls $S(q) \cdot S(b) > 7$
(2) $S(r)$
(3) $S(qb + r) = S(qb) + S(r)$, falls $S(qb) + S(r) < 7$
(3') $S(qb + r) = S(S(qb) + S(r))$, falls $S(qb) + S(r) > 7$
Linke Seite: (4) Vergleich von $S(qb + r)$ mit $S(a)$

Der Schritt (1') sorgt für eine Rechnung mit möglichst kleinen Zahlen. Man kann jedoch, wie unser Autor, auf die Bestimmung von $S(qb)$ im Fall (1') verzichten, berechnet wie im Fall (1) nur $S(q) \cdot S(b)$ und erhält analog zu (3'):

(3'') $S(qb + r) = S(S(q) \cdot S(b) + S(r))$, falls $S(q) \cdot S(b) + S(r) \geq 7$

Dabei treten rechts in der äußeren Klammer im Allgemeinen größere Zahlen als nötig auf.

Andererseits kann man statt $m = 7$ (s. vorherige Seite) z. B. auch $m = 9$ wählen: Die Neunerprobe zur Division verläuft völlig analog zur Siebenerprobe — man ersetze in (1) bis (4) $S(\ )$ durch $Q(\ )$ und 7 durch 9 —, hat aber gegenüber dieser wieder den entscheidenden Vorteil, dass die Neunerreste ohne Division einfach mithilfe der Quersumme bestimmt werden können. (Vgl. den Kommentar zu Kap. 7.) Im "Vortext" zum Rechenbuch hat der Autor dieser Divisionsprobe ein eigenes Kapitel (fol. $8^r/8^v$) gewidmet, in dem er ausdrücklich erklärt, dass die Probe mit 9 leichter als die Siebenerprobe durchzuführen sei. Das erste seiner vier Beispiele bezieht sich auf die Division $154 : 25 = 6\frac{4}{25}$ wobei einerseits $Q(25) = 7$, $Q(6) = 6$, $Q(4) = 4$, $Q(6 \cdot 7 + 4) = 10$, $Q(10) = \underline{1}$, andererseits übereinstimmend $Q(154) = 10$ und $Q(10) = \underline{1}$ ist. Dabei wählt er rechts vom Divisionsdiagramm wieder das Schema mit den eingekreisten Probezahlen, das wir von der Siebenerprobe her kennen.

Die Siebenerprobe kann nur dann sinnvoll sein, wenn sie nicht aufwendiger ist als die Rechnung, die durch sie überprüft werden soll. Für das (noch zu einfache) Beispiel $60 : 9 = 6\frac{6}{9}$ ist dieses "ökonomische Prinzip" noch nicht erfüllt.

23 *πγ´ durch die ε´ dividiert* (83 : 5)

Zunächst begründet der Autor, warum er hier — im Unterschied zum vorigen Beispiel — den Teiler (ε´) unter die Zehnerstelle (η´) des Dividenden schreibt: *Du kannst die ε´ von den η´ abziehen.*

Die Division wird dann, in unsere Ziffern übertragen, in folgenden Schritten durchgeführt:

(I) $\begin{matrix} 3 & & \\ \not{8} & 3 & \\ \not{5} & & \\ 1 & & \end{matrix}$ (II) $\begin{matrix} \not{3} & & \\ \not{8} & 3 & \\ \not{5} & \not{5} & \\ 1 & 6 & \end{matrix}$ (III) $\begin{matrix} \not{3} & & \\ \not{8} & 3 & \frac{3}{5} \\ \not{5} & \not{5} & \\ 1 & 6 & \end{matrix}$

(I) Der Teiler 5 wird unter die 8 gesetzt. $8 : 5 = 1$ Rest 3: Die erste Quotientenziffer 1 wird unter die 5 gesetzt, der Rest 3 über die 8, die nun verbraucht ist und deshalb gestrichen wird. Dasselbe gilt für den Teiler 5 unter der 8.
(II) Der Teiler 5 rückt unter die 3 vor. Der nächste Dividend ist die nach

rechts unten abfallende Zahl 33. 33 : 5 = 6 Rest 3. Die zweite Quotientenziffer 6 wird unter den neuen Teiler 5 gesetzt. Die Zehnerziffer von 33 ist verbraucht und wird gestrichen, ebenso der zweite Teiler 5.
(III) Die Division ist abgeschlossen. Die Einerziffer von 33 bleibt ungestrichen, da sie (zufällig) mit dem Rest übereinstimmt. Übrig bleibt der Bruch $\frac{3}{5}$. Das Schema des Autors ist erreicht. Ergebnis: $16\frac{3}{5}$
Die folgende Überlegung schließt das Kapitel ab: ... *jeder Teil von den 16 hat jeweils 5: denn 5 mal 16 ergeben 80, und es bleiben 3 als Zähler übrig* ... Hier wird also zur Überprüfung, ob die Division korrekt ist, die Umkehrmultiplikation verwendet.
Im Kapitel 25 wird sich der Autor zu dieser Probe noch ausführlicher äußern.

24 *Über die Probe davon und den Beweis*

Der Autor erklärt wieder das Schema der Siebenerprobe — hier zu $83 = 5 \cdot 16 + 3$ —, das rechts vom Divisionsdiagramm im vorigen Kapitel steht:

$$\frac{5}{2}\ \ 3\,\big|\,13 \quad \text{(mit unseren Ziffern)}$$

Der Rest 3 steht hinter, der Teiler 5 auf und der Siebenerrest 2 des Quotienten 16 unter dem Querstrich. Nun ist $S(2 \cdot 5 + 3) = 6$ (oben eingekreist). Damit ist $S(83)$ zu vergleichen. Diesen Siebenerrest des Dividenden gibt der Schreiber nicht direkt an, sondern bestimmt ihn schrittweise durch Subtraktion: $8 - 7 = 1$, $13 - 7 = 6$ (unten eingekreist). Er hätte auch schrittweise unter Vernachlässigung der Teilquotienten durch 7 dividieren können, da es hier ja nur auf die Reste ankommt.

25 *ωις´ durch die ς´ dividiert* (816 : 6 = 136)

Das Divisionsdiagramm des Autors entsteht nach folgenden Schritten:

(I)
2
8 1 6
6
1

(II)
2 3
8 1 6
6 6
1 3

(III)
2 3
8 1 6 o
6 6 6 6
1 3 6

(I) 8 : 6 = 1 Rest 2 (II) 21 : 6 = 3 Rest 3 (III) 36 : 6 = 6 Rest 0.
Der Teiler wird zweimal eingerückt, also dreimal notiert. Die Division geht auf. Dennoch gibt der Schreiber den "Restbruch" $\frac{o}{6}$ an.
Zum Abschluss des Kapitels erläutert er die Multiplikation als Umkehrung der Division und die Division als Umkehrung der Multiplikation am gerade behandelten Divisionsbeispiel ($816 : 6 = 136 \Rightarrow 136 \cdot 6 = 816$) sowie an den Beispielen $100 : 4 = 25 \Rightarrow 25 \cdot 4 = 100$, $25 \cdot 4 = 100 \Rightarrow 100 : 4 = 25$. Dazu sagt er, dass der Teiler, der zum Faktor des Quotienten wird, diesen (bei erneuter Umkehrung) wieder in den früheren Zustand (εἰς τὴν προτέραν ἀποκατάστασιν) überführt und dass der Faktor, der zum Teiler des Produkts wird, die Multiplikation (bei erneuter Umkehrung) ebenfalls wieder in ihren Ursprungszustand bringt.
Im Unterschied zur Siebenerprobe ist diese Umkehrprobe zuverlässig, allerdings

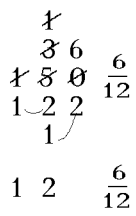
muss bei komplizierteren Divisionen entsprechend aufwendig multipliziert werden.

26 ***Über die Probe davon und den Beweis***

Der Autor gibt wieder die Schritte zur Durchführung der Siebenerprobe an. Im Schema rechts vom Divisionsdiagramm im vorigen Kapitel (s. S. 29) sind die übereinstimmenden Siebenerreste von $6 \cdot 136 + 0$ und von 816 jeweils eingekreist: ④

27 ***ρν′ durch die ιβ′ dividiert*** $(150 : 12 = 12\frac{6}{12})$

Erstmals wird durch eine zweistellige Zahl dividiert. Hier sollen die einzelnen Schritte, die der Autor sehr sorgfältig beschreibt, sinngemäß wiedergegeben werden. Das Vorgehen lässt sich im Wesentlichen auch anhand des abgeschlossenen Divisionsdiagramms rekonstruieren.



12 wird unter die 15 von 150 geschrieben, da 12 von 15 abgezogen werden kann. Zunächst werden nur die beiden ersten Ziffern von 15 und 12 betrachtet: $1 - \underline{1} \cdot 1 = 0$, $\underline{1}$ wird unter die 1 von 12 gesetzt, die erste Ziffer von 150 (1) und von 12 (1) werden gestrichen. Anschließend ist die zweite Ziffer von 12 ebenfalls einmal von der zweiten von 15 zu subtrahieren: $5 - \underline{1} \cdot 2 = 3$, der Rest 3 wird über die 5 geschrieben, die Ziffern 5 und 2 (zweite Ziffer von 12) werden gestrichen. (Ein kleiner Bogen, der 1 und 2 verbindet, kennzeichnet die Streichung des Teilers 12.) Damit ist der Teiler 12 in seiner ersten Position vollständig verbraucht. Jetzt wird der Teiler 12 nach rechts gerückt, wobei die 2 platzsparend nach oben direkt unter die 0 gesetzt wird. Es geht um die Division von 30 durch 12, wobei aber zunächst wieder nur die beiden ersten Ziffern dieser Zahlen betrachtet werden. Zwar gilt $3 - \underline{3} \cdot 1 = 0$, aber es bleibt nichts übrig, wovon auch die zweite Ziffer von 12 abgezogen werden könnte. Diese Überlegung führt zur Korrektur $3 - \underline{2} \cdot 1 = 1$, $\underline{2}$ wird unter die erste Ziffer des eingerückten Teilers 12 geschrieben, der Rest 1 wird über die 3 geschrieben, 3 und die erste Ziffer des eingerückten Teilers (1) werden gestrichen. Dadurch ist die "dreistöckige" Zahl 10 entstanden, von der die zweite Ziffer des eingerückten Teilers (2) ebenfalls zweimal abzuziehen ist: $10 - \underline{2} \cdot 2 = 6$, der Rest 6 wird über die 0 gesetzt, die Ziffern der 10 und die zweite Ziffer des eingerückten Teilers werden gestrichen. (Ein kleiner nach oben gerichteter Bogen kennzeichnet die Streichung des eingerückten Teilers.) Die Division ist abgeschlossen, da der Rest 6 nicht mehr ganzzahlig durch 12 geteilt werden kann. Insgesamt ergibt sich der Quotient $\underline{12}$ und der Bruchteil $\frac{6}{12}$, den der Autor (nur im Text) noch zu $\frac{1}{2}$ kürzt.

Abschließend führt er noch die Umkehrmultiplikation an: $12 \cdot 12 = 144$, $144 + 6 = 150 \Rightarrow 12\frac{1}{2} \cdot 12 = 150$

Der wesentliche Unterschied zwischen einer Division durch einen mehrstelligen Divisor und einer Division durch einen einstelligen besteht darin, dass im ersten Fall die Teilquotienten in der Regel zunächst geschätzt werden müssen, während sie sich im zweiten Fall direkt aus der Umkehrung des kleinen Einmaleins ergeben. So diskutiert der Autor in seinem Beispiel, wie oft 12 von 30 subtra-

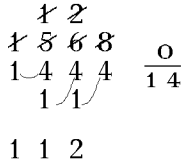
hiert werden kann, wobei die Anfangsziffern zunächst eine dreifache Subtraktion nahelegen. Freilich sind die notwendigen Überlegungen hier noch sehr elementar, doch mit wachsender Stellenzahl des Teilers wird ein solches Schätzen zunehmend schwieriger.
Der Schreiber bedient sich, wie auch schon in den Kapiteln 21, 23 und 25, bei der Beschreibung der Divisionsmethode vorwiegend der Sprache der Subtraktion. Das ist völlig sachgerecht, da ein enger Zusammenhang zwischen diesen beiden Rechenarten besteht: Der Dividend kann als Minuend, der Divisor als Subtrahend verstanden werden, wobei der Quotient Auskunft darüber gibt, wie (ganzzahlig) oft der Subtrahend von Minuenden maximal abgezogen werden kann. Tritt noch ein Rest auf, so hat der Quotient noch einen zusätzlichen Bruchanteil, dessen Zähler der Rest und dessen Nenner der Subtrahend ist. So erlaubt z. B. die Division in diesem Kapitel die folgende subtraktive Deutung: $150 - \underline{12} \cdot 12 = 6$, wobei zum Quotienten $\underline{12}$ noch der Bruchteil $\frac{6}{12}$ hinzukommt. (Die 12 im Nenner ist der Subtrahend und stimmt nur zufällig mit dem Ganzteil des Quotienten überein.)

28 *Über die Probe davon und den Beweis*

Der Autor gibt wieder die einzelnen Schritte zur Durchführung der Siebenerprobe an. Im Schema zur Siebenerprobe rechts vom Divisionsdiagramm im vorigen Kapitel (s. S. 31) sind die übereinstimmenden Siebenerreste von $12 \cdot 12 + 6$ und von 150 jeweils eingekreist: ③

29 *Wie man ,αφξη´ (1568) Hyperpyra auf ιδ´ (14) Gesellschafter verteilen und wissen kann, wie viel jeder von ihnen von den ,αφξη´ Hyperpyra gewinnt*

Angenommen, irgendwelche ιδ´ Gesellschafter haben ,αφξη´ Hyperpyra unter sich zu verteilen. Du suchst zu erfahren, was sich auf jeden der ιδ´ Gesellschafter als zustehender Teil aus den ,αφξη´ Hyperpyra verteilt ...



Eine erste einfache Textaufgabe zur Division: (Der Geldwert Hyperpyron wird in der Handschrift mit ⸿ abgekürzt.) Im Unterschied zur Division von Kapitel 27 ist hier der Teiler dreimal anzusetzen. Die vom Autor vollständig beschriebenen Einzelschritte lassen sich anhand des Diagramms gut nachvollziehen.
Ergebnis: 1568 Hyperpyra : 14 (Gesellschafter) = 112 Hyperpyra
Es folgen noch die Umkehrprobe durch Multiplikation (112 Hyperpyra · 14 (Gesellschafter) = 1568 Hyperpyra) sowie die Umkehrung 1568 : 112 = 14 der ursprünglichen Division (Vertauschung des Divisors mit dem Quotienten).
Abschließend weist der Schreiber darauf hin, dass zufällig kein Bruch übrig geblieben ist, und erläutert die Schreibweise $\frac{0}{14}$.

30 *Über die Probe davon und den Beweis*

Der Autor gibt wieder die einzelnen Schritte zur Durchführung der Siebenerprobe an. Im Schema zur Siebenerprobe rechts vom Divisionsdiagramm im vorigen Kapitel (s. S. 32) erkennt man, dass alle Zwischenreste gleich 0 sind. Diese werden aber nicht (mittels $0 \cdot 0 + 0 = 0$) miteinander verrechnet, sondern es wird einfach 0 als Probezahl festgelegt. Vermutlich ist der Schreiber der Auffassung, dass die Null, die keine "richtige Zahl" ist, nicht mit sich selbst multipliziert werden kann.

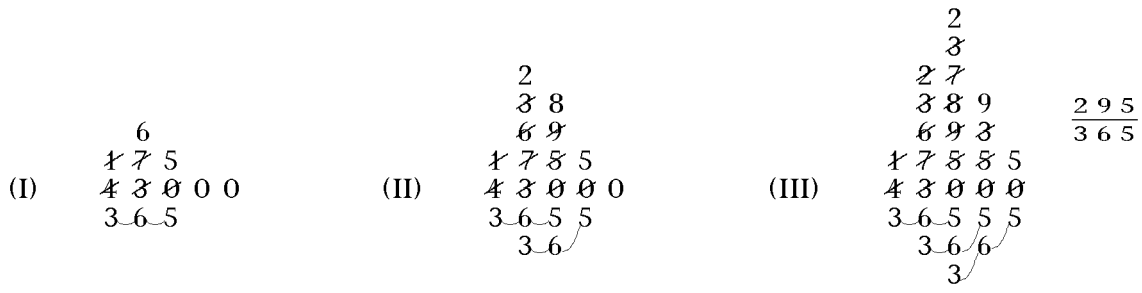
Insgesamt ergibt sich 0 – jeweils eingekreist – als gemeinsamer Siebenerrest von $14 \cdot 112$ und von 1568.

31 *Wie man μγ′ Tausend Tage durch die τξε′ Tage eines Jahres dividieren und wissen kann, wie viele Jahre es werden*

$(43000 : 365 = 117\frac{295}{365})$

Wie in Kapitel 12 werden wieder die Schaltjahre vernachlässigt.

Hier ist also durch eine dreistellige Zahl zu dividieren. Das komplizierte Divisionsdiagramm des Autors beinhaltet drei Schritte, da der erste Teiler noch zweimal eingerückt werden muss.



Zu (I): $430 - \underline{1} \cdot 365 = 65$ ergibt sich aus $4 - \underline{1} \cdot 3 = 1$, $13 - \underline{1} \cdot 6 = 7$, $70 - \underline{1} \cdot 5 = 65$.

Der Autor berechnet die Differenzen $13 - 6$ und $70 - 5$ wie folgt: $13 - 6 = (10 - 6) + 3 = 4 + 3 = 7$ bzw. $70 - 5 = 60 + (10 - 5) = 65$. Ähnlich verfährt er bei den in (II) und (III) auftretenden Subtraktionen mit Zehnerunterschreitung. Diese umständlich anmutenden Zwischenrechnungen sind aber für den Leser gedacht, der ja bisher noch kein Subtraktionsverfahren, wie es für die schriftliche Division offensichtlich erforderlich ist, gelehrt wurde: Dies wird erst im Kapitel 102 nachgeholt.

Die hier verwendete Methode zur Berechnung der Differenz bei Zehnerunterschreitung – die Einerziffer des Minuenden ist kleiner als die des Subtrahenden – war als Methode der "dekadischen Ergänzung" auch in deutschsprachigen Rechenbüchern des 16. Jahrhunderts verbreitet (vgl. TROPFKE 1980, S. 197 f.). Allgemein (ohne Betrachtung von Hunderter- oder höheren Stellen) lässt sie sich so beschreiben:

Sei $10a + b$, der Minuend, eine zweistellige und $10c + d$, der Subtrahend, eine mindestens einstellige Zahl, die Differenz sei positiv, und es trete Zehnerunterschreitung auf. Die Variablen erfüllen somit die Bedingung

$0 \le c < a < 10$, $0 \le b < d < 10$. Dann lässt sich $(10a + b) - (10c + d)$ in der Form $10(a - (c + 1)) + (b + (10 - d))$ schreiben.

In den beiden oben genannten Beispielen ist $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$, $d = 6$ bzw. $a = 7$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 5$.

Didaktisch gesehen ist es sehr ungeschickt, dass die Erklärung des Divisionsverfahrens immer wieder durch die Erläuterung des Subtraktionsverfahrens unterbrochen wird.

Zu (II): $650 - \underline{1} \cdot 365 = 285$ ergibt sich aus $6 - \underline{1} \cdot 3 = 3$, $35 - \underline{1} \cdot 6 = 29$, $290 - \underline{1} \cdot 5 = 285$.
Zur Abschätzung des 2. Teilquotienten ($\underline{1}$) wird gesagt, dass 3 (aus 365) zwar 2-mal in 6 (aus 650) aufgehe, aber 6 (aus 365) nicht 2-mal von 5 (aus 650) abgezogen werden könne. Daher sei $6 - \underline{1} \cdot 3$ zu rechnen.

Zu (III): $2850 - \underline{7} \cdot 365 = 295$ ergibt sich aus $28 - \underline{7} \cdot 3 = 7$, $75 - \underline{7} \cdot 6 = 33$, $330 - \underline{7} \cdot 5 = 295$.
Zur Abschätzung des 3. Teilquotienten ($\underline{7}$) bemerkt der Autor, dass 3 (aus 365) nicht 8-mal von 28 (aus 2850) subtrahiert werden könne, da dann aus dem Rest 4 und der nächsten Ziffer 5 (aus 2850) die Zahl 45 entstehe, von der 6 (aus 365) nicht 8-mal abgezogen werden könne. Gar nicht erst in Betracht gezogen wird die Frage, ob 3 sogar 9-mal von 28 subtrahiert werden kann, was im Hinblick auf die Konsequenzen natürlich erst recht nicht möglich ist.
Also ist $28 - \underline{7} \cdot 3$ zu bilden.

Letztlich ergibt sich bei der Division der ganzzahlige Quotient 117 und ein Rest 295, der zum Zähler des Bruchs mit dem Teiler 365 als Nenner wird. Der Autor kommt zu dem Resultat, dass 43000 Tage also 117 Jahre und 295 Tage ausmachen, wobei diese Tage in Bezug auf die 365 Tage eines Jahres als Jahresbruchteil zu verstehen sind.

Die Reihenfolge, in der die entsprechenden Ziffern im Diagramm (III) eingetragen werden, lässt sich noch einigermaßen gut nachvollziehen. Ungewohnt für uns ist nur, dass zusammengehörende Ziffern in verschiedenen Zeilen stehen. Dies gilt für die eingerückten Teiler, insbesondere aber für die Ziffern der Reste: So steht z. B. die Einerziffer von 330 (s. (III)) zwei Zeilen tiefer als die Zehnerziffer und diese wiederum drei Zeilen tiefer als die Hunderterziffer. (Gleiches gilt für 295.)

32 *Über die Probe davon und den Beweis*

Der Autor gibt wieder die einzelnen Schritte zur Durchführung der Siebenerprobe an. Im betreffenden Schema zur Siebenerprobe rechts vom Divisionsdiagramm im vorigen Kapitel (s. S. 35) ergibt sich 6 — jeweils eingekreist — als gemeinsamer Siebenerrest von $365 \cdot 117 + 295$ und von 43000.

33 *Wie man sich damit in besonderer Weise auseinandersetzen muss. Und wenn du es nämlich so tust, wie die Rechentechnik es zu tun lehrt, wirst du das, was gesagt wird, gut verstehen*

Wie dies nun mit diesen verschiedenen verwickelten Ziffern niedergelegt wurde, ist es sehr mühsam zu begreifen, und du kannst die Zahlen wohl nicht gut

überschauen, von denen wir im Einzelnen sagen: Subtrahiere dies hier und streiche wiederum das da. Denn nun ist das Beispiel, das wir zusammengesetzt haben, beendet. Anfangs ist zu sagen, dass du dies hier addieren und das da subtrahieren sollst, und zu wissen, dass keineswegs nur die erste Ziffer aufzusuchen ist — du weißt, dass das Ganze ausgeführt wird, wie die Rechenkunst euch (!) lehrt — und wenn du den Anfang davon aufsuchst, hast du die Mitte überschritten und bist schon ans Ende der Aufgabe herangekommen. Und dies bereitet euch (!) eine nicht unbeträchtliche Unklarheit, vielmehr macht es auch das Begreifen sehr mühsam. Wenn du aber gut wissen und klarer verstehen willst, wie viel die Methode dir sagt, setze für dich auf ein Papier die μγ´ Tausend Tage — so, wie sie auch dort stehen: δ γ ψ ψ ψ´ —, darunter aber setze die Tage eines Jahres, d. h. τξε´, was der Teiler ist. Beginne aber, die Methode und die eigenen Divisionen wiederzuerkennen. Und wie die Methode euch (!) lehrt, so fängst auch du es an zu tun. Und streiche, was dich die Methode entsprechend lehrt, subtrahiere hingegen wiederum, wie die Methode dir andeutet, und addiere wiederum, was addiert werden muss, wie dies euch (!) auch klar wird, indem es durch die Methode aufgezeigt ist. Wenn du dies so vom Anfang bis zum Ende tust, wirst du gut finden, was du zu wissen suchst, und du kannst dies klarer verstehen, wenn du dies von Anfang an schriftlich machst, wie die Methode im Einzelnen andeutet, als allein von einer Betrachtung der verschiedenen und verwickelten Ziffern, die wir uns darlegen. Dies gilt aber auch bei allen anderen (Divisionen), von denen wir vorher sagten, dass wir sie richtig gemacht haben, und nicht nur bei diesen, sondern auch bei denen, von denen wir noch künftig sprechen werden — und wenn du es mit diesen so machst, wirst du durch die Methode, dich damit auseinanderzusetzen, die Divisionen gut herausfinden, die wir uns in verschiedenen Beispielen zugrunde legen und auch noch künftig zugrunde legen werden.

Dem Autor ist nach dem letzten Beispiel, auf das er sich hier explizit bezieht, bewusst, dass das komplizierte Zahlenschema als Endschema zu unübersichtlich ist und Verwirrung stiften kann. Daher fordert er in diesem kurzen theoretischen Zwischentext den Leser auf, die schriftlichen Divisionen nach der vorgeschriebenen Methode selbst durchzuführen.
Im Text fällt der mehrfache Numeruswechsel des Adressaten auf.

34 ***Wie man ροε´ Tausend und υχς´ Hyperpyra auf ,β´ Gesellschafter verteilen kann***

(175426 Hyperpyra : 2000 = $87\frac{1426}{2000}$ Hyperpyra)

Angenommen, ,β´ Soldaten (!) haben ροε´ Tausend Hyperpyra und υχε´ Hyperpyra gewonnen. Du suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra sich auf jeden der ,β´ Soldaten aus den bezeichneten Hyperpyra verteilen ...

Obwohl hier sogar durch eine vierstellige Zahl dividiert werden muss, ist diese Aufgabe bedeutend einfacher als das Beispiel von Kapitel 31. Die Nullen des Teilers erlauben, seine Anfangsziffer 2 so oft wie möglich von der jeweils darüberstehenden Zahl abzuziehen, sodass ein Schätzen entfällt. Im ersten Schritt – der Teiler 2000 ist einzurücken – wird die 2 achtmal von 17 subtrahiert. Nun müssten auch die Nullen achtmal von den jeweils oben stehenden Zahlen abgezogen werden. Über die dabei entstehenden Subtrahenden schreibt der Autor:

1 1
1 7 5 4 2 6
2 0 0 0 0
2 0 0
8 7 Bruch $\frac{1426}{2000}$

Nicht allein wenn du achtmal 0 abziehst, wird es wieder 0, sondern auch wenn du zehntausendmal 0 abziehst, hast du nichts mehr eingebracht als wiederum 0. ... Derselbe Schaden (ἥττημαν) *aber (ist) auch bei allen anderen Nullen, die der Reihe nach bei den 2000 Soldaten vorhanden sind.*

Mit dieser Begründung streicht er mit der 2 auch die drei Nullen und rückt den Teiler weiter ein. Nach Abschluss der Division kündigt er die weitere Verteilung der restlichen 1426 Hyperpyra auf die 2000 Soldaten an – vgl. Kapitel 36. Nur in der Überschrift werden die Personen als σύντροφοι (Gesellschafter) bezeichnet.

35 *Über die Probe davon und den Beweis*

Der Autor gibt wieder die einzelnen Schritte zur Durchführung der Siebenerprobe an. Im betreffenden Schema zur Siebenerprobe rechts vom Divisionsdiagramm im vorigen Kapitel (s. S. 38) ergibt sich 6 – jeweils eingekreist – als gemeinsamer Siebenerrest von $2000 \cdot 87 + 1426$ und von 175426.

36 *Wie man wissen kann, was sich auf jeden der ‚β′ Soldaten aus den ‚αυχς′ Hyperpyra verteilt – dem Zähler, der von den ροε′ Tausend und υχς′ Hyperpyra übrig geblieben ist*

(1426 Hyperpyra : 2000 = 14 Kukkia $1\frac{1}{25}$ Turnesia)

Hier also setzt der Autor die Verteilungsaufgabe von Kapitel 34 wie angekündigt fort. Die verbliebenen 1426 Hyperpyra (Abkürzung: ϋ) werden in die kleinere Einheit Kukkia (Abkürzung: ⁝) umgewandelt, wobei 1 Hyperpyron 20 Kukkia entspricht – vgl. das 1. Multiplikationsdiagramm. (Hier hätte eine einfache Kopfrechnung genügt.) Anschließend wird das Produkt durch 2000 geteilt mit dem Ergebnis, dass jeder Soldat (noch zusätzlich) 14 Kukkia erhält.

ϋ 1 4 2 6 | 0
0 0 0 0
2 8 5 2 | 2
⁝ 2 8 5 2 0

2 8 5 2 0
2 0 0 0 0
2 0 0
⁝ 1 4 Bruch $\frac{⁝520}{2000}$

(⁝) 5 2 0 Turnesia
2 0 8 0 | 4

2 0 8 0
2 0 0 0
Turnesi 1 Bruch $\frac{80}{2000}$

Darüber hinaus hat sich noch der Bruchanteil $\frac{520}{2000}$ von 1 Kukki ergeben. Zur weiteren Verteilung auf die Soldaten wird das Kukki auf eine noch kleinere Einheit umgerechnet, und zwar auf Turnesia, wobei 1 Kukki = 4 Turnesia gilt.

Damit erklären sich die folgende Multiplikation und Division, wobei die Diagramme bei so einfachen Rechnungen völlig entbehrlich sind. Jeder Soldat erhält also zusätzlich 1 Turnesi, aber es bleiben noch $\frac{80}{2000}$ Turnesia übrig, wobei der Zähler, wie der Autor bemerkt, 1 Hyperpyron entspricht. (Der Rest beträgt somit $\frac{1}{2000}$ Hyperpyron.)

Offenbar ist das Turnesi die kleinste Münzeinheit, sodass es nicht weiter umgewandelt werden kann. Der Autor hätte nun den Bruch $\frac{80}{2000}$ nur zu $\frac{1}{25}$ kürzen müssen, um das Ergebnis zu erhalten, aber er schreibt zunächst: ... *du kannst nicht die 80 in Bezug auf die 2000 auszahlen, weil sie viel kleiner sind.* Nun sucht er eine Zahl, die als Divisor von 80 zum Quotienten 2000 führt, *damit jeder der 2000 einen geringen Teil eines Turnesi bekommt.* (Aus $80 : x = 2000$ folgt $x = \frac{1}{25}$.) Dazu dividiert er 2000 durch 80 — siehe das nebenstehende Divisionsdiagramm — und erhält ($\frac{1}{x} =$) 25. Daraus schließt er richtig, aber ohne weitere Erklärung, dass jeder Soldat zusätzlich noch $\frac{1}{25}$ eines Turnesi erhält.

```
  4
2 0 0 0
  8
  0 0
    8
    2 5
```

Seine Probe besteht in der schriftlichen (!) Multiplikation $80 \cdot 25 = 2000$.

37 ***Umfassend über alle Teile, die geteilt werden***

Nachdem wir die Divisionen der verschiedenen Aufgaben zugrunde gelegt und, wie ausgeführt, anhand verwickelter Beispiele aufgezeigt haben, wie du nun die größeren Teile dividieren und daraus kleinere machen kannst, schien es uns notwendig zu sein, euch (!) *auch umfassend darzulegen und aufzuzeichnen, wie du nun jede Division ausführen kannst, in wie viele Teile auch immer du sie teilen willst.*

Und zuerst — wie du weißt und hinreichend anhand der Beispiele gelernt hast — setze nach oben die ganze Einheit der aufgesuchten Größe, die du, in wie viele Teile auch immer, dividieren willst. Unterhalb dieser ganzen Größe aber setze den Teiler, das ist jener Teil, durch den du gerade das Größere dividieren willst, damit es kleiner wird. Und wenn du den Teiler von den ersten Ziffern oben subtrahieren kannst, setze diesen direkt unterhalb der ersten Ziffer oben. Wenn du aber den Teiler nicht von der ersten Ziffer oben subtrahieren kannst, rücke um die erste Ziffer oben vor und setze diesen direkt unterhalb der zweiten Ziffer oben.

Prüfe aber gut, wie oft die erste Ziffer des Teilers von der Ziffer oberhalb von ihr subtrahiert werden kann. Und wenn der Teiler direkt unterhalb der ersten Ziffer oben steht, ist das, was oberhalb des Teilers steht, gleichbedeutend und übereinstimmend, Einer mit Einer und Zehner mit Zehner und so weiter. Wenn aber der Teiler direkt unterhalb der zweiten Ziffer oben steht, bezeichnet die erste Ziffer oben, da der Teiler an zweiter Stelle steht, Zehner und keine Einer. Wie oft nun die erste Ziffer des Teilers subtrahiert werden kann, gleich, ob sie an der Einerstelle steht oder an der Zehnerstelle, von den Ziffern oben oder nur von einer Ziffer, einmal natürlich oder zweimal oder auch vielfach: auch die übrigen Ziffern des zusammen aufgetretenen Teilers, wie viele auch immer es sind, — so oft subtrahiere auch alle diese, wie oft die erste Ziffer des Teilers von den Ziffern oder der Ziffer oben subtrahiert werden konnte;

dies hast du auch nach unten gesetzt, um anzuzeigen, dass du ihn (den Teiler) *so oft von den Ziffern oben subtrahiert hast.*
Man muss aber gut prüfen und sorgfältig bestrebt sein, die erste Ziffer des Teilers so zu subtrahieren, dass du die Ziffern oben nicht gänzlich mit hinzunimmst und alle übrigen Ziffern des Teilers nicht mehr subtrahieren kannst, sondern subtrahiere die erste Ziffer des Teilers so, dass dir irgendwelche Ziffern übrig bleiben, um auch alle übrigen Ziffern des Teilers zu Ende zu führen, wie viele auch immer es sind, — Ziffern, die geeignet sind, um auch diese (Teilerziffern) *zu subtrahieren, wie du auch die erste Ziffer des Teilers subtrahiert hast, was du auch nach unten gesetzt hast, um anzuzeigen, dass du sie so oft von den Ziffern oben subtrahiert hast.*
Wenn nun der Teiler aus drei Stellen besteht — so gesetzt: α ι ι΄ — oder aus vier Stellen — so gesetzt: α ι ι ι΄ —, die erste Stelle also eine Ziffer hat, die weiteren aber aus nichts bestehen, subtrahiere nun die erste Ziffer des Teilers von den Ziffern oben, so oft es möglich ist. Die übrigen aber — da sie nichts sind, kannst du von diesen nichts subtrahieren. Streiche sowohl die erste Ziffer des Teilers und alle übrigen "Nichts", weil sie unnütz und unwirksam sind. Rücke nun um eine Ziffer entsprechend vor und schreibe einen weiteren Teiler, den du auch vorher geschrieben hast. Und subtrahiere wiederum, so oft es möglich ist, die erste Ziffer des zweiten Teilers von den Ziffern oben. Und setze dies direkt nach unten, um anzuzeigen, dass du die erste Ziffer des Teilers so oft von den Ziffern oberhalb von ihr subtrahiert hast. Die übrigen "Nichts" zusammen mit der ersten Ziffer — streiche diese. Rücke nun wiederum um eine Ziffer entsprechend vor und schreibe einen weiteren Teiler, bis du auf diese Weise alle Ziffern oben mit dem zusammen aufgetretenen Teiler beendet hast. Dies aber geschieht so, wenn die erste Ziffer des Teilers irgendeine Zahl bezeichnet, alle übrigen aber nichts sind.
Wenn aber der Teiler — wenn seine erste und zweite Stelle, manchmal ist es aber auch die dritte und vierte und fünfte, irgendwelche bezeichnenden Ziffern haben, muss man, wie wir oben sagten, so oft, wie oft du die erste Ziffer des Teilers subtrahiert hast, was du auch nach unten geschrieben hast, auch alle seine übrigen Ziffern subtrahieren, wie du auch die erste subtrahiert hast. Wenn nun oben irgend zwei Ziffern eines Zehners und eines Einers stehen und — wie jemand sagen könnte — μγ΄ bezeichnen oder wie sie auch anders einen Zehner und einen Einer bezeichnen können, du aber von den zwei Ziffern oben die erste Teilerziffer oder die zweite oder die dritte zu subtrahieren suchst, multipliziere die Ziffer des Teilers, welche immer du von den Ziffern oben zu subtrahieren suchst, so oft, wie oft du auch die erste subtrahiert hast — was wir auch gewöhnlich nach unten setzen, um anzuzeigen, dass die erste Ziffer des Teilers so oft von den Ziffern oder der Ziffer oberhalb von ihr subtrahiert werden konnte.
Damit aber das Gesagte klarer wird, werde angenommen, dass die zwei Ziffern oben — so gesetzt: δ γ΄ — μγ΄ bezeichnen, von welcher Stelle herab (betrachtet) die dritte Ziffer des Teilers steht. Die dritte Ziffer des Teilers aber sei ϛ΄. Angenommen aber, du hast die erste Ziffer des Teilers, was immer sie war, δ΄-mal von den Ziffern oder der Ziffer oberhalb von ihr subtrahiert. Du hast aber

nach unten δ´ gesetzt, um anzuzeigen, dass du sie δ´-mal von den Ziffern oben subtrahiert hast. Du hast aber auch die zweite Ziffer des Teilers δ´-mal subtrahiert wie auch die erste. Nun aber suchst du auch die dritte Ziffer des Teilers, welche ς´ ist, δ´-mal von den nämlichen zwei Ziffern oben zu subtrahieren, die μγ´ bezeichnen, wie wir sagten. Multipliziere nun die ς´, welche die dritte Ziffer des Teilers ist, mit den δ´, die du nach unten gesetzt hast, um anzuzeigen, dass du die erste Ziffer des Teilers δ´-mal von den Ziffern oben subtrahiert hast. δ´ mal ς´ gibt κδ´. Subtrahiere aber die κδ´ von den μγ´ oben so: Addiere zu den κδ´, wie viel ihnen fehlt, um Zehner ohne einen Einer zu werden, das sind ς´, um λ´ zu werden. Die ς´ aber, die du addiert hast, übersteigen die κδ´, die zu subtrahieren nötig sind. Addiere diese aber mit den γ´, von denen wir sagten, dass oben μγ´ steht, und es ergibt sich ϑ´. Setze nun oberhalb der γ´ ϑ´. Streiche aber die γ´. Von den δ´ aber, die an der Zehnerstelle sind und μ´ bezeichnen, subtrahiere die λ´ — du hast ς´ zu den κδ´ addiert und die κδ´ zu λ´ gemacht. Die λ´ aber sind γ´ Zehner. Subtrahiere nun drei Zehner, d. h. λ´, von den δ´ Zehnern, die μ´ bezeichnen, und es bleibt noch α´ Zehner als Rest. Setze nun α´ oberhalb der δ´, das ist ein Zehner. Streiche aber die δ´. Dies aber, was wir sagten, dass du ς´ zu den κδ´ addieren sollst, damit sich λ´ ergeben, geschieht so, wenn du die Endziffer der κδ´, die δ´ ist, nicht von der Endziffer der beiden Ziffern oben subtrahieren kannst, die μγ´ bezeichnen; denn die δ´ können nicht von den γ´ subtrahiert werden.

Wenn aber die beiden Ziffern oben, die μγ´ bezeichnen, μδ´ oder auch με´ gewesen wären, hättest du nicht ς´ zu den κδ´ addiert, damit sie λ´ werden, sondern du hättest die δ´, die letzte Ziffer der κδ´ natürlich, von den ε´ subtrahiert, die die letzte Ziffer der με´ sind. Das α´ aber, das als Rest von den ε´ bleibt — das α´ hättest du oberhalb der ε´ gesetzt. Nachdem du aber die ε´ gestrichen hättest, hättest du wiederum die κ´, die β´ Zehner sind, von den μ´ oben subtrahiert, die δ´ Zehner sind, indem du β´ Zehner oberhalb der δ´ geschrieben und die δ´ gestrichen hättest, die μ´ bezeichnen. Ebenso geschieht es auch bei allen Ziffern oben, wenn du von ihnen die erste Ziffer des Teilers oder die zweite oder die dritte und so weiter subtrahieren willst.

Wenn aber die gerade auftretende Ziffer des Teilers, welche auch immer du von den beiden Ziffern des Einers und Zehners oben zu subtrahieren suchst, nicht subtrahiert werden kann — denn angenommen, du suchst die zweite oder dritte oder vierte Ziffer des Teilers, die ζ´ ist, η´-mal von den beiden Ziffern oben zu subtrahieren, die νγ´ bezeichnen: ζ´ mal η´ gibt νς´, und du kannst die νς´ nicht von den beiden Ziffern oben subtrahieren, die νγ´ bezeichnen. Es ist aber oben an der Hunderterstelle γ´ vorhanden und bezeichnet τ´, was mit den νγ´ τνγ´ bezeichnet. Du suchst aber νς´ von den τνγ´ oben zu subtrahieren. Subtrahiere nun von den γ´, die τ´ bezeichnen, einen Hunderter, d. h. α´; denn das α´ ist ρ´, wie die γ´ τ´ sind. Und es bleiben β´ übrig, was σ´ ist. Setze nun β´ oberhalb der γ´. Streiche aber die γ´, die τ´ bezeichnen. Die ρ´ aber, die du von den τ´ subtrahiert hast, sind zehn Zehner; es gibt auch noch weitere ε´ Zehner, die ν´ bezeichnen. Die ρ´ aber und die ν´ sind ιε´ Zehner. Addiere nun zu den νς´, die du zu subtrahieren suchst, δ´, damit es ξ´ werden, d. h. ς´ Zehner. Da du nun δ´ addiert hast, übersteigen die δ´ sicher die νς´.

Addiere die δ΄ mit den γ΄, die an der Einerstelle stehen und Drei bezeichnen, und es gibt zusammen ζ΄. Setze oberhalb der γ΄, die an der Einerstelle stehen, ζ΄, streiche aber die γ΄. Subtrahiere aber die ϛ΄ Zehner, d. h. die ξ΄, von den ιε΄ Zehnern, die ρν΄ bezeichnen, und es bleiben noch ϑ΄ Zehner übrig, d. h. ϛ΄; denn ϛ΄ und ξ΄ ist ρν΄. Streiche aber auch die ε΄, die an der Zehnerstelle stehen und ν΄ bezeichnen. Oberhalb der ε΄ aber, die ν΄ bezeichnen, setze die ϑ΄, die ϛ΄ bezeichnen, weil sie an der Zehnerstelle gelegen sind. Auf diese Weise nun kannst du es auch bei ähnlichen Fällen machen, wenn es nicht möglich ist, vom Zehner und Einer die Ziffer des Teilers zu subtrahieren, welche auch immer du von den Ziffern oben zu subtrahieren suchen musst.
Angenommen, der Teiler habe δ΄ oder ε΄ Ziffern und bezeichne Tausender oder Myriaden. Wenn du nun die erste oder zweite oder dritte Ziffer des Teilers, die du so oft multipliziert hast, wie oft du auch die erste Ziffer des Teilers subtrahiert hast, nicht von den Ziffern des Zehners und Hunderters oben subtrahieren kannst, d. h. von der ersten und zweiten und der dritten Stelle, von welcher Stelle herab (betrachtet) die fragliche Ziffer des Teilers steht, streiche von der Ziffer des Tausenders, der die vierte Stelle ist, — derart, wie du es auch beim Hunderter gemacht hast und die multiplizierte Ziffer des Teilers subtrahiert hast, d. h. die νϛ΄ von den τνγ΄ — nun alles, was immer du von den Ziffern oben subtrahierst.
Wenn du das Ganze nimmst, ohne oberhalb davon einen Rest setzen zu können, streiche es. Wenn aber irgendein Rest übrig bleibt, setze diesen ohne Bezeichnung oberhalb der gestrichenen Ziffer, damit du schön siehst, welche Ziffern einerseits bereits erfasst wurden und unbrauchbar und bezeichnet sind und welche andererseits, weil sie noch unbezeichnet sind, noch selbst zur Subtraktion aufgesucht werden.
Wenn du es so von Anfang an machst, bis du alle Ziffern oben vollendet hast, indem du diese durch den gerade vorhandenen Teiler dividierst, ist von den am Ende übrig bleibenden unbezeichneten Ziffern klar, dass sie übrig geblieben und zum Zähler geworden sind. Setze nun die unbezeichneten Ziffern, die als Zähler übrig geblieben sind, oberhalb eines Querstrichs, unter diesen aber setze den Teiler. Und prüfe, welches Verhältnis der Zähler in Bezug auf den Teiler im Vergleich hat, ein Drittel oder ein Viertel, wie wir auch das Zahlenverhältnis, das den Bruch betrifft, noch klarer an der dazu passenden Stelle besprechen werden, wenn wir auf dem Weg voranschreiten.

In diesem sehr langen Kapitel unternimmt der Autor den Versuch, das Verfahren der schriftlichen Division nicht beispielgebunden, sondern umfassend (περιεκτικῶς) darzustellen. Diese schwierige Aufgabe ist ihm mit Einschränkungen recht gut gelungen. U. a. stört wieder wie in Kap. 31 die integrierte Erklärung der schriftlichen Subtraktion.
Zum 1. Absatz:
Der Autor geht von der Notwendigkeit einer solchen allgemeinen Darstellung aus.
Zum 2. Absatz:
Position von Dividend und Divisor: Lässt sich die erste Ziffer des Divisors von

der ersten des Dividenden abziehen, dann stehen die beiden Ziffern untereinander; andernfalls muss der Divisor um eine Stelle nach rechts eingerückt werden.
Zum 3. Absatz:
Bestimmung des 1. Teilquotienten: Der Autor greift die im 2. Absatz erwähnte Fallunterscheidung auf. Im ersten Fall stimmen die untereinanderstehenden Stellenwerte von Dividend und Divisor überein, im zweiten Fall ist die erste Ziffer des Dividenden in Bezug auf die erste des Divisors eine Zehnerziffer. So oft wie die erste Ziffer des Divisors von der Ziffer bzw. den Ziffern des Dividenden subtrahiert werden kann, müssten auch alle weiteren Ziffern abgezogen werden. Der entsprechende Faktor des Subtrahenden ist (als Teilquotient) "nach unten" zu setzen. Für den Schreiber ist offenbar selbstverständlich, dass damit die Position unterhalb der ersten Ziffer des Divisors gemeint ist.
Zum 4. Absatz:
Abschätzen des Teilquotienten: Bei der Frage, wie oft die erste Ziffer des Divisors zu subtrahieren ist, ist darauf zu achten, dass nicht alle Ziffern oben "mit hinzugenommen werden" (συμπαραλαμβάνειν), damit auch die übrigen Teilerziffern noch (ebenso oft) subtrahiert werden können. Damit geht der Autor auf die typische Situation ein, dass die Anfangsziffern von Dividend und Divisor oft einen (maximalen) Subtrahendenfaktor nahelegen, der bei weiterer Rechnung nach unten korrigiert werden muss. Die Subtraktionsvorschrift im vorigen Absatz wird also relativiert.
Zum 5. Absatz:
100 oder 1000 als spezielle Divisoren: Hier kann man die erste Ziffer (1) so oft wie möglich von der obigen Ziffer subtrahieren. Es fehlt der Hinweis auf die Notation des Teilquotienten. Von den weiteren Ziffern des Dividenden lassen sich die Nullen des Divisors nicht subtrahieren, sodass jetzt nicht nur die 1, sondern auch die Nullen gestrichen werden. Nur hier spricht der Autor davon, dass nun ein zweiter Teiler eingerückt geschrieben werden muss. Das weitere Vorgehen bedarf keiner Erläuterung mehr und endet dann, wenn alle Ziffern des Dividenden berücksichtigt worden sind.
Verallgemeinerung: Das spezielle Verfahren gilt für alle Divisoren mit beliebiger Anfangsziffer, wenn sonst nur Nullen folgen.
Zum 6. Absatz:
Teilweise Wiederholung des 4. Absatzes in Bezug auf allgemeinere als die im vorigen Absatz diskutierten Divisoren, spezielles Eingehen auf den Faktor des Subtrahenden bei der Subtraktion von einer darüberstehenden zweistelligen Zahl (43), wenn der Subtrahend eine beliebige Teilerziffer ist: Der Autor betont, dass auch hier nur ebenso oft abgezogen werden darf, wie es bei der ersten Teilerziffer geschehen ist.
Zum 7. Absatz:
Ein Beispiel zum 6. Absatz, Subtraktion mit Hilfe der dekadischen Ergänzung: Oben stehe 43, darunter (also unter 3) stehe die dritte Teilerziffer, nämlich 6. Die erste Teilerziffer, die hier keine Rolle spielt, sei 4-mal von der oberen Dividendenziffer bzw. von den beiden oberen abgezogen worden. Entsprechend sei der Teilquotient 4 notiert worden. Ebenso sei die zweite Teilerziffer 4-mal subtrahiert worden. Daher müsse nun $43 - \underline{4} \cdot 6 = 43 - 24$ gerechnet werden. Für

diese Subtraktion mit Zehnerunterschreitung erläutert der Schreiber anschließend sehr ausführlich das Verfahren der dekadischen Ergänzung — vgl. den Kommentar zu Kapitel 31. Fasst man die einzelnen Schritte zusammen, so rechnet er wie folgt: 43 – 24 = (43 + 6) – (24 + 6) = 49 – 30, 4 Zehner – 3 Zehner = 1 Zehner. Dabei streicht er die Ziffern von 43 schrittweise: erst die 3, die durch die 9 darüber ersetzt wird (⇒ 49), dann die 4, über welche die 1 geschrieben wird (⇒ 1 Zehner). Auf die berechnete Differenz 19, die aus den neuen Dividendenziffern abzulesen ist, geht er nicht mehr ein. Schließlich weist er sinngemäß darauf hin, dass dekadisch zu ergänzen ist — hier: 24 + 6 = 30 —, wenn bei einer Subtraktion eine Zehnerunterschreitung auftritt.

Zum 8. Absatz:

Subtraktion ohne Zehnerunterschreitung: 44 oder 45 anstelle von 43 im Minuenden verändert die Situation. 45 – 24 wird nicht mit dekadischer Ergänzung, sondern einfach ziffernweise berechnet. Der Autor beschreibt wieder die Position der neuen Ziffern und das Streichen der verbrauchten.

Zum 9. Absatz:

Zur Rolle der Hunderterziffer des Dividenden, Subtraktion durch dekadische Ergänzung: 7, eine Teilerziffer, soll 8-mal von einer oben stehenden Zahl 53 abgezogen werden. Da das nicht möglich ist, muss die Hunderterziffer oben — sie sei 3 — mit einbezogen werden. Der Autor rechnet nun 353 – 56 wieder ausführlich mittels dekadischer Ergänzung vor, wobei er auch auf die Position der neuen Ziffern und das Streichen der verbrauchten eingeht. Fasst man die einzelnen Schritte zusammen, so subtrahiert er sehr umständlich wie folgt: 353 – 56 = (200 + 10 · 10 + 5 · 10 + 3) – 56 = (200 + 15 · 10 + 3 + 4) – (56 + 4) = 200 + (15 – 6) · 10 + 7 = 200 + 9 · 10 + 7. Das Ergebnis 297 ist aus den neuen Dividendenziffern abzulesen, es wird nicht mehr eigens angeführt. Hier hätte vorteilhaftes Rechnen, etwa 353 – 56 = (353 – 53) – 3, wesentlich schneller zum Resultat geführt.

Der Autor verweist darauf, dass immer dann entsprechend vorzugehen ist, wenn die vorgeschriebene Subtraktion von den zugehörigen Zehnern und Einern des Dividenden nicht möglich ist.

Zum 10. Absatz:

Ausweitung der Überlegungen des vorigen Absatzes auf den Fall, dass zur vorgeschriebenen Subtraktion des Teilers auch die Tausenderziffer des Dividenden herangezogen werden muss

Zum 11. Absatz:

Regeln für eine übersichtliche Durchführung der Division: Bei einer Subtraktion ohne Rest soll die obige Ziffer gestrichen werden, andernfalls der Rest "unbezeichnet" (ἀσημείωτον), also ungestrichen, über die gestrichene Ziffer gesetzt werden. Damit behält man den Überblick über die bereits verbrauchten Ziffern und über diejenigen, die noch zur Subtraktion heranzuziehen sind.

Zum 12. Absatz:

Übrig gebliebene Ziffern nach Abschluss der Division: Diese Ziffern bilden den Zähler eines Bruchs, dessen Nenner der Teiler ist. (Dass bei einer Division ohne Rest keine ungestrichenen Ziffern übrig bleiben, erwähnt der Schreiber nicht.) Das Verhältnis von Zähler und Nenner soll geprüft werden. Der Autor verweist auf die spätere Behandlung der Brüche (vgl. insbesondere Kapitel 40–42).

Der Autor hat es versäumt, allgemein darauf einzugehen, dass der Divisor nach vollständiger Verrechnung mit dem jeweiligen Teildividenden schrittweise nach rechts einzurücken ist. Im 5. Absatz hat er das nur im Zusammenhang mit sehr speziellen Teilern erwähnt. Dieses Einrücken kann dazu führen, dass der Teiler vom neuen Teildividenden nicht subtrahiert werden kann: In diesem Fall muss 0 als Teilquotient notiert, der Teiler gestrichen und ein weiterer Teiler erneut eingerückt werden. Diese Situation ist bekanntlich auch bei unserem Divisionsverfahren fehleranfällig – vgl. z. B. 19402 : 178 = 109. Solche Beispiele kommen (ohne Kommentar des Autors)) erst in späteren Kapiteln der Handschrift vor.

38 ***Umfassend über Probe und Beweis aller Teile, die dividiert werden***

Wir wollen auch noch umfassend über die Probe und den Beweis von allem sprechen, wofür du zu dividieren Sorge trägst, – wie du dies also gut machen und von allem die Proben nehmen kannst, wie die Rechenkunst uns lehrt.

Mache es so:

Der Zähler, den wir gewöhnlich oberhalb des geraden Strichs setzen, gleich ob er aus einer Ziffer besteht oder aus mehreren, wie viele auch immer es sind – wenn es sehr viele sind, nimm die ersten beiden Ziffern und teile diese durch die ϛ΄. Den restlichen Teil unterhalb der ϛ΄ aber vereinige mit der nächsten Ziffer und teile dies wiederum durch die ϛ΄, bis du auf diese Weise alle Ziffern des Zählers zu Ende geführt hast. Wenn du aber keine weitere Ziffer des Zählers mehr hast, sondern schon an dessen äußerste und letzte Ziffer gelangt bist, den Rest unterhalb der ϛ΄ von der letzten Ziffer – setze diesen nahe an das Ende des weiteren Querstrichs. Wenn aber der Zähler nicht viele verschiedene Ziffern hat, sondern nur aus einer Ziffer besteht: wenn die eine Ziffer mehr als die ϛ΄ bezeichnet, d. h. η΄ oder auch ϑ΄, subtrahiere einmal ϛ΄ von ihr, und den Rest unterhalb der ϛ΄ – setze diesen dorthin, nahe an das Ende des anderen Querstrichs. Wenn aber die eine Ziffer des Zählers ϛ΄ nicht übersteigt, sondern kleiner als die ϛ΄ ist, setze sie wiederum dorthin – nahe an das Ende des Querstrichs – so, wie sie ist, weil sie kleiner als die ϛ΄ ist. Wenn aber die eine Ziffer nicht größer oder kleiner als die ϛ΄ ist, sondern ϛ΄ ist, setze ψ΄ anstatt irgendeiner anderen Ziffer nahe an das Ende des Querstrichs; du hast nämlich einmal ϛ΄ von den ϛ΄ subtrahiert, und es ist ψ΄ geblieben.

Ebenso mache es auch beim Nenner, den wir gewöhnlich unterhalb des Zählers und des Querstrichs setzen. Und wenn der Nenner selbst auch nur aus einer Ziffer besteht, mache es so wie auch beim Zähler und setze das, was kleiner als die ϛ΄ ist, oberhalb desselben zweiten Querstrichs. Wenn es aber sehr viele Ziffern sind, nimm jeweils zwei und teile diese durch die ϛ΄ bis zur letzten Ziffer. Wenn du auf diese Weise alle Ziffern des Nenners zu Ende geführt hast, den Rest unterhalb der ϛ΄ – setze diesen oberhalb des Querstrichs.

Suche aber wiederum auch den Quotienten auf, und wenn auch jener nur aus einer Ziffer besteht, mache es bei ihm in gleicher Weise wie auch beim Zähler und beim Nenner, und den Rest unterhalb der ϛ΄ – setze diesen unterhalb desselben Querstrichs. Wenn aber auch der Quotient aus sehr vielen Ziffern be-

steht, nimm jeweils zwei und teile diese durch die ϛ´ bis zur letzten Ziffer des Quotienten, und den Rest unterhalb der ϛ´ — setze diesen unterhalb des Querstrichs.
Danach multipliziere die beiden Ziffern, die oberhalb und unterhalb des Querstrichs stehen. Und wenn die Ziffer oberhalb oder unterhalb des Querstrichs α´ ist, die andere aber γ´, ist bei deren Multiplikation einmal die γ´ wieder γ´ oder einmal die δ´ wieder δ´ und so weiter. Wenn aber die Ziffer oberhalb oder unterhalb des Querstrichs mehr als Eins bezeichnet und die eine β´, die andere aber γ´, oder die eine γ´, die andere aber δ´ ist und so weiter, ergibt sich bei der Multiplikation der beiden Ziffern zwei mal die γ´ ϛ´ oder wiederum drei mal die δ´ ιβ´ und so weiter.
Und wie groß auch immer das Produkt der Ziffer(n) oberhalb und unterhalb des Querstrichs wird, addiere es mit der Ziffer, die nahe am Ende desselben Querstrichs liegt und sich dort befindet und zum Zähler gehört. Und wie groß auch immer die Zahl aus diesen drei Ziffern wird: Wenn sie größer als die ϛ´ ist, dividiere sie durch die ϛ´, und den Rest unterhalb der ϛ´ — setze diesen in einen Kreis. Wenn aber die Verknüpfung der drei Ziffern, von denen wir sprachen, Kleineres als die ϛ´ bezeichnet, setze dies wiederum in einen Kreis, da es kleiner ist als die ϛ´. Wenn es aber weder größer als die ϛ´ ist noch kleiner, sondern ϛ´ die Verknüpfung der drei Ziffern ist, subtrahiere einmal ϛ´ von den ϛ´, und es bleibt ϟ´. Setze nun anstatt irgendeiner anderen Ziffer ϟ´ in einen Kreis. Wenn aber oberhalb oder unterhalb des Querstrichs zufällig ϟ´ liegt, kannst du das ϟ´ nicht mit irgendeiner anderen Ziffer multiplizieren, da die mit dem ϟ´ multiplizierte Ziffer kein weiteres Wachstum annimmt, sondern vielmehr auch selbst ϟ´ wird. Gleich ob nun die beiden Ziffern oberhalb und unterhalb des Querstrichs ϟ´ sind oder die eine ϟ´ ist, die andere aber irgendeine Zahl bezeichnet — sie bleiben unwirksam, weil es geschieht, dass sie mit ϟ´ multipliziert werden. Nimm aber nur die Ziffer, die nahe am Ende des Querstrichs gelegen ist und die zum Zähler gehört, und setze diese in einen Kreis. Wenn aber die nahe am Ende desselben Querstrichs gelegene Ziffer ϟ´ ist, oberhalb aber und unterhalb desselben Querstrichs irgend zwei bezeichnende Ziffern sind, multipliziere diese, gleich ob du sie nur einmal oder vielfach zu multiplizieren hast. Und das Produkt, das aus diesen entstanden ist, teile durch die ϛ´, wenn es größer als die ϛ´ ist, und den Rest unterhalb der ϛ´ schreibe wie gewohnt in einen Kreis. Gib aber das ϟ´ auf, das nahe am Ende des Querstrichs steht, weil es nichts ist.
Nach dem Ende dieser ersten Probe aber, die so durchzuführen ist, wie wir sagen, suche auch die obige Zahl auf, die wir gewöhnlich an den Anfang setzen, um sie zu dividieren. Und nimm von dieser je zwei Ziffern und teile die bezeichnenden Ziffern davon durch die ϛ´ bis zur letzten Ziffer, wie wir es auch bei den anderen klarer aufgezeigt haben. Den Rest unterhalb der ϛ´ aber — setze auch diesen in einen Kreis. Wenn nun die beiden Proben, die du in Kreise gesetzt hast, als gleich befunden wurden, ist der am Ende herausgekommene Quotient richtig; wenn aber die beiden Proben davon ungleich sind, weil sich die eine so verhält und die andere irgendwie anders, hat sich der Quotient am Ende bereits nicht richtig ergeben.

Man muss aber auch dies wissen, dass der Zähler in jedem Fall kleiner als die angezeigte Größe des Teilers sein muss. Denn deswegen sagt man auch Tzakisma ("Zerteilung"), *weil es kleiner als der Teiler ist. Das gegenüber dem Größeren Kleinere nämlich nennt man wohl zu Recht Tzakisma. Denn das Zerteilte, wie jemand auch sagen könnte, ist zum Tzakisma geworden. Wenn nun der Zähler kleiner ist als der Nenner, ist er wirklich und richtig ein Tzakisma. Wenn er aber größer oder gänzlich gleich und um überhaupt nichts gegenüber dem Teiler verkleinert ist, hat sich der Quotient am Ende, den du errechnet hast, — weißt du — wieder nicht richtig ergeben. Wenn du aber wiederum diese Division anders durchgeführt hast, wirst du finden, dass der Zähler in jedem Fall kleiner ist; denn keineswegs wird man sich darin täuschen, wenn man glaubt, dass es niemals anders ist.*

Zum 1. Absatz:
Ankündigung einer generellen (nicht beispielgebundenen) Erklärung der (Siebener-)Probe mit Aufbau des zugehörigen Diagramms
Mit den Bezeichnungen aus dem Kommentar zu Kapitel 22 geht es also um die Siebenerprobe zur Division (mit oder ohne Rest) $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ $(b \neq 0,\ 0 \leq r < b)$.
Zum 2. Absatz:
Bestimmung von $S(r)$ mit Fallunterscheidung:
- r habe "sehr viele" Ziffern. Dann sollen die ersten beiden Ziffern durch 7 geteilt und der Rest mit der nächsten Ziffer vereinigt werden.
  Der Autor vernachlässigt hier den Fall, dass auch 7, 8 oder 9 die Anfangsziffer von r sein kann: Dann ist zunächst nur die Anfangsziffer allein zu teilen. Entsprechendes gilt für eine Ziffer 7, 8 oder 9, die nach einer zwischendurch erfolgten restlosen Teilung hinzugezogen werden muss (z. B. bei 2892).
- $r = 8$ oder $r = 9$: Dann ist 7 abzuziehen.
- $r < 7$: r bleibt unverändert.
- $r = 7$: Dann ist 0 zu setzen $(7 - 7 = 0)$.

Diagramm: —— $S(r)$

Zum 3. Absatz:
Bestimmung von $S(b)$ mit Fallunterscheidung (analog zur Bestimmung von $S(r)$)

Diagramm: $\underline{S(b)}$ $S(r)$

Zum 4. Absatz:
Bestimmung von $S(q)$ mit Fallunterscheidung (analog zur Bestimmung von $S(r)$ und $S(b)$)

Diagramm: $\frac{S(b)}{S(q)}$ $S(r)$

Zum 5. Absatz:
Berechnung von $S(b) \cdot S(q)$ mit Zahlenbeispielen
Zum 6. Absatz:
Berechnung von $S(b) \cdot S(q) + S(r)$, anschließend Fallunterscheidung:
- Falls $S(b) \cdot S(q) + S(r) > 7$ ist, bildet man $S(S(b) \cdot S(q) + S(r))$ und setzt dies in einen Kreis.
- Falls $S(b) \cdot S(q) + S(r) < 7$ ist, wird $S(b) \cdot S(q) + S(r)$ selbst eingekreist.
- Falls $S(b) \cdot S(q) + S(r) = 7$ ist, setzt man 0 in einen Kreis $(7 - 7 = 0)$.

- Falls mindestens eine der beiden Zahlen $S(b)$ und $S(q)$ gleich Null ist, setzt man $S(r)$ in einen Kreis. Der Autor erläutert hierzu, dass man mit 0 nicht multiplizieren könne, da sich dabei kein Wachstum ergebe. Es komme wieder nur 0 heraus.
- Falls $S(r) = 0$ ist, $S(b)$ und $S(q)$ aber beide ungleich Null sind, so ist nur $S(b) \cdot S(q)$ zu betrachten (vgl. die ersten drei Fallunterscheidungen).
  Nicht direkt angesprochen wird der Fall $S(r) = S(b) = S(q) = 0$, der sich bei der Division von Kapitel 29 ergab und vom Autor in Kapitel 30 diskutiert wurde. Er lässt sich aber dem vorigen Fall unterordnen.

Diagramme:

$S(S(b) \cdot S(q) + S(r)) \rightarrow$ ○

$\frac{S(b)}{S(q)}\ S(r) \mid S(b) \cdot S(q) + S(r)$

falls $S(b) \cdot S(q) + S(r) \geq 7$

$S(b) \cdot S(q) + S(r) \rightarrow$ ○

$\frac{S(b)}{S(q)}\ S(r) \mid S(b) \cdot S(q) + S(r)$

falls $S(b) \cdot S(q) + S(r) < 7$

Die beiden Diagramme lassen sich für alle $S(b) \cdot S(q) + S(r)$ zum ersten zusammenfassen, da die Zahl $S(b) \cdot S(q) + S(r)$ mit ihrem Siebenerrest übereinstimmt, wenn sie kleiner als 7 ist.

Zum 7. Absatz:

Bestimmung von $S(a)$, Interpretation von gleichen und ungleichen Probezahlen

$S(a)$ wird in einen weiteren Kreis gesetzt. Das Abschlussdiagramm hat für den allgemeinen Fall die folgende Gestalt:

$S(S(b) \cdot S(q) + S(r)) \rightarrow$ ○

$\frac{S(b)}{S(q)}\ S(r) \mid S(b) \cdot S(q) + S(r)$

$S(a) \rightarrow$ ○

Erneut schließt der Autor aus der Gleichheit der eingekreisten Probezahlen zu Unrecht, dass die Division richtig durchgeführt worden ist. Hingegen folgert er korrekt, dass ungleiche Probezahlen eine fehlerhafte Division aufzeigen. (Natürlich käme auch ein Fehler bei der Durchführung der Siebenerprobe in Betracht.)

Zum 8. Absatz:

Das Größenverhältnis von Zähler und Nenner nach der Division

Wie der Autor zutreffend ausführt, muss der bei der Division entstandene Zähler (τζάκισμα) unbedingt kleiner als der Teiler (Nenner) sein – das ergebe sich schon aus dem Wortsinn ("Zerteilung"). Wenn der Zähler aber größer als der Teiler oder ihm gleich sei, so habe man den Quotienten nicht richtig berechnet.

39 *Über die Division, die allein im Kopf entsteht*

Man kann aber nicht nur allein im Kopf multiplizieren, sondern auch zu dividieren ist möglich, nicht bei allen, aber von denen, die es zulassen, ist es möglich, auf diese Weise zu dividieren.

Prüfe nun gut – nicht bei den geteilten größeren Stücken, sondern bei dem

Teilenden, welches wir gewöhnlich Teiler nennen –, welche Zahlen wohl umkehrbar (ἐπιστρεπτικοί) *sind. Und alle Zahlen des aufgesuchten Teilers, die umkehrbar sind – du kannst wohl gut allein in deinem Kopf ohne schriftliche Aufzeichnung die aufgesuchte Zahl teilen; alle aber, die nicht umkehrbar sind, kannst du nicht in deinem Kopf teilen. Umkehrbar aber nennen wir Zahlen, die zweifach multipliziert werden und wiederum zum selben zurückkehren wie die κα´ – denn drei mal ζ´ geben κα´ und ζ´ mal γ´ geben wiederum κα´ – oder wieder wie die κη´ – denn δ´ mal ζ´ geben κη´ und ζ´ mal δ´ geben wiederum κη´ – oder wieder wie die λ´ – denn ε´ mal ϛ´ geben λ´ und ϛ´ mal ε´ geben wiederum λ´ – oder wieder wie die ρ´ – denn ε´ mal κ´ geben ρ´ und κ´ mal ε´ geben wiederum ρ´ – und so weiter jede andere umkehrbare Zahl, die auf diese Weise zweifach multipliziert wird. Die aber gar nicht umkehrbaren* (μήπω στρέφοντες) *sind wie die ια´ und ιζ´ und κγ´ und λα´ und so weiter. Es sind nämlich ungeteilte und unumkehrbare Zahlen* (ἀμέριστοι καὶ ἀνυπόστροφοι ἀριθμοί), *und du kannst durch sie die aufgesuchte Zahl, die du teilen willst, nicht teilen.*

ρ´ durch die ιη´ geteilt

Die ιη´ sind umkehrbar, denn zwei mal ϑ´ geben ιη´ und ϑ´ mal β´ geben wiederum ιη´. Teile die ρ´ in zwei Teile, wie auch die zwei mal ϑ´ ιη´ ergeben. Wenn aber die ρ´ in zwei Teile geteilt werden, ergibt jeder Teil der beiden jeweils ν´. Teile aber die ν´ durch die ϑ´: ε´ mal ϑ´ gibt nun με´, und es bleiben ε´ als Zähler bis zu den ν´ übrig. Und siehe – du hast allein in deinem Kopf gefunden, dass bei der Division der ρ´ durch die ιη´ der endgültige Quotient von diesen ε´ ergibt, wie ε´-mal die ϑ' in den ν´ aufgegangen sind, und es bleibt auch der vorliegende Bruch $\frac{\varepsilon}{\vartheta}$ *übrig.*

Ganz offensichtlich kommt es dem Autor für die Division im Kopf darauf an, dass der Divisor eine Nichtprimzahl ist; andernfalls hält er das Verfahren für nicht durchführbar. Statt der klassischen (euklidischen) Begriffe σύνθετος ἀριθμός für eine zusammengesetzte Zahl und πρῶτος ἀριθμός für eine Primzahl (vgl. TROPFKE 1930, S. 123), die er auch im Text vor dem Rechenbuch (fol. 1^{v}) verwendet, wählt er hier Termini, die auf die Vertauschbarkeit der Faktoren bezogen sind.

Rechnung zum 1. Beispiel: $100 : 18 = 50 : 9 = 5\frac{5}{9}$

Dividend und Divisor werden also mit 2 gekürzt. Die dadurch vereinfachte Division lässt sich mithilfe einer Multiplikation im Rahmen des kleinen Einmaleins, also im Kopf durchführen.

Es zeigt sich, dass der Dividend, dessen Eigenschaften vom Autor gar nicht betrachtet werden, ebenfalls als "umkehrbar" vorauszusetzen ist und darüber hinaus mindestens einen gemeinsamen Faktor mit dem Divisor haben muss – vgl. das 5. Beispiel.

2. Beispiel: *ρκ´ durch die ιη´ geteilt* $(120 : 18 = 6\frac{2}{3})$

Kopfrechnung: $120 : 18 = 60 : 9 = 6\frac{6}{9} = 6\frac{2}{3}$ mit den Alternativen $120 : 18 = 40 : 6 = 6\frac{4}{6} = 6\frac{2}{3}$ oder $120 : 18 = 20 : 3 = 6\frac{2}{3}$ und dem abschließenden Hinweis darauf, dass bei allen drei Brüchen Zähler und Nenner im gleichen Verhältnis stehen

3. Beispiel: τ´ *durch die* κα´ *geteilt* ($300 : 21 = 14\frac{2}{7}$)
Dividend und Divisor werden mit 3 gekürzt. Für die dadurch zwar vereinfachte Division wird allerdings das große Einmaleins (im Kopf) benötigt.

4. Beispiel: τ´ *durch die* κδ´ *geteilt* ($300 : 24 = 12\frac{1}{2}$)
Wahlweise wird mit 2, 12, 4 oder 6 gekürzt.

5. Beispiel: υ´ *durch die* λς´ *geteilt* ($400 : 36 = 11\frac{2}{18}$)
Es wird nur mit 2, nicht mit 4 gekürzt, dafür aber gezeigt, dass man wegen des Dividenden nicht mit 3 kürzen kann. Der Restbruch bleibt ungekürzt stehen.

6. Beispiel (ohne eigene Überschrift): ($600 : 36 = 16\frac{2}{3}$)
Wahlweise wird mit 3, 12 oder 6 gekürzt. Rückblickend auf das vorige Beispiel wird angemerkt, dass sich 400 nicht durch 6 teilen lässt.

7. Beispiel: ,αυ´ *durch die* ξδ´ *geteilt* ($1400 : 64 = 21\frac{7}{8}$)
$1400 : 64 = 700 : 32$ (Kürzen mit 2) mit folgendem Herantasten an den Quotienten: $10 \cdot 32 = 320$, $20 \cdot 32 = 2 \cdot 320 = 640$, $640 + 32 = 672$, also $21 \cdot 32 = 672$ mit Rest 28 bis 700. Es folgt: $1400 : 64 = 21\frac{28}{32} = 21\frac{7}{8}$
Oder Kürzen mit 4: Der Quotient von $350 : 16$ wird durch analoges Herantasten bestimmt: $21 \cdot 16 = 336$ mit Rest 14 bis 350. Es folgt $1400 : 64 = 21\frac{14}{16} = 21\frac{7}{8}$ mit dem Nachweis, dass die drei Brüche übereinstimmen, die beim Kürzen mit 2 und hier entstanden sind, und einem Verweis auf das nächste Kapitel.
Oder Kürzen mit 8: $1400 : 8 = 175$ wegen $8 \cdot 175 = 1400$, $175 : 8 = 21$ Rest 7, denn $4 \cdot 21 = 84$, $8 \cdot 21 = 168$ mit Rest 7 bis 175 (Verwendung des bereits bekannten Quotienten 21). Es folgt wieder $1400 : 64 = 21\frac{7}{8}$.

8. Beispiel: ρπ´ *Tausender durch die* ρκ´ *geteilt* ($180000 : 120 = 1500$)
Wahlweise wird mit 20, 10 oder 12 gekürzt. Zum ersten Fall führt der Autor aus, dass 6 in 9000 ebenso oft aufgeht wie 120 in 180000, nämlich 1500-mal (Begründung: $1000 \cdot 6 + 500 \cdot 6 = 9000$), und dass 6 sich zu 9000 verhält wie 120 zu 180000.

Insgesamt kann dieses Kapitel zur Division im Kopf nur teilweise überzeugen. Das Kürzen von Dividend und Divisor ist sicher vorteilhaft, um zu kleineren Zahlen zu gelangen, die man dann gegebenenfalls auch im Kopf dividieren kann, was in allen hier vorgestellten Beispielen auch durchaus möglich ist. Dabei bietet auch die "Methode des Herantastens" (siehe das 7. Beispiel) eine Hilfe. Doch der Autor vernachlässigt im Einführungstext die Untersuchung des Dividenden auf (echte) Teiler, obwohl mindestens ein mit dem Divisor gemeinsamer (echter) Teiler existieren muss, damit das beschriebene Kürzungsverfahren durchgeführt werden kann. Dieses Versäumnis offenbart sich in seiner Diskussion im 5. Beispiel.
Andererseits sind bei entsprechend einfachen Divisionsaufgaben Primteiler (vgl. 11, 17, 23, 31 und die zweifache Umschreibung solcher Zahlen durch den Autor)

kein Hindernis für eine Kopfrechnung. Zudem fehlt ein Hinweis darauf, dass man das schriftliche Divisionsverfahren in einfachen Fällen, insbesondere bei einstelligen Divisoren und "kleinen" Dividenden, im Kopf nachvollziehen kann.

40 ***Wie man wissen kann, welches Verhältnis der Zähler im Vergleich zum Nenner hat, ob es ganzzahlig ist oder auch gespalten, d. h. geteilt***

Wenn du wissen willst, welches Verhältnis der Zähler im Vergleich zum Nenner hat, ein Drittel freilich oder ein Viertel oder wie es sich anders zeigen kann — wenn du dies gut erkennen kannst, weil sich von dem zeigt, was oberhalb des Nenners und des geraden Strichs liegt, welches Verhältnis es im Vergleich zum Nenner hat, hast du das Gesuchte schon gut gefunden. Wenn du aber, obwohl der Zähler und der Nenner ganzzahlig sind, nicht gut erkennen kannst, welches Verhältnis der Zähler im Vergleich zum Nenner hat, spalte den Zähler in kleinste Teile auf. Spalte ihn aber auf — teile ihn, wenn man so will — derart in kleinste Teile, dass es möglich ist, auch den Nenner in ebenso viele Teile aufzuspalten und zu teilen, in wie viele du auch den Zähler aufgespalten hast. Wenn du nun den Zähler in zehn Teile aufgespalten hast, spalte auch den Nenner in zehn Teile auf. Wenn du aber den Zähler in 20 oder auch 30 aufgespalten hast, spalte auch den Nenner in gleicher Weise in 20 oder auch 30 Teile auf. Kurz gesagt: In wie viele Teile auch immer du den Zähler aufspaltest, in so viele Teile spalte auch den Nenner auf. Mach dies so, bis du den Zähler und den Nenner in den kleinsten Teil aufspalten und teilen kannst, der entstehen kann. Aber die zwei Teile davon, des Zählers natürlich und des Nenners, die zum kleinsten Teil geworden sind, auf welche Weise wir es sagen, — du kannst klarer erkennen, welches Verhältnis der Zähler im Vergleich zum Nenner hat ...

Zur Übersetzung: σχίζειν, das hier wörtlich mit "aufspalten" wiedergegeben wurde, dient im Wesentlichen als Fachbegriff für "kürzen". Im Unterschied zur heutigen Sprechweise (Kürzen eines Bruchs) werden Zähler und Nenner mit derselben Zahl "gekürzt".

Als Beispiel nimmt der Autor nun den Bruch $\frac{150}{200}$, bei dem sich — auch ohne zu kürzen — das Zahlenverhältnis erkennen lasse: $3 \cdot 50 = 150$, $4 \cdot 50 = 200$, also $\frac{150}{200} = \frac{3}{4}$. Kürzen mit 50 führe zum selben Ergebnis.

Dieses Kapitel zum Thema "Kürzen von Brüchen" kann inhaltlich in keiner Weise überzeugen. Es fehlen Definitionen für die einschlägigen Begriffe und insbesondere die Darstellung eines Verfahrens, mit dem ein beliebiger Bruch vollständig gekürzt werden kann.
Euklid beschreibt das Verfahren im 7. Buch seiner Elemente — vgl. [7, §§ 1, 2, S. 142 ff.] —, das hier in moderner Formulierung vorgestellt werden soll:
Sei $\frac{a}{b}$ ein Bruch mit $a < b$ $(a, b \in \mathbb{N})$. Gesucht ist die maximale Kürzungszahl, d. h. der größte gemeinsame Teiler (ggT) von b und a.
Zunächst existieren q_1, $r_1 \in \mathbb{N}$ mit $b = q_1 a + r_1$ und $0 \leq r_1 < a$ (Division von b durch a mit Rest). Im Fall $r_1 = 0$ ist a Teiler von b, also $a = \mathrm{ggT}(b, a)$.

Im Fall $r_1 > 0$ wird das Verfahren fortgesetzt: $a = q_2 r_1 + r_2,\ 0 \le r_2 < r_1$.
Falls nun $r_2 = 0$ ist, so ist r_1 Teiler von *a*, aber auch von *b*. Andererseits lässt sich leicht zeigen, dass jeder gemeinsame Teiler von *b* und *a* auch Teiler von r_1 ist. Daraus folgt: $r_1 = \mathrm{ggT}(b, a)$.
Im Fall $r_2 > 0$ wird das Verfahren weiter fortgesetzt: $r_1 = q_3 r_2 + r_3,\ 0 \le r_3 < r_2$ usw.; es entsteht eine streng monoton fallende Folge nichtnegativer ganzer Zahlen $b > a = r_0 > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$, sodass ein *n* existiert mit $r_n > 0,\ r_{n+1} = 0\ (n \ge 0)$. Dieses r_n, das bei den letzten beiden Divisionen $r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n,\ r_{n-1} = q_{n+1} r_n + 0$ auftritt, ist Teiler von *b* und *a*.
Andererseits ist wieder jeder gemeinsame Teiler von *b* und *a* auch Teiler von r_n. Daraus folgt: $r_n = \mathrm{ggT}(b, a)$.
Im Fall $r_n = \mathrm{ggT}(b, a) = 1$ sind *b* und *a* teilerfremd; der Bruch $\frac{a}{b}$ lässt sich daher nicht kürzen.
Für den größten gemeinsamen Teiler von *b* und *a* gilt also im Hinblick auf $r_n > 0,\ r_{n+1} = 0$ die folgende Gleichungskette:
$\mathrm{ggT}(b, a) = \mathrm{ggT}(a, r_1) = \mathrm{ggT}(r_1, r_2) = \mathrm{ggT}(r_2, r_3) = \ \ldots\ = \mathrm{ggT}(r_{n-1}, r_n) = \mathrm{ggT}(r_n, r_{n+1}) = r_n$

Offenbar hat der Autor die Defizite seiner Ausführungen erkannt. Eine Marginalie verweist auf fol. 142/1^{v} – fol. 145^{v} im Anhang zum Rechenbuch, wo er das Kapitel 40 vollständig und gründlich überarbeitet hat. Dabei zeigen zahlreiche Streichungen und Neuansätze, dass er sowohl mit der Formulierung als auch mit dem Inhalt gerungen hat. Insgesamt ist das mathematische Ergebnis beachtlich, weshalb der Inhalt dieses Nachtrags näher betrachtet werden soll.
Der Text beginnt ganz ähnlich wie in Kapitel 40, doch dann heißt es:
Wenn du aber nicht erkennen kannst, welches Verhältnis der Zähler im Vergleich zum Nenner hat, suchen wir nach einer Methode, mit deren Hilfe du wissen kannst, in wie viele Teile sich der Zähler aufteilen lässt, um klarer zu zeigen, wenn er in die kleinste Teilung (τμῆμα) *gelangt ist, welches Verhältnis er im Vergleich zum Nenner hat.*
Am obigen Beispiel $\frac{150}{200}$ definiert der Schreiber nun:
Im Allgemeinen (γενικῶς) *nennen wir* τζάκισμα *die obigen 150 und die unteren 200, speziell* (κυρίως) *aber nennen wir* τζάκισμα *die oberen Zahlen, Nenner (Teiler) aber die unteren.*
τζάκισμα bezeichnet also sowohl den Bruch als ganzen als auch den Zähler.
Nach zwei weiteren Beispielen für Brüche, deren Verhältnis auch ohne Kürzen (ἄνευ τινὸς μερισμοῦ) zu erkennen sei, geht er beim nächsten anders vor.
4. Beispiel $\frac{225}{300}$:
$300 - 225 = 75$ (ἔλλειψις oder λεῖψις), $2 \cdot 225 - 300 = 150$ (περισσεία oder ὑπεροχή, singulär auch πλεονασμός); weil die ἔλλειψις hier kleiner als die περισσεία ist, wählt er jene als Kürzungszahl mit dem Ergebnis $\frac{225}{300} = \frac{3}{4}$ (vollständig gekürzter Bruch).
5. Beispiel $\frac{225}{375}$:
Nun ist umgekehrt die περισσεία kleiner als die ἔλλειψις $(2 \cdot 225 - 375 = 75 < 150)$, "deshalb" 75 Kürzungszahl mit dem Ergebnis $\frac{225}{375} = \frac{3}{5}$ (vollständig gekürzter Bruch).
6. Beispiel $\frac{250}{325}$:
Hier zeigt sich, dass natürlich noch kein allgemeingültiges Verfahren zum voll-

ständigen Kürzen von Brüchen vorliegt. Der Autor muss "nachbessern": Die ἔλλειψις ist 75, die περισσεία 175, doch lässt sich 250 nicht durch 75 teilen, aber durch 25 (Kürzungszahl). Ergebnis: $\frac{250}{325} = \frac{10}{13}$
Es folgen weitere Beispiele, wobei das zehnte den mathematisch noch unklaren Begriff περισσεία präzisiert.
10. Beispiel $\frac{126}{483}$:
Die περισσεία 21, die hier auch maximale Kürzungszahl ist, berechnet sich jetzt aus $4 \cdot 126 - 483$. Leider verzichtet der Autor auf den Vergleich mit der ἔλλειψις, die im Allgemeinen nicht — wie die bisherigen Beispiele suggerieren — mit der Differenz aus Nenner und Zähler übereinstimmt, sondern mit dem nichtnegativen Rest aus der Division des Nenners durch den Zähler. (Die oben genannte Differenz ergibt sich nur dann, wenn der (ganzzahlige) Quotient gleich 1 ist — vgl. die Beispiele.) Für die ἔλλειψις erhielte man hier $483 - 3 \cdot 126 = 105$.
Ergebnis: $\frac{6}{23}$

In der obigen Terminologie des euklidischen Algorithmus ist also $r_1 = b - q_1 a$ die ἔλλειψις (λεῖψις), $a - r_1 = (q_1 + 1)a - b$ die περισσεία (ὑπεροχή). Dabei gilt $1 \le a - r_1 \le a$.
In einer theoretischen Passage stellt der Autor nun, modern formuliert, folgende Behauptungen auf:
(40.1) Aus $\min(r_1, a - r_1) \mid a$ folgt auch $\min(r_1, a - r_1) \mid b$, und $\min(r_1, a - r_1)$ ist die maximale Kürzungszahl für den Bruch $\frac{a}{b}$.
(40.2) Aus $\min(r_1, a - r_1) \nmid a$ folgt auch $\min(r_1, a - r_1) \nmid b$.
(In diesem Fall kommen die Teiler von $\min(r_1, a - r_1)$ zum Kürzen infrage — vgl. das 6. Beispiel.)
$\min(r_1, a - r_1)$ wird mit ἐγγυτέρω λεῖψις ἢ ὑπεροχή umschrieben.

Die Minimumbedingung spielt hier noch keine Rolle — es genügt, die Zahlen r_1 und $a - r_1$ zu untersuchen.
Zu (40.1): Man kann sofort zeigen, dass im Fall $r_1 \mid a$ für a und b die folgenden speziellen Darstellungen gelten: $a = q_2 r_1$, $b = (q_1 q_2 + 1) r_1$. Damit ist auch b durch r_1 teilbar. Darüber hinaus führt Kürzen von $\frac{a}{b}$ mit r_1 zum vollständig gekürzten Bruch $\frac{q_2}{q_1 q_2 + 1}$, denn Zähler und Nenner sind teilerfremd.
Vgl. das 4. Beispiel: $q_1 = 1$, $r_1 = 75$, $q_2 = 3$, $r_2 = 0$. Der vollständig gekürzte Bruch nimmt den Wert $\frac{3}{4}$ an.
Der Fall $a - r_1 \mid a \,(= (a - r_1) + r_1)$ soll zunächst nur für $r_1 > 0$ betrachtet werden. Es folgt $a - r_1 = (q_2 - 1) r_1 + r_2 \mid r_1$, sodass q_2 nur die Werte 1 oder 2 annehmen kann.
Für $q_2 = 1$ gilt $a - r_1 = r_2$, und man erhält die Darstellungen $a = (q_3 + 1) r_2$, $b = ((q_1 + 1)(q_3 + 1) - 1) r_2$. Also ist auch b durch r_2 teilbar. Darüber hinaus führt Kürzen von $\frac{a}{b}$ mit r_2 zum vollständig gekürzten Bruch $\frac{q_3 + 1}{(q_1 + 1)(q_3 + 1) - 1}$, denn Zähler und Nenner sind teilerfremd.
Vgl. das 5. Beispiel: $q_1 = 1$, $r_1 = 150$, $q_2 = 1$, $r_2 = 75$, $q_3 = 2$, $r_3 = 0$. Der vollständig gekürzte Bruch nimmt den Wert $\frac{3}{5}$ an.
Vgl. das 10. Beispiel: $q_1 = 3$, $r_1 = 105$, $q_2 = 1$, $r_2 = 21$, $q_3 = 5$, $r_3 = 0$. Der vollständig gekürzte Bruch nimmt den Wert $\frac{6}{23}$ an.

Für $q_2 = 2$ gilt $r_2 = 0$. Es folgt $a = 2r_1$ bzw. $a - r_1 = r_1$ und $b = (2q_1 + 1)r_1$. Also ist auch b durch r_1 teilbar. Kürzen von $\frac{a}{b}$ mit r_1 führt zum vollständig gekürzten Bruch $\frac{2}{2q_1 + 1}$. (Der Autor bringt hierzu keine Beispiele.)

Der Fall $a - r_1 \mid a$ mit $r_1 = 0$ führt sofort zu $b = q_1 a$, sodass $\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1}$ ist.

Dieser Fall tritt beim 11. Beispiel $\frac{13}{143}$ auf: Der Autor schreibt, dass das Zahlenverhältnis nicht gut zu erkennen sei. Daher multipliziere man den Zähler so, dass er gemäß Mangel oder Überschuss den Nenner annähernd ausgleiche (ὥστε ἐξισωθῆναι ἔγγιστα κατ' ἔλλειψιν ἢ ὑπεροχὴν τῷ ... μεριστῇ). Multiplikation mit 11 – so stellt er fest – führt hier aber zu keiner ἔλλειψις oder ὑπεροχή, sodass mit 13 gekürzt werden kann mit dem Ergebnis $\frac{1}{11}$.

Die Behauptung (40.1) ist also wahr.

Die Behauptung (40.2) hingegen ist falsch, denn es lassen sich leicht Gegenbeispiele angeben, und zwar

- im Fall $r_1 < a - r_1$: Mit $b = 27$, $a = 8$ hat man $q_1 = r_1 = 3$, wobei $3 \nmid 8$, aber $3 \mid 27$ gilt.
- im Fall $a - r_1 < r_1$: Mit $b = 21$, $a = 8$ hat man $q_1 = 2$, $r_1 = 5$, $a - r_1 = 3$, wobei $3 \nmid 8$, aber $3 \mid 21$ gilt.

12. Beispiel $\frac{216}{260}$:

$260 - 216 = 44$ (λεῖψις; ὑπεροχή wird nicht betrachtet), $216 : 44 = 4\frac{40}{44}$, $44 - 40 = 4$ (die ὑπεροχή wird wieder nicht betrachtet), $4 \cdot 11 = 44$ (ohne λεῖψις oder ὑπεροχή), $\frac{216}{260}$ und $\frac{40}{44}$ lassen sich also mit 4 vollständig kürzen. Ergebnis: $\frac{216}{260} = \frac{54}{65}$

Hierbei werden die Überlegungen am Schluss etwas verkürzt: Man kann noch den Schritt $\frac{44}{40} = 1\frac{4}{40}$ betrachten, und der Bruch $\frac{4}{40}$ hat wegen $4 \cdot 10 = 40$ keine λεῖψις mehr, womit sich 4 wieder als maximale Kürzungszahl ergibt.

Vgl. hierzu den euklidischen Algorithmus in Bruchschreibweise: $\frac{b}{a} = q_1 + \frac{r_1}{a}$, $\frac{a}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1}$, $\frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2}$, ...

Ähnlich geht der Autor bei zwei weiteren Beispielen vor. Doch danach wird allmählich deutlich, welches allgemeine Verfahren der Autor zum Kürzen von Brüchen lehrt.

In seinem 15. Beispiel $\frac{459}{558}$ spielt wieder wie beim zehnten (auch) die ὑπεροχή eine Rolle:

$558 - 459 = 99$ (λεῖψις; ὑπεροχή wird nicht betrachtet), $459 : 99 = 4\frac{63}{99}$, $2 \cdot 63 - 99 = 27$ (ὑπεροχή; hier wird die größere λεῖψις $99 - 63 = 36$ nicht betrachtet), $\frac{63}{27} = 2\frac{9}{27}$, $9 \cdot 3 = 27$ (ohne λεῖψις oder ὑπεροχή). $\frac{459}{558}$ lässt sich also mit 9 vollständig kürzen. Ergebnis: $\frac{51}{62}$ (Der Verfasser weist darauf hin, dass man hier drei Brüche benötigt, um zum Ziel zu kommen.)

Es schließt sich eine ausführliche allgemeine Methodenbeschreibung an, die wie folgt beginnt (fol. $144^{r/v}$):

Damit euch aber das Gesuchte klarer wird, untersuchen wir dies auch umfassend.

Und als erstes muss man dies wissen: In so große Teile muss der Zähler oben geteilt werden, in wie große auch der Nenner unten zulässt geteilt zu werden. Wenn nämlich durch den gleichen Teil geteilt wird, bewahrt sowohl der Zähler

oben als auch der Nenner unten das vorherige Verhältnis, auch wenn es in kleinster Teilung entsteht (Hinweis auf den vollständig gekürzten Bruch). *Wenn aber der Zähler oben durch den einen Teil geteilt wird, der Nenner unten aber durch einen anderen, wird das Verhältnis der beiden aufgrund ihrer verschiedenen Teilung nicht bewahrt. Wenn nun der Zähler oben bei Weitem kleiner ist als der Nenner unten, multipliziere den Zähler oben mit so viel, dass er gemäß Mangel oder Überschuss mit der Zahl des Nenners unten annähernd ausgeglichen wird. Wenn der Zähler oben nach der Multiplikation völlig gleich der Zahl des Nenners unten wird, sodass er weder einen Mangel noch einen Überschuss hat, teile durch dieselbe obige Zahl des Zählers sowohl denselben Zähler oben als auch den unteren Nenner davon. Und die Teilung daraus wird ganzzahlig werden, insoweit es möglich ist, dass der Zähler oben und der Nenner darunter verkleinert wird* (σμικρυνθῆναι), *um das kleiner Gewordene sicherer zu vergleichen. Wenn aber der Zähler gegenüber dem Nenner unten bei Weitem kleiner ist und nach Multiplikation des Zählers oben – um mit der Zahl des Nenners annähernd auszugleichen – das Produkt des Zählers oben mit der Zahl des Nenners unten nicht völlig ausgeglichen, sondern näherungsweise mangelhaft oder überschießend wurde, nimm den Mangel, wenn er der Zahl des Nenners unten näher ist, oder aber nimm nun den Überschuss, wenn er kleiner ist als der Mangel. Teile durch den kleineren – den Mangel oder den Überschuss – die obige Zahl des Zählers. Und wenn die Teilung daraus ganzzahlig geworden ist, hast du bereits den Zähler oben in einen kleinsten Teiler geteilt. Teile durch denselben kleineren – Mangel oder Überschuss – auch die untere Zahl des Nenners, denn es wird auch die Teilung daraus ganzzahlig werden wie auch die Teilung des Zählers oben. Wenn aber die Teilung des Zählers oben nicht ganzzahlig geworden ist, wird auch diejenige unten nicht ganzzahlig werden* (Wiederholung der falschen Behauptung (40.2)). *Wenn der kleinere – Mangel oder Überschuss – durch den du die obige Zahl des Zählers nicht in ganzzahliger Teilung geteilt hast, keine Teiler hat, um in Halbe oder Drittel oder Viertel oder auch irgendwie anders geteilt zu werden, ist sowohl die Zahl oben als auch die unten – des Zählers und des Nenners – unteilbar in ein und derselben Teilung* (ἀμερὴς ἐν τῷ αὐτῷ καὶ ἑνὶ μερισμῷ, Definition der Teilerfremdheit)*; in einer Teilung nämlich kann der Zähler und in einer anderen der Nenner vielleicht geteilt werden.* (Teilerfremde Zähler und Nenner können jeweils eigene verschiedene Teiler haben.) *Wenn aber der kleinere – Mangel oder Überschuss – gewisse Teiler hat, aber die Teilung durch ihn nicht ganzzahlig geworden ist, sondern auch einen Bruch enthält, suche wiederum auch aus dem zweiten Bruch wie auch beim ersten den kleineren – Mangel oder Überschuss – der obigen Zahl des zweiten Zählers gegenüber der unteren Zahl des zweiten Nenners ...*

Der Autor schildert nun den Umgang mit dem zweiten Bruch, wobei das Verfahren genauso wie beim ersten verläuft, und geht außerdem noch auf den möglichen Fall (mit erneuter Beschreibung des Verfahrens) ein, dass ein dritter Bruch entsteht. Die Tatsache, dass sein Verfahren – in Abhängigkeit von der Wahl des ersten Bruchs – auch mehr als drei Brüche (sogar beliebig viele) erzeugen kann, berücksichtigt er allerdings nicht.

Bei diesem Verfahren, einer vorteilhaften Variante des euklidischen Algorith-

mus, betrachtet man also nicht die kleinsten nichtnegativen Reste der Division, sondern die dem Betrage nach kleinsten Reste. Hierzu ist z. B. bei der ersten Division $b:a$ die Darstellung $b = q_1 a + r_1$, $0 \le r_1 < a$ mit der Darstellung $b = (q_1 + 1)a - (a - r_1)$, $1 \le a - r_1 \le a$ zu vergleichen. Dabei ist $-(a - r_1)$ der größte nichtpositive Rest. Mit der Wahl des Minimums von λεῖψις (r_1) und ὑπεροχή ($a - r_1$) erhält man den Rest mit dem kleinsten Absolutbetrag. Dieses Minimum genügt außerdem einer verschärften Restbedingung bezüglich a: Falls r_1 das Minimum ist, folgt aus $r_1 \le a - r_1$ sofort $r_1 \le \frac{a}{2}$, umgekehrt folgt aus $a - r_1 \le r_1$ die Beziehung $r_1 \ge \frac{a}{2}$, sodass auch $a - r_1 \le \frac{a}{2}$ gilt. Insgesamt erhält man also die Abschätzung $\min(r_1, a - r_1) \le \frac{a}{2}$.
Auch das modifizierte Verfahren erzeugt wieder eine streng monoton fallende Folge nichtnegativer ganzer Zahlen, und zwar der kleinsten Restbeträge $b > a = r_0' > r_1' > r_2' > r_3' > \ldots$, sodass ein m existiert mit $r_m' > 0$, $r_{m+1}' = 0$ $(m \ge 0)$. Außerdem gilt in Entsprechung zu $\mathrm{ggT}(b, a) = \ldots = r_n$ beim Ausgangsverfahren eine entsprechende Gleichungskette $\mathrm{ggT}(b, a) = \ldots = r_m'$, wobei sich die Zwischenglieder $\mathrm{ggT}(r_i', r_{i+1}')$ im Allgemeinen von $\mathrm{ggT}(r_i, r_{i+1})$, denen des ursprünglichen euklidischen Algorithmus, unterscheiden. Da die dem Absolutbetrag nach kleinsten Reste höchstens so groß wie die kleinsten nichtnegativen Reste sind, gilt darüber hinaus $m \le n$, d. h.: Das modifizierte Verfahren benötigt höchstens so viele Schritte (ist "mindestens so schnell") wie das ursprüngliche.

Hierzu wollen wir noch einmal die Beispiele 4 und 15 des Autors aufgreifen.
$\frac{225}{300}$: Der euklidische Algorithmus ergibt $300 = 1 \cdot 225 + 75$, ($300 = 2 \cdot 225 - 150$ führt zu einem dem Betrage nach größeren Rest), $225 = 3 \cdot \underline{75} + 0$. Die beschriebene Modifikation des Verfahrens wirkt sich hier nicht aus.
Parameter: $b = 300$, $a = 225$, $r_1 = r_1' = 75$, $\mathrm{ggT}(300, 225) = \mathrm{ggT}(225, 75) = 75$, $n = m = 1$
$\frac{459}{558}$: Der euklidische Algorithmus ergibt $558 = 1 \cdot 459 + 99$, $459 = 4 \cdot 99 + 63$, $99 = 1 \cdot 63 + 36$, $63 = 1 \cdot 36 + 27$, $36 = 1 \cdot 27 + 9$, $27 = 3 \cdot \underline{9} + 0$.
Das modifizierte Verfahren, das der Autor nicht konsequent durchführt, verläuft folgendermaßen: $558 = 1 \cdot 459 + 99$ ($558 = 2 \cdot 459 - 360$ führt zu einem dem Betrage nach größeren Rest), $459 = 5 \cdot 99 - 36$ ($459 = 4 \cdot 99 + 63$ führt zu einem dem Betrage nach größeren Rest, den aber der Autor weiterverwendet), $99 = 3 \cdot 36 - 9$ ($99 = 2 \cdot 36 + 27$ führt zu einem dem Betrage nach größeren Rest), $36 = 4 \cdot \underline{9} + 0$.
Parameter: $b = 558$, $a = 459$, $r_1 = 99$, $r_2 = 63$, $r_3 = 36$, $r_4 = 27$, $r_5 = 9$, $\mathrm{ggT}(558, 459) = \mathrm{ggT}(459, 99) = \mathrm{ggT}(99, 63) = \mathrm{ggT}(63, 36) = \mathrm{ggT}(36, 27) = \mathrm{ggT}(27, 9) = 9$, $n = 5$
$r_1' = r_1 = 99$, $r_2' = 36$, $r_3' = 9$, $\mathrm{ggT}(558, 459) = \mathrm{ggT}(459, 99) = \mathrm{ggT}(99, 36) = \mathrm{ggT}(36, 9) = 9$, $m = 3$
Hier erreicht man mit dem euklidischen Algorithmus in 6 Schritten, mit dem modifizierten Verfahren aber bereits in 4 Schritten das Ziel.
Im Übrigen hat der Verfasser das Beispiel $\frac{459}{558}$ später noch einmal aufgenommen und den Algorithmus mit den jeweils kleinsten Restbeträgen (s. o.) strikt durchgeführt.
Weiterhin erklärt der Autor u. a. zu diesem Verfahren sinngemäß: Die (letzte positive) ἔλλειψις oder ὑπεροχή – unser r_m' – ist die maximale Kürzungszahl des Ausgangsbruchs. Wenn aber r_m' nur im Nenner des Ausgangsbruchs aufgeht, nicht aber im Zähler (oder auch umgekehrt, worauf der Verfasser aber

nicht eingeht), so hat man sich bei der Teilung verrechnet.

Nun werden noch drei Methoden zur Durchführung des Verfahrens genannt.

– ... *allein durch Multiplikation*:

Der Autor schreibt (fol. 145^r): Εὑρίσκεται δὲ τοῦτο καλῶς καὶ προχείρως διὰ μόνου τοῦ πολλ(α)πλασιασμοῦ, ἐὰν ἔχωμεν ἐν χερσὶ τὰ τῶν πολλ(α)πλασιασμῶν κανόνια ... Er knüpft an diese Methode also die Bedingung, dass Multiplikationstafeln zur Verfügung stehen. Solche Tabellen müssten aber einen enormen Umfang haben, um allein für die Bewältigung der bisherigen Beispiele hilfreich zu sein. Eine schlichte Einmaleinstafel wie im "Vorspann" auf fol. 5^r reicht also bei Weitem nicht aus, und die immerhin stattliche Quadratzahlentabelle von 1^2 bis 1050^2 im "2. Buch" (foll. 67^r–73^r) ist für den vorliegenden Zweck ungeeignet. Auch wenn ein Beispiel fehlt, dürfte immerhin feststehen, dass die multiplikative Schreibweise gemeint ist, wie wir sie bei der allgemeinen Darstellung des euklidischen Algorithmus verwendet haben.

– ... *allein durch Teilung*:

In einem allgemeinen Lehrtext (fol. 145^r) beschreibt der Autor hier erstmals den nicht modifizierten euklidischen Algorithmus, bei dem der Vergleich von ἔλλειψις und ὑπεροχή keine Rolle spielt, und zwar in der bei ihm üblichen Bruchschreibweise. Neu ist auch, dass von der Möglichkeit eines vierten oder fünften Bruchs oder von noch mehr Brüchen die Rede ist, um zum Ziel zu gelangen. Leider sind die Beispiele $\frac{234}{312}$ $(=\frac{3}{4})$ und $\frac{1332}{1887}$ $(=\frac{12}{17})$ nicht geeignet, den "neuen" Algorithmus zu illustrieren, da hier die positiven Reste stets auch die dem Betrage nach kleinsten Reste sind.

– ... *nicht allein durch die Teilungen, die man hat, sondern auch durch die Brüche, die nicht ganzzahlig geteilt werden*

Dieses bemerkenswerte Verfahren führt bei den Beispielen des Autors auf Doppelbrüche, im Allgemeinen auf Kettenbrüche. Eines seiner Beispiele ist $\frac{555}{1332}$. Die Rechnung verläuft folgendermaßen: $1332 : 555 = 2\frac{222}{555}$, also gilt $\frac{555}{1332} = \frac{1}{2\frac{222}{555}}$, in griechischer Schreibweise $\frac{\alpha}{\beta \text{ καὶ } \frac{\beta\beta\beta}{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}}$, mit $\frac{555}{222} = 2\frac{1}{2}$. Somit folgt $\frac{222}{555} = \frac{1}{2\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$ und $\frac{1}{2\frac{222}{555}} = \frac{1}{2\frac{2}{5}}$. *Erweitere* (ἀνάλυσον) *aber dies mit den 5 unten, und es kommt* $\frac{5}{12}$ *heraus* ...

Offenkundig bahnt sich hier schon ein erstes Verständnis für die Kettenbruchentwicklung von Brüchen an. In unserer Terminologie zum euklidischen Algorithmus gilt nämlich:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{a}} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{r_3}{r_2}}}} = \ldots =$$

$$\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1}}}}}}$$

Für das obige Beispiel gilt $q_1 = q_2 = q_3 = 2,\ n = 2$.
Das letzte Verfahren ("Doppelbruchverfahren") dient dem Autor außerdem zur Bestimmung von Näherungsbrüchen. (Dieser moderne Aspekt spielt auch im Zusammenhang mit der Kettenbruchentwicklung eine wichtige Rolle.) In seinen Beispielen geht er jeweils von einem unkürzbaren Bruch aus.
Betrachten wir seine Vorgehensweise bei $\frac{194}{443}$: Zunächst stellt der Autor zutreffend, aber ohne Begründung, fest, dass sich der Bruch nicht kürzen lässt. Es folgen die Schritte
$\frac{443}{194} = 2\frac{55}{194}$, $\frac{194}{443} = \frac{1}{2\frac{55}{194}}$, $\frac{194}{55} = 3\frac{29}{55} \approx 3\frac{1}{2}$, denn $2 \cdot 29 = 58$, $58 - 55 = 3$, also gilt $\frac{55}{194} \approx \frac{1}{3\frac{1}{2}} = \frac{2}{7}$, $\frac{1}{2\frac{55}{194}} \approx \frac{1}{2\frac{2}{7}}$. Dies führt, mit 7 erweitert, zum Rundungsergebnis $\frac{7}{16}$.

Anschließend untersucht der Verfasser noch, in welchem Zusammenhang der Näherungsbruch mit dem Ausgangsbruch steht, und gewinnt dabei Einsicht in die Größe des Rundungsfehlers.

Er stellt fest, dass $\frac{7}{16} = \frac{194 - \frac{3}{16}}{443}$ gilt, weil $\frac{7}{16} \cdot 443 = 194 - \frac{3}{16}$ ist. Daraus leitet er auch die Korrektur von $\frac{7}{16}$ zur Übereinstimmung mit dem Ausgangsbruch her:

$$\frac{194}{443} = \frac{7 + \frac{3}{443}}{16}$$

41 *Darüber, welchen Nutzen die drei Viertel erbringen — der Bruch, der von den ‚αρν΄ Hyperpyra übrig geblieben ist, die σ΄ Leute unter sich aufteilten*

Damit du weißt, welchen Nutzen die drei Viertel erbringen, was wir sagten: Angenommen, σ΄ Leute haben ‚αρν΄ Hyperpyra unter sich aufzuteilen ... (vgl. Kap. 40)
Es folgt ein langer Text mit etlichen unnötigen Redundanzen. Es geht im Wesentlichen nur darum, wie man einen Geldwert mit gebrochener Maßzahl evtl. mithilfe einer kleineren Geldeinheit in einen ganzzahligen Geldwert umwandeln kann. Das Beispiel führt auf die Division $1150 : 200 = 5\frac{150}{200}$ (Hyperpyra) $= 5\frac{3}{4}$ (Hyperpyra). Wenn der Zähler 200 wäre — so der Verfasser — erhielte jede Person 6 Hyperpyra, und es bliebe zufällig (τὸ τυχόν) kein Bruch übrig. Zur Probe rechnet er $150 + 50 = 200$, $1150 + 50 = 1200$, $1200 : 200 = 6$ (mit den jeweiligen Einheiten).
Dann kehrt er zum Ausgangsbeispiel zurück, wandelt 1 Hyperpyron in 20 Kukkia um und erhält $\frac{3}{4}$ Hyperpyra $= \frac{3}{4}$ von 20 Kukkia $= 15$ Kukkia. Seine Begründung: $3 \cdot 5 = 15$ und $4 \cdot 5 = 20$ (Erweiterung des Bruchs $\frac{3}{4}$ mit 5 ergibt $\frac{15}{20}$.) Dem-

nach stehen jeder Person 5 Hyperpyra 15 Kukkia zu. Die Rechnung verlaufe (bis auf die Umwandlung) ebenso, wenn Florine (φλουριά) zu verteilen gewesen wären. Zum Zähler 150 bemerkt er, er sei $\frac{3}{4}$ des Teilers und zugleich $\frac{3}{4}$ eines Hyperpyrons, wobei Letzteres nicht ganz korrekt ist.
Es folgt ein naheliegendes alternatives Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe: Der Zähler 150 (Hyperpyra) wird mit 20 multipliziert, anschließend wird das Produkt (3000 Kukkia) durch den Nenner 200 dividiert mit dem Ergebnis 15 (Kukkia). Die schriftlichen Rechenschemata des Autors sind dabei unnötig.
Als 2. Beispiel wählt er die Verteilung von 1040 Florin auf 50 Personen. Die wiederum schriftlich durchgeführte Division ergibt $20\frac{40}{50}$ Florin oder gekürzt $20\frac{4}{5}$ Florin. Nun nimmt er an, dass 1 Florin dem Wert von 8 Hyperpyra und daher von 160 Kukkia entspricht. (Im Rechenbuch treten für den Florin auch andere Paritäten auf – s. Metrologie.) Die weitere Rechnung $\frac{4}{5} \cdot 160$ Kukkia = 128 Kukkia erfolgt in zwei Schritten. Jeder Beteiligte erhält also 20 Florin 128 Kukkia bzw. 20 Florin 6 Hyperpyra 8 Kukkia, wobei die letzte Umrechnung ohne Kommentar angegeben wird. Rückblickend stellt der Autor – fachsprachlich nicht ganz korrekt – folgende Betrachtung an: *Dies hat uns der Bruch gezeigt, dass von den 1000 Florin jeder der 50 Leute 20 Florin gewinnt und dass von den 40 Florin – dem Zähler – jeder der 50 Leute jeweils 128 Kukkia gewinnt ... Wie nämlich die 40 Florin vier Fünftel von 50 Leuten sind, so gewinnt jeder der 50 vier Fünftel eines Florins, was 160 Kukkia sind.*
Anschließend stellt der Verfasser noch einen anderen Lösungsweg vor: 1 Florin = 8 Hyperpyra, 40 Florin (s. Zähler) = 320 Hyperpyra, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia, 320 Hyperpyra = 6400 Kukkia, 6400 Kukkia : 50 (s. Nenner) = 128 Kukkia = $\frac{4}{5}$ Florin = 6 Hyperpyra 8 Kukkia
Im Abschlusstext erläutert der Autor noch einmal (unter der Voraussetzung, dass bei der Division ein Bruch auftritt) die Bedeutung von Zähler und Nenner für die Umwandlung in kleinere Münzeinheiten, und dass der beschriebene Lösungsweg unabhängig von der zu verteilenden Größe – z. B. auch bei den Gewichtsmaßen Pfund und Unze – zum Ziel führt.

42 *Wie es möglich ist aufzuzeigen, welches Verhältnis der Zähler im Vergleich zum Nenner hat, γ″ oder δ″ oder ε″, und welche Zeichen wir setzen*

Man muss auch dies wissen, welche Schriftzeichen wir gewöhnlich oberhalb des kleinen Strichs setzen, die zum Zähler gehören, und welche unterhalb des kleinen Strichs, die zum Nenner gehören, um ein Drittel oder ein Viertel oder ein Fünftel anzuzeigen, oder wie man den Zähler im Vergleich mit dem Nenner anders anzuzeigen hat.
Als Erstes werden die Stammbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{12}$ betrachtet, wobei jetzt die Schreibweise $\frac{\alpha}{\beta}$ (statt β″), $\frac{\alpha}{\gamma}$ (statt γ″) usw. gewählt wird: Der Autor beschreibt sie als die Hälfte eines Ganzen, da 1 die Hälfte von 2 ist, bzw. als ein Drittel eines Ganzen usw.
Danach erklärt er, wie man die folgenden Brüche ausspricht, und erläutert, wie sie gegebenenfalls zu kürzen sind: $\frac{2}{3}$ (δύο τρίτα, die anderen Brüche entsprechend), $\frac{2}{4}$ (= $\frac{1}{2}$, da 2 die Hälfte von 4 sei), $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{6}$ (= $\frac{1}{3}$, da 2 ein Drittel von 6

sei), $\frac{2}{12}$ (= $\frac{1}{6}$, mit Angabe der Kürzungsvorschrift), $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{6}$ (= $\frac{1}{2}$), $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$ (= $\frac{2}{3}$, mit Angabe der Kürzungsvorschrift), $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{6}{8}$ (= $\frac{3}{4}$, mit Kürzungsvorschrift), $\frac{6}{9}$ (= $\frac{2}{3}$), $\frac{6}{10}$ (= $\frac{3}{5}$), $\frac{6}{11}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{15}{17}$, $\frac{23}{35}$ und $\frac{25}{35}$ (= $\frac{5}{7}$). So gehe es weiter bis zu den Hundertern und Tausendern im Zähler und Nenner.
Man dürfe $\frac{3}{4}$ nicht "drei vier" aussprechen, denn *das klingt undeutlich und unbrauchbar* (ἀσήμως γὰρ φωνεῖ τε καὶ ἀχρήστως), sondern müsse "drei Viertel" sagen. Die entsprechende Warnung wiederholt er beim Bruch $\frac{7}{8}$.
Sinngemäß erklärt er zum Abschluss dieses eher dürftigen Kapitels, dass die jeweilige Position der Zahlen im Hinblick auf den Bruchstrich die Lesart des Bruchs festlegt.

43 *Wie es möglich ist, zwei Brüche zu addieren, und zwar $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$, und zu wissen, wie viel die beiden Teile addiert ergeben*

Angenommen, von irgendwelchen Divisionen seien zwei Brüche übrig geblieben, einerseits $\frac{2}{3}$, andererseits $\frac{3}{4}$. Du suchst diese zu addieren und zu wissen, wie viele Ganze die beiden Teile werden, wenn sie addiert worden sind ...
Zum Lösungsweg: Zunächst multipliziert man *die beiden Zahlen unten* (τὰς δύο κάτωθεν ψήφους), also 3 und 4, miteinander. 12 ist *eine gemeinsame Größe der beiden Teile* (ἓν σῶμα τῶν δύο μερῶν), von der dann $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ genommen werden: $\frac{2}{3}$ von 12 ist 8, $\frac{3}{4}$ von 12 ist 9. Addition ergibt 17, und dies ist noch durch 12 zu dividieren. Ergebnis: $1\frac{5}{12}$
Und anders leichter. Jetzt wird zwischen die beiden Brüche ein Andreaskreuz gesetzt, welches darauf hinweist, dass der Zähler jedes $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ Bruchs mit dem Nenner des jeweils anderen zu multiplizieren ist: $2 \cdot 4 = 8$, $3 \cdot 3 = 9$. Daraus ergibt sich der Zähler $8 + 9 = 17$ der Summe. Zuvor wurde wieder der Nenner 12 (ἓν σῶμα τῶν δύο μερῶν) der Summe (Produkt der Nenner der Summanden) bestimmt. Ergebnis: $17 : 12 = 1\frac{5}{12}$
Diese Methode entspricht der heutigen, wenn (wie hier) der Hauptnenner (kleinstes gemeinsames Vielfaches – kgV – der Einzelnenner) mit dem Nennerprodukt übereinstimmt. "Methodische Hilfslinien" zur Erleichterung der gemeinen Bruchrechnung findet man auch in deutschsprachigen Rechenbüchern der frühen Neuzeit, z. B. besonders eindrucksvoll bei Apian (1527, E 8^{v}).
Schließlich bestätigt der Autor die Beziehung $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = 1\frac{5}{12}$ noch durch ein "praktisches" Beispiel, bei dem es ums Rechnen mit Geld geht. Die "allgemeine und bürgerliche Methode" (κοινὴ καὶ πολ(ι)τευομένη μεταχείρισις), die dem nahekommt, was wir heute unter "bürgerlichem Rechnen" verstehen, zitiert er im weiteren Verlauf des Rechenbuchs häufig dann, wenn es sich nicht um abstraktes Rechnen, sondern um das alltägliche mit Größen (hier: mit Geldwerten) handelt. Hier werden $\frac{2}{3}$ Florin und $\frac{3}{4}$ Florin mithilfe einer Umrechnung auf kleinere Münzeinheiten addiert, die ungebrochene Maßzahlen liefert. Im Unterschied zu Kapitel 41 soll dabei 1 Florin = 6 Hyperpyra, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia gelten. Zur Rechnung: $\frac{2}{3}$ von 120 Kukkia sind 80 Kukkia oder 4 Hyperpyra, $\frac{3}{4}$ von 120 Kukkia sind 90 Kukkia oder 4 Hyperpyra 10 Kukkia, als Summe ergeben sich 8 Hyperpyra 10 Kukkia. Davon werden 6 Hyperpyra (= 1 Florin) abgezogen, der Rest

2 Hyperpyra 10 Kukkia ist der Bruchanteil (τζάκισμα) von 1 Florin, und zwar $\frac{5}{12}$ Florin. (Begründung des Autors: $\frac{1}{12}$ von 120 Kukkia = 10 Kukkia, $\frac{5}{12}$ von 120 Kukkia = 50 Kukkia = 2 Hyperpyra 10 Kukkia)
Resultat: $\frac{2}{3}$ Florin + $\frac{3}{4}$ Florin = $1\frac{5}{12}$ Florin = 1 Florin 2 Hyperpyra 10 Kukkia.
Die Addition und Subtraktion von gebrochenen Größen über die Umwandlung in kleinere Größen mit ganzzahligen Maßzahlen ist eine immer noch aktuelle Methode der Didaktik des Bruchrechnens. Andererseits vermisst man ein vorgeschaltetes Kapitel zur (leichteren) Addition von gleichnamigen Brüchen.

44 *Wie es möglich ist, vier verschiedene Brüche zu addieren, und zwar $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$, und — wenn diese alle addiert worden sind — zu wissen, welche ganze Zahlen sich ergeben*

Wie beim 1. Lösungsweg des vorigen Kapitels wählt der Autor wieder das Nennerprodukt ($3 \cdot 4 = 12$, $12 \cdot 5 = 60$, $60 \cdot 6 = \underline{360}$) als *gemeinsame Größe*, von der er die einzelnen Anteile berechnet: $\frac{2}{3}$ von 360 ist 240, $\frac{3}{4}$ von 360 ist 270, $\frac{4}{5}$ von 360 ist 288, $\frac{5}{6}$ von 360 ist 300. Mithilfe eines schriftlichen Additionsschemas erhält er als Summe 1098, anschließend dividiert er (schriftlich) durch das Nennerprodukt: $1098 : 360 = 3\frac{18}{360}$ (mit Umkehrprobe $3 \cdot 360 + 18 = 1098$). Er sieht noch, dass mit 18 gekürzt werden kann, und notiert $3\frac{1}{20}$ als Endergebnis.
Hier wäre es bequemer gewesen, mit dem Hauptnenner 60 (kgV der einzelnen Nenner) zu rechnen. Ergebnis: $3\frac{3}{60}$ oder $3\frac{1}{20}$
Es folgt wieder die "allgemeine und bürgerliche Methode", wobei dasselbe Währungssystem wie im vorigen Kapitel zur Anwendung kommt:
$\frac{2}{3}$ Florin + $\frac{3}{4}$ Florin + $\frac{4}{5}$ Florin + $\frac{5}{6}$ Florin = 4 Hyperpyra + 90 Kukkia (oder 4 Hyperpyra 10 Kukkia) + 96 Kukkia (oder 4 Hyperpyra 16 Kukkia) + 100 Kukkia (oder 5 Hyperpyra) = 18 Hyperpyra 6 Kukkia = 3 Florin 6 Kukkia = $3\frac{1}{20}$ Florin
Abschließend erklärt der Verfasser sinngemäß, dass man mit dieser Methode die Summe beliebiger verschiedener Brüche bestimmen kann.

Auf dem linken Rand des Blatts 30^{v} (Kapitel 43) verweist er auf ein Kapitel des sog. zweiten Buchs und auf Texte im Anhang, von denen aber nur der auf fol. $158^{r/v}$ die Addition von Brüchen direkt betrifft. Auf fol. 158^{r} findet man eine Marginalie: *Anstelle des 43. und 44. und 135. Kapitels* (letzteres gehört wieder zum "2. Buch") *schreibe man das Vorliegende, denn es enthält die drei Kapitel.*
Hier berechnet der Autor zunächst $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ (s. Kapitel 43), $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8}$ (neues Beispiel) und $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$ (s. Kap. 44). Dabei greift er im Wesentlichen den ersten Lösungsweg aus den beiden zuletzt besprochenen Rechenbuchkapiteln auf. Allerdings werden die Summanden so erweitert, dass sie das Nennerprodukt als gemeinsamen Nenner — Bezeichnung: κοινὸς ἀριθμός *(gemeinsame Zahl)* statt ἓν σῶμα — annehmen.
Und anders leichter. Und zuerst muss man dies wissen: Wenn alle Teile unten von den verschiedenen aufgesuchten Teilen unteilbar und zueinander ungeformt (ἀμερῆ τε καὶ ἀσχημάτιστα πρὸς ἄλληλα) *sind, werden sie mit der aufgezeigten Methode addiert.* Damit ist gemeint, dass als gemeinsamer Nenner das Nenner-

produkt zu wählen ist, falls die Nenner "zueinander" teilerfremd sind. (Tatsächlich genügt allgemeine Teilerfremdheit.) *Wenn aber gewisse Teile der verschiedenen unten aufgesuchten Teile irgendwelche Teiler haben, sodass der eine Teil zum anderen gemäß dem halben Teil oder dem dritten "in Form steht"* (σχηματίζεσθαι)*, werden sie sehr leicht mit der vorliegenden Methode addiert ...*
Beispiel $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}$: Dieselbe Aufgabe hatte der Autor oben mit dem Nennerprodukt (192) berechnet. Nun stellt er fest, dass 4, 6 und 8 (gemeinsame) Teiler haben, und zwar verhalte sich 4 zu 6 wie $\frac{2}{3}$, 4 zu 8 wie $\frac{1}{2}$. Jetzt multipliziert er den größten Nenner (8) mit 3 – alternativ dazu die beiden Nenner 4 und 6 miteinander – und weist darauf hin, dass 24 durch die drei Nenner ganzzahlig teilbar ist. (24 ist der Hauptnenner.) Die weitere Rechnung soll hier übergangen werden.
Beispiel $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$ (s. o. und Kapitel 44, Nennerprodukt 360), Methode der Hauptnennerbestimmung: 3 wird mit 4 multipliziert. 12 ist durch 6 teilbar, aber nicht durch 5; $2\cdot 12$, $3\cdot 12$, $4\cdot 12$ sind ebenfalls nicht durch 5 teilbar, aber $5\cdot 12=60$ (Hauptnenner).
Dieses "systematische Probieren" ist hier eigentlich unnötig, ähnelt aber dem noch im heutigen Mathematikunterricht gebräuchlichen Verfahren zur kgV-Bestimmung über die Vielfachenmengen.
Beispiel $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{20}{21}$ (Nennerprodukt 2646), Methode der Hauptnennerbestimmung: Der Autor stellt wieder fest, dass die Nenner "zueinander in Form stehen" (πρὸς ἄλληλα σχηματίζονται), also gemeinsame Teiler haben, denn 3 verhalte sich zu 6 wie $\frac{1}{2}$, zu 21 wie $\frac{1}{7}$, und 7 zu 21 wie $\frac{1}{3}$. Nun verdoppelt er den größten Nenner (21) und erhält 42 als Hauptnenner, der durch alle Nenner teilbar ist.
Die vorgestellten Beispiele lassen zunächst kein systematisches, sondern nur ein situationsbedingtes Vorgehen bei der Hauptnennerbestimmung erkennen. Doch zum Abschluss des Textes auf fol. 158^{v} präzisiert der Autor sein Verfahren. Sinngemäß drückt er sich folgendermaßen aus:

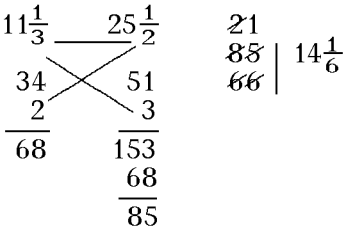
- Wenn die Nenner (paarweise) teilerfremd sind, erfolgt die Addition nach der 1. Methode, d. h. mithilfe des Nennerprodukts.
- Andernfalls soll man den größten Nenner verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen usw., bis ein Produkt entsteht, das durch alle Nenner ganzzahlig geteilt werden kann.

Man könnte auch einen kleineren Nenner vervielfachen, aber die Wahl des größten minimiert die Anzahl der nötigen Probemultiplikationen.
Es handelt sich tatsächlich um dasselbe Verfahren, das – neben dem der Primfaktorzerlegung – im heutigen Mathematikunterricht noch gebräuchlich ist.
Zu der Zeit, in der das Rechenbuch entstand, war die Bestimmung des Hauptnenners bei der Addition und Subtraktion von Brüchen noch keineswegs selbstverständlich. Bis zum 15. Jahrhundert haben sich nach TROPFKE (1980, S. 249–252, S. 254 f.) folgende Mathematiker dem Thema gewidmet: al-Karaǧī (10./11. Jh., Bagdad), Leonardo von Pisa (ca. 1170 bis nach 1240), Barlaam (1290 bis nach 1348, Kalabrien) und al-Kāšī (gest. 1429 in Samarkand). Von der *Logistica* Barlaams, eines byzantinischen Mönchs und Bischofs, könnte unser Autor Kenntnis gehabt haben.

45 *Wie es möglich ist, $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ zu subtrahieren und den Rest zu wissen, wie groß er ist*

Um zu zeigen, dass $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$ gilt, verwendet der Autor dieselben drei Methoden wie in Kapitel 43. Bei der dritten, der "allgemeinen und bürgerlichen Methode", legt er wieder die Paritäten 1 Florin = 6 Hyperpyra, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia zugrunde und erhält — hier etwas abgekürzt — $\frac{3}{4}$ Florin - $\frac{2}{3}$ Florin = 4 Hyperpyra 10 Kukkia - 4 Hyperpyra = 10 Kukkia = $\frac{1}{12}$ Florin.

Auf dem unteren Rand von fol. 31^{r} findet sich eine Notiz des Schreibers B (vgl. foll. 126^{v}–140^{r}, ed. HUNGER/VOGEL 1963), die sich auf die Überschrift des vorliegenden Kapitels bezieht. Es geht um die *Subtraktion von Brüchen* (ὀφειλμὸς τζακισμάτων), wobei ὀφειλμός bezeichnenderweise nicht zum Vokabular unseres Autors (Schreiber A) gehört.



Nach dem Schema wird $25\frac{1}{2}-11\frac{1}{3}$ wie folgt berechnet: $3\cdot 11+1=34$, $2\cdot 25+1=51$, $34\cdot 2=68$, $51\cdot 3=153$, $153-68=85$, $85:6=14\frac{1}{6}$. Dabei wird die Multiplikation über Kreuz beim Gleichnamigmachen von $\frac{34}{3}$ und $\frac{51}{2}$ graphisch hervorgehoben. Die weitere Rechnung ist klar. Natürlich wäre es einfacher gewesen, zuerst die ganzzahligen Anteile zu subtrahieren.

46 *Wie es möglich ist zu wissen, wie viele Fünftel die $\frac{7}{8}$ ergeben*

Hier wäre eine elementare Rechnung $\frac{7}{8}=\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{5}=\frac{35}{8}\cdot\frac{1}{5}$ möglich gewesen — Ergebnis: $\frac{35}{8}$ oder $4\frac{3}{8}$ — oder man wählt den algebraischen Ansatz $\frac{7}{8}=\frac{x}{5}$ mit demselben Resultat für x. Bei beiden Wegen ist allerdings die Multiplikation von Brüchen erforderlich, die erst im Kap. 48 behandelt wird.

Der Autor geht folgendermaßen vor: $\frac{7}{8}$ und $\frac{1}{5}$ werden mit einem Andreaskreuz verbunden, um deutlich zu machen, dass jeder Zähler des einen Bruchs mit dem Nenner des jeweils anderen zu multiplizieren ist (vgl. Kap. 43): $7\cdot 5=35$, $1\cdot 8=8$. Es folgt die (schriftliche!) Division $35:8=4\frac{3}{8}$ und damit das Ergebnis. Dieses Rechenrezept, das ohne die Multiplikationsregel für Brüche nicht verständlich ist, entspricht im Wesentlichen der elementaren Rechnung oben.

Man muss aber auch dies wissen, dass jedes der $\frac{7}{8}$ kleiner als $\frac{1}{5}$ ist und um so viel kleiner, wie groß $\frac{3}{8}$ von $\frac{1}{5}$ ist.

Zur Begründung führt der Autor sinngemäß die Gleichung $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$ an. Die Subtraktion $\frac{1}{5}-\frac{1}{8}=\frac{8-5}{8\cdot 5}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}$ $(=\frac{3}{40})$ hätte besser erkennen lassen, wie das Ergebnis zustande kommt.

Eine weitere Begründung für die Resultate der beiden Rechnungen liefert wieder die "allgemeine und bürgerliche Methode", wobei nun 80 Hyperpyra als *eine Einheit* (σῶμα ἕν) dienen. Diese Wahl ist insoweit vorteilhaft, als bei sämtlichen Zwischenschritten mit ganzzahligen Hyperpyra-Beträgen operiert werden kann, so dass eine Umrechnung in kleinere Münzeinheiten (s. Kap. 43–45) nicht mehr erforderlich ist. Nach dem Prinzip des Rechnens mit möglichst kleinen Zahlen, das uns schon beim Gleichnamigmachen von Brüchen begegnet ist (Wahl des

Hauptnenners, der im Allgemeinen kleiner als das Nennerprodukt ist), hätten hier allerdings schon 40 Hyperpyra als "Einheit" denselben Zweck erfüllt.
Der explizite Verlauf der Rechnung leuchtet ein und kann daher übergangen werden.
Am Ende des Kapitels versichert der Autor mit einer formelhaften Wendung, die bei ihm häufig zu finden ist: *Ebenso kannst du auch jede andere ähnliche Frage mithilfe derselben gleichen leichten Methode wissen.* So stellt er noch die Fragen, wie viel Viertel $\frac{4}{5}$ und wie viel Drittel $\frac{5}{6}$ sind, welcher Teil $\frac{1}{5}$ fehlt, damit $\frac{1}{4}$ herauskommt, und wie $\frac{1}{6}$ zu $\frac{1}{3}$ ergänzt werden muss (ohne Lösung).

47 *Wie es möglich ist zu wissen, welches größer ist, die $\frac{5}{6}$ oder die $\frac{8}{9}$, und wie man zu $\frac{5}{6}$ so viel addieren kann, dass als Ergebnis $\frac{8}{9}$ zurückbleibt*

Die Kapitelüberschrift ist etwas unglücklich formuliert, da mit der zweiten Frage die Antwort der ersten bereits nahegelegt wird.
Der Text beginnt hier wie in den meisten anderen Kapiteln mit einer Wiederholung der Problemstellung aus der Kapitelüberschrift. Danach folgt eine banale Feststellung: *Wenn das Überschießende zum Kleineren addiert wird, wird das Kleinere so groß werden, wie auch das Größere ist.* Dabei hat der Autor sprachliche Präzision vermissen lassen, denn er verwendet für *das Überschießende* (den Unterschiedsbetrag) denselben Begriff wie für *das Größere*, nämlich τὸ ὑπερέχον.
Dies kannst du so behandeln ... Der Autor berechnet mit Verweis auf das rechts stehende Schema zunächst das Nennerprodukt $6 \cdot 9 = 54$ (ἓν σῶμα τῶν δύο μερῶν) — anstatt den Hauptnenner 18 — und nimmt davon jeweils $\frac{5}{6}$ und $\frac{8}{9}$, also 45 und 48. Daraus schließt er, dass $\frac{8}{9}$ um $\frac{3}{54}$ größer als $\frac{5}{6}$ ist. Es folgt eine mehrfache wortreiche Erklärung, dass dieser Unterschiedsbetrag zu $\frac{1}{18}$ gekürzt werden kann.

$\frac{5}{6} \times \frac{8}{9}$

Wie das Schema nahelegt, ergeben sich die Zahlen 45 und 48 auch durch Multiplikationen über Kreuz; darauf weist der Schreiber in den Randbemerkungen von fol. 31^{v} hin. Dort wiederholt er die Aussage über das Größenverhältnis der beiden Brüche zueinander und den Unterschiedsbetrag.
Die folgende Aufgabe passt nicht zur Kapitelüberschrift:
Wenn du aber wissen willst, wie viele Ganze bei der Addition von $\frac{5}{6}$ und $\frac{8}{9}$ herauskommen, addiere die 45 ... mit den 48 ..., und es ergeben sich zusammen 93. Dann dividiert der Autor 93 durch 54 schriftlich (!) — vgl. sein Diagramm — mit dem Ergebnis $1\frac{39}{54}$, das er (wieder wortreich) zu $1\frac{13}{18}$ kürzt.

Anschließend geht es darum, von $\frac{8}{9}$ den Überschuss von $\frac{8}{9}$ gegenüber $\frac{5}{6}$ zu subtrahieren. Der Autor rechnet alles ausführlich vor, wobei er wieder das Multiplikationsdiagramm verwendet. Seine Rechenschritte sind $6 \cdot 9 = 54$, $5 \cdot 9 = 45$, $6 \cdot 8 = 48$, 45 ≙ (er schreibt *ist*) $\frac{5}{6}$, 48 ≙ *(ist)* $\frac{8}{9}$, $48 - 3 = 45$, 3 ≙ (*ist*) $\frac{1}{18}$. Daraus erhält er $\frac{8}{9} - \frac{1}{18} = \frac{5}{6}$. Auf die naheliegende Idee, sofort $\frac{8}{9} - (\frac{8}{9} - \frac{5}{6}) = \frac{5}{6}$ hinzuschreiben, was nur der Auflösung einer Minusklammer entspricht, kommt er nicht.
(Beziehungen wie $a - (a - b) = b$ sind inhaltlich bereits aus der Antike bekannt.)
Am Ende steht eine der häufig wiederholten Redewendungen zur Feststellung,

dass die beschriebene Lösungsmethode auf Aufgaben gleichen oder ähnlichen Typs übertragbar ist (vgl. I. 2. 4. 5). Solche Redefiguren sollen künftig nur noch ausnahmsweise erwähnt werden.

Wie aus den Marginalien von fol. 31^{v} hervorgeht, möchte aber der Autor seinen Stoff nun nachträglich anders anordnen, und zwar will er die Kapitel 45–47, die hier ohne Nutzen ständen, zusammen mit einer Passage im Anhang des Rechenbuchs, auf die er mit einem Zeichen verweist, vor das Kapitel 144 (aus dem 2. Buch) setzen.

Die genannte Passage (fol. $157/1^{v}$) beinhaltet in Wortform formulierte Aufgaben, die das Lösen von Gleichungen erfordern, z. B. (in unserer Schreibweise) von $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{5}x$. Hier wird die Lösung ($x = 3\frac{1}{3}$) nicht algebraisch, sondern mithilfe eines Rechenrezepts für die Koeffizienten ermittelt, das sich aus den algebraischen Umformungen erklären lässt: $2 \cdot 5 = 10$, $1 \cdot 5 = 5$, $2 \cdot 1 = 2$, $5 - 2 = 3$, $10 : 3 = 3\frac{1}{3}$; multipliziert mit 1 (Subtrahend in der obigen Gleichung) ergibt sich die Lösung $3\frac{1}{3}$. Es ist sofort einzusehen, dass der Autor zunächst $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ berechnet und dann den Kehrwert betrachtet. Es folgen drei weitere analoge Beispiele.

In Kapitel 144 (fol. 79^{v}) werden spezielle Lösungen von (wieder verbal formulierten) linearen Gleichungen in zwei Variablen gesucht, wie z. B. $\frac{2}{3}x + y = \frac{3}{4}y + x$ (in unserer Schreibweise). Der Autor schreibt die Brüche als Schemata nebeneinander und rechnet $2 \cdot 3 = 6$ (Zähler), $3 \cdot 4 = 12$ (Nenner), $12 - 6 = \underline{6}$, *die aus beiden Teilen entstandene Zahl*. Er setzt im rechten Schema fort: $4 - 3 = 1$, $1 \cdot \underline{3}$ (aus dem linken Schema) = 3; die gesuchte erste Zahl (x) ist 3. Dann betrachtet er das linke Schema: $3 - 2 = 1$, $1 \cdot \underline{4}$ (aus dem rechten Schema) = 4; die gesuchte zweite Zahl (y) ist 4. Es folgt noch eine Probe, die zeigt, dass — wie zuvor behauptet — beide Seiten der Gleichung gleich 6 sind. Die Zahlen 3 und 4 erfüllen die Bedingungen. Mit dieser speziellen Lösung begnügt sich der Autor, weitere Lösungen oder die allgemeine Lösung ($y = \frac{4}{3}x$, x beliebig) gibt er nicht an bzw. umschreibt sie nicht. Hier ist noch zu klären, wie diese Spezialisierung aus algebraischer Sicht zustande kommt:

Wir untersuchen die allgemeine Gleichung $\frac{a}{b}x + y = \frac{c}{d}y + x$ mit $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} < 1$.

Unser Autor betrachtet den Wert $bd - ac$, der wegen $\frac{a}{b} < 1 < \frac{d}{c}$ positiv ist, und ermittelt die Lösungen aus dem Gleichungssystem $x = (d - c) \cdot b$, $y = (b - a) \cdot d$. Setzt man diese x, y in die obige Gleichung ein, so erhält man tatsächlich auf beiden Seiten $bd - ac$. Damit ist das Paar (x, y) als Lösung verifiziert. Die allgemeine Lösung der obigen Gleichung lautet aber, wie man leicht zeigen kann, $y = \frac{(b-a)d}{(d-c)b} \cdot x$ (mit beliebigem x). Jetzt zeigt sich, dass der Autor für x speziell den Nenner dieses Terms gewählt hat, sodass für y gerade der Zähler übrig bleibt. Darüber hinaus gibt es auch unendlich viele ganzzahlige Lösungen.

Im Kapitel 144 ist nur noch eine weitere, analoge Aufgabe zu finden.

48 *Wie man $\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ mit $\frac{1}{3}$ und $2\frac{1}{4}$ mit $\frac{2}{3}$ und $2\frac{3}{4}$ mit $3\frac{4}{5}$ multiplizieren kann usw.*

Angenommen, du willst $\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren und von dem Produkt davon erfahren, wie groß es wird. Und zuerst muss man dies wissen, dass jedes Tza-

kisma ("Zerteilung", hier die Bezeichnung für Bruch) *kleiner ist als ein Ganzes, weshalb es auch Tzakisma genannt wird. Da aber jedes Tzakisma kleiner als ein Ganzes ist, wächst, wenn ein Tzakisma mit einem Tzakisma multipliziert wird, das Produkt von diesen nicht an, sondern es wird vielmehr kleiner. Denn* $\frac{1}{2}$ *mit* $\frac{1}{2}$ *multipliziert — das Produkt von diesen ergibt* $\frac{1}{4}$*, denn* $\frac{1}{2}$*-mal* $\frac{1}{2}$*, d. h. die Hälfte der Hälfte* ("der Mitte")*, ist* $\frac{1}{4}$ *... Das Produkt von diesen entsteht sachverständig so.* Erst jetzt folgt die Regel — entsprechend unserer Schreibweise mit Variablen $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ($b, d \neq 0$) — anhand der Beispiele $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$. (Hier hätte von vornherein gekürzt werden können.) Die beiden letzten Beispiele werden in der Kapitelüberschrift nicht erwähnt. Auf das scheinbar merkwürdige Phänomen, dass πολλαπλασιασμός (wörtlich "Vervielfältigung", vgl. lat. *multiplicatio*) zu etwas Kleinerem als vorher führen kann (wie hier bei echten Brüchen), hat der Autor zu Beginn des Kapitels eigens hingewiesen.

$2\frac{1}{4}$ *mit* $\frac{2}{3}$ *multipliziert*

Nun ist einer der Faktoren eine gemischte Zahl. Der Schreiber gibt zwei Verfahren an.

Beim ersten rechnet er $4 \cdot 2 = 8$, $8 + 1 = 9$, $2 \cdot 9 = 18$, $4 \cdot 3 = 12$, $18 : 12 = 1\frac{6}{12} = 1\frac{1}{2}$. Dabei hat er implizit $2\frac{1}{4}$ in den unechten Bruch $\frac{9}{4}$ verwandelt und diesen mit $\frac{2}{3}$ multipliziert.

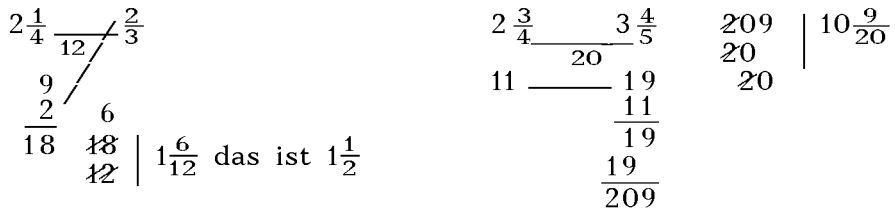
Beim zweiten — eingeleitet durch Καὶ ἄλλως — bestimmt er $2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ ($= 1\frac{1}{2}$), wendet also das Distributivgesetz $(a + b)c = ac + bc$ an.

$2\frac{3}{4}$ *mit* $3\frac{4}{5}$ *multipliziert*

Jetzt sind beide Faktoren gemischte Zahlen, die implizit in unechte Brüche verwandelt und anschließend multipliziert werden (1. Verfahren). Das Ergebnis $10\frac{9}{20}$ erhält der Autor auch dadurch, dass er das verallgemeinerte Distributivgesetz $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ anwendet, hier also $2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$ berechnet (2. Verfahren). Sofern bei den Summanden unechte Brüche auftreten, werden diese — wie auch schon beim vorherigen Beispiel — sofort wieder in gemischte Zahlen verwandelt.

Im (hier nicht wiedergegebenen) Additionsdiagramm erscheinen die vier Summanden in den ersten drei Zeilen und in der 4. Zeile rechts, $1\frac{9}{20}$ (4. Zeile links) ist als Zwischensumme der drei Brüche $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{5}$ zu verstehen. Die Addition dieser Brüche hätte im Hinblick auf Kapitel 44 nicht mehr ausführlich vorgerechnet werden müssen. Stattdessen treibt der Schreiber einen unangemessenen Aufwand, weil er meint, dass die Brüche *ungleichnamig* (ἀνόμοια) seien und *du diese nicht addieren kannst.* (!) Die Wahl des Nennerprodukts 100 als ἓν σῶμα anstatt des Hauptnenners 20 ist dabei besonders ungeschickt. Zu bemängeln ist außerdem, dass der Autor wie so oft auch hier wieder einfache Kopfrechnungen schriftlich durchführt — vgl. die entsprechenden Diagramme.

Am unteren Seitenrand (fol. 32^{r}) hat der 2. Schreiber (B), unverkennbar an seiner Punktschreibweise für die Null, die letzten beiden Multiplikationen flüchtig in einem Diagramm skizziert. Dabei sollen einige Verbindungslinien den richtigen Rechenweg aufzeigen, der jeweils nach dem 1. Verfahren unseres Autors abläuft:



$4\frac{3}{4}$ mit $9\frac{2}{5}$ multipliziert

Mit diesem Beispiel, das in der Überschrift nicht genannt wurde, beschließt der Autor das Kapitel. Der Ablauf der beiden Verfahren wird wieder ausführlich dargestellt, und auch Schreiber B hat wieder ein Diagramm (am linken Rand von fol. 32^{v}) zur Illustration des 1. Verfahrens beigesteuert. (Ergebnis: $44\frac{13}{20}$)

49

Wie man
$\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 36 und $\frac{3}{4}$ von $\frac{3}{4}$ von 48 und $\frac{2}{5}$ von $\frac{2}{3}$ von 30
nehmen kann und so der Reihe nach

Angenommen, du suchst $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 36 zu nehmen. Multipliziere die 2 oben mit der 2 oben: zweimal 2 ergeben 4. Multipliziere auch die 3 unten mit der 3 unten: dreimal 3 ergeben 9 — diese 4 und 9, so gelegen $\frac{4}{9}$, bezeichnen 4 Neuntel. Und siehe, du hast gefunden, dass $\frac{4}{9}$ von 36 (gleich) $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 36 ist. Die $\frac{4}{9}$ von 36 sind 16: Denn das Neuntel von den 36 ist 4, 4 Neuntel aber, d. h. 4-mal 4, gibt 16. 16 ist aber $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 36. Denn $\frac{2}{3}$ von 36 ist 24: denn zweimal 12 ergeben 24 und dreimal 12 ergeben 36. $\frac{2}{3}$ von 24 sind 16: denn zweimal 8 ergeben 16 und dreimal 8 ergeben 24. Und siehe, die $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 36 sind 16, diese 16 ist $\frac{4}{9}$ von 36.

Dem (wieder unnötig ausführlichen) Text ist zu entnehmen, wie man den Bruchanteil eines Bruchanteils einer natürlichen Zahl berechnet ("von" muss multiplikativ gedeutet werden) und wie sich diese Rechenweise begründen lässt. Dies wird deutlich, wenn der Autor bei der vorliegenden Aufgabe $\frac{4}{9}$ von (mal) 36 mit $\frac{2}{3}$ von (mal) 24 vergleicht, letztlich also die Übereinstimmung von $(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3})\cdot 36$ mit $\frac{2}{3}\cdot(\frac{2}{3}\cdot 36)$ feststellt.

In gleicher Ausführlichkeit werden nun noch die beiden anderen angekündigten Beispiele behandelt: $\frac{3}{4}$ von $\frac{3}{4}$ von 48 = 27, $\frac{2}{5}$ von $\frac{2}{3}$ von 30 = 8.

50

Wie man
$\frac{2}{3}$ von 35 und $\frac{3}{4}$ von 35 und $\frac{7}{9}$ von 5 und $\frac{15}{20}$ von 11 und $\frac{31}{55}$ von 100
nehmen kann und so der Reihe nach

Angenommen, du suchst $\frac{2}{3}$ von 35 zu nehmen. Du kann dies so nehmen. Multipliziere die 35 mit den 2 oben: zweimal 35 ergeben 70. Teile die 70 durch die 3 unten, und die Teilung von diesen ergibt $23\frac{1}{3}$. Und siehe, die $\frac{2}{3}$ von 35 — du hast gefunden, dass sie $23\frac{1}{3}$ sind.

In sprachlich völlig gleicher Weise werden die Lösungstexte zu den vier weiteren Aufgaben präsentiert, die in der Kapitelüberschrift angekündigt sind. Of-

fenbar hält der Autor es für erforderlich, die dabei vorzunehmenden Divisionen schriftlich detailliert auszuführen, wie seine nachfolgende Tabelle (hier in unsere Ziffern übertragen) zeigt.

1 $\frac{1}{3}$ 7 0 3 3 2 3 und $\frac{1}{3}$	2 1 1 0 5 $\frac{1}{4}$ 4 4 2 6 und $\frac{1}{4}$	8 3 5 $\frac{8}{9}$ 9 3 und $\frac{8}{9}$	1 6 5 $\frac{5}{20}$ 2 0 8 und $\frac{1}{4}$	3 2 6 5 3 1 0 0 $\frac{20}{55}$ 5 5 5 5 5 6 und $\frac{4}{11}$
$\frac{2}{3}$ von 35	$\frac{3}{4}$ von 35	$\frac{7}{9}$ von 5	$\frac{15}{20}$ von 11	$\frac{31}{55}$ von 100

Darüber hinaus variiert der Autor noch das dritte und vierte Beispiel, indem er – mit der Einleitung *und umgekehrt* – die Kehrbrüche betrachtet, also $\frac{9}{7}$ von 5 ($=6\frac{3}{7}$) und $\frac{20}{15}$ von 11 ($=14\frac{2}{3}$). Hier zeigt er keine Scheu, auch unechte Brüche hinzuschreiben. Zu den Erklärungen der Rechenoperationen liefert er wieder eine Tabelle mit den schriftlichen Divisionen, die für uns nicht weiter von Interesse ist.

Merkwürdig ist, dass im vorigen Kapitel Aufgaben zum selben Thema, nämlich zur Berechnung von Bruchanteilen, schon in komplexerer Form als in diesem auftraten. Daher hätten die Kapitel ausgetauscht werden sollen. Andererseits weist der Autor auf dem rechten Rand von fol. 33^{r} darauf hin, dass das vorliegende Kapitel mit dem Kapitel 136 (aus dem sog. 2. Buch) vereinigt werden sollte. Dort (fol. 76^{r}) werden Bruchteile von gemischten Zahlen ausführlich nach dem Distributivgesetz berechnet, z. B. ($\frac{1}{2}$ von $17\frac{13}{25}$) = ($\frac{1}{2}$ von 17) + ($\frac{1}{2}$ von $\frac{13}{25}$) = $8\frac{1}{2} + \frac{13}{50} = 8\frac{25}{50} + \frac{13}{50} = 8\frac{38}{50} = 8\frac{19}{25}$.

Als Leser erwartet man nun vom folgenden Kapitel, dass die Division von Brüchen behandelt wird. Der Autor geht aber gleich zur Division gemischter Zahlen über.

51 ***Wie man 7 und $\frac{1}{3}$ in $5\frac{1}{2}$ Teile teilen und wissen kann, um wie viel jeder Teil der $5\frac{1}{2}$ größer ist als jeder der 7 und $\frac{1}{3}$***

Angenommen, du willst 7 und $\frac{1}{3}$ in $5\frac{1}{2}$ Teile teilen. Wenn die 7 und $\frac{1}{3}$ Teile $5\frac{1}{2}$ geworden sind, wird jeder Teil (μέρος) der $5\frac{1}{2}$ auf jeden Fall größer als jeder der 7 und $\frac{1}{3}$. Du suchst zu wissen, um wie viel größer jeder der $5\frac{1}{2}$ ist als jeder der 7 und $\frac{1}{3}$.

Du kannst dies so erfahren. Die 5 haben den vorliegenden Bruch $\frac{1}{2}$, was der halbe Teil eines Ganzen ist. Da aber die 5 nicht völlig in ganze Teile aufgeteilt sind, sondern auch $\frac{1}{2}$ haben, mache auch die 5 Ganzen zu Halben ... und die $5\frac{1}{2}$ werden zusammen 11 Halbe. Mache auch die 7 und $\frac{1}{3}$ zu Halben ... und es ergeben sich $14\frac{2}{3}$ Halbe. Und die $14\frac{2}{3}$ sind eine Größe im Verhältnis zu den (σῶμα ἀνάλογον τῶν) 7 und $\frac{1}{3}$. Die 11 [Halben] sind selbst auch eine Größe im Verhältnis zu den $5\frac{1}{2}$, Teiler aber von $14\frac{2}{3}$. Teile die $14\frac{2}{3}$ durch die 11: Die 11 können von den $14\frac{2}{3}$ einmal abgezogen werden, und es bleibt als Bruch $3\frac{2}{3}$. Mache die $3\frac{2}{3}$ zu Dritteln ... – zusammen 11 Drittel die 3 Ganzen und $\frac{2}{3}$. Mache auch

die 11, die du als Teiler der $14\frac{2}{3}$ hattest, zu Dritteln ... 33 Drittel ergeben die 11, der Teiler natürlich. Die 11 Drittel des Zählers verglichen mit den 33 Dritteln des Nenners haben das Verhältnis $\frac{1}{3}$ ... Und siehe, der Quotient von den $14\frac{2}{3}$ und den 11 ... ist ein Ganzes und $\frac{1}{3}$ ... Und siehe, jeder Teil (μέρος) *der $5\frac{1}{2}$ ist größer als jeder Teil der 7 und $\frac{1}{3}$, und zwar um so viel, wie $\frac{1}{3}$ jeder Einheit* (σῶμα) *von den 7 ist. Wenn man nämlich $\frac{1}{3}$ jeder Einheit der 7 zur selben Einheit addiert, wird herauskommen, wie groß jeder Teil* (σῶμα) *der $5\frac{1}{2}$ ist.*

In diesem Abschnitt geht es einerseits um die Division $7\frac{1}{3} : 5\frac{1}{2}$, deren rechnerische Durchführung auf den ersten Blick ungeschickt wirkt. Zunächst wird das Verhältnis mit 2 erweitert und $14\frac{2}{3} : 11$ berechnet mit dem Zwischenergebnis 1 Rest $3\frac{2}{3}$. Dieser Rest muss noch durch 11 dividiert werden, was durch Umwandlung von $3\frac{2}{3}$ in den unechten Bruch $\frac{11}{3}$ und Erweiterung von 11 auf Drittel geschieht.

Brüche lassen sich dividieren, indem man sie auf einen gemeinsamen Nenner (vorteilhafterweise den Hauptnenner) erweitert und die dann entstehenden Zähler ins Verhältnis setzt. Diese Methode lässt sich schon im ägyptischen Papyrus Rhind, in der Spätantike, in China, bei den Muslimen und vereinzelt auch noch in deutschprachigen Rechenbüchern des 16. Jahrhunderts nachweisen (vgl. TROPFKE [1980, S. 261]). Auch der Schreiber B aus demselben Kodex (HUNGER/VOGEL [1963], S. 79, Nr. 96; S. 104) kennt das Erweiterungsverfahren ebenso wie der Autor des byzantinischen Rechenbuchs aus dem frühen 14. Jahrhundert (VOGEL [1968], S. 107, Nr. 88: S. 145).

Unser Schreiber führt eine Erweiterung in zwei Schritten vor: erst mit 2, dann mit 3. Wenn man die Schritte vergleicht, die bei einer sofortigen Erweiterung mit 6 durchzuführen sind, nämlich $7\frac{1}{3} : 5\frac{1}{2} = \frac{22}{3} : \frac{11}{2} = \frac{44}{6} : \frac{33}{6} = 44 : 33 = 1\frac{11}{33} = 1\frac{1}{3}$, so zeigt sich, dass er doch vorteilhaft zu rechnen versteht (Vermeidung "größerer" Zahlen), auch wenn das zunächst wenig transparent für den Lernenden ist.

Im heutigen Mathematikunterricht hingegen lernt man, dass man durch einen Bruch dividiert, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert. Diese Regel lässt sich auch herleiten, indem man zunächst Dividend und Divisor auf das Nennerprodukt erweitert: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Sie war den byzantinischen Autoren (s. o.) offenbar nicht bekannt, konnte sich erst in der frühen Neuzeit allmählich durchsetzen und scheint dann das Erweiterungsverfahren mehr und mehr verdrängt zu haben. (Vgl. TROPFKE [1980, S. 261–263].)

Wir kommen zurück zum bisher übersetzten Abschnitt des vorliegenden Kapitels, da hier noch die Begriffe μέρος bzw. σῶμα zu diskutieren sind. Bezogen auf 7 oder $7\frac{1}{3}$ ist offenbar die Einheit 1 gemeint, in Verbindung mit 5 oder $5\frac{1}{2}$ aber $1\frac{1}{3}$, d. h. der Quotient von $7\frac{1}{3}$ und $5\frac{1}{2}$. Der "Teil" oder die "Größe" der $5\frac{1}{2}$ könnte also als der in $7\frac{1}{3}$ enthaltene Anteil von $5\frac{1}{2}$ interpretiert werden. Eine weiter gehende Harmonisierung von sprachlicher Form und mathematischem Inhalt scheint mir hier nicht möglich zu sein.

Zur Verifizierung seines Divisionsergebnisses bedient sich der Autor anschließend wieder einmal der κοινὴ καὶ πολιτευομένη μεταχείρισις, d. h. der Methode des bürgerlichen Rechnens. Er geht von $7\frac{1}{3}$ Florin aus, wobei 1 Florin so viel gilt wie 6 Hyperpyra, also von 44 Hyperpyra. Naheliegend wäre es gewesen, nun durch $5\frac{1}{2}$ Florin, also durch 33 Hyperpyra, zu dividieren, was ohne Weiteres zu $1\frac{1}{3}$ geführt hätte. Der Schreiber aber bezieht sich jetzt darauf, was *uns*

die leichte Methode gezeigt hat (gemeint ist die vorige), *dass nämlich nach Addition von* $\frac{1}{3}$ *zu jeder Einheit der 7 so viel entsteht, wie viel jeder "Anteil" der 5 ist*, also $1\frac{1}{3}$. Im weiteren Verlauf rechnet er vor: $1\frac{1}{3}$ Florin = 8 Hyperpyra, $5 \cdot 8$ (Hyperpyra) = 40 (Hyperpyra) — vgl. die Umkehrmultiplikation $7\frac{1}{3} = 5\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3}$. Nun stellt er fest, dass den 40 Hyperpyra noch 4 Hyperpyra bis zu den 44 Hyperpyra ($7\frac{1}{3}$ Florin) fehlen, andererseits $\frac{1}{2} \cdot 8$ Hyperpyra auch 4 Hyperpyra sind. Direkter wäre die Rechnung $5\frac{1}{2} \cdot 8$ Hyperpyra = 44 Hyperpyra gewesen.

Insgesamt wird die Division $7\frac{1}{3} : 5\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3}$ dadurch überprüft, dass man die zugehörige Multiplikation $7\frac{1}{3} = 5\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3}$ betrachtet, die beiden äußeren gemischten Zahlen als Florin-Beträge deutet und in ganzzahlige Hyperpyra-Beträge umwandelt.

Analog und nicht mehr ganz so ausführlich behandelt der Autor als zweites Beispiel $6\frac{2}{3} : 5\frac{1}{3}$, das nicht in der Kapitelüberschrift genannt war. Zunächst wandelt er die gemischten Zahlen in unechte Brüche um. Da diese gleichnamig sind, können die entstehenden Zähler 20 und 16 (jeweils wieder mit σῶμα bezeichnet) ins Verhältnis gesetzt werden, und die Division ergibt $1\frac{1}{4}$. Der Begriff σῶμα wird auch wieder im anderen Sinn verwendet: Einerseits ist 1 das σῶμα (die Einheit) von 6 bzw. $6\frac{2}{3}$, andererseits ist $1\frac{1}{4}$ das σῶμα von $5\frac{1}{3}$ (der in $6\frac{2}{3}$ enthaltene Anteil von $5\frac{1}{3}$); das Synonym μέρος für σῶμα tritt nur einmal am Anfang auf.

Der Autor überprüft das Ergebnis wieder mithilfe der "Bürgerlichen Rechenmethode": Es geht — analog zur Umkehrmultiplikation im 1. Beispiel — um die Übereinstimmung von $6\frac{2}{3}$ Florin und $5\frac{1}{3} \cdot (1\frac{1}{4}$ Florin). Die Umrechnung des Florins in 6 Hyperpyra reicht hier aber noch nicht aus, um alle gebrochenen Maßzahlen zu eliminieren; der Schreiber wandelt, wie sich dem Text unmittelbar entnehmen lässt, 1 Hyperpyron in 20 Kukkia um. Davon abgesehen, verlaufen die einzelnen Überlegungen und Rechenschritte analog zum vorigen Beispiel.

52 *Wie man $5\frac{1}{2}$ in 7 und $\frac{1}{3}$ Teile teilen und wissen kann, um wie viel jeder der 7 und $\frac{1}{3}$ (Teile) kleiner als jeder der $5\frac{1}{2}$ ist*

Angenommen, du suchst das Umgekehrte zu wissen, d. h. wenn $5\frac{1}{2}$ *in 7 und* $\frac{1}{3}$ *Teile geteilt werden, um wie viel jeder Teil der 7 und* $\frac{1}{3}$ *kleiner als jeder Teil der* $5\frac{1}{2}$ *ist ...*

Es handelt sich um die Umkehraufgabe zum 1. Beispiel des vorigen Kapitels. Der Autor berechnet wieder (wie dort) $14\frac{2}{3} : 11 = 1$ Rest $3\frac{2}{3}$, anstatt von vornherein Dividend und Divisor zu vertauschen.

... Nun aber sind $3\frac{2}{3}$*, nicht mit den 11* (siehe 1. Beispiel des vorigen Kapitels), *sondern mit den* $14\frac{2}{3}$ *verglichen,* $\frac{1}{4}$ *... Und siehe, du hast gefunden, dass jeder (Teil) der* $5\frac{1}{2}$ *in Bezug auf jeden der 7 und* $\frac{1}{3}$ *so groß ist wie jeder der 7 und noch ein* $\frac{1}{4}$ *mehr vom eigenen σῶμα, von jedem der* $5\frac{1}{2}$ *natürlich, sodass, wenn du* $\frac{1}{4}$ *von jedem σῶμα der* $5\frac{1}{2}$ *in entsprechender Weise abziehst, der übrig bleibende Teil in Bezug auf jeden (Teil) der 5 — so groß muss auch jedes σῶμα der 7 und* $\frac{1}{3}$ *in entsprechender Weise sein.*

Der Leser wird Probleme gehabt haben, dem Rechenweg und Gedankengang des Autors zu folgen, auch wird nicht einmal das Ergebnis ($\frac{3}{4}$) explizit genannt.

Die obigen Aussagen ergeben sich nach folgenden Schritten, die im Text fehlen:
Aus $14\frac{2}{3} = 11 + 3\frac{2}{3}$ folgt $1 = \frac{11}{14\frac{2}{3}} + \frac{3\frac{2}{3}}{14\frac{2}{3}}$ bzw. $1 = \frac{5\frac{1}{2}}{7\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}$.
Hierbei ist das σῶμα der $5\frac{1}{2}$ die Einheit (1), das σῶμα der $7\frac{1}{3}$ aber der Quotient, um den es in diesem Kapitel geht.
Am unteren Rand findet sich eine Anmerkung des Schreibers:
Und anders: Wenn du die $3\frac{2}{3}$, den Bruch, nicht mit den $14\frac{2}{3}$, die du als (analoge) Größe (σῶμα) *hast, sondern mit den 11 vergleichst, die du als Teiler hast, ergibt sich als Bruch $\frac{11}{33}$, das ist $\frac{1}{3}$. Wenn jede Einheit* (σῶμα) von $5\frac{1}{2}$ *in $1\frac{1}{3}$ geteilt wird – wie groß auch immer die Division von diesen wird, so groß wird auch jedes σῶμα der $7\frac{1}{3}$ sein, wie es auch bei den $6\frac{2}{3}$, die in $18\frac{1}{3}$ geteilt werden, so geschah.* (Vgl. das folgende Beispiel.)
Was hier steht, lässt sich im Zusammenhang mit dem 1. Beispiel des vorigen Kapitels gut nachvollziehen, führt aber auch nicht weiter: Es unterbleibt die Berechnung des Quotienten von 1 und $1\frac{1}{3}$, der mit dem gesuchten Quotienten (s. Kapitelüberschrift) übereinstimmt.
Allgemeiner formuliert, spielen in diesem Zusammenhang folgende Beziehungen eine Rolle: a werde durch b mit Rest dividiert, d. h. es gelte $a = q\,b + r$, $0 \le r < b$. Dann gilt sowohl $\frac{a}{b} = q + \frac{a-qb}{b}$ als auch (äquivalent dazu) $\frac{b}{a} = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{a-qb}{a}\right)$.
In unserem Beispiel ist aus ursprünglichem $a' = 7\frac{1}{3}$, $b' = 5\frac{1}{2}$ durch Erweiterung $a = 14\frac{2}{3}$, $b = 11$ hervorgegangen. Nun ist $q = 1$ und $r = a - q\,b = 3\frac{2}{3}$. Da eigentlich $\frac{b}{a}$ gesucht war, hat der Autor im Haupttext auch den Term $\frac{a-qb}{a}$ $(= \frac{1}{4})$ berechnet, und er hätte nur noch einen Schritt weiter gehen müssen.
Es folgt darauf die "Methode der Florine", wie die bürgerliche Methode hier heißt. Sie führe, so der Autor, zum selben Ergebnis wie die "leichte" Methode. Mit Bezug auf das 1. Beispiel von Kapitel 51 setzt er 1 Florin = 6 Hyperpyra und somit $7\frac{1}{3}$ Florin = 44 Hyperpyra an. *Jedes der 5,* d. h. jeder der $5\frac{1}{2}$ Anteile von $7\frac{1}{3}$ bzw. der Quotient von $7\frac{1}{3}$ und $5\frac{1}{2}$, entspricht 8 Hyperpyra, was auch schon in diesem Beispiel vorkam. Die weitere Rechnung: $5\frac{1}{2} \cdot$ (8 Hyperpyra) = 44 Hyperpyra, 8 Hyperpyra – $\frac{1}{4} \cdot$ (8 Hyperpyra) = 6 Hyperpyra = 1 Florin (σῶμα bzw. Einheit von $7\frac{1}{3}$ Florin bei der vorherigen Umkehraufgabe)
Diese Geldrechnung hat nur Folgendes gezeigt: $5\frac{1}{2} \cdot (1\frac{1}{3}$ Florin) = $7\frac{1}{3}$ Florin, $1\frac{1}{3}$ Florin – $\frac{1}{4} \cdot (1\frac{1}{3}$ Florin) = 1 Florin. Der Autor hätte Letzteres zu $\frac{3}{4} \cdot (1\frac{1}{3}$ Florin) = 1 Florin zusammenfassen können. Daraus folgt zusammen mit der ersten Beziehung: $5\frac{1}{2} \cdot$ (1 Florin) = $\frac{3}{4} \cdot (7\frac{1}{3}$ Florin), und der gesuchte Quotient hätte sich ablesen lassen.

Das nächste Beispiel, $6\frac{2}{3} : 18\frac{1}{3}$, war nicht in der Kapitelüberschrift angekündigt, und es handelt sich auch nicht um die Umkehrung eines früheren Divisionsbeispiels. Analog zum vorigen Beispiel wird danach gefragt, wie viel kleiner jeder der (Anteile) von $18\frac{1}{3}$, d. h. der Quotient, im Vergleich zu jedem (Anteil) von $6\frac{2}{3}$, d. h. zur Einheit, ist. Die Erweiterung der beiden (diesmal gleichnamigen) gemischten Zahlen führt zu $\frac{20}{3}$ und $\frac{55}{3}$, wobei 20 als Teiler und 55 als σῶμα (im Sinne von "analoge Größe" zu 20) bezeichnet werden. Eigentlich müsste es gerade umgekehrt sein, aber wieder bevorzugt der Autor die Division des Größe-

ren durch das Kleinere als Ausgangssituation. Die Division $55 : 20 = 2\frac{15}{20} = 2\frac{3}{4}$ wird unnötigerweise durch ein Diagramm zur schriftlichen Division "unterstützt". Die weiteren Überlegungen hierzu im Haupttext sind wieder nicht zielführend.

Am rechten Rand von fol. 34^r hat der Schreiber eine Alternative (*und anders ...*) festgehalten. Statt $\frac{15}{20}$ soll nun $\frac{15}{55} = \frac{3}{11}$ betrachtet werden. Dazu bemerkt er: *Jedes σῶμα von* $6\frac{2}{3}$ (das ist $2\frac{3}{4}$) *ist so groß wie zweimal jedes von* $18\frac{1}{3}$ (das ist 1) *und noch* $\frac{3}{11}$ *mehr von jedem σῶμα der* $6\frac{2}{3}$ (das ist wieder $2\frac{3}{4}$), *so wie es auch bei den* $5\frac{1}{2}$ *geschah, die durch* $7\frac{1}{3}$ *geteilt werden.* (Letzteres ist ein Verweis auf das analoge Vorgehen beim vorigen Beispiel.) Es wird also unvermittelt die Beziehung $2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{11} \cdot 2\frac{3}{4}$ aufgestellt, ohne dass sie nachträglich begründet würde. Man kann sie beispielsweise aus $55 = 2 \cdot 20 + 15$ herleiten, indem man erst durch 55 dividiert und dann mit $2\frac{3}{4}$ multipliziert. Dabei lässt sich der Zwischenschritt in der Form $1 = 2 \cdot \frac{1}{2\frac{3}{4}} + \frac{3}{11}$ schreiben, woraus der Autor den Wert von $\frac{1}{2\frac{3}{4}}$ und damit auch von $6\frac{2}{3} : 18\frac{1}{3}$ $(= \frac{4}{11})$ hätte leicht ersehen können.

Damit das Gesagte klarer wird, mache dies auch durch die allgemeine Methode der Florine. Diesmal greift der Autor auf das gesamte Währungssystem zurück: 1 Florin = 6 Hyperpyra, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia, 1 Kukki = 4 Turnesia. Zunächst wandelt er $6\frac{2}{3}$ Florin in 40 Hyperpyra um. Dann dividiert er 6 Hyperpyra, die der Einheit (σῶμα) von (jedem der) $6\frac{2}{3}$ Florin entsprechen, durch $2\frac{3}{4}$ (im Hinblick darauf, dass der ursprünglich gesuchte Quotient $6\frac{2}{3} : 18\frac{1}{3}$ als $1 : 2\frac{3}{4}$ geschrieben werden kann, worauf der Autor aber hier nicht mehr eingeht). Die weitere Rechnung lautet verkürzt: 6 (Hyperpyra) : $2\frac{3}{4}$ = 24 (Hyperpyra) : 11 = $2\frac{2}{11}$ Hyperpyra = 2 Hyperpyra $3\frac{7}{11}$ Kukkia = 2 Hyperpyra 3 Kukkia $2\frac{6}{11}$ Turnesia. (Parallel zum Text wird wieder ein Rechendiagramm dargestellt.) Jeder in $6\frac{2}{3}$ enthaltene Anteil von $18\frac{1}{3}$ (*σῶμα der* $18\frac{1}{3}$) habe die gleiche Größe (d. h. die Größe dieses Geldwerts), wie es auch die "leichte" Methode gezeigt habe.

Zur Kontrolle wird nun $2\frac{3}{4} \cdot$ (2 Hyperpyra 3 Kukkia 2 Turnesia $\frac{6}{11}$ Turnesia) berechnet. Im zugehörigen 4. Diagramm auf fol. 34^r (s. rechts die Übertragung) erkennt man, dass $2\frac{3}{4}$ in $1 + 1 + \frac{3}{4}$ zerlegt wird und die *Tzakismata* nur den Zähler angeben — gemeint sind natürlich jeweils $\frac{6}{11}$ Turnesia. Außerdem steht in der dritten Zeile ein Näherungswert, wie auch aus dem Text zu entnehmen ist. Der exakte Wert für $\frac{3}{4} \cdot$ (2 Hyperpyra 3 Kukkia $2\frac{6}{11}$ Turnesia), den der Autor nicht angegeben hat, ist 1 Hyperpyron 12 Kukkia $2\frac{10}{11}$ Turnesia. Dies zu zweimal 2 Hyperpyra 3 Kukkia $2\frac{6}{11}$ Turnesia addiert ergibt wieder 6 Hyperpyra. Der Autor rechnet aber in der dritten Zeile des Diagramms und im Text mit 3 Turnesia. Die Summe der beiden "Zähler", d. h. $\frac{12}{11}$ Turnesia, rundet er auf 1 Turnesi, hat dann zusammen 8 Turnesia bzw. 2 Kukkia (als Übertrag notiert), erhält insgesamt 20 Kukkia bzw. 1 Hyperpyron (als Übertrag notiert), schließlich insgesamt 6 Hyperpyra. Sein zweifa-

	Hyperpyra	2	Kukkia	3	Turnesia	2 Zähler 6
	Hyperpyra	2	Kukkia	3	Turnesia	2 Zähler 6
$\frac{3}{4}$	Hyperpyron	1	Kukkia	12	Turnesia	3
	Hyperpyron	1	Kukkia	2		
zusammen	Hyperpyra	6				

ches Runden hat in diesem Fall also keine negativen Auswirkungen gehabt. Für $1:2\frac{3}{4}$ hat er mit Bezug auf ein Währungssystem zwar einen Geldwert gefunden, den Quotienten aber nicht arithmetisch berechnet.
Mache dies auch anders. Jetzt geht es direkt um den Quotienten $6\frac{2}{3}:18\frac{1}{3}$. Der Dividend wird als Maßzahl von Florin aufgefasst und $6\frac{2}{3}$ Florin wieder – was bei der vorigen Rechnung eigentlich unnötig war – in 40 Hyperpyra umgewandelt. *Da ... du die 40 Hyperpyra nicht durch die* $18\frac{1}{3}$ *teilen kannst*, erweitert der Autor mit 3 und berechnet (120 Hyperpyra) : 55. Sein Ergebnis ist natürlich wieder 2 Hyperpyra 3 Kukkia $2\frac{6}{11}$ Turnesia, und er weist auch auf die Übereinstimmung mit dem vorher erzielten Resultat hin.
Es folgt noch ein Text zur Kontrollrechnung $18\frac{1}{3}\cdot$ (2 Hyperpyra 3 Kukkia $2\frac{6}{11}$ Turnesia) = 40 Hyperpyra, der nur im Zusammenhang mit dem großen Diagramm auf dem rechten Rand von fol. 34^{r} zu verstehen ist: Hier wird der genannte Geldwert 18-mal als Summand (!) untereinandergeschrieben. Hinzu kommt der Summand für ein Drittel dieses Geldwerts, und zwar 14 Kukkia $2\frac{2}{11}$ Turnesia, was im Text aber nicht vorgerechnet wird. Hingegen wird beschrieben, welche Teilsummen und Überträge auftreten, wie sie auch im Diagramm vermerkt sind. Im Diagramm selbst ist außerdem noch ein Schema zur schriftlichen Division durch 11 integriert.

Insgesamt kann das vorliegende Kapitel nicht sonderlich zufriedenstellen. Man gewinnt den Eindruck, dass der Autor eine Scheu davor hat, eine gemischte Zahl durch eine größere zu dividieren, was ihm letztlich auch nicht (ganz) gelingt. In gewisser Weise kann er sich hier behelfen, indem er durch die Übertragung auf das Rechnen mit Geldwerten Maßzahlen im Dividenden erzeugt, die größer als die Divisoren sind. Der Text ist streckenweise schwer verständlich, weil die Begrifflichkeit ziemlich schwammig ist (siehe σῶμα) und der Autor manche arithmetischen Beziehungen benutzt, ohne sie explizit zu machen oder gar zu begründen.

53 *Wenn die 3 zu 4 werden, wie groß die 5 werden, und wenn die 11 zu 15 werden, wie groß die 20 werden, und so weiter*

Angenommen, du suchst zu wissen, wenn die 3 anwachsen und 4 werden, wie viel die 5 werden, wenn sie im selben Verhältnis anwachsen. Du kannst dies nun wissen mithilfe der "Methode durch die drei" [Dreisatz]. *"Durch die drei" nennt man sie wegen der Multiplikation von 5 mit den 4 und der Division des Produkts durch die 3: Denn durch die 3 und 4 und 5, welche drei ungleiche Zahlen sind, findet man das Gesuchte. Da aber die drei das Gesuchte ins Werk setzen, nennt man sie* (die Methode) *wohl auch zu Recht "durch die drei".*
Dies ist eine Art beispielgebundener Begriffserklärung, wobei der anschließend ausgeführte Rechenweg schon vorgestellt wird. Die Rechnung selbst verläuft grundsätzlich so, dass erst multipliziert, dann dividiert wird, was auch bei uns bis weit in die Neuzeit hinein üblich war, im vorliegenden Beispiel also wie folgt: $(5\cdot 4):3 = 6\frac{2}{3}$. Bei unserem heutigen Verfahren geht man zuerst auf die Einheit (Einheitsgröße) zurück, was im Allgemeinen eine Division erfordert, und

multipliziert im zweiten Schritt, wie es sich in diesem ersten Beispiel so darstellen würde: Aus $3 \mathrel{\hat{=}} 4$ folgt $1 \mathrel{\hat{=}} \frac{4}{3}$ und $5 \mathrel{\hat{=}} \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.
Im Text schließt sich noch eine Dreisatzprobe (ἀπόδειξις διὰ τῶν τριῶν, Probe "durch die drei") an, bei der der Autor feststellt, dass $4 \cdot 5$ mit $3 \cdot 6\frac{2}{3}$ übereinstimmt (= 20). Deshalb sei *das Entstandene* (das Ergebnis der Dreisatzaufgabe) richtig.
Die zweite Frage in der Kapitelüberschrift wird nach der gleichen Methode behandelt: $20 \cdot 15 = 300$, $300 : 11 = 27\frac{3}{11}$ (jeweils mit unnötigem schriftlichen Diagramm), d. h. die 20 werden zu $27\frac{3}{11}$.
In der Dreisatzprobe wird festgestellt, dass $20 \cdot 15$ mit $27\frac{3}{11} \cdot 11$ übereinstimmt (= 300). *Und dies ist der Beweis (die Probe), dass das Gesuchte gut* (im Sinne von "richtig") *geworden ist.*

54 *Und umgekehrt*

Angenommen, du suchst das Umgekehrte – wenn sich die 15 verkleinern und 11 werden, wie viel die 20 werden, wenn sie sich im selben Verhältnis verkleinern. Nun aber tue das Entgegengesetzte. Multipliziere die 20 nicht mit den 15, sondern mit den 11: 20 · 11 = 220. Dividiere diese nicht durch die 11, sondern durch die 15, und die Teilung von diesen ergibt ... 14 und $\frac{10}{15}$, das sind $\frac{2}{3}$. Und siehe, wenn sich die 15 verkleinern und 11 werden, verkleinern sich die 20 im selben Verhältnis und werden 14 und $\frac{2}{3}$ eines Ganzen.
Hier wird das zweite Beispiel des vorigen Kapitels variiert, und zwar durch Vertauschung der ersten beiden Zahlen (Stücke des Dreisatzes); die 3. Zahl (20) bleibt unverändert. Dabei weist der Autor darauf hin, dass die Multiplikation mit 15 und die Division durch 11 (die bei der ursprünglichen Dreisatzaufgabe geboten waren) hier nicht ausgeführt werden dürfen. Die Rechnung erfolgt nach der herkömmlichen Methode und wird wieder von schriftlichen Rechendiagrammen begleitet.
Der Beweis aber ist der gleiche wie bei den früheren. Es geht um die Rechnungen $20 \cdot 11 = 220$, $14\frac{2}{3} \cdot 15 = 220$ und um die Feststellung der Gleichheit. *Und dies ist der Beweis durch den Dreisatz* (ἡ διὰ τῶν τριῶν ἀπόδειξις), *dass das Gesuchte gut (richtig) geworden ist. Und dies bezüglich dreier ganzer Zahlen.*
Bisher knüpften die Überlegungen unmittelbar an die (ursprünglich) pythagoreische Proportionenlehre an – vgl. TROPFKE (1980, S. 324–334): Wenn natürliche Zahlen a, b und c gegeben sind, soll eine Zahl d gesucht werden mit der Eigenschaft $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. d bezeichnete man als vierte Proportionale, und die anderen Proportionalen a, b, c entsprechen den drei gegebenen Zahlen (Stücken) im Dreisatz. Es gilt $d = \frac{bc}{a}$, analog zur Rechenvorschrift beim Dreisatz.
Der Autor setzt fort:
Wenn aber auch $\frac{1}{2}$ oder auch $\frac{1}{3}$ und so weiter vorhanden sind, gibt es eine andere Methode, die der vorliegenden ähnlich ist, welche auch selbst durch die Drei (den Dreisatz) *stattfindet. Durch dieselbe aber findet man jede ähnliche Frage, ob das Gesuchte ganzzahlig ist oder ob es auch einen Bruch $\frac{1}{2}$ oder auch $\frac{1}{3}$ und so weiter hat. Es ist diese.*

Eine andere ähnliche Frage durch eine andere Methode. *Angenommen, du suchst danach, wenn die $2\frac{1}{2}$ zu 5 werden, die 25 — wie viel sie werden.*

Auf den ersten Blick ist klar, dass sich 50 ergeben muss, da 5 das Doppelte von $2\frac{1}{2}$ ist. Dem Autor ist aber zugutezuhalten, dass er hier schon seine "andere Methode" vorstellen will, die er auch bei den darauffolgenden Beispielen anwendet: Er schreibt $2\frac{1}{2}$ als $\frac{5}{2}$ und 5 als $\frac{5}{1}$ und multipliziert nun kreuzweise — vgl. sein Schema $\frac{5}{2}\times\frac{5}{1}$. Dabei sei $1\cdot 5=5$ der Teiler, $2\cdot 5=10$ der Multiplikator des Ganzen (πολλ(α)πλασιαστὴς τοῦ σώματος). Es folgt noch die schriftliche (!) Rechnung $10\cdot 25=250$, $250:5=50$. Die Über-Kreuz-Multiplikation und die obige Interpretation der Produkte erklären sich dadurch, dass hier eigentlich $5:\frac{5}{2}=5\cdot\frac{2}{5}$ gerechnet wurde. Es sei daran erinnert, dass es in der Handschrift keinen eigenen Abschnitt zur Division von Brüchen gibt und die Regel zur Division durch einen Bruch — mithilfe der Multiplikation mit dem Kehrbruch — hier, für den Leser wenig transparent, nachträglich hinzugezogen und verwendet wird. Modern gesprochen schließt der Autor gemäß dem Dreisatz wie folgt: Wenn $\frac{a}{b}$ zu $\frac{c}{d}$ wird, dann wird e zu $\frac{bc}{ad}\cdot e$. Sein Diagramm hat allgemein die Gestalt $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ (hier $a=5$, $b=2$, $c=5$, $d=1$, wobei $e=25$ ist).

"Ετερον τούτου ὅμοιον (***Ein anderes, was diesem ähnlich ist***) — so werden die beiden folgenden Beispiele eingeleitet, die völlig gleichförmig wie das erste abgehandelt werden. Auch hier finden wir wieder ausführliche Rechendiagramme.

Wenn die $2\frac{1}{2}$ zu $4\frac{1}{3}$ werden, wie viel werden die 25? ($43\frac{1}{3}$)

($a=5$, $b=2$, $c=13$, $d=3$, $e=25$)

Wenn die $4\frac{1}{3}$ zu $5\frac{1}{4}$ werden, wie viel werden die $25\frac{1}{6}$? ($30\frac{51}{104}\approx 30\frac{1}{2}$)

Das genaue Ergebnis ergibt sich nur aus den Rechendiagrammen, im Text begnügt sich der Autor mit dem guten Näherungswert. ($a=13$, $b=3$, $c=21$, $d=4$, $e=25\frac{1}{6}$)

Und umgekehrt. *Wenn die $5\frac{1}{4}$ sich verkleinern und $4\frac{1}{3}$ werden, wie viel werden die $25\frac{1}{2}$?* ($21\frac{1}{21}$)

Gegenüber der letzten Aufgabe sind die beiden ersten Dreisatzzahlen vertauscht, die dritte verändert. Hier sind die Werte $a=21$, $b=4$, $c=13$, $d=3$ und $e=25\frac{1}{2}$. Der Autor hat den Multiplikator $bc=52$ mit e zu multiplizieren und nutzt dazu vorteilhaft das Distributivgesetz, indem er $52\cdot 25+52\cdot\frac{1}{2}$ rechnet. Weitere Besonderheiten gibt es nicht.

Abschließend lässt sich feststellen, dass bei den vorangegangenen Beispielen mit Brüchen gerechnet wird, sonst aber wieder nur der normale Dreisatz Verwendung findet. Man kann aber die Behauptung des Autors, dass es sich um eine andere Methode handelt, auf das (hier) neue Verfahren zur Division durch Brüche beziehen.

55 *Wenn achtmal 8 nicht 64 würden, sondern über Gebühr wachsen und 100 würden, wie viel nach dem gleichen Verhältnis zwölfmal 12 würden*

In Wahrheit ergeben achtmal 8 64, und zwölfmal 12 multipliziert ergeben 144. Da wir aber nun sagen, dass achtmal 8 nicht 64, sondern über Gebühr wachsen und 100 ergeben, multipliziere die 144 mit den 100 und teile das Multiplizierte durch die 64, und die Teilung von diesen ergibt 225. Und siehe, du hast herausgefunden, dass zwölfmal 12 über Gebühr multipliziert nicht 144, sondern

vielmehr 225 ergeben ... Denn das Verhältnis, das die 100 zu den 64 haben, dasselbe Verhältnis haben auch die 225 zu den 144.
Damit du einsiehst, dass es so ist, wie die leichte Methode gezeigt hat: Zweimal 64 ergibt 128. Es existiert aber auch das zu den 128 passende wachsende Doppelte von den 100, das ist 200: Denn wie die 64 sich 100 zu eigen machen, so machen auch die 128 sich 200 zu eigen. Es fehlen von den 128 bis zu den 144 16. Die 16 aber sind ein vierter Teil von den 64 ... Wie du nun die 64 verdoppelt hast, und es wurden 128, ... so verdoppele die 100, und es werden 200. Es fehlen 25 bis zu den 225. Die 25 aber sind $\frac{1}{4}$ von 100. Und siehe, auch so hast du herausgefunden, das zwölfmal 12 nicht 144, sondern 225 werden, so wie auch achtmal 8 nicht 64, sondern 100 werden.
Und anders: Von den 64 fehlen 36 bis zu den 100. Die 36 aber haben ein Verhältnis $\frac{9}{16}$ (sc. zu 64) *... Von den 144 fehlen 81 bis zu den 225. Die 81 aber haben zu den 144 ein Verhältnis $\frac{9}{16}$ ... Und siehe, auch so ist aufgezeigt worden: Dasselbe Verhältnis, das die 64 zu den 100 haben, haben auch die 144 zu den 225, so wie wir es auch mithilfe der leichten Methode herausgefunden haben ...*

Zunächst geht es wieder um die Bestimmung der vierten Proportionalen d in einer Verhältnisgleichung $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, in der $a=64$, $b=100$ und $c=144$ gegeben sind. Die (schriftlich festgehaltene) Dreisatzrechnung führt zum Ergebnis $d=225$.
Verkürzt formuliert, stellt der Autor im nächsten Abschnitt fest, dass $144=2\frac{1}{4}\cdot 64$ und $225=2\frac{1}{4}\cdot 100$ sind. Daraus folgt natürlich die Gültigkeit der obigen Proportionsgleichung, aber der Text vermittelt das nicht sehr deutlich. Allgemein gilt: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ impliziert $c=\lambda a$, $d=\lambda b$ für ein (rationales) λ (und auch umgekehrt). Es geht aber hier nur um eine Probe, nicht um eine alternative Berechnung von d.
Das Gleiche lässt sich zum letzten Absatz sagen. Der Autor schreibt, dass die Differenz von 100 und 64 gleich 36 ist, wobei 36 zu 64 ein Verhältnis von $\frac{9}{16}$ ergibt. Entsprechend sei die Differenz von 225 und 144 gleich 81, wobei 81 zu 144 ebenfalls ein Verhältnis von $\frac{9}{16}$ hat. Daraus schließt er wieder etwas vorschnell auf die Gültigkeit der obigen Proportionsgleichung. Es fehlen folgende Schritte zur Vervollkommnung der Probe: $100-64=36$ führt, durch 64 dividiert, zu $\frac{100}{64}=1+\frac{9}{16}$, und $225-144=81$, durch 144 dividiert, zu $\frac{225}{144}=1+\frac{9}{16}$, also zum selben Wert. In allgemeiner Formulierung: Aus $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ folgt $\frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$ (und natürlich auch umgekehrt).

56 *Und umgekehrt*

Wenn achtmal 8 nicht 64 ergeben, sondern kleiner werden und 48 ergeben, wie viel ergeben zwölfmal 12 multipliziert, wenn sie im selben Verhältnis kleiner werden? ... Multipliziere die 144 mit den 48 ... Teile das Produkt durch die 64, und die Teilung von diesen wird 108 ... Denn das Verhältnis, das die 48 zu den 64 haben, dasselbe haben auch die 108 zu den 144 ...
Die Rechnungen werden wieder in Diagrammen schriftlich durchgeführt, wobei das Produkt (6912) nur dort angegeben ist.
Anstatt der 1. Probe aus dem vorigen Kapitel, die hier zu $144=2\frac{1}{4}\cdot 64$,

$108 = 2\frac{1}{4} \cdot 48$ geführt hätte, wählt der Autor die zweite: $64 - 48 = 16$, $144 - 108 = 36$; $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$, $\frac{36}{144} = \frac{1}{4}$. Darüber hinaus stellt er aber noch fest, dass 48 mit $\frac{3}{4} \cdot 64$ und 108 mit $\frac{3}{4} \cdot 144$ übereinstimmt. *Und dies ist der Beweis, dass sich das Gesuchte gut* (im Sinne von "richtig") *ergeben hat* ...

Abschließend ist anzumerken, dass der Autor seine vier Dreisatzkapitel ungewöhnlich theoretisch konzipiert hat, und zwar auf der Grundlage der klassischen Proportionenlehre. Der kaufmännische Rahmen, der üblicherweise für die Einführung der Dreisatzrechnung gewählt wird — das Rechnen mit Größen — fehlt völlig. Dies wird erst in den Kapiteln 89—94 nachgeholt.

57 *Wie es mithilfe der leichten Methode möglich ist, die ungeraden Zahlen zu kennen, wie die Summe von diesen entsteht, wenn sie vom Anfang bis zum Ende vereinigt werden*

Ungerade Zahlen sind diese: 1 3 5 7 9 und wiederum 11 13 15 17 19 und dies so der Reihe nach weithin entstehend. Wenn du nun die Einerzahlen derselben Ordnung, die von der Eins an beginnen, bis dahin, wo du willst, zu wissen suchst, mache es so, und du wirst das Gesuchte leicht und richtig finden.
Angenommen, du suchst von der 1 bis zu den 17, wie viel es wird. Setze nun dies, wie du siehst, entsprechend 1 3 5 7 9 11 13 15 17 und rechne vom Anfang her so: 1 und 3 ergeben 4, 4 und 5 ergeben 9, 9 und 7 ergeben 16 und so der Reihe nach. Du wirst aber herausfinden: Von der 1 bis zu den 17 — die Zahl all dieser ergibt 81. Dies ist nun ein erfolgloses Unternehmen und eine beschwerliche Vollendung, um zu wissen, wie viel sich ergibt.
Aber mithilfe der leichten Methode findet man es so: Die letzte Verbindung, die auch immer du aufsuchst, die jetzt 17 ist, teile in zwei Teile und nimm die Hälfte und 1 mehr, d. h. von den 17 nimm 9. Multipliziere die 9 mit sich selbst: 9 mal 9 ergeben 81. Und siehe, du hast mithilfe der nämlichen leichten Methode herausgefunden, dass, wenn man von der 1 bis zur Verbindung der 17 addiert, 81 herauskommen.
Mit der "Ordnung" (τάξις) im 1. Absatz ist offenbar die der ungeraden Zahlen gemeint.
Der Autor macht dem Leser ein Verfahren zur Berechnung der Summe ungerader Zahlen dadurch schmackhaft, dass er ihm die Mühseligkeit des schrittweisen Ausrechnens vorführt. Man könnte hier von didaktischem Geschick sprechen.
Unklar ist allerdings noch die Teilung der Endzahl (17) in zwei Teile. Dies wird aber beim zweiten Beispiel deutlich: Zur Berechnung von $1 + 3 + 5 + \ldots + 25$ soll 25 in $12 + 13$ zerlegt werden, d. h. in die Summe der beiden ganzen Zahlen, die die Hälfte von 25 einschließen. Man nimmt die größere der beiden, also 13, und quadriert, wie wir es ausdrücken würden (Ergebnis: 169). 13 erhält man natürlich auch, indem man die um 1 vermehrte Endzahl (26) halbiert. Es folgt noch ein drittes Beispiel, und zwar $1 + 3 + 5 + \ldots + 101 = 51 \cdot 51 = 2601$.
Die zugrunde liegende Formel für die Summe s_n der ersten n ungeraden Zahlen lautet: $s_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Dabei ergibt sich n aus dem höchsten Summanden (der Endzahl $2n - 1$), wie oben beschrieben.

Auch in den folgenden drei Kapiteln beschäftigt sich der Autor mit arithmetischen Reihen, d. h. mit Summen, bei denen der Zuwachs aufeinanderfolgender Summanden konstant ist.

58 *Wie es leicht möglich ist, die Zweierzahlen zu kennen, d. h. 2 und 4 und 6, und die Dreierzahlen 3 und 6 und 9 und die Viererzahlen 4 und 8 und 12 und so der Reihe nach, wie groß die Summe von diesen wird, wenn sie von Anfang bis Ende vereinigt werden*

Angenommen, du suchst 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20, wie viel sie werden. Du kannst dies so erfahren: Teile die letzte Zahl, die jetzt 20 ist, durch die erste Zahl, die 2 ist, und es wird der Quotient von diesen 10 ... Nimm nun die Hälfte der 10, welche 5 ist. Da aber die 10 in zwei gleiche Teile geteilt werden, jeder dieser zwei Teile jeweils 5, addiere 1 zu den 10, und es entstehen 11. Multipliziere mit den 5 ... die 11: 5-mal 11 ergeben nun 55. Multipliziere die 55 mit der ersten Zahl ..., d. h. mit den 2: Zweimal 55 ergeben nun 110. Und siehe, von den 2 bis zu den 20 entstehen 110.

Im nächsten Beispiel sollen die geraden Zahlen bis 22 aufsummiert werden. Der Autor stellt das Verfahren wieder ausführlich vor, das zum vorigen weitgehend analog verläuft: $22:2=11$, $11=5+6$, $11\cdot 6=66$, $66\cdot 2=132$. Dabei weist er darauf hin, dass man dasselbe Ergebnis erhält, wenn man 22 zu 110 (Summe aus dem 1. Beispiel) addiert.

Im Unterschied zum 1. Verfahren tritt hier ein ungerader Quotient (11) auf, der sich nicht (wie die 10 oben) in zwei gleiche ganzzahlige Summanden zerlegen lässt. Der Autor wählt deshalb die Zerlegung $5+6$ und erklärt, es sei jetzt nicht nötig, 1 zur 11 zu addieren, sondern man müsse einfach den größeren Summanden (6) mit 11 multiplizieren.

Für die Summe $s_2(n)$ der ersten n geraden Zahlen gilt die Formel
$s_2(n) = 2+4+6+\ldots+2n = 2(1+2+3+\ldots+n) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$.

Die Fallunterscheidung des Autors bezieht sich nach unserem Verständnis auf den Term $\frac{n(n+1)}{2}$ für gerade bzw. ungerade n. Speziell ergibt sich für $n=10$ (1. Beispiel) $\frac{n}{2}=5$, $n+1=11$, für $n=11$ (2. Beispiel) $\frac{n+1}{2}=6$. Wegen des Faktors 2 ist sie aber letztlich überflüssig.

Im 3. Beispiel geht es um die Summe der ersten zehn durch 3 teilbaren Zahlen. Allgemein erhält man für $s_3(n)$, die Summe der ersten n dieser Zahlen:
$s_3(n) = 3+6+9+\ldots+3n = 3(1+2+3+\ldots+n) = 3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ und daher $s_3(10)=165$

Statt mit dem Faktor 2 rechnet der Autor nun mit dem Faktor 3, sonst stimmt sein Verfahren mit dem bisherigen überein. Dabei berücksichtigt er wieder, dass — modern formuliert — n im Term $\frac{n(n+1)}{2}$ gerade ist (Faktoren 5 und 11 für $n=10$).

Analog verläuft die Berechnung weiterer Reihenwerte: $s_3(13)=273$ (4. Beispiel), $s_4(8)=4+8+12+\ldots+32=144$ (5. Beispiel) — vgl. $s_4(n)=4\cdot\frac{n(n+1)}{2}=2n(n+1)$ —, $s_4(11)=264$ (6. Beispiel), $s_5(12)=5+10+15+\ldots+60=390$ (7. Beispiel) — vgl. $s_5(n)=5\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ — und $s_5(13)=455$ (8. Beispiel). Ein Hinweis auf die Beziehung $s_5(13)=s_5(12)+65$ als Möglichkeit zur Probe fehlt.

Bei jedem Beispiel unterscheidet der Autor zwischen geraden und ungeraden n im Hinblick auf $\frac{n(n+1)}{2}$ (siehe oben).

59 ***Über denjenigen, der, als ein Kind geboren wurde, jedes Jahr so viele Florine gab, wie viel es an Jahren ist, bis zu 30 Jahren***

Ein Mann zeugte einen Sohn. Er verfügte bei jeder Vollendung eines Jahres, im Hinblick darauf, an welchem Tag sein Kind geboren wurde, als Geschenk so viele Florine zu geben, wie viel an Jahren auch sein Sohn ist. Im ersten Jahr, im Hinblick darauf, an welchem Tag sein Sohn geboren wurde, gab er 1 Florin, im zweiten Jahr gab er 2 Florin: 1 und 2 ergeben 3 Florin in den zwei Jahren. Im dritten Jahr gab er 3 Florin: In den drei Jahren ergeben sich 6 Florin. Wenn sein Sohn 30 Jahre alt geworden ist — du suchst zu erfahren, wie viele Florine es werden, die auf diese Weise übergeben werden.

Es geht hier also um die Bestimmung des Reihenwerts $s_1(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ mit $n = 30$. Diese elementare arithmetische Reihe, auf die alle anderen zurückgeführt werden können (vgl. insbesondere den Kommentar zum vorigen Kapitel), hätte der Autor schon vor Kapitel 57 behandeln sollen. Hier ist die bisher durchgängige Division des höchsten durch den ersten Summanden überflüssig, und der Autor geht auch gar nicht mehr darauf ein. Anstatt aber entsprechend der einheitlichen Formel $s_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ zu verfahren, geht er wieder wie im letzten Kapitel vor, wo er stets zwischen geraden und ungeraden n unterschieden hatte, hier also mit $n = 30$: $30 : 2 = 15$, $30 + 1 = 31$, $15 \cdot 31 = 465$ (Ergebnis: 465 Florin)

Es folgt die Zusatzfrage, wie viel Florin der Sohn nach 31 Jahren erhielte, die aufgrund des letzten Ergebnisses natürlich trivial ist. Das hat auch der Autor erkannt, indem er am Ende dieses Abschnitts auf die Rechnung $465 + 31 = 496$ verweist. Doch zunächst behandelt er diese Zusatzfrage als selbständige Aufgabe, ganz offensichtlich, weil er vorführen will, wie mit ungeraden n umzugehen ist, hier mit $n = 31$: Die "halbierungsnahe" Zerlegung $31 = 15 + 16$ mit $16 > 15$, insbesondere $16 = 15 + 1$, führt dazu, dass nicht auch noch 31 um 1 vergrößert werden muss; $16 \cdot 31 = 496$ (Ergebnis: 496 Florin)

Insgesamt betrachtet ist diese Fallunterscheidung bez. der n zwar korrekt, aber unnötig, denn $\frac{n(n+1)}{2}$ ist in jedem Fall eine ganze Zahl.

Abschließend erklärt der Schreiber, dass man mithilfe dieser Methode das Ergebnis auch bei *sehr vielen Jahren* (ἐπὶ πλείστων χρόνων) finden wird.

60 ***Wie man leicht erfahren kann, wie viele angezeigte Stunden während der 24 Stunden der Tages- und Nachtzeit geschlagen werden***

Die 24 Stunden der Tages- und Nachtzeit werden zuerst 1(-mal), danach 2(-mal) geschlagen, was während der zwei Stunden 3 angezeigte Stunden sind, und so der Reihe nach. Du suchst zu erfahren, nachdem 23 Stunden angezeigt worden sind, wie viele Stundenwiderhalle während der 23 Stunden angezeigt wurden.

Es ist dies ein ähnliches Problem wie das des Kindes und der Florine.

Das Anzeigen der Stunden erfolgt natürlich mit Glockenschlag, sodass *angezeigt* (σημαντικός) in diesem Sinne zu verstehen ist.

Der Autor berechnet nun nach seiner bekannten Methode den Reihenwert $s_1(23) = 276$, indem er wie früher die Zerlegung $23 = 11 + 12$ diskutiert. Anschließend geht es um $s_1(24) = 300$, zunächst nach seiner "altbewährten" Methode berechnet, dann im Hinblick auf $s_1(24) = s_1(23) + 24$.

Das Kapitel schließt mit der Bemerkung, dass man auf diese Weise auch bei anderen Stunden das Gesuchte, d. h. die Anzahl der bis dahin erfolgten Glockenschläge insgesamt, finden kann.
Die vorliegende Aufgabe, die der Unterhaltungsmathematik zuzurechnen ist, präsentiert uns eine interessante Realie, nämlich eine Turmuhr mit 24-Stunden-Schlag. In diesem Zusammenhang schreibt Rudolff (1526, R 7^{v}) unter der Kapitelüberschrift *Von einer schlahenden Vhr*:
Die Wellisch vhr fahet an 1 stund nach vndergang der Sonnen / schlecht 1. darnach 2. 3. 4. etc. biß auff 24. Ist nun die frag wieuil schleg tag vnd nacht geschehen / Facit 300 ...
Unser anonymer Autor hat also entweder eine Aufgabe aus italienischer Quelle übernommen, oder er beschreibt das Stundenschlag-System so, wie er es auch in seiner Heimat vorgefunden hat.

Die arithmetischen Reihen gehörten bei allen Kulturvölkern zum Grundbestand der Arithmetik; sie sind z. B. in "vorgriechischer Zeit" schon bei den Babyloniern verwendet und berechnet worden – vgl. TROPFKE (1980, S. 344). In den Lehrplänen der mittelalterlichen Universitäten wurde die Arithmetik im sog. Trivium behandelt. Hier galt das "Progredieren" (Berechnen von arithmetischen und geometrischen Reihen) als eigenständige "Species" (Rechenart) neben den anderen: Nummerieren, Addition, Subtraktion, Duplieren (Verdoppeln), Medieren (Halbieren), Multiplizieren und Dividieren.
Textaufgaben zu arithmetischen Reihen sind seit der Antike vielfältig belegt – vgl. TROPFKE (1980, S. 625–628). Es handelt sich fast ausschließlich um Aufgaben der Unterhaltungsmathematik.
In natürlicher Weise würde sich nun die Behandlung der geometrischen Reihen anschließen, doch der Autor hat sich anderes vorgenommen.

61 *Über die {essenden} Schmauser – auf die Frage, wie viel sie sind, sagten sie mit einer ausgeklügelten Antwort: "Zweimal so viele, wie wir sind, und die Hälfte von uns und das Viertel von uns werden wir mit dir zusammen 100 Männer sein."*

Irgendwelche Männer, die vereint waren, fand jemand beim Essen vor und fragte sie: "Wie viele seid ihr?" Zur Antwort gaben sie nicht: "Wir sind soundso viele." Sondern sie sagten: "Wir und andere so viele, wie viele wir sind, und die Hälfte von uns und das Viertel von uns werden mit dir zusammen 100 Männer sein. Auch wenn wir nicht wissen, wie viele die Esser sind – wie können wir diese erfahren? Du kannst dies so erfahren.
Mache für dich selbst einen Ansatz, welchen immer du willst, und sprich: Es seien die Esser 20 Männer, und ebenso viele andere, wie sie sagten, ergeben 40, und die Hälfte der 20, wie sie sagten, ist 10, zusammen 50, und das Viertel der 20, wie sie sagten, das 5 ist – zusammen 55 Männer. Nimm 1 von den 100 weg – wie sie sagten: "Wir werden mit dir zusammen wohl 100 Männer sein" – d. h. deine eigene Zahl, und es bleiben 99 Männer übrig. Multipliziere nun die 99 Männer mit den 20 Männern, du du angesetzt hast: 20 mal 99 ergeben 1980.

Teile die 1980 Männer durch die Anzahl der 55 Männer, die du aus den 20 Männern errechnet hast, die du angesetzt hast: Wenn die 1980 Männer durch die 55 Männer geteilt werden, ergibt der Quotient von diesen 36. Und siehe, du hast gefunden, dass die Esser 36 Männer sind.
Aber der Beweis, dass es so ist, ist dieser: 36 Männer und ebenso viele Männer, wie sie sagten, ergeben 72, und die Hälfte der 36, die 18 ist, zusammen 90, und das Viertel der 36, das 9 ist, zusammen 99. Addiere auch deine eigene Zahl, von der sie sprachen: "Mit dir werden wir 100 Männer sein." Es kommen 99 und 1 heraus, zusammen 100 Männer — gemäß dem Wort, das sie sprachen ...
Diese Aufgabe gehört zu dem sehr verbreiteten Typ der "Gott Grüß Euch-Aufgaben" (vgl. TROPFKE 1980, S. 574 f.) — so findet sich genau dasselbe Beispiel auch bei Schreiber B in der Aufgabensammlung dieses Kodex (HUNGER/VOGEL 1963, Nr. 46, S. 39 f.).
Die hier verwendete Methode zur Lösung eines linearen Problems ist schon in altbabylonischen Texten, bei Diophant (um 250 n. Chr.), in indischen Quellen, bei Schreiber B und auch bei Rhabdas (1341) [vgl. TANNERY IV, 4 (1886)] belegt und wird als "einfacher falscher Ansatz" bezeichnet — vgl. TROPFKE (1980, S. 367—371).
Ist f eine (vorgegebene) Proportionalität in x, d. h. eine lineare Funktion in x (≥ 0) mit $f(0) = 0$, und zu einem gegebenen Funktionswert b werde der x-Wert gesucht, also x aus $f(x) = b$, so kann man so vorgehen: Man wählt einen (beliebigen) Wert x_1 und berechnet $f(x_1) = b_1$. Nun gilt $\frac{b}{b_1} = \frac{x}{x_1}$, also ist $x = \frac{b}{b_1} \cdot x_1$.
In unserem Beispiel ist $f(x) = x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4}$ $(= \frac{11}{4}x)$, $b = 99$, $x_1 = 20$, $b_1 = 55$, $x = \frac{99}{55} \cdot 20 = 36$.
Der Autor zeigt, dass das Verfahren auch mit dem Ansatzwert $x_2 = 24$ zum Ziel führt: Es folgt $f(x_2) = b_2 = 66$ und entsprechend $x = \frac{99}{66} \cdot 24 = 36$.
Die schriftlichen Rechnungen des Autors sind ungeschickt, da er es in beiden Fällen versäumt hat, durch 11 zu kürzen.
Auch mit den Ansatzwerten 32 oder 40 komme man — so der Autor — ebenso wie mit den vorliegenden 20 und 24 zur Zahl 36 der Esser.
Der einfache falsche Ansatz diente bei solchen Problemen als Ersatz für die (in der Regel noch nicht bekannte) algebraische Methode:
Aus $f(x) = \frac{11}{4}x = 99$ folgt $x = \frac{4 \cdot 99}{11} = 36$.

62 *Über die Schüler, die nicht sagten, wie viele sie sind, aber eine ausgeklügelte Antwort gaben: Wenn jeder von uns jeweils 5 Kukkia gibt, fehlen uns zur Erfüllung unserer Miete 30 Kukkia; wenn aber jeder von uns jeweils 6 Kukkia gibt, sind gegenüber unserer vereinbarten Miete 40 Kukkia übrig.*

Ein Mann ging fort in eine Schule. Er fand dort Schüler und fragte diese: "Wie viele seid ihr nun, ihr Schüler, und wie hoch ist die Miete, die ihr alle jedes Jahr gebt?" Sie sagten aber nicht: "Soundso viele sind wir." Sondern: "Wenn jeder von uns jeweils 5 Kukkia gibt, fehlen zur Erfüllung unserer Miete 30 Kukkia, wenn aber jeder von uns jeweils 6 Kukkia gibt, sind gegenüber der geschuldeten Höhe der Miete 40 Kukkia übrig." Auch wenn wir nicht wissen, wie viele Schüler es sind und wie hoch deren geschuldete Miete ist, wie können

wir dies erfahren? Du kannst dies so erfahren.
Mache wiederum auch hierbei für dich einen Ansatz und sprich: Es seien also 60 Schüler, wobei jeder von diesen jeweils 5 Kukkia gegeben hat. 5 mal 60 ergeben 300. Wie sie nun oben sagten, fehlen ihnen 30 Kukkia zur Erfüllung ihrer Miete. Addiere auch dies, und es ergeben sich zusammen 330 Kukkia. Wenn aber wiederum jeder der 60 jeweils 6 Kukkia gibt, ergeben 6 mal 60 360 Kukkia. Da wir oben sagten, dass, wenn jeder von ihnen jeweils 6 Kukkia gibt, 40 Kukkia übrig bleiben, subtrahiere 40 Kukkia von den 360, und es bleiben 320 Kukkia übrig. Es sind die 320 Kukkia 10 Kukkia weniger als die 330 Kukkia.
Mache wiederum für dich einen anderen Ansatz und sprich: Es seien nun 90 Schüler, wobei jeder von diesen jeweils 5 Kukkia gegeben hat. 5 mal 90 ergeben 450 Kukkia. Addiere wie beim vorigen Mal die 30 Kukkia, die zur Erfüllung ihrer Miete fehlen, und es ergeben sich zusammen 480 Kukkia. Wenn aber wiederum jeder von den 90 jeweils 6 Kukkia gibt — 6 mal 90 ergeben 540. Subtrahiere 40 Kukkia, so wie du es auch getan hast, und es bleiben 500 Kukkia übrig. Es sind aber die 500 Kukkia 20 Kukkia mehr als die 480 Kukkia. Einerseits haben die 60 Schüler, die jeweils 5 Kukkia geben, 10 Kukkia mehr als die, die jeweils 6 Kukkia gegeben haben, andererseits haben die 90, die jeweils 5 Kukkia gegeben haben, 20 Kukkia weniger als die, die jeweils 6 Kukkia gegeben haben.
Setze nun die beiden Fehler von diesen in eine Gegenüberstellung und sprich: 60 Schüler — jeder jeweils 5 Kukkia — haben 10 Kukkia mehr, und wiederum 90 Schüler — jeweils 5 Kukkia — haben 20 Kukkia weniger. Multipliziere diese kreuzweise entgegengesetzt: 10 mal 90 ergeben 900 und wiederum 20 mal 60 ergeben 1200. Addiere die 900 zu den 1200, und es werden 2100. Addiere auch die 10 Kukkia, die von den 60 Schülern übrig geblieben sind, zu den 20 Kukkia, die die 90 Schüler weniger haben, und es kommen zusammen 30 Kukkia heraus, welches der Teiler ist. Teile nämlich die 2100 durch die 30, und es ergibt sich schließlich der Quotient 70. Und siehe, du hast gefunden, dass es 70 Schüler sind.

je 5 Kukkia	*60 Schüler*	*10 Kukkia mehr*
je 5 Kukkia	*90 Schüler*	*20 Kukkia weniger*

Suche auch die Miete, wie hoch sie ist, und hierbei kannst du auch die Höhe der Miete erfassen, wie hoch sie ist (sic), *und dass auch die Schüler in Wahrheit 70 sind.*
Wenn also jeder der Schüler jeweils 5 Kukkia gegeben hat — 5 mal 70 ergeben 350 Kukkia. Addiere auch die 30 Kukkia, entsprechend wie wir sagten, dass sie für die Erfüllung der Miete fehlen, und es werden zusammen 380 Kukkia. Wenn aber wiederum jeder der 70 Schüler jeweils 6 Kukkia gegeben hat — 6 mal 70 ergeben 420 Kukkia. Subtrahiere davon 40 Kukkia, entsprechend wie sie sagten, dass, wenn sie jeweils 6 Kukkia gegeben haben, 40 Kukkia übrig bleiben. 40 Kukkia von 420 Kukkia subtrahiert — es bleiben 380 Kukkia übrig, so wie du zu den 350 Kukkia 30 addiert hast, und es ergaben sich 380 Kukkia. Und siehe, du hast die Schüler gefunden, dass es 70 sind und dass die jährliche Miete 380 Kukkia beträgt, was 19 Hyperpyra sind.

Damit der Leser nun *die Wahrheit dieser leichten Methode* einsieht, fordert der Autor ihn auf, zwei andere Ansätze zu wählen. Der Text ist ebenso ausführlich wie oben formuliert.
80 Schüler als Ansatz,
jeweils 5 Kukkia Jahresmiete: 400 Kukkia; 400 Kukkia + 30 Kukkia = 430 Kukkia (um das Defizit von 30 Kukkia auszugleichen)
jeweils 6 Kukkia Jahresmiete: 480 Kukkia; 480 Kukkia - 40 Kukkia = 440 Kukkia (um den Überschuss von 40 Kukkia auszugleichen)
Im zweiten Fall kommen 10 Kukkia mehr als im ersten heraus.
100 Schüler als Ansatz,
jeweils 5 Kukkia Jahresmiete: 500 Kukkia; 500 Kukkia + 30 Kukkia = 530 Kukkia (um das Defizit von 30 Kukkia auszugleichen)
jeweils 6 Kukkia Jahresmiete: 600 Kukkia; 600 Kukkia - 40 Kukkia = 560 Kukkia (um den Überschuss von 30 Kukkia auszugleichen)
Im zweiten Fall kommen 30 Kukkia mehr als im ersten heraus.
Es folgt wieder ein Schema wie bei den beiden Ansätzen vorher, das die kreuzweisen Multiplikationen $10 \cdot 100 = 1000$ und $30 \cdot 80 = 2400$ veranschaulicht. Da nun aber die Fehler *gleichsinnig* (adv. μονομερῶς) seien, sollen die beiden Produkte voneinander subtrahiert werden — während es beim vorherigen Ansatzpaar zu addieren galt: $2400 - 1000 = 1400$. Der weitere Teil der Rechnung verläuft wie bisher: $30 - 10 = 20$, $1400 : 20 = 70$. Die Miete der 70 Schüler (380 Kukkia) wird nicht neu berechnet.

je 6 Kukkia	*80 Schüler*	*10 Kukkia mehr*
je 6 Kukkia	*100 Schüler*	*30 Kukkia mehr*

In Anlehnung an das Kapitelbeispiel, aber doch eher theoretisch, wirkt der abschließende Abschnitt über die Frage, wie im Fall ungleichsinniger (adv. ἀνωμάλως) und im Fall gleichsinniger Fehler rechnerisch zu verfahren ist. Das erste falsche Ansatzpaar lieferte den ersten Fall (10 Kukkia Überschuss, 20 Kukkia Mangel), bei dem die Fehler zu addieren sind. Das zweite falsche Ansatzpaar lieferte den zweiten Fall (10 Kukkia Überschuss, 30 Kukkia Überschuss), bei dem die kleinere Zahl von der größeren abzuziehen ist. Die zweite Möglichkeit für gleichsinnige Fehler, nämlich der zweifache Mangel, wird an dieser Stelle nicht diskutiert. Insgesamt werden hier die Rechenverfahren nicht sehr verständlich dargestellt.

Der doppelte falsche Ansatz ("Regula falsi") war die wichtigste Methode, solche Probleme zu bewältigen, die — algebraisch betrachtet — auf lineare Gleichungen oder einfache lineare Gleichungssysteme führen, ohne dass algebraische Kenntnisse erforderlich gewesen wären. Dieses Verfahren wurde bereits im 1. Jahrhundert v. Chr. in der chinesischen Mathematik verwendet und ist später bei mittelalterlichen Autoren der islamischen Welt wiederzufinden. Im berühmten 2. Rechenbuch von Adam Ries (1522) ist die "Regel der falschen Zahlen" die zweite zentrale Methode neben dem Dreisatz. Es kann nicht verwundern, dass sich unser Autor eingehend mit dieser Methode beschäftigt, aber merkwürdigerweise scheint er im byzantinischen Bereich der einzige zu sein. Eine historische Gesamtübersicht bietet die Monographie von GAVIN/SCHÄRLIG (2012).

Am Beispiel des einfachsten Typs einer linearen Gleichung, $ax = b$ $(a > 0)$, soll die Methode in moderner Schreibweise erläutert werden — unabhängig davon, dass hierbei schon der einfache falsche Ansatz zum Ziel führt.
Man wählt zwei Versuchszahlen (falsche Ansatzwerte) x_1 und x_2 mit $ax_1 = b_1$ und $ax_2 = b_2$. Dafür gibt es folgende Möglichkeiten:

I) Beide Versuchszahlen sind zu groß gewählt. Es gelte $x_1 > x_2$, also auch $b_1 > b_2$, und $f_1 = b_1 - b$, $f_2 = b_2 - b$ seien die positiven Fehlbeträge. Dann liefert der Term

$$\frac{x_2 f_1 - x_1 f_2}{f_1 - f_2}$$

die Lösung x, wie sich leicht nachrechnen lässt.

II) Beide Versuchszahlen sind zu klein gewählt. Es gelte $x_2 > x_1$, also auch $b_2 > b_1$, und $f_1 = b - b_1$, $f_2 = b - b_2$ seien die positiven Fehlbeträge. Dann liefert der Term

$$\frac{x_2 f_1 - x_1 f_2}{f_1 - f_2}$$

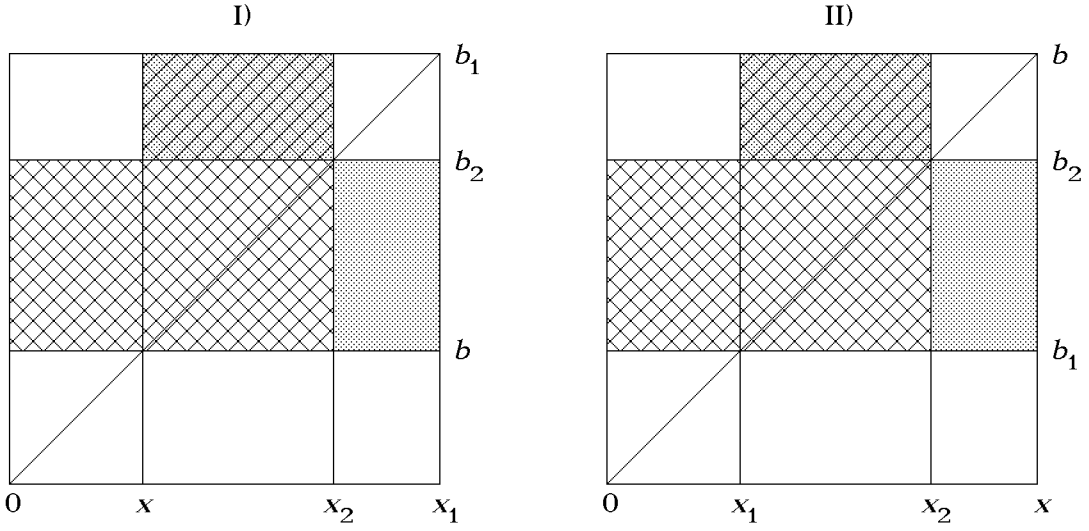
ebenfalls die Lösung x, wie sich leicht nachrechnen lässt.

III) Die eine Versuchszahl, etwa x_1, ist zu klein, die andere (x_2) ist zu groß gewählt, d. h. es gilt $b_1 < b < b_2$. Sind $f_1 = b - b_1$ und $f_2 = b_2 - b$ die positiven Fehlbeträge, so liefert der Term

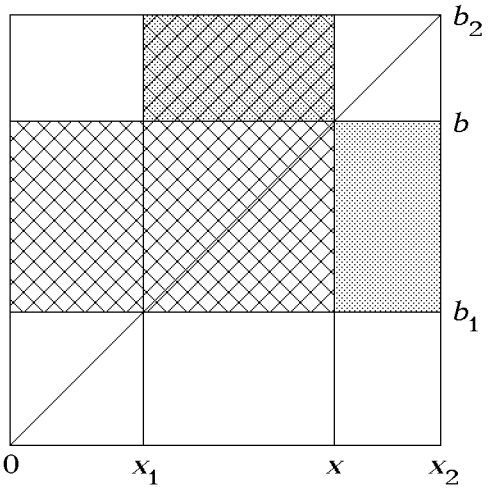
$$\frac{x_2 f_1 + x_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

die Lösung x, wie sich leicht nachrechnen lässt.

Der byzantinisch-arabische Mathematiker Qusṭā ibn Lūquā (9./10. Jahrhundert) hat geometrische Beweise für die drei Formeln geliefert — vgl. SUTER (1908/09, S. 112):



III)



Zu I) Die beiden punktierten Rechtecke sind ergänzungsgleich und somit flächeninhaltsgleich. Daher hat das karierte Winkelstück (Gnomon) den Flächeninhalt des mittleren waagerechten Streifens, nämlich $x_1(b_2 - b) = x_1 f_2$.
Andererseits kann der Gnomon mit dem linken oberen Rechteck (Inhalt: $x(b_1 - b_2) = x(f_1 - f_2)$ zu einem Rechteck mit dem Inhalt $x_2(b_1 - b) = x_2 f_1$ ergänzt werden. Es folgt $x_1 f_2 = x_2 f_1 - x(f_1 - f_2)$ und daraus die Formel von I.
Dieselben Überlegungen führen bei den beiden anderen Figuren zu den Formeln von II bzw. III.

Im Grunde liefern diese "Beweise" allerdings nur den (geometrischen) Übergang von den Proportionen

$\frac{f_1}{x_1 - x} = \frac{f_2}{x_2 - x}$ (vgl. I), $\frac{f_1}{x - x_1} = \frac{f_2}{x - x_2}$ (vgl. II) und $\frac{f_1}{x - x_1} = \frac{f_2}{x_2 - x}$ (vgl. III)

zu den Formeln in I, II bzw. III.

Die konkrete Aufgabe in diesem Kapitel führt uns auf die algebraische Gleichung $5x + 30 = 6x - 40$ (x: Anzahl der Schüler). Der einfache falsche Ansatz ist hier nicht direkt anwendbar, da x nicht einfach durch eine "proportionale Korrektur" zu ermitteln ist. Daher musste man zum doppelten falschen Ansatz greifen, sofern man nicht der Algebra mächtig war. Die beiden Paare von Versuchszahlen $x_1 = 60$, $x_2 = 90$ sowie $x_1 = 80$, $x_2 = 100$ führen zum Überschuss $f_1 = 10$ und zum Mangel $f_2 = 20$ der linken Seite gegenüber der rechten Seite bzw. zu den Überschüssen $f_1 = 30$ und $f_2 = 10$ der rechten gegenüber der linken Seite der Gleichung. Die Fehlbeträge stimmen mit denen überein, die man bei gleicher Wahl der Versuchszahlen aus der vereinfachten Gleichung $ax = b$ ($a > 0$) erhält. Hier liefert diese Gleichung mit $a = 1$ und $b = 70$ allerdings schon sofort die Lösung.

Mit den obigen Bezeichnungen haben die beiden Schemata des Autors allgemein folgende Gestalt:

| *(je 5 Kukkia)* x_1 — f_1 *mehr (als bei 6 Kukkia)*
| *(je 5 Kukkia)* x_2 — f_2 *weniger (als bei 6 Kukkia)*

Es liegt der Fall III vor, und die entsprechende Rechenvorschrift führt zu x.

| *(je 6 Kukkia)* x_2 — f_2 *mehr (als bei 5 Kukkia)*
| *(je 6 Kukkia)* x_1 — f_1 *mehr (als bei 5 Kukkia)*

Es liegt der Fall I vor, und die entsprechende Rechenvorschrift führt zu x. Der Fall II tritt nicht auf.

Besondere Aufmerksamkeit verdient noch die untere Randbemerkung auf fol. 37^r: *Und anders sehr leicht: Addiere die fehlenden Kukkia zu den überschießenden Kukkia, d. h. addiere 30 Kukkia ... zu den 40 Kukkia, und es ergeben sich zusammen 70. Du hast nun auch so sehr leicht herausgefunden, dass es 70 Schüler sind. Dies geht nun so, wenn Kukkia von der einen Vorgabe her fehlen, von der anderen her aber Kukkia überschüssig sind, wie nun 30 Kukkia von der einen Angabe her fehlen, von der anderen her aber 40 Kukkia überschüssig sind ... Wenn sie aber von den beiden Vorgaben her fehlen oder von den beiden Vorgaben her überschüssig sind, subtrahiere das Kleinere vom Größeren, und so groß der Rest ist, so viele Schüler sind es — und zwar, wenn sich die eine Vorgabe von der anderen um ein Kukki unterscheidet, wie jetzt die eine Vorgabe jeweils 5 Kukkia, die andere aber jeweils 6 Kukkia hat.*
Wenn aber der Unterschied zwei Kukkia beträgt, nimm die Hälfte. Wenn aber der Unterschied drei Kukkia beträgt, nimm das Drittel, und so der Reihe nach.
Wir kommen auf die algebraische Formulierung des Problems zurück:
Ist x die Anzahl der Schüler, so gilt: $5x + 30 = 6x - 40$ (Gleichheit der Mieten). Hieraus folgt $70 = 6x - 5x = x$.
Allgemein erhält man aus der Gleichung $ax + b = cx - d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $a < c$) die Lösung $x = \frac{b+d}{c-a}$. Das Rechenrezept des Autors entspricht den auf die reinen Zahlen beschränkten Äquivalenzumformungen zur Lösung dieser Gleichung. Er weiß aber auch, wie in den Fällen $ax - b = cx - d$ und $ax + b = cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $a \neq c$) zu verfahren ist. Der Divisor ist der (betragsmäßige) Unterschied zwischen den in der Aufgabe fest vorgegebenen Kukkia (nicht zu verwechseln mit den falschen Ansatzwerten) und drückt sich hier durch $|c - a|$ aus.

63 *Über den, der sein Pferd auf ausgeklügelte Weise verkauft und dessen Preis nicht verraten will, sondern dessen Preis in Rätseln dunkel andeutet, wie groß er wohl ist*

Ein Mann verkauft sein Pferd. Jemand, der um zu kaufen kam, fragte nach dem Preis des Pferdes, wie hoch er ist. Der Pferdebesitzer aber antwortete dem, der den Preis dieses (Pferdes) zu erfahren suchte: Ich habe 16 Florin. Wenn du mir

nun von deinen Florinen gibst, was die Hälfte von meinen 16 Florin ist, und noch $\frac{1}{3}$ von dem, worüber du an Florinen verfügst, habe ich den Preis schon erhalten — du aber nimm das Pferd und gehe weg. Es sprach aber auch der Kaufwillige zum Verkäufer: Wenn du mir $\frac{1}{4}$ von deinen 16 Florin gibst, werde ich zusammen mit den $\frac{2}{3}$ von dem, was ich habe, dir geben, was du immer du von mir verlangst, und das Pferd sei mein.
Obwohl wir nicht wissen, welches der Preis ist, den der Verkäufer fordert, und über wie viele Florine der Käufer verfügt, sodass es so geschieht, wie sie sich geeinigt haben — wie können wir dies erfahren?
Die Aussage des Pferdebesitzers zeigt, dass er den Geldbetrag des Käufers kennt. Danach kennt auch der Käufer den Preis des Pferdes. Das "Rätsel" richtet sich also nur an den fiktiven Ohrenzeugen des Gesprächs bzw. den Leser, der zur Lösung auch noch auf die Aussage des Käufers angewiesen ist. Kurios ist, dass der Käufer hier (und ebenso im folgenden Kapitel) den Verkäufer zur Bezahlung des Pferdes mit heranziehen will. Dies erhielte einen Sinn, wenn man den Verkäufer durch einen zweiten Käufer ersetzen würde — vgl. den bekannten Aufgabentyp "Einer allein kann nicht kaufen" — Pferdekauf — (TROPFKE 1980, 4. 2. 2. 3, S. 608 f.)
Der Autor rechnet wieder (sehr ausführlich) mit dem doppelten falschen Ansatz, wobei sich seine Versuchszahlen ($x_1 = 24$, $x_2 = 27$) auf den Geldbetrag des Käufers beziehen und nicht auf den Preis des Pferdes, was nähergelegen hätte. Außerdem geht es hier erstmals um die Lösung eines linearen Gleichungssystems.
Ist x der Geldbetrag des Käufers und y der Preis des Pferdes (jeweils in Florin), so gilt: $8 + \frac{1}{3}x = y$, $4 + \frac{2}{3}x = y$
$x_1 = 24$: $8 + \frac{1}{3}x_1 = 16$, $4 + \frac{2}{3}x_1 = 20$
Dazu heißt es am Ende des Abschnitts: *Und du hast gefunden, dass der Verkäufer 16 Florin, der Käufer 20 hat.* Damit ist gemeint, dass die Forderung des Verkäufers 16 Florin, das Gebot des Käufers 20 Florin beträgt.
$x_2 = 27$: $8 + \frac{1}{3}x_2 = 17$, $4 + \frac{2}{3}x_2 = 22$
Der Käufer hat also einmal $f_1 = 4$ (Florin), ein andermal $f_2 = 5$ (Florin) zu viel bezahlt (s. Diagramm des Autors). Auf den Käufer bezogen liegt also ein doppelter Überschuss vor (vgl. Fall I im Kommentar zu Kap. 62), und dementsprechend erhält der Autor den Geldbetrag (x) des Käufers mithilfe der Rechnung $\frac{24 \cdot 5 - 27 \cdot 4}{5-4} = 12$. Dies entspricht der Formel $\frac{x_1 f_2 - x_2 f_1}{f_2 - f_1}$, die zu derjenigen von Fall I äquivalent ist. Ohne weitere Rechnung gibt er auch den Preis des Pferdes an: 12 Florin.
Es folgt eine Probe, die in der Verifizierung von $8 + \frac{1}{3} \cdot 12 = 12$, $4 + \frac{2}{3} \cdot 12 = 12$ besteht, und schließlich noch ein weiterer doppelter falscher Ansatz mit den Versuchszahlen $x_1 = 27$, $x_2 = 33$. Hierbei gilt $8 + \frac{1}{3}x_1 = 17$, $4 + \frac{2}{3}x_1 = 22$, $f_1 = 5$; $8 + \frac{1}{3}x_2 = 19$, $4 + \frac{2}{3}x_2 = 26$, $f_1 = 7$. Erneut liegt in Bezug auf den Käufer ein doppelter Überschuss vor. Der Geldbetrag ($x = 12$) des Käufers berechnet sich jetzt aus $\frac{27 \cdot 7 - 33 \cdot 5}{7-5} = \frac{189 - 165}{2}$. Auch diesmal hat der Autor ein kleines Diagramm vorgelegt.

64 ***Über dasselbe Problem, nicht wie das erste, sondern umgekehrt:***
Denn jetzt sagte der Verkäufer, dass er 12 Florin habe.
Obwohl wir nun nicht wissen, wie viel Florine der Käufer hat
und wie viel Florin der Preis des Pferdes beträgt,
wird herausgefunden werden, dass der Preis wieder 12 Florin ist,
aber die Florine des Käufers 16 betragen.

Es gelte nun umgekehrt: Der Verkäufer sagte, dass er 12 Florin habe. Er fordert vom Käufer $\frac{1}{4}$ von den Florinen, die der Käufer hat, und noch $\frac{2}{3}$ von den 12 Florin, die der Verkäufer hat. Dies aber wünscht sich der Käufer: Der Verkäufer soll ein $\frac{1}{3}$ von den 12 Florin, die er hat, und darüber hinaus die Hälfte von dem übergeben, was der Käufer hat. Obwohl wir nun nicht wissen, wie viele Florine der Käufer hat und wie hoch der Preis des Pferdes ist, werden wir herausfinden, dass der Preis wie vorher 12 Florin beträgt, die Florine des Käufers aber 16 sind.

Aufgrund des Ergebnisses, das sowohl schon in der Überschrift als auch im Eingangstext verraten wird, wird deutlich, was der Autor hier mit Umkehrung meint:

Die Aufgabe in Kap. 63 führte in moderner Schreibweise zum Gleichungssystem $8+\frac{1}{3}x = y$, $4+\frac{2}{3}x = y$ mit der Lösung $x=y=12$, wobei der Verkäufer 16 Florin hat. Die jetzige führt zu $8+\frac{1}{4}x = y$, $4+\frac{1}{2}x = y$ mit der Lösung $x=16$, $y=12$, wobei der Verkäufer 12 Florin hat (x: Geldbetrag des Käufers, y: Preis des Pferdes). Der Preis des Pferdes ist also konstant geblieben, aber Käufer und Verkäufer haben ihre "finanziellen Rollen" vertauscht.

Führen wir für den Geldbetrag des Verkäufers noch zusätzlich die Variable z ein, so erhalten wir die Gleichungssysteme $\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}x = y$, $\frac{z}{4}+\frac{2}{3}x = y$ (Kap. 63) bzw. $\frac{2}{3}z+\frac{1}{4}x = y$, $\frac{1}{3}z+\frac{1}{2}x = y$ (Kap. 64). Die Lösungen sind $x = y = \frac{3}{4}z$ bzw. $x = \frac{4}{3}y = \frac{4}{3}z$. Im 1. Fall stimmt also der Geldbetrag des Käufers, im zweiten Fall der Geldbetrag des Verkäufers mit dem Preis für das Pferd überein. Außerdem gilt im 1. Fall $\frac{x}{z} = \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, im 2. Fall ist $\frac{x}{z} = \frac{4}{3} = \frac{16}{12}$. Diese Kehrwertbildung erklärt auch den scheinbar erstaunlichen Austausch von 12 und 16 bei den beteiligten Personen.

Der Autor löst das Problem, das sich — wie schon gesagt — algebraisch in der Form $8+\frac{1}{4}x = y$, $4+\frac{1}{2}x = y$ darstellen lässt, wieder mit doppeltem falschen Ansatz, wobei die Versuchszahlen wieder auf den Käufer bezogen sind. Dabei entspricht die 1. Gleichung der Forderung des Verkäufers, die zweite dem "Gebot" des Käufers. $x_1 = 20$ führt zu 13 Florin als Forderung des Verkäufers und zu 14 Florin als "Gebot" des Käufers. Auch für $x_2 = 24$ ergibt sich für den Käufer mehr als für den Verkäufer (16 Florin gegenüber 14 Florin). Es liegt wieder doppelter Überschuss vor, und der Geldbetrag (x) des Käufers berechnet sich aus $\frac{2\cdot 20-1\cdot 24}{2-1} = \frac{16}{1} = 16$. Besonders kurios ist, dass der Autor für die letzte Division das schriftliche Rechenverfahren heranzieht! Anschließend wird der Pferdepreis ($y=12$) dadurch berechnet, dass mit $x=16$ die Verkaufsforderung und das "Kaufgebot" in Einklang gebracht werden.

Es folgt noch ein Hinweis auf weitere mögliche Versuchszahlen ($x_1 = 24$, $x_2 = 36$ oder $x_1 = 48$, $x_2 = 60$), die ebenfalls zu den bereits gewonnenen Ergebnissen führen.

Ein Anderes, was zu diesem ähnlich ist

Nun ist umgekehrt der Geldbetrag des Käufers gegeben, der des Verkäufers aber und der Preis des Pferdes sind gesucht. Im vorliegenden Beispiel gilt in unserer algebraischen Schreibweise $x = 24$, $4 + \frac{1}{3}z = y$, $8 + \frac{1}{5}z = y$, allgemein also $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}z = y$, $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}z = y$. Daraus ergibt sich $z = \frac{5}{4}x$, $y = \frac{7}{12}x$.

Der doppelte falsche Ansatz betrifft nun die Forderung des Verkäufers. Die vom Autor gewählten Ansatzzahlen $z_2 = 60$ und $z_1 = 90$ für das System $4 + \frac{1}{3}z = y$, $8 + \frac{1}{5}z = y$ liefern wieder doppelten Überschuss, hier für den Verkäufer, und zwar $f_2 = 4$ bzw. $f_1 = 8$. Die weitere Rechnung erfolgt wieder gemäß Fall I im Kommentar zu Kap. 62. Das Ergebnis ist $z = 30$, und dementsprechend bestimmt der Autor den Preis des Pferdes ($y = 14$).

Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn man die Versuchszahlen $z_1 = 15$ und $z_2 = 60$ zugrunde legt. Hier hat der Käufer gegenüber dem Verkäufer zunächst den Überschuss 2 (Florin), dann aber den Mangel 4 (Florin). Auch wenn der Autor mehrfach Käufer und Verkäufer bei dieser Aufgabe (und auch im Diagramm) verwechselt, ist seine weitere Rechnung richtig: Es liegt erstmals der Fall III aus dem Kommentar zu Kap. 62 vor: Im Zähler und Nenner muss jetzt addiert werden, also bestimmt sich z durch den Term $\frac{60 \cdot 2 + 15 \cdot 4}{2 + 4} = 30$.

Der Preis des Pferdes (14 Florin) wird nicht vorgerechnet.

Zu dieser "variantenreich" gelösten Aufgabe präsentiert der Autor nun wieder eine Umkehraufgabe. Jetzt hat der Käufer 30 Florin (siehe das vorherige Ergebnis für den Verkäufer), und die gegenseitigen Forderungen entsprechen dem System $6 + \frac{1}{3}z = y$, $10 + \frac{1}{6}z = y$. Es ergibt sich — nicht ganz zufällig — $z = 24$, $y = 14$, d. h. die Geldbeträge von Käufer und Verkäufer werden vertauscht, aber der Preis des Pferdes ändet sich nicht. Diese Umkehraufgabe steht zur vorigen Aufgabe wie die Aufgabe in der Überschrift dieses Kapitels zur Aufgabe in Kapitel 63, wo wir die auftretenden "Phänomene" schon besprochen und erklärt hatten.

Bedauerlicherweise greift der Autor angesichts dieser vielen ermüdenden doppelten falschen Ansätze sein früheres "Algebra-Rezept" (vgl. fol. 37^r, Kap. 62) nicht mehr auf.

65 *Die beiden Wanderer, von denen der eine täglich 10 Stunden, stündlich aber 2 Meilen geht, der andere aber täglich 8 Stunden, stündlich 5 Meilen: In wie vielen Tagen werden sie zusammentreffen und wie viele Meilen werden herausgefunden werden, die jeder von ihnen hat? Es ist der Abstand zwischen ihnen 2000 Meilen.*

Angenommen, zwei Wanderer haben eine Wanderung aus einer großen Distanz wie etwa 2000 Meilen zu machen. Der eine, der sich bewegte, fing an, zu uns zu gehen, täglich marschiert er 10 Stunden, stündlich aber schafft er für sich 2 Meilen. Am selben Tag und zur selben Stunde, zu der der aufgezeigte Wanderer sich zu uns bewegte, ging von uns auch der andere Wanderer weg und machte für sich seinen Marsch, um zu jener Stadt zu gelangen, die den zu uns entsandten Wanderer hatte. Es marschiert aber der von uns weg dorthin Wan-

dernde täglich 8 Stunden, er macht aber stündlich für sich 5 Meilen. Du suchst zu wissen, in wie vielen Tagen jeder von ihnen die Entfernung von (den) 2000 Meilen erfüllen wird, in wie vielen Tagen die beiden Wanderer hierbei zusammentreffen und wie viele Meilen gefunden werden, die jeder von ihnen zu dem Zeitpunkt hat, wenn die beiden zusammentreffen. Du kannst dies so erfahren ...
Der Autor rechnet folgendermaßen:
10 [h] · 2 Meilen = 20 Meilen, 8 [h] · 5 Meilen = 40 Meilen, schriftlich (!) 2000 Meilen : 20 Meilen = 100 (Tage). In 100 Tagen gelangt der erste Wanderer zu uns.
Es folgt — wieder mit einem Rechendiagramm — 2000 Meilen : 40 Meilen = 50 (Tage). In 50 Tagen hat der gegenläufige Wanderer sein Ziel erreicht.
Die weitere Rechnung sei hier ohne Berücksichtigung der vom Autor genannten oder tatsächlichen Einheiten dargestellt: $100 \cdot 50 = 5000$ (schriftlich !), $100 + 50 = 150$, $5000 : 150 = 33\frac{1}{3}$. In $33\frac{1}{3}$ Tagen treffen die beiden Wanderer zusammen.
Schließlich folgen $20 \cdot 33\frac{1}{3} = 666\frac{2}{3}$ — der (erste) Wanderer, der zu uns kommt, hat $666\frac{2}{3}$ Meilen zurückgelegt — und $40 \cdot 33\frac{1}{3} = 1333\frac{1}{3}$ — der gegenläufige Wanderer also $1333\frac{1}{3}$ Meilen. (Beide Rechnungen werden nicht schriftlich vorgeführt.)
Als Probe dient die Addition von $666\frac{2}{3}$ und $1333\frac{1}{3}$ (in Form eines Diagramms in milesischen Zahlen), die Summe 2000 stimmt mit der Entfernung der beiden Städte (und der Startpunkte der beiden Wanderer) überein.
Allgemein lässt sich dieser Aufgabentyp ohne Algebra wie folgt lösen.
Die Berechnung der Zeiten, die A und B jeweils für die Gesamtstrecke benötigen, liegt auf der Hand. Interessant ist eigentlich nur die Bestimmung von T, dem Zeitpunkt (nach Tagen), zu dem sich die beiden Wanderer treffen:
d sei die anfängliche Entfernung der beiden, v_A, v_B die Geschwindigkeiten von A und B (hier in Meilen pro Tag). Wenn sie nach T Tagen zusammentreffen, dann gilt für die von A und B zurückgelegten Wegstrecken d_A, d_B: $d_A = v_A \cdot T$, $d_B = v_B \cdot T$ und $d_A + d_B = d$. Daraus folgt

$$(65.1) \quad T = \frac{d}{v_A + v_B}.$$

Der Autor hätte T also schneller über $2000 : (20 + 40) = 33\frac{1}{3}$ bestimmen können.
Die Formel, die seinem Rechenrezept zugrunde liegt, ist zu (65.1) äquivalent, aber komplizierter:

$$(65.2) \quad T = \frac{\frac{d}{v_A} \cdot \frac{d}{v_B}}{\frac{d}{v_A} + \frac{d}{v_B}}$$

Mit T erhält man nun sofort auch die von A und B anteilig gelaufenen Strecken.
Der Byzantiner schließt wie schon oft mit dem Hinweis, dass man bei ähnlichen oder gleichartigen Aufgaben die Lösung mit der gleichen Methode finden kann.

66 ***Die von einer Stadt Abreisenden,***
von denen der eine vor 10 Tagen abreiste,
der andere 10 Tage später als der vorher Abreisende schneller ging:
In wie vielen Tagen mag er den vorher Abreisenden erreicht haben?

Angenommen, es ist einer der Archonten aus einer Stadt abgereist. Er marschiert täglich 8 Stunden, stündlich macht er 3 Meilen: dreimal 8 ergibt 24, d. h. täglich geht er 24 Meilen. Nach dessen Abreise — im Abstand von 10 Tagen — als den Gebieter und Herrn des vorher abgereisten Archonten das Bedürfnis ergriff, ihm etwas Notwendiges anzuzeigen, sandte er zu ihm einen anderen Soldaten aus, um ihm dies mitzuteilen.

Es marschiert der nach 10 Tagen abreisende Soldat täglich 11 Stunden, stündlich macht er für sich 4 Meilen: 4-mal 11 ergibt 44, d. h. seine tägliche Bewegung ist 44 Meilen.

Du suchst zu wissen, in wie vielen Tagen er den vor ihm vor 10 Tagen abgereisten Archonten erreicht ...

Zu dieser Einholaufgabe gibt der Autor zwei Lösungswege an. Im Haupttext findet sich der folgende, und zwar mit einfachem falschen Ansatz:

Setze eine Wegstrecke an, wie viel an Tagen dir wohl dafür geeignet erscheint, dass es mehr sei als nötig; denn es ist nötig, eine Entfernung und Bewegung von so vielen Tagen anzunehmen, wie viel dir wohl geeignet erscheint, damit der nach 10 Tagen Abreisende zum vorher Abreisenden vorrückt.

Der Schreiber wählt eine Zeitspanne $T_A = 35$ (Tage), seit der der Archont (A) schon unterwegs ist, multipliziert mit dessen Geschwindigkeit $v_A = 24$ (Meilen pro Tag) und erhält eine Wegstrecke $s_A = 840$ (Meilen). Wegen des Vorsprungs von $\tau = 10$ (Tagen) ist der Soldat (B) erst $T_B = 25$ (Tage) unterwegs, mit $v_B = 44$ (Meilen pro Tag) ergibt sich eine Wegstrecke von $s_B = 1100$ Meilen. Der Soldat *hat*, wie der Autor bemerkt, den Archonten *bei Weitem überholt* (προέβη καταπολ(ὺ) ...). Die Streckendifferenz $s_B - s_A$ beträgt 260 Meilen, die Geschwindigkeitsdifferenz $v_B - v_A$ 20 Meilen pro Stunde. Die weitere Rechnung: $260 : 20 = 13$, d. h. 13 Tage zuvor (vor Ablauf von T_A) hatte der Soldat den Archonten erreicht. Die Zeitspanne T, während der der Archont unterwegs ist, bis er vom Soldaten eingeholt wird, beträgt also (35 - 13 =) 22 Tage. Der 10 Tage später gestartete Soldat erreicht den Archonten in 12 Tagen.

Die Rechnung entspricht der Formel $T = T_A - \frac{v_B(T_A - \tau) - v_A T_A}{v_B - v_A}$ (66.1).

Der Autor führt eine naheliegende Probe durch, indem er die Übereinstimmung der Produkte $22 \cdot 24$ und $12 \cdot 44$ (= 528) feststellt. Diese beruht auf der Gleichheit der Wege, die A und B zum Zeitpunkt des Zusammentreffens zurückgelegt haben, in Zeiten und Geschwindigkeiten mit den obigen Bezeichnungen ausgedrückt: $v_A T = v_B(T - \tau)$ (66.2)

Im Übrigen geht der Schreiber hier erstmals auf die Länge der gemeinsam zurückgelegten Strecke ein (528 Meilen).

Ein weiterer falscher Ansatz, und zwar mit $T_A = 30$ (Tagen), soll das Vertrauen des rechnenden Lesers in diese Methode stärken. Es kann nicht verwundern, dass sich am Ergebnis für T nichts ändert, da sich T_A aus der Formel (66.1) heraushebt. Nach Vereinfachung entsteht die Gleichung

$T = \frac{v_B \tau}{v_B - v_A}$ (66.3), die mit (66.2) äquivalent ist.

Offenbar hat der Autor erkannt, dass bei diesem Aufgabentyp der falsche Ansatz zwar zum Ziel führt, aber umständlich ist. So schreibt er zur Kapitelüberschrift an den Rand: *Das Gegenwärtige ist nützlich, das Erste aber unnütz.* Als "Gegenwärtiges" präsentiert er nun auf dem Rand folgendes Rechenrezept — hier in reinen Zahlen wiedergegeben: $10 \cdot 24 = 240$ (A hat in 10 Tagen 240 Meilen zurückgelegt), $44 - 24 = 20$ (Differenz der Geschwindigkeiten von B und A), $240 : 20 = 12$ (Zeit $(T - \tau)$, die der Soldat zum Einholen des Archonten benötigt).

Hier liegt die Formel $T - \tau = \frac{v_A \tau}{v_B - v_A}$ (66.4)

zugrunde, die zu (66.3) äquivalent ist.

Es folgt wieder eine Probe, die aber mit der zum ersten einfachen falschen Ansatz übereinstimmt.

67 *Eine ähnliche Frage über zwei Schiffe — wie die zwei Wanderer, als sie aus den Entfernungen zweier Städte aufeinandertrafen*

Angenommen, zwei Schiffe haben sich an ein und demselben Tag und zur selben Stunde (aufeinander zu) bewegt. Ihre Entfernung ist 1056 Meilen. Während sie nun in entgegengesetzter Richtung segeln, kommt das eine voran, das andere aber nur langsam. Sie bewegen sich nicht gleichmäßig und ähnlich, sondern das Schiff, das günstigen Wind hat, um sich schneller zu bewegen, macht für sich stündlich 4 Meilen, Tag und Nacht also 96 Meilen; denn 4-mal 24 ergibt 96. Das Schiff, das nicht das günstige Wehen der Winde hat, um sich in gleicher Weise wie das vorhergehende zu bewegen, bewegt sich gleichwohl verlangsamt stündlich 2 Meilen, Tag und Nacht also 48 Meilen; denn zweimal 24 ergibt 48. Du suchst zu wissen, in wie vielen Tagen jedes Schiff die Entfernung von 1056 Meilen vollendet und in wie vielen Tagen und nach wie vielen Meilen sich die Schiffe vereinigen, wenn sie aufeinandertreffen. Du kannst das so erfahren ...

Der Autor rechnet — wenn man nur die reinen Zahlenwerte betrachtet — $1056 : 96 = 11$ (Anzahl der Tage, die das schnellere Schiff für die Gesamtstrecke benötigt), $1056 : 48 = 22$ (Anzahl der entsprechenden Tage für das langsamere Schiff), $11 \cdot 22 = 242$, $11 + 22 = 33$, $242 : 33 = 7\frac{1}{3}$ (Anzahl der Tage, nach denen sich die beiden Schiffe treffen, auch in 7 Tage 8 Stunden umgewandelt). Dieser Berechnung der Zeit für den Treffpunkt liegt wieder die etwas umständliche Formel (65.2) zugrunde.

Es folgen die Rechnungen $7\frac{1}{3} \cdot 96 = 704$ (Anzahl der Meilen des schnelleren Schiffs bis zum Treffpunkt), $7\frac{1}{3} \cdot 48 = 352$ (Anzahl der entsprechenden Meilen des langsameren Schiffs) und schließlich die Probe $704 + 352 = 1056$ (Gesamtstrecke in Meilen). Sämtliche Rechnungen sind in Diagrammen niedergelegt, unter denen die Multiplikationen mit $7\frac{1}{3}$ auffallen.

68 ***Über die beiden Schiffe, die sich von ein und derselben Stadt wie folgt bewegten, wobei das eine schneller ist, das andere langsamer — in wie vielen Tagen jedes wohlbehalten ankommen wird***

Zwei Schiffe, die sich wie folgt von ein und derselben Stadt aus bewegen — das schneller fahrende legt stündlich 6 Meilen zurück, täglich macht es für sich 144 Meilen: denn 6-mal 24 ergibt 144. Das andere aber, das sich nicht so bewegen kann, weil ein verständlicher Grund es hindert, legt selbst stündlich 5 Meilen zurück, täglich macht es für sich 120 Meilen: denn 5-mal 24 ergibt 120. Du suchst zu wissen, in wie vielen Tagen jedes von ihnen, wenn es so fährt, wohlbehalten ankommen und einen Weg vollenden wird von ungefähr 1300 Meilen.

Es handelt sich nur um eine einfache Bewegungsaufgabe, bei der die Zeiten T_A, T_B aus der Strecke d (= 1300 Meilen) und den Geschwindigkeiten v_A (= 144 Meilen pro Tag), v_B (= 120 Meilen pro Tag) zu berechnen sind: $T_A = \frac{d}{v_A}$, $T_B = \frac{d}{v_B}$

Der Autor berechnet für das 1. Schiff 1300 : 144 = 9 und 4 Restmeilen (statt korrekterweise 4 Resttage, die $\frac{2}{3}$ Stunden entsprächen). Es folgt das richtige Ergebnis T_A = 9 Tage $\frac{2}{3}$ Stunden. Im Diagramm wird das Ergebnis $9\frac{4}{144}$ Tage zu $9\frac{1}{36}$ Tagen gekürzt. Analog erfolgt die Rechnung für das 2. Schiff (T_B = $10\frac{5}{6}$ Tage = 10 Tage 20 Stunden). Zusätzlich korrigiert sich aber der Schreiber stillschweigend, indem er darauf hinweist, dass bei der Division 1300 : 120 ein Restbruchteil $\frac{5}{6}$ entsteht, der als Tagesbruchteil zu verstehen ist und 20 Stunden bezeichnet.

69 ***Über die beiden Schiffe, die sich von ein und derselben Stadt aus bewegt haben, nicht wie unmittelbar (zuvor) an ein und demselben Tag, sondern das eine vor, das andere nach gewissen Tagen — in wie vielen Tagen sie sich vereinigen werden und in wie vielen Tagen jedes in Bezug auf die Entfernung zum Ziel gelangen wird***

Zwei Schiffe haben eine Fahrt von einer Entfernung von 1500 Meilen zu machen. Und das erste fuhr vor 2 Tagen ab — da es keine schnelle Geschwindigkeit hat, bewegt es sich stündlich 5 Meilen, am Tag 120. Nach den 2 Tagen fuhr auch das andere ab, welches schneller ist und sich stündlich 7 Meilen, am Tag 168 bewegt. Du suchst zu wissen, in wie vielen Tagen und Meilen sie vereinigt werden und in wie vielen (Tagen) jedes von diesen die Entfernung von 1500 Meilen glücklich bewältigen wird.

Im Haupttext erfolgt die Lösung der Frage nach dem Zusammentreffen der Schiffe wieder mit dem einfachen falschen Ansatz — entsprechend der Formel (66.1). Dabei sind — in der Reihenfolge der Rechenschritte des Autors — $T_A = 10$ (Tage, die das langsamere Schiff A schon unterwegs sei), $v_A T_A$ = 1200 (zugehörige Meilen von A). Für das schnellere Schiff B gilt $T_B = T_A - \tau$ = 8 (Tage) mit $\tau = 2$ (Tagen), $v_B T_B$ = 1344 (Meilen von B). Es folgt $v_B T_B - v_A T_A$ = 144 Meilen, $v_B - v_A$ = 48 (Meilen pro Tag). Der Quotient in (66.1) beträgt 3 (Tage), sodass sich $T = 10 - 3 = 7$ (Tage) ergibt. So lange ist A unterwegs, bis es mit B

zusammentrifft. B benötigt bis zu dieser Begegnung nur 8 – 3 = 5 (Tage), die der Autor auch aus 7 – 2 hätte berechnen können.
Es folgt noch eine triviale Bemerkung: Wenn das eine Schiff 7 Tage, das andere 5 Tage bis zum Zusammentreffen benötigen würde, würde das nach 2 Tagen abfahrende Schiff das vorher ausgelaufene erreichen.
Die Probe erfolgt in Entsprechung zu (66.2): $120 \cdot 7 = 168 \cdot 5 = 840$. Dabei ist 840 die Zahl der Meilen bis zum Zusammentreffen der Schiffe, was im Text nicht ganz deutlich wird.
Es bleibt noch die Bestimmung der Fahrzeiten von A und B für die Gesamtstrecke von 1500 Meilen gemäß (68.1): Der Autor berechnet korrekt $12\frac{1}{2}$ Tage für A, aber 8 Tage und *ungefähr* $9\frac{1}{2}$ *Stunden* für B anstatt $8\frac{13}{14}$ Tage oder 8 Tage $22\frac{2}{7}$ Stunden. Der Fehler ist im zugehörigen Divisionsdiagramm zu finden, wo der Bruchteil $\frac{66}{168}$ anstatt korrektem $\frac{156}{168}$ entsteht. Außerdem hat der Autor noch explizit $9\frac{3}{7}$ Stunden durch den Näherungswert $9\frac{1}{2}$ Stunden ersetzt.
Am rechten Rand von fol. 40^{r} hat er zusätzlich vermerkt: *Das Gegenwärtige ist nützlich, das Erste aber unnütz.* Mit Letzterem ist wohl wieder die Lösungsmethode des einfachen falschen Ansatzes zur Berechnung der Zeit bis zum Zusammentreffen der Schiffe gemeint (vgl. Kap. 66). Die Alternative, die der Autor nun (auf demselben Rand) bietet, ist weniger umständlich und entspricht im Rechenablauf der Formel (66.4). Hier gilt (ohne Einheiten) $\tau = 2$, $v_{\mathrm{A}} = 120$, $v_{\mathrm{B}} = 168$ und daher $T - 2 = 5$ ($T = 7$).

70 *Über die zwei Männer, die sich ungleichmäßig bewegen, die einen Teil des Tages nach vorne marschieren und sich einen Teil des Tages nach hinten umwenden: In wie vielen Tagen werden sie vereinigt werden und in wie vielen Tagen wird jeder von ihnen in Bezug auf die Entfernung ans Ziel gelangen, wenn er so läuft?*

Zwei vereinbarten miteinander: Der eine soll sich jeden Tag geradeaus nach vorne bewegen, indem er eine Distanz von $\frac{1}{4}$ von einer Meile geht, dann soll er sich wiederum am selben Tag umwenden und rückwärtsgewandt nicht $\frac{1}{4}$, was er dort vorwärtsgeht, sondern $\frac{1}{5}$ einer Meile (gehen). Der andere wiederum soll sich einen Teil des Tages geradeaus nach vorne bewegen, indem er eine Distanz von $\frac{1}{3}$ Meile geht, dann soll er wiederum am selben Tag nicht $\frac{1}{3}$, was er vorwärtsgeht, sondern $\frac{1}{4}$ einer Meile kehrtmachen. Es ist aber die gesamte Distanz, von der sie vereinbarten, dass sie so gehen, ungefähr 40 Meilen. Nicht von ein und demselben Anfang haben sie begonnen, sondern sie haben begonnen — der eine vom Anfang, der andere vom Ende der 40 Meilen, der eine geht, der andere kommt, um einander zu treffen.
Du suchst zu wissen, in wie vielen Tagen sie vereinigt werden, wenn sie so gehen, und in wie vielen Tagen jeder von ihnen die 40 Meilen erfüllen wird.
Dies ist aber vollkommen unnütz: Denn weder ist solches jemals geschehen noch wird es jemals geschehen, weder bei Männern noch bei irgendeinem anderen ähnlichen Problem. Obwohl es ein vergleichsweise schwieriges Problem ist und schwieriger als die vorher besprochenen, findet man durch die handliche

Methode auch dies leicht heraus.

Für die Lösung der ersten Frage spielt nicht nur die tägliche Verringerung der Distanz d zwischen den beiden Männern M_1, M_2 um $(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) = \frac{2}{15}$ (Meilen) eine Rolle; darüber hinaus muss bedacht werden, dass deren erste Begegnung im Zuge ihrer jeweiligen Vorwärtsbewegung (um insgesamt $\frac{7}{12}$ Meilen) erfolgt. Dies geschehe am n-ten Tag.

Für die minimale Distanz am $(n-1)$. Tag gilt dann

(70.1) $d_{\min} = 40-\frac{7}{12}-\frac{2}{15}(n-2) > 0,$

denn nach $(n-2)$ Tagen ist die Distanz $40-\frac{2}{15}(n-2)$, und die Summe $\frac{7}{12}$ der Vorwärtsbewegungen führt am $(n-1)$. Tag noch nicht zur Begegnung (mit $d=0$). Nach $(n-1)$ Tagen beträgt die Distanz $40-\frac{2}{15}(n-1)$, aber am n-ten Tag wird sie nach der Begegnung "negativ", also gilt

(70.2) $40-\frac{7}{12}-\frac{2}{15}(n-1) < 0.$

Aus (70.1) und (70.2) ergibt sich für n die Beschränkung $296\frac{5}{8} < n < 297\frac{5}{8}$, die nur durch $n=297$ ganzzahlig erfüllt wird. Die erste Begegnung der beiden findet also am 297. Tag statt.

Nach 297 Tagen beträgt die Distanz $40-\frac{2}{15}\cdot 297=\frac{2}{5} > 0$, sie hat also nach der 1. Begegnung der Männer wieder das Vorzeichen gewechselt, d. h. es gibt am 297. Tag eine 2. Begegnung. Am 298. Tag begegnen sie sich zum 3. Mal, da $\frac{7}{12}$ größer als $\frac{2}{5}$ ist, die Ausgangsdistanz dieses Tages. Danach wird d wieder negativ, nach 298 Tagen aber erneut positiv $(40-\frac{2}{15}\cdot 298 = \frac{4}{15})$, sodass am 298. Tag eine 4. Begegnung stattfindet. Am 299. Tag gibt es ein 5. Zusammentreffen, da die Ausgangsdistanz dieses Tages $(\frac{4}{15})$ kleiner als $\frac{7}{12}$ ist. d wird negativ, nach 299 Tagen aber wieder positiv $(\frac{2}{15})$, sodass am 299. Tag noch ein 6. Zusammentreffen stattfindet. Am 300. Tag begegnen sie sich noch ein weiteres Mal und an dessen Ende zum 8. Mal, denn es gilt $40-\frac{2}{15}\cdot 300 = 0$. Dieses 8. Mal ist auch das letzte Mal, da sich die Männer jetzt bei ihrer jeweiligen Rückwärtsbewegung treffen, ohne sich dabei zu überkreuzen.

Die zweite Frage ist ähnlich zu behandeln, auch wenn sie nicht so komplex ist. Für M_1 lässt sich der gesuchte n-te Tag wegen $\frac{1}{4}-\frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ aus den Ungleichungen

(70.3) $\frac{1}{20}(n-2)+\frac{1}{4} < 40,\ \frac{1}{20}(n-1)+\frac{1}{4} \geq 40$

eindeutig bestimmen: Es folgt $796 \leq n < 797$, also $n=796$. Für diesen Wert wird die zweite Ungleichung zu einer Gleichung, d. h. am 796. Tag erreicht M_1 das Ziel, das ursprünglich 40 Meilen entfernt war, mit dem Abschluss seiner Vorwärtsbewegung. Wenn er trotzdem weiterginge, würde er beim nächsten Voranschreiten übers Ziel hinausschießen oder sich auf $\frac{1}{5}$ einer Meile beschränken, was ebenfalls regelwidrig wäre. Eine Fortsetzung seines Marsches kann also außer Betracht bleiben.

Für M_2 bestimmt sich der gesuchte n-te Tag wegen $\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ aus

(70.4) $\frac{1}{12}(n-2)+\frac{1}{3} < 40,\ \frac{1}{12}(n-1)+\frac{1}{3} \geq 40.$

Es folgt $477 \leq n < 478$, also $n=477$, und dieser Wert, in die zweite Ungleichung eingesetzt, führt zu einer Gleichung. M_2 erreicht das Ziel in 40 Meilen Entfernung am 477. Tag mit dem Abschluss seiner Vorwärtsbewegung. Auch hier steht die Fortsetzung des Marsches außer Diskussion.

Der Autor hat die Herausforderung dieser Aufgabe leider nicht erkannt.
Zunächst behandelt er das 2. Problem. Dabei berechnet er die täglich zurückgelegten Meilen nicht über die Differenz, sondern über das Produkt der jeweiligen Beträge, was aber in diesem Fall (benachbarte Stammbrüche) am Ergebnis nichts ändert: $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ bzw. $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Nun schließt er: In 20 Tagen bzw. in 12 Tagen legen M_1, M_2 1 Meile zurück, in 800 Tagen bzw. 480 Tagen haben sie ihr Ziel in 40 Meilen Entfernung erreicht. Die Antwort ist falsch, wie oben gezeigt.
Die 1. Frage betraf den Zeitpunkt des Zusammentreffens.
Der Autor rechnet entsprechend der Formel (65.2) mit $d = 40$ (Meilen) und den nicht allgemeingültigen Werten $v_A = \frac{1}{20}$ (Meile pro Tag), $v_B = \frac{1}{12}$ (Meile pro Tag), also mit $\frac{d}{v_A} = 800$ (Tagen) bzw. $\frac{d}{v_B} = 480$ (Tagen).
Das Ergebnis $T = 300$ Tage ist zumindest nicht falsch — es handelt sich wie gesagt um die letzte Begegnung der beiden Läufer — aber eigentlich interessiert ja nur die Erstbegegnung am 297. Tag, die dem Schreiber entgangen ist.
Auch bei seiner Probe hat er die Rolle der Vorwärtsbewegungen am Tag des Zusammentreffens bzw. vor dem Ziel nicht erkannt. Er schließt folgendermaßen:
M_1: 300 (Tage) : 20 (Tage pro Meile) = 15 (Meilen);
M_2: 300 (Tage) : 12 (Tage pro Meile) = 25 (Meilen)
Somit läuft M_1 15 Meilen, M_2 25 Meilen bis zum Treffpunkt, also laufen sie insgesamt 40 Meilen.

Wie die letzten sechs Kapitel belegen, hat sich unser Autor also ausführlich, wenn auch zuletzt nicht fehlerfrei, mit Bewegungsaufgaben auseinandergesetzt. In seinem "2. Buch" (Kap. 163, fol. 96^v–97^v) stellt er noch eine weitere kuriose Bewegungsaufgabe vor, bei der die tägliche Wegstrecke des einen Läufers einer arithmetischen Folge entspricht. Auch der Schreiber B der Aufgabensammlung im selben Kodex bietet hier reichhaltiges, überwiegend realitätsfernes Material, und zwar in den Aufgaben 47, 65, 77–81 [HUNGER/VOGEL (1963), S. 40 f., 50 f., 58–65].
Obwohl Bewegungsaufgaben zum Urgestein der Unterhaltungsmathematik zählen, treten sie in mesopotamischen, ägyptischen und alten griechischen Quellen nicht auf. Ihr Weg führte von China über Indien in die arabische Welt; von dort aus haben sie im Abendland Eingang gefunden [vgl. TROPFKE (1980), 4.2.1.4, insbes. S. 588 f.].

71 ***Wie die Fragen, die im Folgenden besprochen werden, zum praktischen und bürgerlichen Leben gehören, weshalb sie auch nützlicher als die vorher besprochenen sind***

Alle Fragen, welche wir gerade bis jetzt aufgeschrieben haben, waren gut, notwendig und nützlich: denn nichts, was außerhalb der Vernunft und der Fragen ist, war dort aufgeschrieben worden, sondern ist auch der Vernunft würdig und nicht ohne Anteil an Nutzen. Aber es ist so, da sie auch aufgesucht werden,

erscheint das Begreifen von diesen auch notwendig zu sein; denn nichts von dem, was nicht aufgesucht wird, ist irgendwann einmal nützlich. Das Aufgesuchte aber wird sehr groß erscheinen, auch wenn es eher sehr klein zu sein scheint, wie auch das vorher Besprochene klein zu sein scheint, als wenn nicht danach gesucht wird. Da wir aber in dessen Nutzen gelangt sind, wird das leichte Begreifen von diesem für uns als notwendig und nützlich gefunden werden. Hauptsächlich aber haben wir dieses der Übung halber aufgeschrieben, damit dies Lehrer und Führer der Probleme wird, die weiter besprochen werden — (Probleme) von diesen, die um vieles nötiger sind, damit das Begreifen von diesen durch die vorfindlichen Beispiele wohl müheloser wird. Die Erfahrung mit den Multiplikations- und Divisionsaufgaben hast du gut ausgebildet, und du bist bereit geworden, um auch das, was noch weiter besprochen wird, gut aufzunehmen, zu verstehen und zu gebrauchen, sobald dir notwendigerweise eine Frage von solcher Art erwächst. Was wir aber nun besprechen wollen, sind verschiedene schwierige Probleme, durch die sich im Leben die bürgerlichen Angelegenheiten der Beteiligungs- und Handelsgeschäfte entwickeln, denn Verkaufen, Kaufen und Zahlen des Handelsverkehrs Aufsuchen — durch all diese (Probleme) werden sie bekannt gemacht und werden leicht durch die aufgezeigte Methode. Solches nun, was notwendig und nützlich ist — jetzt, da du besonders bereit geworden bist, um dies müheloser aufzunehmen — werden wir alles, von nun an beginnend, besprechen.

Dieses Kapitel hat keinen mathematischen Inhalt, sondern leitet von den zahlreichen Aufgaben, die eher oder ganz der Unterhaltungsmathematik zuzurechnen sind (Kap. 55, 56, 59—70) zu solchen aus der kaufmännischen Praxis über. Es ist von besonderer Bedeutung, da sich der Autor nur hier zur "Philosophie" seiner schriftlichen mathematischen Unterweisung äußert. Alle Fragen (Probleme) seien schon deshalb nützlich, weil sie überhaupt gestellt (oder untersucht) worden seien — nur nicht gestellte Fragen seien unnütz. Damit rechtfertigt er offenkundig die vorhergehende Beschäftigung mit unterhaltungsmathematischen Aufgaben. Darüber hinaus seien diese Probleme eine geeignete Übung für die Bewältigung der kommenden praktischen Fragen. Hier hat er wohl an die Möglichkeit des Transfers von Lösungsmethoden gedacht. Insbesondere durch die Multiplikations- und Divisionsaufgaben — der hier nicht genannte Dreisatz verbindet ja beides — sieht der Autor den Leser gut gerüstet, die Rechenverfahren zu allen weiteren Problemen, die aus dem kaufmännischen Leben stammen, mühelos aufzunehmen, zu verstehen und anzuwenden.

72 *So viele Florine du aufsuchst, wie viele Hyperpyra es werden — eine handliche und leichte Lösungsfindung*

Der Autor stellt 4 Aufgaben vor; dabei variieren die Anzahlen der Florine, aber interessanter sind die verschiedenen Lösungsmethoden, die er in Abhängigkeit von der Umrechnung des Florins verwendet — in reine Hyperpyra (ὑπέρπυρα ἀκέραια) oder in Hyperpyra mit Kukkia gemischt (μετὰ κουκκιῶν μεμειγμένη, sc. τιμή).

1. Beispiel: 131 Florin mit 1 Florin = 7 Hyperpyra ergeben 917 Hyperpyra.

2. Beispiel: 123 Florin mit 1 Florin = 7 Hyperpyra 6 Kukkia

Die Umrechnung 1 Hyperpyron = 20 Kukkia wird erst im Lösungstext angegeben. Eine der folgenden Rechnungen wäre zu erwarten gewesen:
1 Florin = 146 Kukkia, 123 Florin = 17958 Kukkia = 897 Hyperpyra 18 Kukkia
123 Florin = 861 Hyperpyra 738 Kukkia = 897 Hyperpyra 18 Kukkia
1 Florin = $7\frac{3}{10}$ Hyperpyra, 123 Florin = $897\frac{9}{10}$ Hyperpyra = 897 Hyperpyra 18 Kukkia
Doch der Autor argumentiert anders, und zwar geht er von 10 Florin aus: 10 Florin = 70 Hyperpyra 60 Kukkia = 73 Hyperpyra. Für alles Weitere vergleiche man das Schema rechts: Er multipliziert nun mit 123 und erhält 8979 Hyperpyra. Da er aber mit Zehnern von Florinen multipliziert hat, streicht er eine Stelle ab (*imp.* κόψε ἕνα γράμμα), hier 9 Hyperpyra, die er in 180 Kukkia umwandelt. Erneutes Abstreichen der letzten Stelle führt zum Ergebnis 897 Hyperpyra 18 Kukkia.

		1	2	3	
		3	6	9	3
	8	6	1		7
Hyperpyra	8	9	7	9	
Kukkia		1	8	0	

3. Beispiel: 1111 Florin mit 1 Florin = 7 Hyperpyra 11 Kukkia
Hier stellt den Autor der Ansatz mit 10 Florin nicht zufrieden: 10 Florin = 70 Hyperpyra 110 Kukkia = ... = 75 Hyperpyra 10 Kukkia. Damit könne man 1111 Florin nicht gut multiplizieren. (Im vorigen Beispiel stand nämlich an der vergleichbaren Stelle ein reiner Hyperpyra-Betrag.) Daher wählt er nun den Ansatz 100 Florin = ... = 755 Hyperpyra und berechnet $1111 \cdot 755 = 838805$ (Hyperpyra). Mit der Begründung, dass er mit Hundertern von Florinen multipliziert hat, streicht er nun zwei Stellen ab: 8 3 8 8|0 5. 5 Hyperpyra = 100 Kukkia, davon bleibt nach erneutem Abstreichen von 2 Stellen (1|0 0) 1 Kukki übrig. Ergebnis: 8388 Hyperpyra 1 Kukki
Anschließend äußert sich der Autor allgemein zu dem Verfahren für den Fall, dass auch die Wahl von 100 Florin noch nicht genügt:
Wenn du nun dagegen die Hyperpyra nicht gut mit den 10 Florin und mit den 100 Florin multiplizieren kannst, weil du auch gewisse Kukkia erhältst, suche 1000 Florin auf, wie viele Hyperpyra sie sind, und multipliziere, wie viele Florine auch immer du aufsuchst, diese zu Hyperpyra zu machen, die Hyperpyra mit den 1000 Florin, und von dem entstandenen Produkt streiche, da du 1000 Florin mit Hyperpyra multipliziert hast, drei Ziffern ab, und die übrig bleibenden Ziffern — so viel sie bezeichnen, so viele Hyperpyra ergeben die Florine, die du zu Hyperpyra zu machen suchst. Die drei Ziffern aber, die du abgestrichen hast, sind Hyperpyra. Wie viele Hyperpyra nun die drei Ziffern bezeichnen, die du abgestrichen hast, wandle diese Hyperpyra in so viele Kukkia um, wie es zulässigerweise geschieht, und streiche wiederum auch von den Kukkia drei Ziffern ab wie auch bei den Hyperpyra, und das, was übrig bleibt — wie viel es bezeichnet, so viele Kukkia haben die Florine, die du zu Hyperpyra zu machen suchst, noch zusätzlich zu den Hyperpyra.
Daraufhin wird das gerade behandelte Beispiel mit dem Ansatz 1000 Florin durchgerechnet, der wegen der Parität 1 Kukki = 0,05 Hyperpyra entbehrlich ist.

4. Beispiel: 53 Florin mit 1 Florin = 7 Hyperpyra 11 Kukkia
Ansatz mit 100 Florin: 100 Florin = 755 Hyperpyra (mit Hinweis auf das vorige

Beispiel), 53 · 755 = 40015 (Hyperpyra); 4 0 0|1 5 mit 15 Hyperpyra = 300 Kukkia; 3|0 0; Ergebnis: 400 Hyperpyra 3 Kukkia
Und anders: Der Schreiber rechnet die Aufgabe erneut durch, nur mit vertauschten Faktoren, was völlig überflüssig ist.

In unserer Dezimalbruchschreibweise erhält man auf der Grundlage der jeweiligen Umrechnung des Florins: 123 Florin = 897,9 Hyperpyra (2. Beispiel), 1111 Florin = 8388,05 Hyperpyra (3. Beispiel), 53 Florin = 400,15 Hyperpyra (4. Beispiel).

Am unteren Rand von fol. 41^r steht eine Bemerkung des Schreibers, dass die vorliegende(n) Frage(n) auch mit dem Dreisatz gelöst werden können, wie es auch bei den später vorkommenden Gewichten Zentner und Rhetula besprochen wird. Die Fragen im 2. und 3. Beispiel werden in Dreisatzform formuliert, aber nicht erneut beantwortet: 10 Florin ergeben 73 Hyperpyra, wie viel ergibt 123 Florin? 100 Florin ergeben 755 Hyperpyra, wie viel ergibt 1111 Florin?

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht zweifellos der inhaltliche Umgang mit Dezimalbrüchen, die begrifflich explizit beim Schreiber B desselben Kodex [HUNGER/VOGEL (1963), Nr. 36 f., S. 33–35] zu finden sind. Diese von al-Kāšī, einem persischen Astronomen und Mathematiker in Samarkand, entwickelte Kenntnis hat, vermittelt durch die Türken, zuerst in Byzanz Eingang gefunden: Der Codex Vind. phil. gr. 65 liefert hierzu europaweit die frühesten Belege. (Vgl. JUSCHKEWITSCH (1964), S. 236–242.) In Mittel- und Westeuropa wurden die Dezimalbrüche allerdings erst ca. 150 Jahre später durch das Werk "De Thiende" ("Das Zehntel") des Kaufmanns, Ingenieurs, Mathematikers und Mechanikers Simon Stevin (1585) bekannt.

73 *Wie man die gerade vorhandene Frage durch eine andere Methode erfahren kann*

Es geht um die Umrechnung von 1561 Florin in Hyperpyra und Kukkia, wenn 1 Florin = 7 Hyperpyra 6 Kukkia ist und wieder 1 Hyperpyron = 20 Kukkia gilt. Jetzt soll aber der Dreisatz verwendet werden.
Der Autor rechnet zunächst 10 Florin = 70 Hyperpyra 60 Kukkia = 73 Hyperpyra. Es folgt der Schluss von 10 Florin auf 1561 Florin, wobei, wie damals üblich, erst multipliziert, dann dividiert wird: 1561 · 73 = 113953 (Hyperpyra), 113953 : 10 = 11395 (Hyperpyra) Rest (τζάκισμα) 3. Wir würden jetzt $\frac{3}{10}$ Hyperpyra in 6 Kukkia umwandeln, doch der Schreiber sagt ausdrücklich, dass 3 nicht mit den 10 (Florin), sondern mit den 73 (Hyperpyra) zu einem Bruch verbunden werden soll, und rechnet umständlich $\frac{3}{73}$ Florin = 6 Kukkia, da 1 Florin = ... = 146 Kukkia, also $\frac{1}{73}$ Florin = 2 Kukkia sind. (Natürlich haben $\frac{3}{10}$ Hyperpyra und $\frac{3}{73}$ Florin denselben Wert.) Das Ergebnis lautet 11395 Hyperpyra 6 Kukkia.
Es folgt eine Probe, die darin besteht, dass die Gleichheit von (73 Hyperpyra) · 1561 und von 10 · (11395 Hyperpyra 6 Kukkia) festgestellt wird (= 113953 Hyperpyra, das Produkt beim Dreisatz).
Schließlich wird die Aufgabe auch viel eleganter nach der Dezimalbruchmethode

des vorigen Kapitels *(der ersten Methode)* gelöst. Ohne Einheiten lautet die Rechnung in Kurzfassung: $1561 \cdot 73 = 113953 \Rightarrow 11395|3$, 3 Hyperpyra = 60 Kukkia $\Rightarrow 6|0$,
Resultat: 11395 Hyperpyra 6 Kukkia

74 ***Wie man wissen kann, wie viele Hyperpyra auch immer du aufsuchst, wie viele Florine es werden***

Wenn du aber das Umgekehrte suchst, d. h. die 11395 Hyperpyra und 6 Kukkia — jeder Florin zum Wert von 7 Hyperpyra 6 Kukkia — wie viele Florine es werden, kannst du auch dies so erfahren ...
Der Schreiber rechnet $11395 \cdot 20 + 6 = 227906$ (Kukkia), 1 Florin = 146 Kukkia, $227906 : 146 = 1561$ (Florin).
Es folgt eine allgemeine Verfahrensbeschreibung mit einer abschließenden Bemerkung: *Wenn aber* (sc. bei der Division) *noch ein Bruch übrig bleibt, sind das Übrigbleibende* (sc. der Zähler) *Kukkia, welche keine Florine erreichen, weshalb sie als Bruch* (sc. Zähler) *übrig geblieben sind.*
In moderner Schreibweise gilt mit natürlichen a und b: a Hyperpyra b Kukkia = $(20a + b)$ Kukkia = $\frac{20a+b}{146}$ Florin. Dividiert man $20a + b$ durch 146 mit Rest, so erhält man eine Darstellung $20a + b = 146q + r$ mit natürlichen q und r sowie $0 \le r < 146$, sodass $(20a + b)$ Kukkia = $(q + \frac{r}{146})$ Florin = q Florin r Kukkia gilt.
Zu diesem Kapitel hat der Autor am unteren Rand von fol. 41^v noch vermerkt, dass die vorliegende Frage sehr leicht mit dem Dreisatz behandelt werden kann, ohne dass er dies weiter ausgeführt hätte. Er denkt sicher an die folgende Schlussweise: 146 Kukkia sind 1 Florin, 227906 Kukkia sind dann 1561 Florin. Die dazu nötigen Rechnungen sind allerdings dieselben wie oben und bieten keine Erleichterung.

75 ***Wie man die vorliegende Frage durch eine andere Methode wissen kann***

Es geht hier um die Umwandlung von 12392 Hyperpyra in Florine, wenn 1 Florin den Wert von 7 Hyperpyra 10 Kukkia = $7\frac{1}{2}$ Hyperpyra hat. Der Autor setzt den Dreisatz so an:
$\frac{15}{2}$ (Hyperpyra) geben $\frac{2}{2}$ (Florin), was geben 12392 Hyperpyra?
Rechnung: $2 \cdot 12392 = 24784$ (Hyperpyra), $24784 : 15 = 1652\frac{4}{15}$ (Florin), $\frac{4}{15}$ Florin = 40 Kukkia = 2 Hyperpyra, da — so der Schreiber — $7\frac{1}{2}$ Hyperpyra = 1 Florin = 150 Kukkia seien, und deshalb seien $\frac{4}{15}$ von 150 Kukkia = 40 Kukkia = 2 Hyperpyra. Etwas irritierend ist die weitere, nachgeschobene Begründung: *denn 4 mal 10 ergeben 40, 15 mal 10 wiederum 150.* Damit ist die mögliche Berechnung von $\frac{4}{15}$ von 150 Kukkia durch Erweiterung des Bruchs gemeint: $\frac{40}{150}$ von 150 Kukkia = 40 Kukkia.
Insgesamt sind 12392 Hyperpyra also 1652 Florin 2 Hyperpyra.
Es folgt die Probe $12392 \cdot 2 = 24784$, $15 \cdot 1652\frac{4}{15} = 24784$ entsprechend der Regel, dass beim Dreisatz das Produkt der Innenglieder (links) mit dem Produkt der Außenglieder (rechts) übereinstimmt. Die Größeneinheit der Seiten in der rechten Gleichung ist "Hyperpyra · Florin", was dem Autor sicher nicht bewusst war.

Danach wählt der Autor für dieselbe Aufgabe einen Ansatz mit 10 Florin:
10 Florin ergeben 75 Hyperpyra, 12392 Hyperpyra ergeben wie viel Florin?
Hier hätte er die Größen im ersten Teilsatz umstellen sollen, etwa so (hier in Kurzform): 75 Hyperpyra — 10 Florin — 12392 Hyperpyra — ?
Er erhält $(12392 \cdot 10) : 75$ Florin = $1652\frac{20}{75}$ Florin, kürzt aber nicht — er hätte dann auf das obige Ergebnis verweisen können —, sondern berechnet $\frac{20}{75}$ Florin mithilfe von 1 Florin = 150 Kukkia, was natürlich wieder zu 40 Kukkia = 2 Hyperpyra führt.
Der Autor stellt auch noch einen Ansatz mit 100 Florin vor, bei dem die Dreisatzrechnung nichts Neues bietet. Der Florinbruchteil hat jetzt die Gestalt $\frac{200}{750}$.

76 ***Wie man mithilfe der vorliegenden Methode der Florine (diese auch bei Tieren gebrauchen kann und) wissen kann, wie viele Hyperpyra sie kosten, wie viele Tiere auch immer du aufsuchst, und umgekehrt, wie viele Tiere die Hyperpyra wert sind, wie viele auch immer du aufsuchst***

Dies geschieht nicht allein bei Florinen und Hyperpyra so, sondern auch bei Tieren und anderen ähnlichen Fragen ist die aufgezeigte Methode nützlich ...
Gesucht wird der Preis von 531 Pferden, wenn jedes von ihnen 45 Hyperpyra 10 Kukkia (= $45\frac{1}{2}$ Hyperpyra) kostet.
Zur Lösung des Autors: 10 Pferde kosten 455 Hyperpyra, $531 \cdot 455$ (Hyperpyra) = 241605 (Hyperpyra). Mit der Begründung, mit 10 Pferden multipliziert zu haben, streicht er beim Produkt 1 Stelle rechts ab: 2 4 1 6 0|5. 5 Hyperpyra sind 100 Kukkia, von denen wieder 1 Stelle abgestrichen wird: 1 0|0. Resultat: 531 Pferde kosten 24160 Hyperpyra 10 Kukkia.
Die Ziffern im zugehörigen schriftlichen Rechendiagramm sind teilweise nicht deutlich zu erkennen. Es scheint so, dass der Autor 533 statt korrektem 531 geschrieben (1. Zeile) und die richtige Zahl 2124 zu 2224 verändert hat (4. Zeile), ebenso korrektes 24160 zu 25160 (5. Zeile). In seinem Antwortsatz ist der Tausenderbetrag der Hyperpyra aufgrund von Streichungen unleserlich (letzte Zeile von fol. 42^{r}), sodass er am unteren Rand die Zahl wiederholt hat: Statt korrektem ,κ,δ´ (24000) schreibt er aber ,κ,ε´ (25000). Ansonsten treten aber im Text keine fehlerhaften Zahlen auf.
Nun wird umgekehrt die Frage gestellt, wie viele Pferde man zum Preis von je 45 Hyperpyra 10 Kukkia für 24160 Hyperpyra 10 Kukkia kaufen kann.
Zur Lösung des Autors: Beide Geldwerte werden in Kukkia umgewandelt, also in 483210 Kukkia (2. Geldwert) und 910 Kukkia (1. Geldwert). Die Division von 483210 durch 910 ergibt 531. Resutat: Es können 531 Pferde gekauft werden.
Der Autor führt sowohl die Division $483210 : 910$ als auch die vereinfachte Division $48321 : 91$ schriftlich durch. Die letztere ist Bestandteil seiner "leichteren" Berechnung der vorliegenden Umkehrfrage: 24160 Hyperpyra 10 Kukkia = $24160\frac{1}{2}$ Hyperpyra = $\frac{48321}{2}$ Hyperpyra, 45 Hyperpyra 10 Kukkia = $45\frac{1}{2}$ Hyperpyra = $\frac{91}{2}$ Hyperpyra, 48321 (Halbe) : 91 (Halbe) = 531
Es folgt eine weitere Aufgabe desselben Typs:
1 Stück Kleinvieh kostet 1 Hyperpyron 15 Kukkia. Was kosten 11729 Stück?

Der Autor erläutert, dass ein Ansatz mit 10 Stück Kleinvieh nicht geeignet sei, denn der Preis dafür betrage 17 Hyperpyra 10 Kukkia, lasse sich also nicht in Hyperpyra allein ausdrücken. Daher setzt er mit 100 Stück Kleinvieh an, die 175 Hyperpyra kosten. Die weitere Rechnung sei hier nur in Kurzform notiert: 11729 · 175 = 2052575 ⇒ 2 0 5 2 5 | 7 5, 75 Hyperpyra = 1500 Kukkia ⇒ 15|0 0 Kukkia
Ergebnis: 11729 Stück Kleinvieh kosten 20525 Hyperpyra 15 Kukkia.
Auch hierzu wird eine Umkehrfrage gestellt:
Wie viel Stück Kleinvieh kann man für 20525 Hyperpyra 15 Kukkia kaufen, wenn 1 Stück Kleinvieh 1 Hyperpyron 15 Kukkia kostet?
Der Autor wandelt in Kukkia um und erhält 410515 Kukkia bzw. 35 Kukkia. Die Division ergibt wieder 11729: So viel Stück Kleinvieh kann man für 20525 Hyperpyra 15 Kukkia kaufen.

77 *Wie dies auch bei Seide nützlich ist*

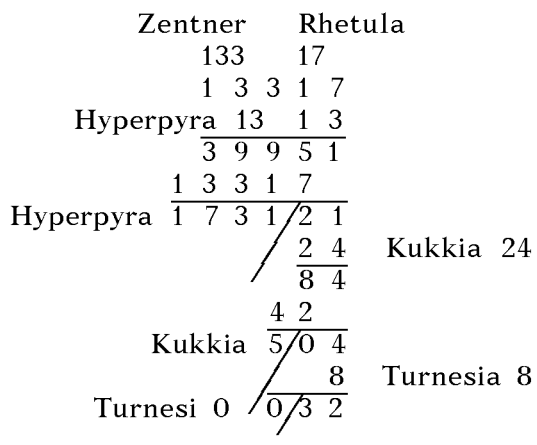
Hier wendet der Autor dasselbe Verfahren, das er schon bei Florinen (Kap. 72, 73) und Tieren (Kap. 76) ausführlich dargestellt hat, auch auf Seide an.
Die Frage: Wie viel Hyperpyra kosten 31000 Pfund Seide, wenn der Pfundpreis 6 Hyperpyra 11 Kukkia beträgt?
Zur Lösung des Autors: 10 Pfund kosten 65 Hyperpyra 10 Kukkia. Da hier noch Kukkia verblieben sind, betrachte man 100 Pfund = 655 Hyperpyra. Die weitere Rechnung kann wieder in Kurzform angegeben werden: 31000 · 655 = 20305000 ⇒ 2 0 3 0 5 0|0 0. 31000 Pfund Seide kosten also 203050 Hyperpyra. Dieser Wert hätte sich aber auch direkt aus $31000 \cdot 6\frac{11}{20}$ Hyperpyra bestimmen lassen.
"Pflichtgemäß" stellt der Autor auch noch die Umkehrfrage nach dem Gewicht *(wie viel Tausend Pfund?)* der Seide, die man für 203050 Hyperpyra kaufen kann. (Der obige Pfundpreis für Seide wird dabei stillschweigend vorausgesetzt, denn er taucht wieder in der Rechnung auf.) Dazu werden beide Geldwerte in Kukkia verwandelt und dividiert: 203050 Hyperpyra = 4061000 Kukkia, 6 Hyperpyra 11 Kukkia = 131 Kukkia, 4061000 : 131 = 31000. (Im Divisionsdiagramm hat der Schreiber vergessen, auch die letzten beiden Nullen von 4061000 als verbrauchte Ziffern zu streichen.) Ergebnis: Für 203050 Hyperpyra kann man — bei einem Pfundpreis von 6 Hyperpyra 11 Kukkia — 31000 Pfund Seide kaufen. Der Schreiber nimmt dieses Ergebnis zum Anlass für einen Vergleich mit der Ausgangsaufgabe (als Umkehrung dieser Umkehrung) und deren Resultat.
Anschließend weist er darauf hin, dass jede ähnliche Frage, bei der der Wert von Florinen, Tieren oder Pfunden in Hyperpyra zu berechnen ist, mit der vorliegenden Methode (Dezimalbruchmethode) gelöst werden kann. Dabei erwähnt er auch wieder die Umkehraufgabe (Berechnung der Anzahl der Florine, Tiere oder Pfunde, wenn der Gesamtbetrag in Hyperpyra gegeben ist).
Als zweite Methode zur Lösung dieser Aufgaben wird unter Bezug auf die "erste Florin-Aufgabe" der Dreisatz angeführt. Dabei ist nicht klar, ob der Autor tatsächlich das 1. Beispiel von Kap. 72 meint, wo bereits eine einfache Multiplikation zum Ziel führt. Die Dreisatzmethode im Zusammenhang mit Florinen findet man in den Kapiteln 72 (unterer Rand von fol. 41^{r}), 73 und 75.
Dies alles sei durch die verschiedenen Beispiele gut veranschaulicht worden.

Die genannten Methoden seien aber nur dann notwendig, wenn der Wert der einzelnen Florine, Tiere oder Pfunde (neben Hyperpyra) auch noch Kukkia enthalte. Andernfalls genüge eine Multiplikation, die hier etwas umständlich beschrieben wird. Es ist natürlich die Multiplikation der jeweiligen Anzahl mit dem Einzelpreis gemeint.
Ist umgekehrt nach der Anzahl der Florine oder Tiere gefragt (hier fehlen die Pfunde), die für einen bestimmten Hyperpyra-Betrag eingewechselt bzw. gekauft werden können, und sind in den Einheitsgrößen bzw. Stückpreisen keine zusätzlichen Kukkia enthalten, sondern nur ganzzahlige Hyperpyra-Werte, so ist lediglich der Hyperpyra-Betrag durch die Einheitsgröße (bzw. den Stückpreis) zu dividieren — so äußert sich unser Autor sinngemäß. (Die Pfunde hat er in seiner weitschweifigen Erklärung wieder aufgegriffen.)

78 *Über sehr viele und verschiedene Zentner und Rhetula — ein leichtes Begreifen, wie viele Hyperpyra die gesamte Größe von diesen wird*

Angenommen, ein Kaufmann habe irgendeine Ware gekauft. Als diese gewogen wurde, entstanden 133 Zentner und 17 Rhetula. Der Zentner aber ist 100 Rhetula. Er hat aber den Zentner für 13 große Hyperpyra gekauft, die auch goldene genannt werden; dieses goldene Hyperpyron hat einen Wert von 24 Kukkia. Du suchst aber von den 133 Zentnern und 17 Rhetula zu wissen, wie viele Hyperpyra es werden. Du kannst es so erfahren ...

Für die Münzeinheit Gold- oder großes Hyperpyron (ὑπέρπυρον χρυσόν oder μέγα) sowie für die Gewichtseinheiten Zentner (καντάρι(ον)) und Rhetulon (ῥέτουλον, das schwere Pfundgewicht) sei auf den metrologischen Teil dieser Arbeit verwiesen. Diese Maßeinheiten begegnen uns in diesem Kapitel zum ersten Mal.



Zunächst beschreibt der Autor, wie er den Anfang des Diagramms entwickelt hat. Oben werden 133 Zentner 17 Rhetula geschrieben. Die nächste Zeile, 13317, kommentiert er aber nicht: Es handelt sich natürlich um das Gesamtgewicht in Rhetula. Unter dieser Zahl, nach rechts eingerückt (περὶ τὸ τέλος, also ans Ende) setzt er 13, den Preis für 1 Zentner in Goldhyperpyra. Er will 13317 mit 13 multiplizieren und weist zuvor auf die angeblich ungewöhnliche Position des Faktors 13 hin, der üblicherweise seitlich geschrieben werde. (Vgl. die Kapitel 6, 8, 10, 12, 14 zur "seitlichen" Multiplikation und Kap. 16 zur ebenfalls unterschiedlichen "Haus"-Multiplikation.) Bei dieser Aufgabe aber sei es besser, ihn so wie im Diagramm zu positionieren. Es komme dabei dasselbe heraus.
Dazu ist anzumerken, dass das hier gewählte Schema und Verfahren im westlichen Abendland schon in der frühen Neuzeit weitverbreitet waren und heute noch in romanischen Ländern dominieren.

Zuerst ist laut Autor 1 3 3 1 7 mit 3 zu multiplizieren, dann mit 1 an der Zehnerstelle. Dabei weist er nicht mehr eigens darauf hin, dass beim zweiten Schritt eingerückt werden muss. Ohne vorher die Teilprodukte aus dem Diagramm anzugeben, nennt er sofort das gesamte Produkt 1 7 3 1 2 1. (Es handelt sich hierbei um den 100-fachen Preis in Goldhyperpyra von 133 Zentnern 17 Rhetula.) Nach Abstreichen zweier Stellen – *denn bei der vorliegenden Aufgabe* [gemeint ist der vorliegende Aufgabentyp] *werden jedes Mal zwei Stellen abgestrichen* – erhält man 1731 Hyperpyra. Statt dieser wenig hilfreichen apodiktischen Formulierung hätte unser Autor das Verfahren mit der Parität 1 Zentner = 100 Rhetula begründen können. *Die zwei Stellen aber, die du abgestrichen hast, bezeichnen 21. Multipliziere die 21 mit den 24 Kukkia, von denen wir sagten, dass jedes Goldhyperpyron ihren Wert hat, wie es sich in Konstantinopel bei den Handelsgeschäften verhält ...* Dies ist die einzige Textstelle im 1. Teil ("Buch") des Rechenbuchs, an der die Hauptstadt des Byzantinischen Reiches erwähnt wird. Es folgt die Berechnung $21 \cdot 24 = 504$, wobei im Diagramm wieder die Struktur des ersten Multiplikationsschemas und dasselbe Rechenverfahren zu finden sind. Nach erneutem Abstreichen zweier Stellen gelangt der Schreiber zum Zwischenergebnis 1731 Hyperpyra 5 Kukkia. Es bleibt 0 4 übrig, also 4. Da hier 1 Kukki den Wert von 8 Turnesia hat, ist $4 \cdot 8$ zu berechnen. Das Ergebnis wird im Text und im Diagramm in der Form 0 3 2 notiert. Weiteres Abstreichen zweier Stellen führt zu 0 Turnesi, also zu 1731 Hyperpyra 5 Kukki (0 Turnesi), da das Turnesi die kleinste Münzeinheit ist. Doch der Autor beschäftigt sich im Text weiter mit dem Rest und fragt danach, wie viele Viertel eines Turnesi darin noch enthalten sind. Dazu berechnet er $4 \cdot 32 = 128$ und streicht wieder zwei Stellen ab. Das Gesamtergebnis lautet nun 1731 Hyperpyra 5 Kukkia $\frac{1}{4}$ Turnesi. Aus den abgetrennten 2 8 lasse sich aber nichts nehmen, was für etwas Größeres geeignet wäre, sie würden als unnütz zurückbleiben. Vermutlich hat der Autor das Viertel eines Turnesi untersucht, weil 4 die kleinste Zahl ist, die – mit 32 multipliziert – zu einem Produkt größer als 100 führt. Am unteren Rand von fol. 43^{r} findet sich noch eine Bemerkung zum Turnesi-Bruchteil:
Der Schreiber erklärt, dass der fragliche Bruchteil mit Vierteln oder Fünfteln nicht ganz zu erfassen sei, sondern es verbleibe immer ein *Teil* (μέρος), den man dabei nicht erfasse. Zur vollständigen Erfassung des Rests seien 100 Rhetula = 1 Zentner in den Nenner zu setzen. Gemeint ist aber nur die Zahl 100, und so betrachtet der Autor auch den Bruch $\frac{32}{100}$, den er zu $\frac{8}{25}$ kürzt. Damit hat er den vollständigen Turnesi-Bruchteil angegeben. Man sieht, dass $\frac{1}{3}$ Turnesi ein besserer Näherungswert gewesen wäre als $\frac{1}{4}$ Turnesi ($\frac{1}{4} < \frac{8}{25} < \frac{1}{3}$).
Mit unserer heutigen Dezimalbruchschreibweise hätten wir insgesamt so gerechnet: $133{,}17 \cdot 13$ Goldhyperpyra = 1731,21 Goldhyperpyra; 0,21 Goldhyperpyra = 5,04 Kukkia; 0,04 Kukkia = 0,32 Turnesi; 133 Zentner 17 Rhetula kosten also 1731 Goldhyperpyra 5 Kukkia 0,32 Turnesi.

Es folgt eine weitere Aufgabe desselben Typs.
Derselbe Kaufmann hat 159 Zentner und 65 Rhetula gekauft, wobei ein Zentner jetzt 21 Goldhyperpyra kostet. Wieder ist der Gesamtpreis gesucht.

Mit einem Diagramm, das zu dem der vorigen Aufgabe analog ist, illustriert der Autor seine Rechenschritte, die er außerdem auch wieder im Text ausführlich beschreibt:
15965 · 21 Goldhyperpyra = 335265 Goldhyperpyra [100-facher Gesamtpreis] ⇾ 3 3 5 2|6 5 [3352 Goldhyperpyra $\frac{65}{100}$ Goldhyperpyra]; 65 · 24 Kukkia = 1560 Kukkia [100-fache Anzahl der Kukkia] ⇾ 1 5|6 0 [15 Kukkia $\frac{60}{100}$ Kukkia]; 60 · 8 Turnesia = 480 Turnesia [100-fache Anzahl der Turnesia] ⇾ 4 | 8 0 [4 Turnesia $\frac{80}{100}$ Turnesia]. *Und weil du keine kleinere Währung* (χάραγμα) *als Turnesi hast, multipliziere die 80 Turnesia mit 4, was Viertel eines Turnesi sind* ...: 320 [100-fache Anzahl der Viertel eines Turnesi] ⇾ 3|2 0 [$\frac{3}{4}$ Turnesia]. Im Haupttext lässt der Autor den Rest 2 0 unberücksichtigt und erhält insgesamt 3352 Goldhyperpyra 15 Kukkia 4 Turnesia $\frac{3}{4}$ Turnesia [sic]. Am linken Rand von fol. 43^{v} schreibt er aber: *Anstelle der* $\frac{3}{4}$ *nimm lieber* $\frac{80}{100}$, *was* $\frac{4}{5}$ *eines Turnesi sind.*
Im Vergleich dazu würde unsere heutige Rechnung lauten: 159,65 · 21 Goldhyperpyra = 3352,65 Goldhyperpyra; 0,65 Goldhyperpyra = 15,6 Kukkia; 0,6 Kukkia = 4,8 Turnesia = $4\frac{4}{5}$ Turnesia.
159 Zentner 65 Rhetula kosten also 3352 Goldhyperpyra 15 Kukkia $4\frac{4}{5}$ Turnesia.

79 *Wenn der Zentner 17 Hyperpyra kostet, wie viel Hyperpyra die 22 Rhetula kosten — eine leichte Lösungsfindung*

Angenommen, jeder Zentner kostet 17 goldene Hyperpyra, die auch große genannt werden. Du suchst aber, wenn der Zentner 17 Hyperpyra kostet, die 22 Rhetula, wie viel Hyperpyra sie kosten. Der Zentner ist nämlich 100 Rhetula.
Die Aufgabe ist hinsichtlich des Zentnerpreises redundant formuliert, und auch die Bezeichnungsvariante für die Goldhyperpyra sowie die Umrechnung von 1 Zentner in Rhetula aus Kap. 78 werden wiederholt.
Auch diesmal beschreibt der Autor seine Rechnung sehr ausführlich und hält sie außerdem wieder in einem Diagramm fest. Er geht dabei so vor:
22 · 17 Hyperpyra = 374 Hyperpyra [100-facher Gesamtpreis] ⇾ 3|7 4 [$3\frac{74}{100}$ Hyperpyra]; 74 · 24 Kukkia = 1776 Kukkia [100-fache Anzahl der Kukkia] ⇾ 1 7|7 6 [$17\frac{76}{100}$ Kukkia]; 76 · 8 = 608 [100-fache Anzahl der Turnesia] ⇾ 6|0 8 [$6\frac{8}{100}$ Turnesia]; 0 8 · 4 Viertel eines Turnesi = 0 3 2 Viertel eines Turnesi [100-fache Anzahl der Viertel eines Turnesi] ⇾ 0|3 2. Die Umrechnung in Turnesi-Viertel liefert also keinen neuen Beitrag. Gesamtergebnis: 3 Hyperpyra 17 Kukkia 6 Turnesia
Am linken Rand von fol. 43^{v} schreibt der Autor in Bezug auf den bisher vernachlässigten Rest, dass man $\frac{8}{100}$ bzw. $\frac{2}{25}$ (Turnesia) nehmen soll.
Unsere Rechnung wäre 0,22 · 17 Hyperpyra = 3,74 Hyperpyra; 0,74 Hyperpyra = 17,76 Kukkia; 0,76 Kukkia = 6,08 Turnesia = $6\frac{2}{25}$ Turnesia; insgesamt ergeben sich 3 Hyperpyra 17 Kukkia $6\frac{2}{25}$ Turnesia

In einer zweiten Aufgabe kostet der Zentner 21 Hyperpyra, und der Preis von 95 Rhetula ist gesucht.
Erneut wird die Lösung ausführlich beschrieben, und man findet wieder ein Diagramm. Die Rechnung soll hier nur in Kurzform (ohne Münzeinheiten) vor-

gestellt werden:
95 · 21 = 1995 ⇒ 1 9 | 9 5; 95 · 24 = 2280 ⇒ 2 2 | 8 0; 80 · 8 = 640 ⇒ 6 | 4 0; 40 · 4 = 160 ⇒ 1 | 6 0. Dabei werden die Zahlen 640 und 160 im Text nicht explizit genannt.
Resultat: 19 Hyperpyra 22 Kukkia 6 Turnesia $\frac{1}{4}$ Turnesi [sic]
Am linken Rand von fol. 43^{v} empfiehlt der Autor, $\frac{40}{100}$ Turnesia bzw. $\frac{2}{5}$ Turnesia anstelle von $\frac{1}{4}$ Turnesi zu nehmen.
Am unteren Rand von fol. 43^{v} weist er außerdem noch darauf hin, dass die vorliegende Methode dem Dreisatz entspricht:
1 Zentner kostet 21 Hyperpyra — wie viel kosten 159 Zentner 65 Rhetula? (neue Aufgabe)
100 Rhetula kosten 17 Hyperpyra — wie viel kosten 22 Rhetula? (1. Aufgabe)
Die Hyperpyra in diesem Kapitel sind stets als Goldhyperpyra zu verstehen.

80 *Wie dies auch mit Florinen und kleinen Hyperpyra und bei jeder anderen Währung nützlich ist*

Diese beiden Aufgaben [vgl. Kap. 78 und 79] *zu den Zentnern und Rhetula werden nicht allein bei den großen Hyperpyra, die wir auch als goldene bezeichnen, sondern auch bei Florinen, kleinen Hyperpyra und bei jeder anderen Währung für nützlich befunden.*
Angenommen, jemand hat 131 Zentner und 86 Rhetula gekauft, jeden Zentner für 3 Florin. Der Florin aber habe den Wert von 8 kleinen Hyperpyra. Du suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra sich ergeben.
Darüber hinaus sind natürlich auch die anteiligen Florine, Kukkia und Turnesia gesucht.
Erst aus der Rechnung des Autors geht hervor, dass 1 kleines Hyperpyron im Unterschied zum großen der früher einfach als Hyperpyron bezeichneten Münzeinheit mit einem Wert von 20 Kukkia anstatt von 24 Kukkia entspricht und dass wieder — wie zuletzt in Kap. 52 — 1 Kukki = 4 Turnesia (und nicht mehr 1 Kukki = 8 Turnesia) gilt. Insgesamt lautet das Währungssystem: 1 Florin = 8 kleine Hyperpyra, 1 kleines Hyperpyron = 20 Kukkia, 1 Kukki = 4 Turnesia.
Die Lösung der Aufgabe wird im Text wieder ausführlich beschrieben, und ein Diagramm dient wieder der Illustration. Da es methodisch nichts Neues gibt, soll die Rechnung nur in Kurzform notiert werden, und zwar ohne Einheiten:
13186 · 3 = 39558 ⇒ 3 9 5 | 5 8; 58 · 8 = 464 ⇒ 4 | 6 4; 64 · 20 = 1280 ⇒ 1 2 | 8 0; 80 · 4 = 320 ⇒ 3 | 2 0; 20 · 5 = 100 ⇒ 1 | 0 0
Ergebnis: 395 Florin 4 (kleine) Hyperpyra 12 Kukkia 3 Turnesia $\frac{1}{5}$ Turnesi
Etwas kurios ist die Bemerkung am rechten Rand von fol. 44^{r} zum Turnesi-Bruchteil: *Anstatt* $\frac{1}{5}$ *nimm* $\frac{20}{100}$, *was wieder* $\frac{1}{5}$ *eines Turnesi ist.*
Unsere Dezimalbruchrechnung im Vergleich: 131,86 · 3 = 395,58; 0,58 · 8 = 4,64; 0,64 · 20 = 12,8; 0,8 · 4 = 3,2 mit demselben Ergebnis wie oben.

81 ***Wenn der Zentner 4 Florin kostet, die 86 Rhetula — wie viel Florine und kleine Hyperpyra sie kosten***

(Natürlich ergeben sich auch wieder Kukkia- und Turnesia-Beträge.)

Bei dieser Aufgabe liegt dasselbe Währungssystem zugrunde, nur die Maßzahlen sind verändert. Erstaunlich ist deshalb, dass sich der Autor zu keiner kürzeren Lösungsdarstellung entschließen konnte, und auch auf das große Diagramm hat er nicht verzichtet.

Seine Rechnung in Kurzform:

$86 \cdot 4 = 344 \rightarrow 3|4\,4$; $44 \cdot 8 = 352 \rightarrow 3|5\,2$; $52 \cdot 20 = 1040 \rightarrow 10|40$; $40 \cdot 4 = 160 \rightarrow 1|6\,0$; $60 \cdot 5 = 300 \rightarrow 3|0\,0$

Ergebnis: 3 Florin 3 Hyperpyra 10 Kukkia 1 Turnesi $\frac{3}{5}$ Turnesia

(Im Lösungstext heißen die kleinen Hyperpyra einfach Hyperpyra.)

Die Bemerkung zum Turnesi-Bruchteil dieser Aufgabe ist wieder kurios: Am rechten Rand von fol. 44^{r} schreibt der Autor, dass man anstelle von $\frac{3}{5}$ den Bruch $\frac{60}{100}$ nehmen soll, was wieder $\frac{3}{5}$ Turnesia seien.

Abschließend weist der Autor darauf hin, dass man ebenso verfahren kann, wenn der Zentnerpreis ein Betrag in kleinen Hyperpyra ohne Florine ist.

82 ***Wie man es machen muss, wenn du Zentner größer als 100, Rhetula aber kleiner als 10 aufsuchst***

In einem einleitenden Text erklärt der Autor sinngemäß, dass man Aufgaben mit Zentnern und Rhetula so wie bisher lösen kann, wenn die Anzahl der Rhetula 10 oder mehr beträgt. Dazu verweist er auf die vorher behandelten Beispiele.

Wenn du aber Zentner aufsuchst, so viele du willst, Rhetula aber weniger als 10, mache es so ... Also angenommen, du suchst 20 Zentner und 5 Rhetula, jeden Zentner für 17 Hyperpyra, wie viele Hyperpyra sich ergeben. Setze oben die 20 Zentner, wie du es gewöhnlich tust. Die 5 Rhetula aber — setze diese nicht an die dritte Stelle, sondern an die vierte. An die dritte Stelle aber setze 0 ...

Für den mit dem Stellenwertsystem noch nicht so vertrauten byzantinischen Leser wäre eine anschließende Begründung hilfreich gewesen, etwa dass die Zehnerstelle der Rhetula nicht besetzt ist. Konnte man in den vorangegangenen Kapiteln 78–81 die Ziffern der Beträge von Zentnern und Rhetula einfach aneinanderreihen, so muss man jetzt die Stellenwerte genau beachten. Auch heutige Schüler begehen mitunter den Fehler, 1 Euro 4 Cent in der Form 1,4 Euro zu schreiben. Insofern liefert dieses Kapitel eine nützliche Instruktion zur Fehlervermeidung.

Zur Lösung der Aufgabe: $17 \cdot 2005 = 34085 \rightarrow 34|0|85$; $85 \cdot 20 = 1700 \rightarrow 17|00$

Die Zahlen 2005, 34085 und 1700 finden sich explizit nur im Diagramm, was aber kaum zur Verkürzung des Lösungstexts beiträgt.

Ergebnis: 20 Zentner 5 Rhetula, jeder Zentner für 17 kleine Hyperpyra, kosten 340 Hyperpyra 17 Kukkia. Eine (teilweise) Umwandlung der Hyperpyra in Florine erfolgt hier nicht.

Diese Einführungsaufgabe hat didaktisch gesehen den Vorteil, dass sich hier eine Diskussion um die Turnesi-Bruchteile erübrigt, sodass sich der Leser ganz

auf die Problematik der Stellenwerte konzentrieren kann.
In einer zweiten Aufgabe ist der Preis von 231 Zentnern 4 Rhetula (= 23104 Rhetula) gesucht, wenn 1 Zentner 21 Hyperpyra kostet.
Auf eine erneute Beschreibung der Lösungsmethode kann hier verzichtet werden. Es kommen – wieder ohne (teilweise) Umwandlung der Hyperpyra in Florine – 4851 Hyperpyra 16 Kukkia $3\frac{1}{5}$ Turnesia heraus. (1 Kukki = 4 Turnesia)
Anschließend betont der Autor noch einmal, dass vor einer Anzahl von Rhetula, die kleiner als 10 ist, eine 0 gesetzt werden muss. Dies – so fährt er sinngemäß fort – gelte aber nicht für Aufgaben, bei denen der Zentnerpreis gegeben ist und nach dem Preis für eine bestimmte Anzahl von reinen Rhetula gesucht wird. Das ist natürlich richtig, da unbesetzte Stellenwerte hier nur bei gemischten Gewichten (Zentner/Rhetula) auftreten können. Der Autor bezieht sich auf das "erste Problem", aber nicht in Kap. 78, sondern nur in den Kapiteln 79 und 81 werden Aufgaben behandelt, bei denen der Preis reiner Rhetula-Gewichte berechnet wird.

83 *Wenn 1000 Pfund 75 Florin kosten, oder wie viele auch immer du sagst, das "Kentenari" und das "Dekari" und die "Monade" – wie viel sie entsprechend kosten*

Angenommen, 1000 Pfund kosten 75 Florin, jeder Florin aber 8 Hyperpyra. Wenn nun 1000 Pfund 75 Florin kosten, das Kentenari, das auch Kantari genannt wird, das sind 100 Pfund, und das Dekari, das sind 10 Pfund, und die Monade, das ist 1 Pfund – du suchst zu wissen, wie viel jede Reihe von ihnen entsprechend kostet ...
Das hier genannte Kantari unterscheidet sich also offenbar von dem früheren Zentner mit gleicher Bezeichnung, der sich in 100 Rhetula unterteilt (s. Kap. 78–82).

Chiliade	1000 Pfund	kosten	75 Florin	
Kantari	100 Pfund	kosten	715 Florin: $\frac{5}{10}$	sind 4 Hyperpyra
Dekari	10 Pfund	kosten	610 Hyperpyra	
Monade	1 Pfund	kostet	1210 Kukkia	

Der Autor beschreibt nun den Aufbau des oben stehenden Diagramms und berechnet nacheinander die Preise für 100, 10 und 1 Pfund, die dort zu finden sind. Er erhält sie durch fortlaufendes Abstreichen einer Stelle, wobei er schrittweise in kleinere Währungseinheiten umwandelt, offenbar um eine Null vor dieser Stelle zu vermeiden, wozu aber keine Veranlassung besteht. Man vergleiche z. B. den Preis für 10 Pfund in der heutigen Schreibweise 0,75 Florin: 0,75 Florin = $\frac{3}{4}$ Florin = 6 Hyperpyra.
Zur Rechnung des Autors: 100 Pfund kosten 715 Florin, $\frac{5}{10}$ Florin sind 4 Hyperpyra, 100 Pfund kosten also 60 Hyperpyra; 10 Pfund kosten 610 Hyperpyra = 120 Kukkia. (Diese bekannte Umrechnung ist wieder dem Text zu entnehmen.) 1 Pfund kostet 1210 Kukkia, also 12 Kukkia.
Der Autor stellt noch ein zweites Beispiel vor, wieder mit Diagramm und aus-

führlicher Beschreibung der Lösung im Text. Dabei gilt wieder 1 Florin = 8 Hyperpyra und 1 Hyperpyron = 20 Kukkia, wie sich der Rechnung entnehmen lässt. 1000 Pfund sollen jetzt 150 Florin kosten.
Die Lösung soll hier nur skizziert werden.
100 Pfund — 15|0 Florin; 10 Pfund — 1|5 Florin, $\frac{5}{10}$ (Florin) sind 4 Hyperpyra, insgesamt: 10 Pfund — 1 Florin 4 Hyperpyra = 12 Hyperpyra; 1 Pfund — 1|2 Hyperpyra, $\frac{2}{10}$ (Hyperpyra) sind 4 Kukkia.
Ergebnis: 100 Pfund kosten 15 Florin, 10 Pfund kosten 1 Florin 4 Hyperpyra, 1 Pfund kostet 1 Hyperpyron 4 Kukkia.
Das Kapitel schließt mit dem Hinweis, dass jede andere gleichartige Frage mit dieser Methode beantwortet werden kann.

84 *Wenn du Tausender und Hunderter und Zehner und Einer kennst, wie viel jede Reihe von ihnen kostet, wie man wissen kann, wie viel 3 Tausender* [3000 Pfund] *4 Zentner 7 Dekaria* [70 Pfund] *und 9 Pfund kosten*

Angenommen, du weißt, dass der Tausender [1000 Pfund] *75 Florin, der Zentner 7 Florin und 4 Hyperpyra, das Dekari* [10 Pfund] *6 Hyperpyra und die Monade* [Einheit], *d. h. 1 Pfund, 12 Kukkia kosten. Du suchst 3 Tausender* [3000 Pfund] *und 4 Zentner und 7 Dekaria* [70 Pfund] *und 9 Pfund zu kaufen oder zu verkaufen. Du suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra dies alles entsprechend kostet.*
Du kannst dies wissen durch die Toleta, wie sie auf Italienisch genannt wird, — wie wohl jemand in unserer Sprache sagen würde, durch die Tauleta —, mit der die Kinder das Tafelschreiben pflegen.
Die etymologische Erklärung des Autors ist zutreffend, auch wenn man eher ein italienisches *tavoletta* hätte erwarten können. Die Methode, die im Deutschen als Tolletrechnung bezeichnet wird, stammt zweifellos aus der italienischen Kaufmannsarithmetik.

der Tausender	Florin	7	5		Tausender	3	Florin	2 2 5	
der Zentner	Florin	7	Hyp.	4	Zentner	4	Florin	3 0	
10 Pfund			Hyp.	6	10 Pfund	7	Florin	5	Hyp. 2
1 Pfund			Kukkia	1 2	1 Pfund	9	Hyp.		Hyp. 5 Kukkia 8
					zusammen		Florin	2 6 0	Hyp. 7 Kukkia 8

Der Autor, der die Tolletrechnung mit dem vorigen Kapitel gewissermaßen vorbereitet hat, beschreibt ausführlich den Aufbau der obigen Tafel (Tabelle) und den Rechengang. Offensichtlich gelten wieder die Paritäten 1 Florin = 8 Hyperpyra, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia.
Alle Daten der linken Tabellenspalte sind von vornherein bekannt — dabei hätte nur ein Preis zur Berechnung der anderen vorgegeben werden müssen. Rechts anschließend stehen die Vielfachen der dezimalen Positionen gemäß der Aufgabe und ganz rechts die zugehörigen Preise: $3 \cdot 75$ Florin = 225 Florin, $4 \cdot$ (7 Florin 4 Hyperpyra) = 28 Florin 16 Hyperpyra = 30 Florin, $7 \cdot 6$ Hyperpyra = 42 Hyperpyra = 5 Florin 2 Hyperpyra, $9 \cdot 12$ Kukkia = 108 Kukkia = 5 Hyperpyra 8 Kukkia.

Die Summe ergibt 260 Florin 7 Hyperpyra 8 Kukkia, den Preis für das Gesamtgewicht von 3479 Pfund.
Unser byzantinischer Autor hat keine weiteren Aufgaben dieser Art behandelt. Die vorliegende Aufgabe ist aber so einfach, dass man überhaupt noch nicht beurteilen kann, ob die Tolletrechnung bei bestimmten Problemen vorteilhafte Lösungswege bietet.
Deshalb soll hier noch auf ein Beispiel aus dem Bamberger Rechenbuch von 1483 eingegangen werden [SCHRÖDER 1988, 41^r–43^r (S. 87–89)].
Es geht dort um den Kauf von 4367 lb (Pfund) 29 Lot 3 Quent Ingwer, wobei 1 lb mit 13 ß (Schilling in Gold) angesetzt wird. Es gelten die Umrechnungen 1 fl (Gulden) = 20 ß, 1 ß = 12 Heller, 1 lb = 32 Lot, 1 Lot = 4 Quent.
Die Tafel hat ungefähr folgende Gestalt:

4	M	650 fl				2600 fl			
3	C	65 fl				195 fl			
6	X	6 fl	10 ß			39 fl			
7	lb		13 ß			4 fl	11 ß		
2	X		$\frac{130}{32}$	$\frac{260}{32}$ ß			12 ß	1 hell	$\frac{1}{32}$
9	Lot		$\frac{13}{32}$	$\frac{117}{32}$ ß					
3	Quent		$\frac{13}{128}$	$\frac{39}{128}$ ß	facit	2839 fl	3 ß	1 hell	$\frac{1}{32}$

Die Preise für die ganzzahligen Pfundgewichte stehen in den ersten vier Zeilen rechts, die Preise für die Gewichte mit Untereinheiten von Pfund werden in den letzten drei Zeilen in der Mitte ausgerechnet und in der fünften Zeile rechts summiert. Die Gesamtsumme steht unter dem Strich. (10 Pfund und 10 Lot haben dasselbe Zeichen X.)
Diese Aufgabe lässt sich natürlich auch ohne Tolletrechnung lösen.
Man kann $(4367 + \frac{29}{32} + \frac{3}{32 \cdot 4})$ lb = $4367\frac{119}{128}$ lb rechnen und die Maßzahl mit 13 ß multiplizieren: $4367\frac{119}{128} \cdot 13$ ß = $56783\frac{11}{128}$ ß = 2839 fl $3\frac{11}{128}$ ß = 2839 fl 3 ß $1\frac{1}{32}$ Heller
Eine andere Möglichkeit besteht in der Umrechnung auf die kleinste Gewichtseinheit und anschließender Lösung mit Dreisatz: 4367 lb 29 Lot 3 Quent = 559095 Quent, 128 Quent kosten 13 ß. Der Gesamtpreis beträgt also $\frac{13 \cdot 559095}{128}$ ß = $56783\frac{11}{128}$ ß = ... (s. o.)
Die Tolletrechnung scheint hier zumindest nicht ungeschickter zu sein als die beiden anderen Rechenwege. Sie sollte damals gerade gegenüber dem Dreisatz, der bei nicht dezimal strukturierten Größenbereichen erheblichen Rechenaufwand mit sich bringen kann, zur Rechnungserleichterung dienen, ist aber häufig noch umständlicher. Ein anderes Verfahren, von dem man jahrhundertelang glaubte, dass es schneller als der "normale" (durch die oben genannten Größenbereiche erschwerte) Dreisatz durchzuführen sei, war die Welsche Praktik, auf die wir nicht weiter eingehen müssen, da unser Autor sie nicht behandelt. Vgl. hierzu VOGEL [1978, S. 73–76] und DESCHAUER [2010, S. 153–163].

Außer im Bamberger Rechenbuch von 1483 wird die Tolletrechnung, was den deutschsprachigen Raum betrifft, noch in folgenden Werken behandelt:
im Algorismus Ratisbonensis (aus der Mitte des 15. Jh.) [VOGEL 1954, S. 164], im Bamberger Rechenbuch von 1482 [VOGEL o. J. (1949/50), S. 249 ff.], bei WIDMANN [1508, 32^{r} ff., 116^{v}], APIAN [1527, Aa 3^{v}–Bb 3^{r}], STIFEL [1546, S. 273 f.] und GEHRL [1577, S. 128–131]. Es steht zu vermuten, dass auch in italienischen Quellen, die noch deutlich früher als unsere Handschrift zu datieren sind, die Tolletrechnung auftritt. Andererseits scheint sie seit dem 17. Jahrhundert völlig aus den Rechenbüchern verschwunden zu sein.
Weiterführend zu dem Thema sollen noch folgende Titel genannt werden: TREUTLEIN [1877, S. 99], UNGER [1888, S. 94 f.], CANTOR [1900, S. 225], VOGEL [1978, S. 76–79] und TROPFKE [1980, S. 365]

85 *Wie man wissen kann, wie viele Hyperpyra du gewinnen kannst, indem du das Pfund mit 15 Unzen für ein Pfund mit 12 Unzen gibst und umgekehrt*

Angenommen, du hast irgendeine Ware von 1500 Pfund erhalten auf einer Waage, die gewöhnlich Staterin genannt wird, jedes Pfund für 5 Hyperpyra, jedes Pfund des Staterin [Waagebalken, Waage] *aber habe 15 Unzen. Du hast aber die 1500 Pfund zu jeweils 5 Hyperpyra auf einer anderen Waage verkauft, die für jedes Pfund 12 Unzen hat, die gewöhnlich auch 12-Unzen-Waage genannt wird, jedes Pfund der 1500 wieder für 5 Hyperpyra. Du suchst aber zu wissen, wie viele Pfund sich mehr als 1500 ergeben haben, indem du das Pfund mit den 15 Unzen auf eine Waage mit 12 Unzen gibst, und wie viele Hyperpyra du aus demselben Grund, den wir sagen, gewonnen hast. Du kannst dies durch die Dreisatzregel erfahren.*
Die 4 Pfund des Staterin mit den [jeweils] 15 Unzen ergeben 5 Pfund mit den jeweils 12 Unzen auf der Waage, die – wie wir sagten – auch 12-Unzen-Waage genannt wird; denn 4 mal 15 geben 60 und 5 mal 12 geben 60. Wenn nun 4 Pfund 5 ergeben, wie viele ergeben die 1500 Pfund?
Der Autor rechnet nach dem Dreisatz: $5 \cdot 1500 = 7500$, $7500 : 4 = 1875$. Es kommen also 1875 Pfund heraus, 375 Pfund mehr als vorher. Wegen des Pfundpreises von 5 Hyperpyra beträgt der Gewinn 1875 Hyperpyra.
Es folgt eine Probe:
1500 Pfund kosten $5 \cdot 1500$ Hyperpyra = 7500 Hyperpyra, 1875 Pfund kosten $5 \cdot 1875$ Hyperpyra = 9375 Hyperpyra, 9375 Hyperpyra – 7500 Hyperpyra = 1875 Hyperpyra.
Und das Umgekehrte. *Angenommen, du hast vielmehr das Gegenteil getan. Du hast auf die 12-Unzen-Waage 1500 Pfund empfangen, jedes Pfund für 5 Hyperpyra. Du hast diese 1500 Pfund auf das Staterin mit den 15 Unzen gegeben, jedes Pfund wieder für 5 Hyperpyra. Du suchst zu wissen, wie viel Pfund ausgefallen sind und wie viele Hyperpyra sich als Schaden ergeben.*
Der Autor argumentiert sinngemäß so: Da nun 5 Pfund auf der 12-Unzen-Waage 4 Pfund auf dem Staterin entsprechen, werden nun aus 1500 Pfund auf der 12-Unzen-Waage 1200 Pfund auf dem Staterin, das sind 300 Pfund weniger. Es

entsteht also ein Verlust von 1500 Hyperpyra.
Anschließend gibt der Autor noch zwei Begründungen dafür an, dass die Lösung dieser Umkehraufgabe korrekt ist.
1. Begründung (hier nur in Kurzform): $5 \cdot 1500$ Hyperpyra = 7500 Hyperpyra, $5 \cdot 1200$ Hyperpyra = 6000 Hyperpyra, 7500 Hyperpyra – 6000 Hyperpyra = 1500 Hyperpyra (Schadenssumme)
2. Begründung, mit dem Dreisatz: Wegen der Gleichheit der Produkte $4 \cdot 1500$ und $5 \cdot 1200$ (jeweils = 6000) sei das Ergebnis richtig. Mehr schreibt er dazu nicht. Offenbar können diese Identitäten als Probe bei der Lösung des folgenden (sehr naheliegenden) Dreisatzes dienen: 5 Pfund verhalten sich zu 4 Pfund wie 1500 Pfund zu 1200 Pfund.

Nach SCHILBACH [1970, S. 278 f.] gab es eine λίτρα λογαρική (Rechnungspfund) und eine λίτρα σουάλια (gebräuchliches Pfund, von lat. *libra usualis*), jeweils in 12 Unzen unterteilt. Die λίτρα λογαρική war ungefähr so schwer wie 1,25 λίτραι σουάλιαι, sodass 12 Rechnungsunzen 15 gebräuchlichen Unzen entsprachen. Auch in unserer Aufgabe wiegt das schwerere Pfund (mit 15 Unzen) das $1\frac{1}{4}$-fache des leichteren Pfundes (mit 12 Unzen), doch die Unzen sind hier jeweils gleich schwer, wie sich aus der Rechnung des Autors ergeben hat.

Auf die kaufmännische Situation reduziert, geht es in der 1. Aufgabe darum, dass jemand ein schwereres Pfund für 5 Hyperpyra kauft und ein leichteres für denselben Preis verkauft, d. h. ein schwereres für $6\frac{1}{4}$ Hyperpyra. Der Gewinn an jedem schwereren Pfund beträgt $1\frac{1}{4}$ Hyperpyra.
In der Umkehraufgabe kauft jemand 1 leichteres Pfund für 5 Hyperpyra und verkauft ein schwereres für denselben Preis, d. h. ein leichteres für 4 Hyperpyra. Der Verlust an jedem leichteren Pfund beträgt 1 Hyperpyron.

86 *Die zwei tauschenden Händler, von denen der eine Wolle verkaufen, der andere Tuch und Florine geben kann, um die Wolle zu erhalten, auf welche Weise euch klarer aufgezeigt werden wird*

Es seien zwei Händler, die miteinander tauschen, und der eine kann Wolle verkaufen, der andere Tuch. Und der, der die Wolle hat, vereinbarte für das Kentenari — um dasselbe zu sagen, für das Kantari [Zentner] *— 16 Florin. Derjenige aber, der das Tuch hat, vereinbarte, die Hälfte der 16 Florin, 8 Florin, als Geld zu geben, die anderen 8 als Tuch. Er vereinbarte aber, jede Elle für einen Preis von 6 Florin zu geben, wobei die Elle nicht mehr als 4 Florin wert ist. Du suchst nun zu wissen, um wie viel der Zentner, die Wolle, weniger herauskommt, der für 16 Florin vereinbart wurde, dadurch dass die Elle für einen Preis von 6 Florin entgegengenommen wird, die 4 Florin wert ist.*
Der Autor überlegt sinngemäß so:
Der Käufer der Wolle gibt 8 Florin in bar und $1\frac{1}{3}$ Ellen Tuch, da er 1 Elle für 6 Florin, $\frac{1}{3}$ Elle also für 2 Florin ansetzt, was insgesamt 16 Florin für 1 Zentner Wolle ergibt, wie der Verkäufer der Wolle gefordert hat. Die 8 Florin, die der Käufer der Wolle mit Tuch bezahlt, sind aber in Wirklichkeit nur $\frac{8 \cdot 4}{6}$ Flo-

rin = $5\frac{1}{3}$ Florin wert. Er hat insgesamt also nur $13\frac{1}{3}$ Florin für den Zentner Wolle bezahlt, wodurch ein Fehlbetrag von $2\frac{2}{3}$ Florin entstanden ist. – Bei dieser Rechnung spielen die eingangs ermittelten $1\frac{1}{3}$ Ellen Tuch keine Rolle. Anders verhält es sich aber beim zweiten Lösungsweg, den der Autor anschließend vorstellt:
$1\frac{1}{3}$ Ellen haben in Wirklichkeit nur einen Wert von $5\frac{1}{3}$ Florin; 8 Florin + $5\frac{1}{3}$ Florin = $13\frac{1}{3}$ Florin; der Fehlbetrag lautet wieder $2\frac{2}{3}$ Florin pro Zentner Wolle.
Die folgende Rechnung wäre schneller gewesen:
8 Florin : 6 Florin = $1\frac{1}{3}$, die Anzahl der Ellen, die nur einen Wert von $5\frac{1}{3}$ Florin anstatt von 8 Florin haben. Fehlbetrag pro Zentner Wolle: $2\frac{2}{3}$ Florin.

87 *Wie dies auch bei sehr vielen Zentnern nützlich ist*

Angenommen, derjenige, der die Wolle hat, hat vereinbart, an den, der die Tücher hat, 31 Zentner Wolle zu geben, jeden Zentner für 18 Florin. Der aber, der das Tuch hat, hat vereinbart, den halben Preis der 31 Zentner in bar zu geben, den anderen halben Preis in Tüchern, die Elle, die einen Wert von 4 Florin hat, wieder für 6 Florin. Du suchst zu wissen, um wie viel derjenige, der die Wolle hat, bei den 31 Zentnern dadurch geschädigt werden wird, dass er die Elle zu den 4 Florin für einen Preis von 6 Florin entgegennimmt.
Da die vorliegende Aufgabe der vorangegangenen ähnelt, kann der Lösungsweg des Autors verkürzt nachvollzogen werden:
$9 \cdot 31 = 279$ (halber Preis für die 31 Zentner Wolle in Florin), $2 \cdot 279 = 558$ (voller Preis in Florin). Der Käufer der Wolle gibt 279 Florin und so viele Ellen Tuch zum Verkaufspreis von je 6 Florin, dass dabei zusätzlich ein Preis von 279 Florin herauskommt. Diese haben in Wirklichkeit aber nur einen Wert von $279 \cdot \frac{4}{6}$ Florin = 186 Florin (Zwischenprodukt im Text: 1116): Schwund von 279 Florin zu 186 Florin; 186 Florin + 279 Florin = 465 Florin, 558 Florin – 465 Florin = 93 Florin (Verlust des Wollhändlers) [Der Autor schreibt mehrfach 83 statt 93.]
Es folgen noch die Frage nach der Anzahl der Ellen, die der Tuchhändler dem anderen gegeben hat, und dazu die Rechnung: $279 : 6 = 46\frac{1}{2}$, $186 : 4 = 46\frac{1}{2}$ (Anzahl der Ellen, auf zweierlei Weisen berechnet). *Und die Ellen sind sowohl mit dem Preis der 6 Florine als auch mit dem Preis der 4 Florine* $46\frac{1}{2}$.
Wir würden wohl so rechnen:
$279 : 6 = 46\frac{1}{2}$, d. h. der Tuchhändler gibt $46\frac{1}{2}$ Ellen, die aber nur $46\frac{1}{2} \cdot 4$ Florin = 186 Florin wert sind. Der Verlust für den Wollhändler beträgt (279 – 186) Florin = 93 Florin.

88 *Wie dies auch bei der Seide nützlich ist*

Angenommen, jemand verkauft 3500 Pfund Seide, das Dekari [10 Pfund] *für 70 Hyperpyra. Und die Hälfte der 70 Hyperpyra, die die Hyperpyra eines Dekari sind, vereinbarte der Käufer als reine Hyperpyra zu geben, das sind 35 Hyperpyra. Die anderen 35 aber vereinbarte er in Form von Silber und Tüchern zu geben, die 21 Hyperpyra für 3 Unzen fein verarbeitetes Silber, die 14 Hyperpyra für 1 Elle. Bei den 3 Unzen, dem Silber, gingen aber 3 Hyperpyra verloren,*

denn die 3 Unzen, die der Käufer gibt, haben einen Wert von 18 Hyperpyra, der Verkäufer aber erhält das Silber mit dem Wert von 18 Hyperpyra für einen Preis von 21 Hyperpyra. Ebenso erhält er auch die Elle, das Tuch, die einen Wert von 12 Hyperpyra hat, für einen Preis von 14. Er büßt aber auf die Elle 2 Hyperpyra ein. Es gingen bei den 35 Hyperpyra des halben Preises 5 Hyperpyra verloren, und anstatt der 35 Hyperpyra nimm vielmehr 30 Hyperpyra. Du suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra bei den 3500 Pfund schwinden, indem man Silber und Tuch nimmt, welche die 35 Hyperpyra des halben Preises der 70 Hyperpyra eines Dekari zu 30 Hyperpyra machen.

Der Autor rechnet so:

3500 Pfund = 350 Dekaria (schriftlich gerechnet!), 350 · 35 Hyperpyra = 12250 Hyperpyra (halber Preis von 3500 Pfund), 2 · 12250 Hyperpyra = 24500 Hyperpyra (voller Preis von 3500 Pfund), 12250 · 30 Hyperpyra = 367500 Hyperpyra, 367500 Hyperpyra : 35 = 10500 Hyperpyra (tatsächlicher Wert von Silber und Tuch, was der Autor aber nicht vermerkt), 12250 Hyperpyra (Bargeld) + 10500 Hyperpyra = 22750 Hyperpyra (tatsächlicher Kaufpreis für die Seide, ohne entsprechenden Vermerk des Autors), Verlust insgesamt (wird nicht vorgerechnet): 1750 Hyperpyra (= 24500 Hyperpyra - 22750 Hyperpyra)

Und anders leichter ...

Der Autor stellt nun folgende Überlegung an: 3500 Pfund = 350 Dekaria; 1 Dekari wird nur mit (35 + 30) Hyperpyra = 65 Hyperpyra anstelle mit 70 Hyperpyra bezahlt; 350 · 65 Hyperpyra = 22750 Hyperpyra; es ergibt sich wieder derselbe Schwund gegenüber dem Gesamtpreis von 3500 Pfund. (Die 24500 Hyperpyra werden nicht mehr genannt.)

Anschließend stellt unser Schreiber die Frage nach der Anzahl der Unzen Silber und der Ellen Tuch, die der Verkäufer erhalten hat, und löst sie folgendermaßen:

Der halbe Preis für einen Dekari wird mit 21 Hyperpyra in Form von Silber und mit 14 Hyperpyra in Form von Tuch bezahlt. Diese Beträge stehen im Verhältnis 3 : 2, die zugehörigen Anteile werden zunächst fälschlich mit *3 Dritteln* und *2 Dritteln* angegeben. Der halbe Preis für 3500 Pfund Seide beträgt 12250 Hyperpyra. 3 + 2 = 5, 12250 Hyperpyra : 5 = 2450 Hyperpyra, 3 · 2450 Hyperpyra = 7350 Hyperpyra (Anteil des Silbers am halben Preis für die Seide), 2 · 2450 Hyperpyra = 4900 Hyperpyra (Anteil des Tuchs). Kontrolle: Die Summe ergibt wieder 12250 Hyperpyra. Jede Unze kostet den Verkäufer 7 Hyperpyra, jede Elle 14 Hyperpyra. Das ergibt 7350 : 7 Unzen = 1050 Unzen Silber und 4900 : 14 Ellen = 350 Ellen Tuch. (Anschließend wiederholt der Autor die Resultate zum Schwund des Preises für 3500 Pfund.)

Es folgen zwei recht interessante Proben für die richtige Bestimmung der Unzen- und Ellenanzahl.

Die erste: Der Verkäufer büßt pro Unze 1 Hyperpyron ein, d. h. bei 1050 Unzen 1050 Hyperpyra, außerdem pro Elle 2 Hyperpyra, d. h. bei 350 Ellen 700 Hyperpyra. Die Schadenssumme beträgt 1750 Hyperpyra.

Die zweite: 12250 Hyperpyra - 1750 Hyperpyra = 10500 Hyperpyra (tatsächlicher Wert von Silber und Tuch, ohne Vermerk durch den Autor), 10500 Hyperpyra : 5

= 2100 Hyperpyra, 3 · 2100 Hyperpyra = 6300 Hyperpyra, 2 · 2100 Hyperpyra = 4200 Hyperpyra. Also hat von den 10500 Hyperpyra das Silber einen Anteil von 6300 Hyperpyra, das Tuch einen Anteil von 4200 Hyperpyra (Kontrolle durch Summenbildung). Der wahre Wert einer Unze beträgt 6 Hyperpyra, 6300 Hyperpyra : 6 Hyperpyra = 1050, d. h. es kommen wieder 1050 Unzen Silber heraus. Der wahre Wert einer Elle beträgt 12 Hyperpyra, 4200 Hyperpyra : 12 Hyperpyra = 350, und das ist wieder die Anzahl der Ellen Tuch.

Ebenso auch jede andere Frage, die zu dieser ähnlich ist — du kannst mithilfe dieser gleichen Methode gut das Gesuchte erfahren in dem Fall, wenn du den Schwund des Silbers und der Tücher, bezogen auf das Dekari, wissen kannst.
Wenn du aber den Schwund, bezogen auf das Dekari, nicht wissen kannst, aber auf den gesamten Preis, mache es so. Angenommen, man hat wieder 350 Dekaria Seide vorgefunden, das sind — wie wir sagten — 3500 Pfund. Der Käufer hat wiederum 70 Hyperpyra für das Dekari vereinbart. In Bezug auf den gesamten Preis für die 3500 Pfund — um dasselbe zu sagen, für die 350 Dekaria — vereinbarte er, den halben Preis in Form von reinen Hyperpyra zu geben, den anderen halben Preis — drei Teile von diesem in Form von Silber, jede Unze für 7 Hyperpyra, die 6 Hyperpyra wert ist, zwei Teile von diesem in Form von Tüchern, jede Elle für 14 Hyperpyra, die 12 Hyperpyra wert ist. Du suchst aus dem ganzen Preis zu wissen, wie viele Hyperpyra ihm [dem Verkäufer] *verloren gehen, dadurch dass er die Unze zu den 6 Hyperpyra für 7 Hyperpyra entgegennimmt und die Elle zu den 12 Hyperpyra für 14 Hyperpyra, und wie viele Unzen Silber er nehmen kann und wie viele Ellen Tuch.*
Der Autor löst nun dieselbe Aufgabe, indem er den Verlust von Hyperpyra nicht auf 1 Dekari bezieht, sondern direkt aus dem halben Verkaufspreis berechnet.
Die 350 (Dekaria) sollen dem Text zufolge nicht mit 70, sondern nur mit 35 Hyperpyra multipliziert werden: 350 · 35 Hyperpyra = 12250 Hyperpyra (halber Preis von 3500 Pfund); 2 · 12250 Hyperpyra = 24500 Hyperpyra (voller Preis von 3500 Pfund). Nun weist der Schreiber auf das frühere Verfahren hin: 12250 Hyperpyra : 5 = 2450 Hyperpyra, 3 · 2450 Hyperpyra = 7350 Hyperpyra, 2 · 2450 Hyperpyra = 4900 Hyperpyra, wobei 7350 Hyperpyra dem Silberanteil, 4900 Hyperpyra dem Tuchanteil von den 12250 Hyperpyra entspricht. Zur Kontrolle wird noch einmal die Summe der Anteile bestimmt (= 12250 Hyperpyra). 7250 : 7 = 1050 (Anzahl der Unzen Silber), 4900 : 14 = 350 (Anzahl der Ellen Tuch): Der Autor erinnert an diese bereits aus der früheren Rechnung bekannten Werte.
Nun würden — so der Autor — 1 Hyperpyron Verlust pro Unze und 2 Hyperpyra Verlust pro Elle bedeuten, dass man 1050 Hyperpyra von 1050 Unzen und 2 · 350 Hyperpyra von 350 Ellen abziehen müsse — eine fehlerhafte Ausdrucksweise, aber die weitere Rechnung ist korrekt. Er berechnet 1750 Hyperpyra als Gesamtverlust und subtrahiert diesen von 24500 Hyperpyra (Gesamtpreis für die Seide): 22750 "reine" Hyperpyra hat der Verkäufer empfangen, und das ist der tatsächlich entrichtete Kaufpreis für die Seide.
Und siehe, auch aus dem ganzen Preis der 24500 Hyperpyra hast du den Ausfall 1750 Hyperpyra gefunden — und das Silber 1050 Unzen, das Tuch 350 Ellen — so

wie du es früher auch gefunden hast vom Preis der 70 Hyperpyra für 1 Dekari. Der Autor hat diese Aufgabe, auch wenn sie nicht besonders anspruchsvoll ist, sehr eingehend bearbeitet und variantenreich gelöst.

Bis ins 17. Jahrhundert hinein, zumal in Zeiten verminderten Geldumlaufs oder der Geldentwertung, spielte der Warentausch noch eine gewisse Rolle. Dabei hatte sich seit dem 13. Jahrhundert, vor allem in Italien, die Gepflogenheit herausgebildet, den Preis einer Ware beim Tausch ("Stich") höher anzusetzen als bei Barzahlung. Um beiderseits Nachteile zu vermeiden, mussten die Geschäftspartner ihre Waren entsprechend teurer anbieten. Die Preisberechnung für einen fairen Warentausch ist das eigentliche Anliegen der betreffenden Aufgaben, und insofern sind die drei Probleme in den Kapiteln 86–88 nicht typisch. Es ist merkwürdig, dass unser Autor nicht danach gefragt hat, wie sich die Verkäufer der Wolle in Kap. 86, 87 und der Seidenverkäufer in Kap. 88 vor Übervorteilung hätten schützen können (z. B. bei jeweils unveränderten Barzahlungsbeträgen in Kap. 86: 20 Florin statt 16 Florin pro Zentner Wolle; in Kap. 87: $22\frac{1}{2}$ Florin statt 18 Florin pro Zentner Wolle; in Kap. 88: $75\frac{5}{6}$ Hyperpyra statt 70 Hyperpyra pro Dekari Seide). Ein in dieser Hinsicht typisches Beispiel ist beim Schreiber B (HUNGER/VOGEL [1963, Nr. 67, S. 52 f.]) zu finden.
Für weitere Details zum Warentausch sei auf VOGEL [1978, S. 68–73] und DESCHAUER [2012, S. 171–173] verwiesen.

Nun folgen sechs Kapitel, die sich der praxisbezogenen Anwendung der Dreisatzmethode widmen, speziell dem Dreisatz bei Größen mit gemischten Zahlen. Der Autor hatte den Dreisatz an früherer Stelle (Kap. 53–56) weitgehend abstrakt eingeführt.

89 *Wenn $2\frac{1}{2}$ Pfund Seide $2\frac{1}{3}$ Florin kosten, die $3\frac{1}{2}$ Florin – wie viel Pfund Seide sie ergeben*

Nach einer Wiederholung der Aufgabenstellung bemerkt der Autor: *Dies ist nun eine ähnliche Frage wie jene, die wir vorher im ⟨ ⟩ Kapitel besprochen haben, denn man findet auch diese mithilfe der Dreisatzmethode.* Die Nummer des Kapitels fehlt, aber offenbar wollte der Autor sie noch nachtragen, da er einen entsprechenden Platz gelassen hat. In erster Linie bietet sich Kap. 54 an, in dem Brüche beim Dreisatz eingeführt worden waren.
Die Reihenfolge der Größen, wie sie in der Kapitelüberschrift und in der Aufgabenstellung vorliegt, ist für die Dreisatzrechnung zu ändern: Die Einheit des ersten und dritten Stücks muss Florin, die des zweiten (und des gesuchten) Stücks Pfund sein, wie man es später in der "Umkehraufgabe" auch sieht. Unser Autor achtet aber nicht darauf und rechnet dennoch korrekt:
$2\frac{1}{2}$ Pfund = $\frac{5}{2}$ Pfund, $2\frac{1}{3}$ Florin = $\frac{7}{3}$ Florin, $\frac{5}{2} \times \frac{7}{3}$: $3 \cdot 5 = 15$ (Multiplikator), $2 \cdot 7 = 14$ (Teiler); $3\frac{1}{2} \cdot 15 = \frac{1}{2} \cdot 15 + 3 \cdot 15 = 52\frac{1}{2}$ (Florin) – diese Rechnung wird in einem Multiplikationsdiagramm durchgeführt. *Da du nicht gut die $52\frac{1}{2}$ durch die 14 teilen kannst ... die $52\frac{1}{2}$ ergeben 105 Halbe, und die 14 ergeben 28 Halbe* ... Anstatt also direkt $\frac{105}{2} : 14 = \frac{105}{28}$ zu rechnen, werden Dividend

und Divisor zunächst gleichnamig gemacht. Der Quotient aus 105 Halben und 28 Halben, nämlich $3\frac{21}{28}$ bzw. $3\frac{3}{4}$, liefert die gesuchte Pfundzahl.

Und umgekehrt: Wenn $2\frac{1}{3}$ Florin der Preis von $2\frac{1}{2}$ Pfund sind, sind die $3\frac{1}{2}$ Florin der Preis für wie viele Pfund?

Es handelt sich eigentlich um keine Umkehraufgabe, bei der das in der vorherigen Aufgabe gesuchte Ergebnis ($3\frac{3}{4}$ Pfund) gegeben und eine der dort gegebenen Größen gesucht wäre. Hier sind gegenüber der Ausgangsaufgabe lediglich die ersten beiden Stücke des Dreisatzes sprachlich vertauscht und stehen jetzt in der richtigen Reihenfolge (... Florin – ... Pfund – ... Florin), sodass sich am Ergebnis nichts ändert. Der Autor führt dennoch eine ausführliche Rechnung vor:

$2\frac{1}{3}$ Florin = $\frac{7}{3}$ Florin, $2\frac{1}{2}$ Pfund = $\frac{5}{2}$ Pfund; es folgt wieder ein Kreuzdiagramm, und zwar $\frac{7}{3} \times \frac{5}{2}$, bei dem die Brüche gegenüber dem Diagramm in der Ausgangsaufgabe vertauscht sind. Das Produkt aus dem Nenner des zweiten Bruchs mit dem Zähler des ersten ist nun der Teiler, das Produkt aus dem Nenner des ersten Bruchs mit dem Zähler des zweiten ist nun der Multiplikator. (Vorher war es umgekehrt.) Darauf weist der Autor auch eigens hin. Natürlich ist $2 \cdot 7 = 14$ wieder der Teiler und $3 \cdot 5 = 15$ wieder der Multiplikator. Schließlich folgen wieder die Rechenschritte $3\frac{1}{2} \cdot 15 = 52\frac{1}{2} = \frac{105}{2}$ (Florin), $14 = \frac{28}{2}$; $\frac{105}{2} : \frac{28}{2} = 3\frac{3}{4}$ (gesuchte Anzahl der Pfunde).

Abschließend weist der Autor darauf hin, dass beide Aufgaben dasselbe Ergebnis haben. Dabei hätte er die erste Aufgabe besser weglassen sollen.

90 *Wie dies auch bei sehr vielen Pfunden nützlich ist*

Angenommen, du suchst zu wissen, wenn 250 Pfund Seide 225 Florin kosten, wie viele Pfund Seide den $337\frac{1}{2}$ Florin gemäß demselben entsprechenden Preis zukommen

Auch hier treten die Größen in der für den Dreisatz vorgesehenen Reihenfolge (... Florin – ... Pfund – ... Florin) erst bei der "Umkehrung" auf. Dennoch rechnet der Autor richtig, aber sehr umständlich. Anstatt $337\frac{1}{2}$ mit 250 zu multiplizieren und anschließend durch 225 zu dividieren, setzt er ein Kreuzdiagramm an, in dem die Zahlen 250 und 225 künstlich als Brüche mit dem Nenner 1 dargestellt werden: $^{\text{Pfunde}}\frac{250}{1} \times {}^{\text{Florine}}\frac{225}{1}$. Offenbar legt er Wert auf eine Analogie zum Verfahren bei der Aufgabe des letzten Kapitels, bei der gebrochene Maßzahlen auftraten. Erst die Über-Kreuz-Multiplikationen $1 \cdot 250$ und $1 \cdot 225$ liefern ihm den Multiplikator 250 und den Teiler 225. Nun multipliziert er im Text erst $\frac{1}{2}$ mit 250, danach 337 mit 250, und addiert, während er für die Multiplikation $250 \cdot 337\frac{1}{2}$ ein einheitliches Diagramm verwendet. Das Produkt 84375 wird schließlich durch 225 dividiert. Das Ergebnis ist 375, d. h. $337\frac{1}{2}$ Florin sind der Preis von 375 Pfund Seide.

Es folgt eine Probe:

225 Florin + $\frac{1}{2} \cdot 225$ Florin = 225 Florin + $112\frac{1}{2}$ Florin = $337\frac{1}{2}$ Florin; 250 Pfund entsprechen 225 Florin, deshalb entsprechen $337\frac{1}{2}$ Florin 375 Pfund, denn es gilt: 250 Pfund + $\frac{1}{2} \cdot 250$ Pfund = 250 Pfund + 125 Pfund = 375 Pfund

Der Autor greift hier die Proportionalitätsbeziehung beim Dreisatz auf:

$337\frac{1}{2}$ Florin = $\frac{3}{2} \cdot 225$ Florin, sodass sich das gesuchte Gewicht mithilfe von $\frac{3}{2} \cdot 250$ Pfund berechnen lässt. Sein anschließender Hinweis darauf, dass diese Probe nicht bei allen Aufgaben nützlich sei, bezieht sich wohl nur auf den hier vorliegenden Wert $1\frac{1}{2}$. Bei anderen Proportionalitätsfaktoren kann man natürlich in gleicher Weise vorgehen.

Anschließend bespricht der Autor die "Umkehrung" der Aufgabe, d. h. die Stücke des Dreisatzes stehen jetzt in der richtigen Reihenfolge (... Florin – ... Pfund – ... Florin). Gegenüber der Ausgangsaufgabe sind im Kreuzdiagramm die Brüche vertauscht, und wie in Kap. 89 geht er auf die Frage ein, welche Zahl als Multiplikator und welche als Teiler dient. Die Rechnung ist dieselbe wie vorher.

Abschließend stellt er noch eine echte Umkehraufgabe:

Wenn 250 Pfund 225 Florin kosten, die 375 Pfund – wie viel Florin kosten sie?

Seine Rechnung: $375 \cdot 225 = 84375$, $84375 : 250 = 337\frac{125}{250} = 337\frac{1}{2}$, d. h. $337\frac{1}{2}$ Florin

Zum Vergleich zieht er noch die Ausgangsaufgabe mit ihrem Ergebnis hinzu.

91 *Wenn das Webzeug, das Tuch, 544 Hyperpyra kostet, die 11 Ellen, die du zu kaufen suchst, – wie viele Hyperpyra sie kosten*

Angenommen, das Webzeug, das Tuch, habe 17 Ellen, es kosten aber die 17 Ellen 544 Hyperpyra. Du suchst 11 Ellen für denselben entsprechenden Preis zu kaufen, von dem wir sagten, dass die 17 Ellen 544 Hyperpyra kosten. Du suchst aber auch danach, wie viele Hyperpyra du zu geben hast, um 11 Ellen zu empfangen.

Die Kapitelüberschrift ist unvollständig, da der Preis für das Tuch ohne Angabe der Ellenanzahl genannt wird. Der Autor hat dies in der Aufgabenstellung aber nachgeholt.

Wie üblich multipliziert der Autor zunächst und dividiert danach, also $544 \cdot 11 = 5984$, $5984 : 17 = 352$. (Die andere Reihenfolge wäre hier vorteilhaft gewesen: $544 : 17 = 32$, $32 \cdot 11 = 352$.) 11 Ellen kosten also 352 Hyperpyra.

Und dies geschieht immer so, wenn auch die drei Teile ganzzahlig sind ... Wenn sie aber ein Halbes und ein Drittel haben, geschieht es auf andere Art, wie wir früher sagten.

Dementsprechend soll jetzt eine Dreisatzaufgabe behandelt werden, bei der die Maßzahlen der drei Stücke gemischte Zahlen sind:

Ein anderes Webzeug nämlich habe $16\frac{1}{2}$ Ellen. Es kosten aber die $16\frac{1}{2}$ Ellen 592 Hyperpyra und $\frac{3}{4}$ eines Hyperpyrons. Du suchst 9 Ellen und $\frac{1}{3}$ einer Elle zu kaufen. Wie viele Hyperpyra kosten die 9 Ellen und $\frac{1}{3}$ entsprechend?

Nach dem Hinweis darauf, dass die drei Größen (Stücke) *nicht gänzlich ganzzahlig* seien (ἐπεὶ οὖν καὶ τὰ τρία μέρη οὐκ ἐστι ἐξόλου ἀκέραια), beginnt der Autor mit der Rechnung:

$16\frac{1}{2}$ Ellen = $\frac{33}{2}$ Ellen, $9\frac{1}{3}$ Ellen = $\frac{28}{3}$ Ellen; Gegenüberstellung der beiden Brüche im Kreuzdiagramm: $\frac{33}{2} \times \frac{28}{3}$; Über-Kreuz-Multiplikationen $3 \cdot 33 = 99$ (Teiler), $2 \cdot 28 = 56$ (Multiplikator); $56 \cdot 592\frac{3}{4}$ Hyperpyra = $56 \cdot \frac{3}{4}$ Hyperpyra + $56 \cdot 592$ Hyperpyra = 42 Hyperpyra + $56 \cdot 592$ Hyperpyra = 33194 Hyperpyra; $33194 : 99 = 335\frac{29}{99}$. $9\frac{1}{3}$ Ellen kosten demnach $335\frac{29}{99}$ Hyperpyra.

Der Aufwand bei unserer Rechnung wäre auch nicht geringer: $9\frac{1}{3}$ Ellen kosten $(592\frac{3}{4} : 16\frac{1}{2}) \cdot 9\frac{1}{3}$ Hyperpyra = $\frac{2371 \cdot 2}{4 \cdot 33} \cdot \frac{28}{3}$ Hyperpyra = $\frac{2371 \cdot 14}{99}$ Hyperpyra usw. Der Autor merkt weiter an, dass man nicht gut erkennen kann, in welchem Verhältnis der verbliebene Bruch zu 1 Hyperpyron steht, und wandelt dieses in 80 Turnesia um, indem er die Kukkia überspringt (1 Hyperpyron = 20 Kukkia, 1 Kukki = 4 Turnesia). Dann rechnet er $80 \cdot 29 = 2320$, $2320 : 99 \approx 23\frac{1}{2}$. Im zugehörigen Divisionsdiagramm findet sich das genaue Ergebnis $23\frac{43}{99}$, das dort zu $23\frac{2}{5}$ abgerundet wird, was der Autor durch den Zusatz *um etwas Kleines mehr* (βραχ(ύ) τι πλεῖο) kenntlich macht. Der Näherungswert $23\frac{2}{5}$ ist etwas besser als der durch Aufrundung entstandene Wert $23\frac{1}{2}$.
Der Aufgabentext schließt mit der Feststellung, dass $9\frac{1}{3}$ Ellen 335 Hyperpyra 5 Kukkia und ungefähr $3\frac{1}{2}$ Turnesia kosten, wobei stillschweigend 20 Turnesia in 5 Kukkia verwandelt worden sind. In der linken Zeile unter dem Diagramm hat sich der Autor beim Turnesi-Bruchteil verschrieben: dort muss *ungefähr* $\frac{1}{2}$ statt *ungefähr* $\frac{1}{5}$ stehen.

92 *Und umgekehrt: Wenn die 11 Ellen, die du zu kaufen suchst, 352 Hyperpyra kosten, die 17 Ellen, das gesamte Webzeug — wie viele Hyperpyra kosten sie entsprechend?*

Die erste Aufgabe von Kap. 91 ist jetzt so abgeändert, dass das dort gesuchte Stück (352 Hyperpyra) gegeben und das dort gegebene Stück (544 Hyperpyra) gesucht ist. Der Autor weist darauf hin, dass jetzt nicht wie vorher mit 11, sondern mit 17 multipliziert werden muss. Es folgt die Rechnung $352 \cdot 17 = 5984$, $5984 : 11 = 544$, also mit dem Ergebnis, dass 17 Ellen 544 Hyperpyra kosten. Zum Vergleich wird noch einmal die Ausgangsaufgabe mit ihrem Resultat hinzugezogen. Der Autor betont abschließend erneut, dass das Rechenverfahren nur bei ganzzahligen Größen im Dreisatz anwendbar sei; andernfalls müsse man nach der anderen, oben besprochenen Methode vorgehen.

93 *Wenn die 8 Hyperpyra anwachsen und 15 Hyperpyra werden, die 100 Hyperpyra gemäß demselben Verhältnis — wie viele Hyperpyra sie werden*

Angenommen, ein Kaufmann erbat von einem reichen Mann irgendwelche Hyperpyra mit einer solchen Vereinbarung, 1 Jahr nach dem Handelsgeschäft anstelle der 8 Hyperpyra 15 Hyperpyra zurückzugeben, das sind 7 Hyperpyra Gewinn. Es bat aber der Kaufmann darum, von dem Reichen 100 Hyperpyra zu empfangen. Du suchst zu wissen, wenn die 8 Hyperpyra mit ihrem Gewinn 15 werden, wie er zu geben versprach, die 100 Hyperpyra, die er zu nehmen erbat — wie viele werden daraus, wenn sie in entsprechender Weise anwachsen?
Rechnung:
$100 \cdot 15 = 1500$ (Rechendiagramm!), $1500 : 8 = 187\frac{1}{2}$, d. h. der Kaufmann muss dem Reichen nach 1 Jahr $187\frac{1}{2}$ Hyperpyra bzw. 187 Hyperpyra 10 Kukkia zurückgeben.

Es schließt sich eine weitere Aufgabe dieser Art an:
Der Kaufmann soll für je 12 geliehene Hyperpyra 18 zurückgeben (hier wird keine Frist genannt) und leiht sich 1150 Hyperpyra. Wie viel ist er schuldig?
Rechnung:
$1150 \cdot 18 = 20700$, $20700 : 12 = 1725$, also 1725 Hyperpyra
Danach weist der Autor erneut darauf hin, dass diese Rechenmethode nur dann anwendbar ist, wenn die drei Stücke im Dreisatz ganzzahlig sind. Andernfalls habe man die andere Methode zu wählen, bei der die Brüche kreuzweise zu multiplizieren sind.

94 ***Und umgekehrt:***
Wenn die 15 Hyperpyra schwinden und 8 werden,
die 100 Hyperpyra — wie viele werden sie gemäß demselben Verhältnis?

Diese Aufgabe wird ohne Einbettung in einen kaufmännischen Zusammenhang gestellt.
Im Hinblick auf die erste Aufgabe des vorigen Kapitels erklärt der Autor, dass 100 Hyperpyra mit 8 (und nicht wie vorher mit 15) zu multiplizieren und dann 800 durch 15 (und nicht wie vorher durch 8) zu dividieren seien.
Ergebnis: $53\frac{1}{3}$ Hyperpyra
Im Divisionsdiagramm steht zusätzlich noch der ungekürzte Bruch $\frac{5}{15}$. Der Autor hat auf eine weitere Umwandlung von $\frac{1}{3}$ Hyperpyron in Kukkia und Turnesia verzichtet (6 Kukkia $2\frac{2}{3}$ Turnesia).
Zum Schluss folgt fast wörtlich wieder derselbe Hinweis wie am Ende von Kap 93.

95 ***Derjenige, der 100 Florin verliehen hat, der jährliche Zins von diesen 20 Florin — wie groß ist dabei der jährliche und monatliche Zins nicht von den 100 Florin, sondern von einem jeden der 100 Florin?***

Angenommen, jemand hat irgendeinem anderen 100 Florin geliehen. Der Empfänger versprach dem, der diese besaß, um der Schuld willen jedes Jahr 20 Florin zu geben. Du suchst zu wissen, was der jährliche und der monatliche Zins von jedem der 100 Florin ist; jeder Florin habe den Wert von 8 Hyperpyra. Du kannst dies auf zweierlei Weisen wissen.
Die erste Art.
Der Autor betrachtet das Verhältnis von 20 Florin Jahreszins und 100 Florin Kapital (κεφάλαιον), also $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. 1 Florin erbringt somit einen Jahreszins von $\frac{1}{5}$ Florin, und es gilt: 1 Florin = 8 Hyperpyra = 160 Kukkia. Daher stimmt dieser Jahreszins auch mit 32 Kukkia oder 1 Hyperpyron 12 Kukkia überein. Der Monatszins wird hier noch nicht berechnet.
Die zweite Art.
Der Autor rechnet 20 Florin : 5 = 4 (Florin) = 32 (Hyperpyra). Dann argumentiert er: Wie 4 der 5. Teil von 20 sei, so seien die 32 Kukkia der 5. Teil von 160 Kukkia bzw. von 8 Hyperpyra (= 1 Florin). Damit seien 32 Kukkia der Jahreszins von 1 Florin. Klarer wird diese Überlegung, wenn man die Umrechnung $\frac{1}{5}$ Florin = $\frac{32}{20}$ Hyperpyra = 32 Kukkia betrachtet.

Jetzt wird auch der Monatszins für 1 Florin berechnet: Er beträgt $\frac{32}{12}$ Kukkia = $2\frac{2}{3}$ Kukkia = 2 Kukkia $2\frac{1}{3}$ Turnesia, woraus sich eine neue Parität für das Kukki ergibt, nämlich 1 Kukki = $3\frac{1}{2}$ Turnesia, ohne dass der Autor den Leser darüber informiert.

In der nächsten Aufgabe geht es um 15 Florin Jahreszins für 100 Florin. Der Autor rechnet wieder nach der "zweiten Art", und wieder dividiert er den Jahreszins durch 5. Es kommen 3 Florin bzw. 24 Hyperpyra heraus. Der Jahreszins für 1 Florin beträgt daher 24 Kukkia, der Monatszins 2 Kukkia. (Begründung: $\frac{15}{100}$ Florin = $\frac{24}{20}$ Hyperpyra = 24 Kukkia)

In der folgenden Aufgabe soll für 100 Florin ein Jahreszins von 16 Florin gelten. Wieder dividiert der Autor durch 5: $\frac{16}{5}$ Florin = $3\frac{1}{5}$ Florin = $25\frac{3}{5}$ Hyperpyra, sodass sich $25\frac{3}{5}$ Kukkia als Jahreszins für 1 Florin ergeben (nicht für 100 Florin, wie der Autor versehentlich schreibt). $\frac{3}{5}$ Kukkia werden jetzt noch in Turnesia umgewandelt, wobei das Kukki seinen Wert gegenüber der vorletzten Aufgabe wieder geändert hat: 1 Kukki = 4 Turnesia. Der Jahreszins für 1 Florin beträgt also, anders geschrieben, 25 Kukkia $2\frac{2}{5}$ Turnesia. Es wird kein Monatszins berechnet.

Der Autor hat bei der Lösung seiner Zinsaufgaben die zweite Methode favorisiert, die man allgemeiner so formulieren kann: Seien n Florin der Jahreszins von 100 Florin, so sind $\frac{n}{5}$ Florin = $\frac{8n}{5}$ Hyperpyra der Jahreszins von 20 Florin und somit $\frac{8n}{5}$ Kukkia der Jahreszins von 1 Florin. Die Maßzahlen der Hyperpyra und der gesuchten Kukkia stimmen also überein. Man könnte hier von vorteilhaftem Rechnen sprechen — die Parität 1 Hyperpyron = 20 Kukkia wird vorteilhaft genutzt —, wenn die Aufgaben nicht so einfach wären.

96 *Wenn die 100 Florin in 9 Monaten einen Zins von 10 Florin erbringen, wie viel jeder Florin im Monat und wie viel im Jahr gewinnt — insgesamt auch die 100 Florin, wie viel sie im Jahr gewinnen*

Nach einer Wiederholung der Aufgabenstellung beginnt der Autor mit der Rechnung:

10 Florin = 80 Hyperpyra = 1600 Kukkia (Zins von 100 Florin in 9 Monaten), 1600 Kukkia : 100 = 16 Kukkia, schriftlich gerechnet! (Zins von 1 Florin in 9 Monaten), 16 Kukkia : 9 = $1\frac{7}{9}$ Kukkia, 7 Kukkia = 28 Turnesia, $\frac{28}{9}$ Turnesia = $3\frac{1}{9}$ Turnesia; der Monatszins von 1 Florin beträgt 1 Kukki $3\frac{1}{9}$ Turnesia.

Zur Berechnung des Jahreszinses von 1 Florin: Der Autor wiederholt die berechneten Zinsen für 9 Monate und für 1 Monat, die jeweils 1 Florin erbringt. Den 9 Monaten fehlen 3 Monate zu 12 Monaten, daher werden jetzt die Zinsen von 1 Florin für 3 Monate bestimmt: $3 \cdot$ (1 Kukki $3\frac{1}{9}$ Turnesia) = ... = 5 Kukkia $1\frac{3}{9}$ Turnesia (1 Kukki = 4 Turnesia). Die Addition zu den Zinsen von 1 Florin für 9 Monate ergibt den Jahreszins von 1 Florin: 21 Kukkia $1\frac{3}{9}$ Turnesia. (Der Autor kürzt nicht.)

Nun fehlt noch die Berechnung der Jahreszinsen von 100 Florin. Dazu hätte der Autor den letzten Zinsbetrag mit 100 multiplizieren können: 2100 Kukkia $\frac{4}{3} \cdot 100$ Turnesia = 2133 Kukkia $1\frac{1}{3}$ Turnesia = 106 Hyperpyra 13 Kukkia $1\frac{1}{3}$ Tur-

nesia = 13 Florin 2 Hyperpyra 13 Kukkia $1\frac{1}{3}$ Turnesia. Doch er will einen anderen Weg einschlagen und behauptet, dass die 100 Florin einen Jahreszins ergäben, der um $\frac{1}{4}$ höher als 10 Florin sei, da die Zeit von 12 Monaten $\frac{1}{4}$ mehr als 9 Monate betrage. Mit dem falschen Bruchteil $\frac{1}{4}$ (statt $\frac{1}{3}$) rechnet er weiter und gelangt zum Ergebnis 12 Florin 4 Hyperpyra = 100 Hyperpyra.
Hätte er mit $\frac{1}{3}$ gerechnet, so wäre er über $\frac{4}{3} \cdot 10$ Florin = $13\frac{1}{3}$ Florin = 13 Florin $2\frac{2}{3}$ Hyperpyra = 13 Florin 2 Hyperpyra $13\frac{1}{3}$ Kukkia = 13 Florin 2 Hyperpyra 13 Kukkia $1\frac{1}{3}$ Turnesia noch etwas bequemer als oben zum richtigen Resultat gekommen.

97 ***Wenn — 156 Florin und 4 Hyperpyra und 10 Kukkia — jeder Florin im Monat 2 Kukkia gewinnt, wie hoch der Zins von diesen in $10\frac{1}{2}$ Monaten ist***

Angenommen, du suchst zu wissen: Wenn jeder Florin im Monat 2 Kukkia gewinnt, 156 Florin und 4 Hyperpyra und 10 Kukkia — wie viel haben sie in $10\frac{1}{2}$ Monaten entsprechend zu gewinnen?
Es folgt ein Hinweis auf die bereits aus früheren Kapiteln bekannte Umrechnung 1 Florin = 8 Hyperpyra.
Zunächst bestimmt der Autor nacheinander die Monatszinsen von 156 Florin, 4 Hyperpyra und 10 Kukkia: $2 \cdot 156$ Kukkia = 312 Kukkia = 15 Hyperpyra 12 Kukkia, 4 Hyperpyra = $\frac{1}{2}$ Florin mit 1 Kukki Monatszins, Zwischensumme: 15 Hyperpyra 13 Kukkia; 10 Kukkia = $\frac{1}{16}$ von 8 Hyperpyra = $\frac{1}{16}$ Florin mit dem Monatszins $\frac{2}{16}$ Kukkia = $\frac{1}{2}$ Turnesi [1 Kukki = 4 Turnesia]. Der Monatszins von 156 Florin 4 Hyperpyra 10 Kukkia beträgt demnach 15 Hyperpyra 13 Kukkia $\frac{1}{2}$ Turnesi.
Anschließend wird davon sowohl das Zehnfache als auch die Hälfte berechnet: $10 \cdot 15$ Hyperpyra = 150 Hyperpyra, $10 \cdot 13$ Kukkia = 130 Kukkia = 6 Hyperpyra 10 Kukkia, Zwischensumme: 156 Hyperpyra 10 Kukkia; $10 \cdot \frac{1}{2}$ Turnesi = 5 Turnesia = 1 Kukki 1 Turnesi, Summe: 156 Hyperpyra 11 Kukkia 1 Turnesi
$\frac{1}{2} \cdot$ (15 Hyperpyra 13 Kukkia $\frac{1}{2}$ Turnesi) = 7 Hyperpyra 16 Kukkia $2\frac{1}{4}$ Turnesia (ohne Zwischenrechnung, etwa 7 Hyperpyra $(10 + \frac{13}{2})$ Kukkia $\frac{1}{4}$ Turnesi = 7 Hyperpyra $16\frac{1}{2}$ Kukkia $\frac{1}{4}$ Turnesi)
Ergebnis nach Addition: In $10\frac{1}{2}$ Monaten ergeben sich für 156 Florin 4 Hyperpyra 10 Kukkia Zinsen in Höhe von 164 Hyperpyra 7 Kukkia $3\frac{1}{4}$ Turnesia. (Die 164 Hyperpyra hätten noch in 20 Florin 4 Hyperpyra umgewandelt werden können.)
Eine Rechnung mit dem reinen Florin-Betrag $(156\frac{9}{16})$ wäre schneller gewesen.
In Ergänzung zur Aufgabe in der Kapitelüberschrift fragt der Autor nun auch noch nach dem Jahreszins des obigen Geldbetrags.
Die Monatszinsen hat er ebenso wie die Zinsen für 10 Monate bereits berechnet. Daher verdoppelt er jetzt die Monatszinsen: 31 Hyperpyra 6 Kukkia 1 Turnesi. Dies zu 156 Hyperpyra 11 Kukkia 1 Turnesi addiert (s. o.; vgl. auch das Diagramm auf fol. 49^{v} oben) ergibt den Jahreszins 187 Hyperpyra 17 Kukkia 2 Turnesia. (Statt 187 Hyperpyra hätte er auch 23 Florin 3 Hyperpyra schreiben können.)
Anschließend weist er sinngemäß darauf hin, dass die Lösung so ist, wie sie sich ergeben hat, und nicht mit einer leichten Methode erreicht werden kann. Es ist die erste Aufgabe, bei der der (aus zwei direkten Dreisätzen) zusammen-

gesetzte Dreisatz – in der Geschichte der Arithmetik auch Fünfsatz genannt – eine Rolle spielt.

98 ***Wenn 100 Florin den Jahreszins 15 Florin haben, die 150 Florin – wie viel sie in 6 Monaten und 15 Tagen gewinnen***

Als Lösungsmethode dient dem Autor wieder der zusammengesetzte Dreisatz, neu ist nur die Einbeziehung von Zinstagen: 15 Florin = 120 Hyperpyra, 50 Florin erbringen 60 Hyperpyra Jahreszins, also ergeben 150 Florin einen Jahreszins von 180 Hyperpyra und einen Monatszins von 15 Hyperpyra. Der Zins in 6 Monaten beträgt 90 Hyperpyra, der Zins in 15 Tagen (= $\frac{1}{2}$ Zinsmonat) 7 Hyperpyra 10 Kukkia. Also gewinnen 150 Florin in 6 Monaten 15 Tagen 97 Hyperpyra 10 Kukkia.

Wir würden den gesuchten Zins direkt so berechnen: $15 \cdot \frac{3}{2} \cdot 6\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}$ Florin = $12\frac{3}{16}$ Florin = 12 Florin 1 Hyperpyron 10 Kukkia

Der Autor berechnet zusätzlich noch den Tageszins der 150 Florin und den Jahreszins "von jedem der 150 Florin", also von 1 Florin.

Tageszins: Der Monatszins von 150 Florin (15 Hyperpyra) wird durch 30 geteilt. Ergebnis: 10 Kukkia

Jahreszins: Der Jahreszins von 150 Florin (180 Hyperpyra) wird durch 150 geteilt. Ergebnis: $1\frac{30}{150}$ Hyperpyra = $1\frac{1}{5}$ Hyperpyra = 1 Hyperpyron 4 Kukkia. Hier hätte sich der Autor auch auf den gegebenen Jahreszins von 100 Florin (15 Florin) beziehen können: $\frac{15}{100}$ Florin = $1\frac{1}{5}$ Hyperpyra

Es folgt noch eine (überflüssige) Probe zur Umrechnung des Bruchteils $\frac{30}{150}$ Hyperpyra: 30 Hyperpyra = 600 Kukkia, (600 Kukkia) : 150 = 4 Kukkia, also gilt $1\frac{30}{150}$ Hyperpyra = 24 Kukkia. Hieraus bestimmt der Autor auch noch den Monatszins "von jedem der 150 Florin": 2 Kukkia. Auch dieses Ergebnis hätte er im Prinzip schon vorher aus dem Jahreszins von 100 Florin herleiten können: $\frac{15}{100} \cdot \frac{1}{12}$ Florin = 2 Kukkia

99 ***Wenn 100 Florin im Jahr 15 Florin Zins haben, die 300 Florin – in wie viel Jahren sie sich verdoppeln***

Das Vorgehen des Autors liegt nahe und soll hier nur in Kurzform notiert werden:

Jahreszins von 300 Florin: 45 Florin; $300 : 45 = 6\frac{30}{45} = 6\frac{2}{3}$; Verdoppelung der 300 Florin in $6\frac{2}{3}$ Jahren bzw. in 6 Jahren 8 Monaten

Probe: $6 \cdot 45 = 270$, $\frac{2}{3} \cdot 45 = 30$, $270 + 30 = 300$: In $6\frac{2}{3}$ Jahren entstehen aus 300 Florin weitere 300 Florin an Zinsen.

Der Autor hat hier nur mit dem einfachen Zins gerechnet. Zwar behandelt er auch eine Aufgabe der Zinseszinsrechnung im Rahmen der Algebra in seinem "2. Buch" (Kap. 154), doch eine Lösung der hier vorliegenden Aufgabe wäre ihm unter Zinseszins-Bedingungen nicht möglich gewesen, da dabei die Logarithmen ins Spiel kommen:

Ist i die Anzahl der Jahre, nach denen sich 300 Florin bei einem Jahreszinssatz von 15 % verdoppeln, so gilt $300 \cdot (1 + 0{,}15)^i = 600$. Daraus ergibt sich $i \cdot \lg 1{,}15 = \lg 2$ und schließlich $i \approx 4{,}96$:

Bereits nach 4 Jahren 346 Tagen bzw. nach 4 Jahren 11 Monaten 16 Tagen verdoppeln sich die 300 Florin unter Zinseszins-Bedingungen. (1 Zinsjahr = 360 Zinstage)

Nun fragt der Autor noch nach dem Jahreszins der 300 Florin, obwohl er diesen doch schon oben ermittelt hatte (45 Florin), und dividiert dazu die 300 Florin Zinsen durch $6\frac{2}{3}$: Wie üblich bringt er Dividend und Divisor auf einen gemeinsamen Nenner und rechnet $\frac{900}{3} : \frac{20}{3}$ = 45 (Florin).

Darüber hinaus bestimmt er auch noch den Monatszins und den Tageszins für die 300 Florin.

Monatszins: (45 Florin) : 12 = $3\frac{9}{12}$ Florin = $3\frac{3}{4}$ Florin = 3 Florin 6 Hyperpyra = 30 Hyperpyra

Tageszins: (30 Hyperpyra) : 30 = 1 Hyperpyron

100 *Wie man die in verschiedenen Monaten und an verschiedenen Tagen gegebenen Teile verknüpfen und bewerkstelligen kann, dass der Zins von diesen an ein und demselben Tag beginnt*

Es sei ein Gläubiger mit Zins, der ein Schuldbuch mit verschiedenen Darlehen hat, die er verschiedenen Monaten und Tagen gemäß gegeben hat, wie detailliert im Schuldbuch von jenem angezeigt wird. Er sucht aber die in verschiedenen Monaten und an verschiedenen Tagen gegebenen verschiedenen Darlehen zu verknüpfen und zu bewerkstelligen, dass der Zins von diesen an ein und demselben Tag beginnt.

Diese Aufgabe gehört zu den sog. Terminrechnungen: Ein Kapital mit bekanntem Jahreszins wird in mehreren Raten zu verschiedenen Zeitpunkten aufgenommen oder verliehen, wobei sich für jede Rate ein bestimmter Zins ergibt. Gesucht wird ein einheitlicher Zeitpunkt (Zinstag), zu dem das Gesamtkapital die Summe der Einzelzinsen erbringt. — Der Autor fährt wie folgt fort:

Du musst dies nun so machen. Angenommen, er hat gemäß dem ersten Zinsjahr in verschiedenen Monaten an jemanden auf Darlehen gewisse Florine gegeben, jeder Florin für 8 Hyperpyra. Er hat für die 100 Florin den Jahreszins 15 Florin vereinbart, es gewinnt aber jeder Florin im Monat 2 Kukkia. (Diesen Monatszins gibt der Autor hier nur an, da er ihn bereits in Kap. 95 berechnet hat.) *Er hat an den verschiedenen (Tagen) so gegeben: am 10. September 70 Florin, am 20. Oktober 60 Florin, am 30. November 90 Florin, am 10. Dezember 80 Florin. Lass nun die 70 Florin weg und suche den Zins der 60 Florin des zweiten Darlehens. Die 60 Florin haben nun einen Zins vom 10. September bis zum 20. Oktober erbracht, was 40 Tage sind — die 30 Tage, das ist der Zins eines Monats, zweimal 60 Kukkia, was 120 Kukkia sind. Der Zins von 10 Tagen, die bis zu den 40 fehlen, ist dritter Teil der 30 Tage, auch der Zins davon ist dritter Teil der 120 Kukkia, was 40 Kukkia sind. Und zusammen ist der Zins der 60 Florin während der 40 Tage 160 Kukkia, das sind 1 Florin oder 8 Hyperpyra.*

Danach berechnet der Autor die Zinsen von 90 Florin für den Zeitraum vom 10. September bis zum 30. November, d. h. für 80 Tage = $2\frac{2}{3}$ Monate: 2 Monate ergeben einen Zins von $2 \cdot 90 \cdot 2$ Kukkia = 360 Kukkia, $\frac{2}{3}$ Monate oder 20 Tage einen Zins von $\frac{2}{3} \cdot 180$ Kukkia = 120 Kukkia. Insgesamt erhält er einen Zins

von 480 Kukkia = 3 Florin = 24 Hyperpyra.
Ganz offensichtlich ist der Autor einem Denkfehler erlegen: An den Tagen, an denen die Teildarlehen ausgezahlt werden, beginnt die Verzinsung und läuft bis zum 10. Dezember, er hingegen hat diese vom 10. September bis zu den Auszahlungstagen angesetzt!
Seinen Fehler hätte er bereits beim 1. Teildarlehen von 70 Florin bemerken müssen, das angeblich keinen Zins erbringt (*Lass nun die 70 Florin weg*), in Wirklichkeit aber über den gesamten Zeitraum von 90 Tagen verzinst werden muss. Bei der noch ausstehenden Berechnung der Zinsen von 80 Florin wird ihm das Dilemma, in das er hineingeraten ist, endlich bewusst (vgl. fol. 129/9–18): *Die 80 Florin aber – in gleicher Weise erfordert es das Richtige, dass sie keinen Zins haben, da sie nichts an vergangenen Tagen haben; denn da sie an dem 10. Dezember selbst gegeben wurden, verzinsen sie sich zufällig nicht. Weil aber der Zins dieser vier verschiedenen Darlehen im Anfang ein und desselben Tages verknüpft werden soll, fordert dieselbe Methode von uns, weil die 70 Florin, die richtigerweise am meisten Zins haben, damit wir aus ihnen keinen Zins abfordern, vielmehr den Zins der 80 Florin vom 10. September bis zum 10. Dezember zu suchen, was 90 Tage sind, d. h. 3 Monate. Es haben aber die 80 Florin im Monat zweimal 80 Kukkia Zins, was 160 Kukkia sind, in drei Monaten dreimal 160 Kukkia, was 480 Kukkia sind, was 3 Florin oder 24 Hyperpyra sind.*
Der Autor will also kompensieren: Anstatt die 70 Florin zu verzinsen, die – wie er selbst erkennt – verzinst werden müssten, verzinst er die 80 Florin, die – wie er ebenfalls weiß – keine Zinsen tragen. Ein solches Vorgehen ist natürlich nicht statthaft und wird in der Terminrechnung nicht gefordert.
Verfolgen wir nun die weitere Rechnung des Autors.
Die Summe der Zinsen aus den vier Darlehen beträgt 7 Florin bzw. 56 Hyperpyra, die Summe der Darlehen selbst beträgt 300 Florin. Nun fragt er danach, nach wie vielen Tagen 300 Florin einen Zins von 56 Hyperpyra erbringen. Da 1 Florin einen Monatszins von 2 Kukkia hat (s. o.), haben 300 Florin einen Monatszins von 600 Kukkia bzw. 30 Hyperpyra. 300 Florin haben also einen Tageszins von 1 Hyperpyron. Damit ist nach 56 Tagen der Zeitpunkt erreicht, zu dem sich die 300 Florin zu 56 Hyperpyra verzinsen, d. h. (vom 10. September an betrachtet) am 6. November. An dieser Stelle findet sich ein erklärender Satz über die Länge des Zinsmonats, der (wenn überhaupt) schon im Kap. 98, bei der erstmaligen Berechnung von Tageszinsen, angebracht gewesen wäre: *Denn all die 12 Monate des Jahres rechnen sie bei den Rechnungen und Schuldbüchern als jeweils 30 Tage.* Es folgt daraufhin noch eine Proberechnung dafür, dass der 6. November korrekt ermittelt wurde: 20 restliche Septembertage und 30 Oktobertage ergeben 50 Tage, am 6. November sind 56 Tage erreicht. *Und siehe, es geschah die Verknüpfung und der Anfang des Zinses der vier verschiedenen Darlehen am 6. November.*
Damit du die Wahrheit der vorliegenden Methode einsiehst, wechselt der Autor nun unvermittelt zur Betrachtung der Restlaufzeit, der Anzahl der Tage vom 6. November bis zum 10. Dezember (34). Da 300 Florin einen Tageszins von 1 Hyperpyron haben, ergeben sich für 34 Tage 34 Hyperpyra an Zinsen, "ebenso" wie für die vier Darlehen vom 10. September bis zum 10. Dezember.

Vielleicht hat der Autor bemerkt, dass dieses Ergebnis dem obigen widerspricht, wo er für den Zins der vier Darlehen 56 Hyperpyra erhalten hatte, denn er rollt die Aufgabe noch einmal neu auf.
Zuvor aber wollen wir einmal das Diagramm betrachten, das er seiner Aufgabe beigegeben hat.

am 10. September	70 Florin			
am 20. Oktober	60 Florin:	Zins	1 Florin	oder 8 Hyperpyra
am 30. November	90 Florin	Zins	3 Florin	oder 24 Hyperpyra
am 10. Dezember	80 Florin	Zins	3 Florin	oder 24 Hyperpyra
		insgesamt	7 Florin	oder 56 Hyperpyra

Der Kontext ist offenbar ein anderer:
Ein Schuldner zahlt 300 Florin in Raten zurück.
Diese "duale Aufgabe" hat der Autor richtig gelöst. Es ergeben sich tatsächlich 56 Hyperpyra Gesamtzinsen, und der einheitliche Zinstag ist der 6. November.

Die Lösung der ursprünglichen Aufgabe gelingt ihm erst anschließend im zweiten Anlauf, wobei die Ergebnisse seiner Rechnungen, die wir im Einzelnen nicht mehr verfolgen müssen, in einem zweiten Diagramm niedergelegt sind, das dem Kontext einer Kreditvergabe gerecht wird:

am 10. September	70 Florin:	Zins	21 Hyperpyra
am 20. Oktober	60 Florin:	Zins	10 Hyperpyra
am 30. November	90 Florin:	Zins	3 Hyperpyra
am 10. Dezember	80 Florin	insgesamt	34 Hyperpyra

Er stellt dabei fest, dass die Gesamtzinsen in Höhe von 34 Hyperpyra mit den Zinsen aus den 300 Florin ab dem 6. November übereinstimmen. (Die Zinsen für das Gesamtdarlehen vor diesem Stichtag, nämlich 56 Hyperpyra, hatte er ja schon vorher berechnet.)
Dennoch möchte er den einheitlichen Zinstag noch einmal direkt bestimmen, und zwar dadurch, dass er vom Schlusstag, dem 10. Dezember, aus zurückrechnet. Seine Formulierung hierzu:
Mache hinten fest (ὀπισθαπόδησε) *und fange rückwärtsgewandt* (ὀπισθορμήτως) *vom 10. Dezember an, der der Schlusstag all der verschiedenen Darlehen ist, bis immer du diese 34 Tage erfüllt hast – um dasselbe zu sagen: die 34 Hyperpyra –, und wo immer die 34 Tage rückwärtsgewandt aufhören – vielmehr die 34 Hyperpyra –, da ist der Anfang und die Verknüpfung des Zinses der vier verschiedenen Darlehen.* Ergebnis ist wieder der 6. November.
(Wie bereits bekannt, ist 1 Hyperpyron der Tageszins von 300 Florin.)
Der Autor erwähnt noch, dass dieser Termin schon mit der ersten Methode (die wir als fehlerhaft erkannt hatten) gefunden wurde, aber immerhin gibt er zu, dass die vorliegende zweite Methode klarer als die erste sei.

Abschließend sollen die beiden durch die Diagramme repräsentierten Aufgaben in verallgemeinerter Form diskutiert werden.

1. Aufgabe (vgl. 1. Diagramm)
Ein Kreditnehmer erhält an einem Tag einen Betrag K und zahlt ihn innerhalb eines Zeitraums von N Tagen in n Raten $K_1, \dots, K_n$ zurück ($K = K_1 + \dots + K_n$), und zwar K_1 am 1. Tag, d. h. nach 0 Tagen, ... K_n am $(N+1)$. Tag, d. h. nach N Tagen. Die Zinszeiträume für $K_1, \dots, K_n$ seien $t_1, \dots, t_n$ Tage (mit $t_1 = 0$, $t_n = N$). Der Jahreszinssatz betrage p %.
z_1 seien die Zinsen. Es gilt $z_1 = (K_2 \cdot t_2 + K_3 \cdot t_3 + \dots + K_{n-1} \cdot t_{n-1} + K_n \cdot N) \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{360}$.
Gesucht ist der $(t+1)$. Tag, der einheitlicher Zinstag für K ist (nach t Tagen).
Es gilt $K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360} = (K_2 \cdot t_2 + K_3 \cdot t_3 + \dots + K_{n-1} \cdot t_{n-1} + K_n \cdot N) \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{360}$.
Daraus folgt:
$t = \frac{1}{K} \cdot (K_2 \cdot t_2 + K_3 \cdot t_3 + \dots + K_{n-1} \cdot t_{n-1} + K_n \cdot N)$

2. Aufgabe (vgl. 2. Diagramm)
Ein Geldverleiher gibt einen Kredit in Gesamthöhe von K und zahlt ihn innerhalb eines Zeitraums von N Tagen in n Raten $K_1, \dots, K_n$ aus ($K = K_1 + \dots + K_n$), und zwar K_1 am 1. Tag, d. h. nach 0 Tagen, ... K_n am $(N+1)$. Tag, d. h. nach N Tagen. Die Zinszeiträume für $K_1, \dots, K_n$ sind jetzt $N - t_1, \dots, N - t_n$ Tage (mit $N - t_1 = N$, $N - t_n = 0$). Der Jahreszinssatz betrage wieder p %.
z_2 seien die Zinsen. Es gilt $z_2 = (K_1 \cdot N + K_2(N - t_2) + \dots + K_{n-1}(N - t_{n-1})) \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{360}$.
Gesucht ist jetzt der $(N - t + 1)$. Tag, der einheitlicher Zinstag für K ist (nach $N - t$ Tagen).
Es gilt $K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{N-t}{360} = (K_1 \cdot N + K_2(N - t_2) + \dots + K_{n-1}(N - t_{n-1})) \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{360}$.
Daraus folgt: $N - t = \frac{1}{K} \cdot (K_1 + K_2 + \dots + K_{n-1}) \cdot N - K_2 \cdot t_2 - \dots - K_{n-1} \cdot t_{n-1}) =$
$\frac{1}{K} \cdot (K \cdot N - K_n \cdot N - K_2 \cdot t_2 - \dots - K_{n-1} \cdot t_{n-1}) = N - \frac{1}{K} \cdot (K_2 \cdot t_2 + \dots + K_{n-1} \cdot t_{n-1} + K_n \cdot N)$
Es ergibt sich wieder
$t = \frac{1}{K} \cdot (K_2 \cdot t_2 + \dots + K_{n-1} \cdot t_{n-1} + K_n \cdot N)$.

Darüber hinaus gilt $z_1 + z_2 = (K_1 + K_2 + \dots + K_n) \cdot N \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{360} = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{N}{360}$. Das ist der Zins von K für N Tage, ein Ergebnis, das nicht überraschen kann, denn die Zinszeiträume sind bei den beiden Aufgaben komplementär. (Vgl. die Zinszeiträume in der ersten und der zweiten Aufgabe, wobei "nach t_i Tagen" der Zeitangabe "vor $(N - t_i)$ Tagen" entspricht.) Bei der Addition von z_1 und z_2 werden demnach alle K_i über den gesamten Zeitraum von N Tagen verzinst.
(Vgl. z_1 = 56 Hyperpyra, z_2 = 34 Hyperpyra, $z_1 + z_2$ = 90 Hyperpyra — den Zins von 300 Florin in 90 Tagen.)
Den Zins von K für N Tage
— hätte der Kreditnehmer (zusammen mit K) zahlen müssen, wenn seine gesamte Rückzahlung erst am letzten Tag ($(N+1)$. Tag) stattgefunden hätte. (1. Aufgabe)
— hätte der Geldverleiher erheben können, wenn er den vollen Kredit schon am 1. Tag ausgezahlt hätte (2. Aufgabe).

Terminrechnungen können methodisch wie Mischungsrechnungen behandelt werden: Sei m eine geeignete Größe (Masse, Volumen) mit $m = m_1 + \ldots + m_n$, und habe jedes m_i $(i = 1, \ldots, n)$ eine "Konzentration" (Feingehalt, prozentualen Anteil) k_i, so hat m eine mittlere Konzentration k, für die $m \cdot k = m_1 \cdot k_1 + \ldots + m_n \cdot k_n$ gilt. Es folgt $k = \frac{1}{m} \cdot (m_1 \cdot k_1 + \ldots + m_n \cdot k_n)$. Bei Terminrechnungen spielen dabei offenkundig die Tage t und t_i die Rolle der k und k_i, die Kapitalien K und K_i die Rolle der m und m_i.
Für Terminrechnungen scheint es sonst im byzantinischen Bereich keinen Nachweis zu geben. Weitere Einzelheiten, insbesondere Beispiele anderer Autoren, findet man bei TROPFKE (1980, S. 553 f.).

101 *Wie man verschiedene Beträge addieren und wissen kann, wie groß die Größe all dieser wird, wenn sie ein einziger Betrag geworden ist*

Hier liegt das größte Kuriosum in diesem Rechenbuch vor: die Einführung der schriftlichen Addition erfolgt erst jetzt im 101. Kapitel! Der Leser erhält vom Autor keine Information darüber, dass dieser hier einen weit über Gebühr verspäteten Nachtrag vorgenommen hat und dass das erst jetzt vorgestellte Verfahren bereits bei den überaus zahlreichen schriftlichen Multiplikationen von mehrstelligen Zahlen verwendet werden musste. Dieses Versäumnis wurde insbesondere beim Multiplikationsbeispiel in Kap. 12 und bei der allgemeinen Beschreibung des Verfahrens zur "zweiseitigen Multiplikation" in Kap. 14 deutlich. Dieses Kuriosum ist auch einzigartig im Hinblick auf alle anderen bekannten arithmetischen Lehrwerke.
Angenommen, aus verschiedenen Rechnungen kamen verschiedene Beträge heraus, und der erste Betrag ist 1695 Hyperpyra, der zweite Betrag ist 1393 Hyperpyra, der dritte ist 3454 Hyperpyra, der vierte ist 4565 Hyperpyra ...
Nun sollen die Zahlen untereinander aufgereiht werden, *Einer mit Einer und Zehner mit Zehner und so weiter*, also stellengerecht. Natürlich hat der Autor wieder ein Diagramm beigegeben. Die Überträge (z. B. 1 Zehner bei den Einern) werden nicht notiert und müssen gemerkt werden *(behalte ... für dich).* Der Autor addiert, wie aus dem Text hervorgeht, von oben nach unten (jeweils mit Angabe der Zwischensumme) und berücksichtigt den Übertrag erst nach der vollständigen Addition aller anderen Summanden der nächsthöheren Stelle, sodass man ihn sich unnötig lange merken muss. Vorteilhafter wäre es gewesen, den Übertrag bereits mit dem ersten Summanden zu verrechnen.

	Hyperpyra	1	6	9	5	1	
	Hyperpyra	1	3	9	3	0	
	Hyperpyra	3	4	5	4	3	
	Hyperpyra	4	5	6	5	1	⑤
insgesamt	Hyperpyra	1	1	1	0	7	⑤

Außerdem hat der Autor die Siebenerprobe für diese Addition durchgeführt – am rechten Rand des Diagramms sind die Probezahlen notiert: zunächst die Siebenerreste der Summanden, dann deren Summe (die obere eingekreiste 5), von der er noch einmal den Siebenerrest hätte bestimmen müssen, wenn diese

die Zahl 6 überschritten hätte, und schließlich der Siebenerrest der Summe (die untere eingekreiste 5). Die Berechnung der Probezahlen ist im Text sehr ausführlich dargestellt.

Der zahlentheoretische Hintergrund ist die Additivität der Kongruenzrelation, die bereits im Kommentar zu Kap. 22 eine Rolle spielte:

Aus $a \equiv a'$ mod m und $b \equiv b'$ mod m folgt $a + b \equiv a' + b'$ mod m.

Das sieht man leicht ein, wenn man den Term $(a + b) - (a' + b')$ betrachtet und in $(a - a') + (b - b')$ umwandelt. Nach Voraussetzung sind beide Summanden durch m teilbar und daher auch die Summe.

Die Gleichheit der letzten Probezahlen bei der Siebenerprobe ($m = 7$) zur Addition ist aber auch wie bei der Siebenerprobe zur Multiplikation (vgl. Kap. 7 — Kommentar) wieder nur eine notwendige, keine hinreichende Bedingung für die Korrektheit der Rechnung. So deckt die Siebenerprobe z. B. die fehlerhafte Addition $8 + 6 = 21$ nicht auf. In diesem Zusammenhang sei noch einmal hingewiesen auf die Kapitel 7, 9, 11, 13, 15 zur Siebenerprobe der Multiplikation sowie auf die Kapitel 22, 24, 26, 28, 30, 32, 35, 38 zur "Siebenerprobe" der Division $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$, d. h. zur Siebenerprobe der dazu äquivalenten Multiplikation $a = qb + r$ $(0 \leq r < b)$.

Unser Autor hält die Siebenerprobe, auf die konkrete Additionsaufgabe bezogen, zu Unrecht für hinreichend:

Da die zwei Proben davon gleich geworden sind, indem jede jeweils 5 hat, ist das Gesuchte schon richtig geworden.

Andererseits hält er sie zu Recht für notwendig: *Wenn aber die eine* (sc. *Probe*) *5 hätte, die andere aber irgendein anderes ungleiches Zahlzeichen, wäre der Betrag der 11107 Hyperpyra keineswegs richtig entstanden.*

Am unteren Rand von fol. 50^{v} hat der Autor notiert:

Suche die Probe davon mit den 9 und nicht mit den 7 auf.

Er hat nachträglich erkannt, dass auch bei der Addition die Neunerprobe ($m = 9$) bequemer durchzuführen ist. (Vgl. hierzu Kap. 7 — Kommentar.)

Es folgt ein weiteres Beispiel mit 7 Summanden, bei dem sich der Autor im Text kürzer fasst, indem er die Zwischensummen aus je zwei Summanden nicht mehr notiert.

	Hyperpyra	9 5 3	1	
	Hyperpyra	8 1 6	4	
	Hyperpyra	7 6 3 1	1	
	Hyperpyra	6 3 1 5	1	
	Hyperpyra	5 2 7 4	3	
	Hyperpyra	4 1 6 3	5	
	Hyperpyra	1 3 2 4 5	1	insgesamt 16 ②
insgesamt	Hyperpyra	3 8 3 9 7	②	

Auch werden die Siebenerreste im Text nicht mehr berechnet, sondern nur noch angegeben (siehe Diagramm). Von der Summe der Siebenerreste der Summanden (16) ist noch der Siebenerrest (2) zu bestimmen, der mit dem Siebenerrest (2) der Hyperpyra-Summe (38397) übereinstimmen muss.

102 *Wie man einen Betrag von einem Betrag subtrahieren und den übrig bleibenden Teil wissen kann, wie groß er ist*

Ebenso wie für die Addition gilt auch für die schriftliche Subtraktion, dass ihre extrem verspätete Einführung, erst in diesem Kapitel, nur als kurios bezeichnet werden kann. Dabei ist ihre Kenntnis für die bislang vergleichbar häufig durchgeführte schriftliche Division unentbehrlich. Es sei vor allem an Kap. 31 erinnert, wo sich der Autor bei einer Divisionsaufgabe genötigt sah, eine Subtraktionsmethode zu erläutern, und zwar die Methode der dekadischen Ergänzung.

Der Autor beginnt das Kapitel wie folgt:

Wenn du irgendeinen Betrag von einem anderen subtrahieren willst, kannst du nicht eine so große und gleiche Größe von einer anderen ebenso großen gleichen Größe subtrahieren; wenn du nämlich 100 von 100 und 200 von 200 subtrahierst, wird der Rest 0 sein. Es ist nun notwendig, dass die Größen von diesen ungleich sind, und die eine verhält sich größer, die andere kleiner. Setze nun das Größere nach oben, das Kleinere nach unten.

Hier wird wieder deutlich, dass die Null nicht als vollwertige Zahl angesehen wurde.

Nach dieser Einleitung bespricht der Autor die Subtraktion von 1724 - 1655 (in Hyperpyra) — also sofort ein Beispiel mit Zehnerunterschreitung:

Hyperpyra	1 7 2 4 |	insgesamt 14	insgesamt aber ⑤
Hyperpyra	1 6 5 5 | 8	} insgesamt 14	insgesamt aber ⑤
Hyperpyra	0 0 6 9 | 6		

Dazu schreibt er:

... Und das Obere hat die größeren Teile am Anfang, das Untere aber hat die größeren am Ende. Du kannst nicht das gerade unterhalb am Ende Stehende, was 55 bezeichnet, von dem gerade oberhalb Stehenden subtrahieren, was 24 bezeichnet ... Du könntest schön und leicht das Untere von dem Oberen subtrahieren, wenn das Obere vom Anfang bis zum Ende größer, das Untere aber vom Anfang bis zum Ende kleiner wäre. Nun aber, obwohl sich das Größere und Kleinere ungleichmäßig verhalten, ... kannst du das Untere vom Oberen so subtrahieren.

Merkwürdig ist, dass der Autor diese "Anomalie" erst an der Besetzung der Zehner- und Einerstelle feststellt und nicht schon an den Einern.

Für die Subtraktion werden nun folgende Rechnungen durchgeführt:

Die Anzahl der Zehner des Minuenden (2) wird um 1 verringert — es entstehen 14 Einer, von denen die 5 Einer abgezogen werden können. Ergebnis: 9 Einer

Die Anzahl der Hunderter des Minuenden (7) wird um 1 verringert — es entstehen 11 Zehner, von denen die 5 Zehner abgezogen werden können: Ergebnis: 6 Zehner

Die verbliebenen Differenzen an den höheren Stellen verschwinden (6 Hunderter - 6 Hunderter = 0, 1 Tausender - 1 Tausender = 0).

Die gesuchte Differenz ist 69 — im Diagramm mit den positionellen Leerzeichen für die Hunderter und Tausender geschrieben, also in der Form 0 0 6 9.

Das Verringern der Zehner- und der Hunderterzahl im Minuenden, das im vor-

liegenden Beispiel erforderlich ist, umschreibt der Autor mit "nehmen" (λαβεῖν) oder "streichen" (κόψαι), er markiert oder streicht aber keine Ziffern in den Diagrammen.
Die hier verwendete Methode ist die Abzieh- oder Borgemethode, die derzeit in Deutschland nur im bayerischen Lehrplan vorgeschrieben ist. Sie lässt sich allgemein (ohne Betrachtung von Hunderter- oder höheren Stellen) folgendermaßen darstellen:
Sei $10a + b$, der Minuend, eine zweistellige und $10c + d$, der Subtrahend, eine mindestens einstellige Zahl, die Differenz sei positiv, und es trete Zehnerunterschreitung auf. Die Variablen erfüllen somit die Bedingung $0 \le c < a < 10$, $0 \le b < d < 10$.
Dann wird für die Differenz der Term $10((a-1)-c)+(10+b-d)$ gebildet.
Es sei daran erinnert (vgl. Kap 31 — Kommentar), dass unter den gleichen Voraussetzungen bei der Methode der dekadischen Ergänzung der Term $10(a-(c+1))+(b+(10-d))$ gebildet wird.
Das Verfahren, das heute zumindest im deutschsprachigen Raum dominiert, von unserem Autor aber nicht vorgestellt wird, ist das Ergänzungsverfahren. Unter den gleichen Voraussetzungen wie oben wird hierbei für die Differenz der Term $10(a-(c+1))+((10+b)-d))$ gebildet.

Wir kehren nun zur Besprechung des Textes zurück, wobei es im Folgenden um die Probe der obigen Subtraktion (1724 - 1655 = 69) geht. Der Autor schreibt:
Es gibt auch eine andere Probe, von der wir sagen, dass sie, weil sie klarer und leicht ist, die bessere ist, welche die folgende ist.
Es handelt sich um die Umkehraddition 1655 + 69 = 1724, die natürlich eine zuverlässige Probe (notwendige und hinreichende Bedingung) ist. Der Autor bespricht diese Addition wieder ausführlich (wieder mit 0 0 6 9 statt einfachem 6 9 im Diagramm), wobei er aber jetzt die Überträge sofort mit einem Summanden der nächsthöheren Stelle verrechnet — im Unterschied zum ersten Beispiel von Kap. 101.
Am unteren Rand von fol. 51^r findet sich eine weitere Bemerkung:
Es gibt auch einen anderen Beweis: 1 6 5 5 ergeben zusammen 17, zusammen ergeben die 17 aber 8. 0 0 6 9 ergeben zusammen 15, zusammen ergeben die 15 aber 6. Addiere 8 und 6, und zusammen ergeben sich 14, zusammen ergeben aber die 14 (5). 1 7 2 4 ergeben zusammen 14, zusammen ergeben die 14 aber (5) — ebenso bei den anderen (Beispielen).
Hier wird sozusagen die Probe der Probe vorgestellt, nämlich als Probe für die Subtraktion wird die Umkehraddition der Neunerprobe unterzogen. Damit ist auch das Diagramm zur obigen Subtraktionsaufgabe vollständig erklärt.

In einer zweiten, wieder ausführlich behandelten Aufgabe geht es um die Subtraktion 658934 - 435749 = 223185 (Einheiten: Hyperpyra), erneut mit Diagramm, Probe durch Umkehraddition 435749 + 223185 = 658934, die aber nicht mehr im Einzelnen vorgerechnet wird, und am linken Rand von fol. 51^v mit einem knappen Hinweis:
Neunerprobe [μαρτυρία ἑνώσεως, weil dabei die Stellenwerte addiert werden]:

Es wurden die zwei Proben jeweils als 8 gefunden.
Damit wird also wieder die Probe geprobt.
Mit der Bezeichung $Q(a)$ aus dem Kommentar von Kap. 7 gilt nämlich $Q(435749) = 32$, $Q(32) = 5$, $Q(223185) = 21$, $Q(21) = 3$, $5 + 3 = \textcircled{8}$ einerseits und $Q(658934) = 35$, $Q(35) = \textcircled{8}$ andererseits. Diese Probezahlen sowie auch die Zwischensummen 5 und 3 hat der Autor wieder in sein Subtraktionsdiagramm mit aufgenommen, das hier im Kommentar nicht besprochen werden muss, da es genauso wie das Diagramm zur ersten Subtraktionsaufgabe strukturiert ist.

So als wäre dem Autor noch eingefallen, dass es ja auch einfache Subtraktionsaufgaben (ohne "Stellenunterschreitung") gibt, bespricht er erst zum Abschluss des Kapitels das Beispiel 796453 – 584321 = 212132 (Einheiten: Hyperpyra). Die Situation sei jetzt so, dass *immer das Obere vom Anfang bis zum Ende gleichmäßig mehr* habe ... *Das Kleinere* sei *immer ... unten gesetzt.*
Als Probe wird jetzt nur noch die Umkehraddition eingesetzt: 584321 + 212132 = 796453
Am oberen Rand von fol. 51^{v} hat Schreiber B einen Eintrag vorgenommen, und zwar geht es um ein Multiplikationsschema, wie es unser Autor (Schreiber A) erstmals in Kap. 78 verwendet hat, hier zu $15 \cdot 16 = 240$. Charakteristisch ist die punktförmige Schreibweise der Null. Das Beispiel steht in keiner Beziehung zum Haupttext.

103 ***Über die drei, die von den 1000 Hyperpyra haben: der eine einen dritten Teil, der andere einen vierten, der dritte einen fünften***

Angenommen, drei Gesellschafter haben 1000 Hyperpyra zu teilen, und dem ersten kommt zu, von den 1000 Hyperpyra den dritten Teil von ihnen zu nehmen, dem zweiten den vierten Teil von ihnen und dem dritten den fünften Teil von ihnen. Du suchst aber zu wissen, wie viele Hyperpyra jedem von ihnen von den 1000 Hyperpyra zukommen, gemäß welchem Verhältnis wir sagten.
Hierbei ist aber etwas ausgewählt worden, was unseren Verstand wegstehlen und uns denken lassen kann, was wir sagten, es verhalte sich so, was aber keine wahre Vorstellung ist. Das aber ist, dass das $\frac{1}{3}$ der 1000 Hyperpyra 333 Hyperpyra und $\frac{1}{3}$ eines Hyperpyrons, das $\frac{1}{4}$ der 1000 Hyperpyra 250 Hyperpyra und das $\frac{1}{5}$ der 1000 Hyperpyra 200 Hyperpyra sind. Addiere dies alles, und es werden zusammen 783 Hyperpyra und $\frac{1}{3}$ eines Hyperpyrons. Und siehe da, wir haben auf diese Weise gefunden, dass sich auf sie 783 Hyperpyra und $\frac{1}{3}$ verteilen, von den 1000 Hyperpyra sind aber 216 Hyperpyra und $\frac{2}{3}$ eines Hyperpyrons übrig.
Eine solche Rede wird aber gesagt, dass jemand, der ihnen den jeweils zukommenden Teil zuteilt, weil sie dies nicht richtig tun können, ihnen in entsprechender Weise den zukommenden Teil nicht ehrlich zurückgab, sondern es schien vielmehr nur richtig geteilt und gegeben zu sein, verhielt sich aber nicht so. Er gab ihnen nämlich, wie gezeigt wurde, 783 Hy-

	Hyperpyra	*333 und* $\frac{1}{3}$
	Hyperpyra	*250*
	Hyperpyra	*200*
zusammen	*Hyperpyra*	*783 und* $\frac{1}{3}$

perpyra und $\frac{1}{3}$ eines Hyperpyrons, denen, die auch zufriedengestellt waren, dass jeder von ihnen den ihm zukommenden und entsprechenden Teil hat. Die übrig gebliebenen 216 Hyperpyra und $\frac{2}{3}$ eines Hyperpyrons hat derjenige, der dies verteilt hat, um des Lohnes willen heimlich (λεληθότως) *an sich genommen.*
Damit nicht auch wir dies erleiden, wollen wir dies mithilfe der vorliegenden Methode machen, die uns den passenden Teil eines jeden wahrheitsgemäß und leicht zeigen kann ...
Der Autor schreibt die "Anteile" der drei Gesellschafter nebeneinander: $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$
Anschließend rechnet er $3 \cdot 4 = 12$, $12 \cdot 5 = 60$ und bezeichnet 60 als gemeinsamen Nenner (ἓν σῶμα τῶν τριῶν). Es folgen die Rechnungen $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$, $\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$, $\frac{1}{5} \cdot 60 = 12$, $20 + 15 + 12 = 47$, wobei 47 nun als Teiler der 1000 Hyperpyra dient.
Danach werden – im Text unnötig ausführlich beschrieben – die 1000 Hyperpyra jeweils mit 20, 15 und 12 multipliziert und anschließend durch 47 dividiert:
(1000 Hyperpyra) · 20 = 20000 Hyperpyra, (20000 Hyperpyra) : 47 = 425 Hyperpyra Rest 25, 25 Hyperpyra = 500 Kukkia, (500 Kukkia) : 47 = 10 Kukkia Rest 30, 30 Kukkia = 120 Turnesia, (120 Turnesia) : 47 = 2 Turnesia Rest 26.
Der 1. Gesellschafter erhält also 425 Hyperpyra 10 Kukkia 2 Turnesia "Rest 26".
(1000 Hyperpyra) · 15 = 15000 Hyperpyra, (15000 Hyperpyra) : 47 = 319 Hyperpyra Rest 7, 7 Hyperpyra = 140 Kukkia, (140 Kukkia) : 47 = 2 Kukkia Rest 46, 46 Kukkia = 184 Turnesia, (184 Turnesia) : 47 = 3 Turnesia Rest 43.
Der 2. Gesellschafter erhält also 319 Hyperpyra 2 Kukkia 3 Turnesia "Rest 43".
(1000 Hyperpyra) · 12 = 12000 Hyperpyra, (12000 Hyperpyra) : 47 = 255 Hyperpyra Rest 15, 15 Hyperpyra = 300 Kukkia, (300 Kukkia) : 47 = 6 Kukkia Rest 18, 18 Kukkia = 72 Turnesia, (72 Turnesia) : 47 = 1 Turnesi Rest 25.
Der 3. Gesellschafter erhält also 255 Hyperpyra 6 Kukkia 1 Turnesi "Rest 25".
Der Autor hat für den Rest jeweils das Wort τζάκισμα verwendet, also Zähler. Der Rest ist der Zähler des Bruchs mit dem Nenner 47, wodurch der jeweilige Bruchanteil der Turnesia bestimmt wird. (Beispielsweise entspricht 1 Turnesi "Rest 25" hier $1\frac{25}{47}$ Turnesia.) Der Autor verwendet die Bruchschreibweise aber hier nicht.
Anschließend führt er im Text eine Proberechnung vor, die auch aus seinem folgenden Diagramm zu ersehen ist:

$\frac{1}{3}$	Hyp.	4 2 5	Kukkia	1 0	Turn.	2	Zähler	2 6	
$\frac{1}{4}$	Hyp.	3 1 9	Kukkia	2	Turn.	3	Zähler	4 3	
$\frac{1}{5}$	Hyp.	2 5 5	Kukkia	6	Turn.	1	Zähler	2 5	
		1 2 1		2		2		9 4	zwei Teiler: Turn. 2
	Hyp.	1 0 0 0							

Die Summe der Zähler (Reste) beträgt 94, d. h. 2 Teiler (47), und liefert einen Betrag von 2 Turnesia. Der Autor notiert erstmals bei einer schriftlichen Addition auch den Übertrag. Es sind nun insgesamt 8 Turnesia, also 2 Kukkia (Übertrag), und insgesamt 20 Kukkia sind 1 Hyperpyron (Übertrag). Bei der Addition der Hyperpyra werden auch der Zehner- und der Hunderterübertrag notiert. Es ergeben sich glatt 1000 Hyperpyra, was den Autor zur Feststellung

veranlasst, dass "das Gesuchte richtig geworden" sei. Mit der Rechnung ist aber nur belegt, dass diese Summe bei der Verteilung ausgeschöpft wurde (notwendige Bedingung), nicht aber, dass die Verteilung selbst korrekt war. Einen ähnlichen logischen Fehler hatte er schon bei der Beurteilung der Siebenerprobe begangen. (Vgl. den Kommentar zu Kap. 7.)

Dies entsteht wiederum auch anders.

Es folgt nun eine lange und zudem überflüssige Passage, in der der Autor die Lösung der Aufgabe mit 20000 Kukkia anstatt mit 1000 Hyperpyra vorrechnet. Er erhält aber nur eine andere Schreibweise für die Anteile der drei Gesellschafter: Der erste empfängt 8510 Kukkia 2 Turnesia Rest 26, der zweite 6382 Kukkia 3 Turnesia Rest 43 und der dritte 5106 Kukkia 1 Turnesi Rest 25. Das nachstehende Diagramm des Autors spiegelt die ausführliche Rechnung im Text wider, mit der wieder nur die Summe, nicht die Verteilung kontrolliert wird. Die Übertragsziffern sind dabei wieder notiert.

$\frac{1}{3}$	Kukkia 8 5 1 0	Turn. 2	Zähler 2 6		
$\frac{1}{4}$	Kukkia 6 3 8 2	Turn. 3	Zähler 4 3		
$\frac{1}{5}$	Kukkia 5 1 0 6	Turn. 1	Zähler 2 5		
	1 1 1 2	2	9 4	zwei Teiler	
Kukkia	2 0 0 0 0				

Bei dieser und der ersten Methode stimmen die Zähler und die Turnesia überein, wie der Autor feststellt. Zur weiteren Kontrolle, auf die er aber hätte verzichten können, wandelt er die Kukkia wieder so weit wie möglich in Hyperpyra um. Als Ergebnis seiner Rechnung erhält er natürlich auch wieder die Hyperpyra- und Kukkia-Werte wie vorher, und er präsentiert sogar noch einmal dasselbe Diagramm. (Hier fehlen nur die Übertragsziffern bei den Hyperpyra.)

Darüber hinaus geht er auf eine dritte Möglichkeit der Berechnung ein, die allerdings nur in der Umkehrung der Reihenfolge der Rechenoperationen besteht: Die 1000 Hyperpyra werden jetzt zuerst durch 47 dividiert und dann jeweils mit 20, 15 und 12 multipliziert. Der Autor führt nur noch die Rechnung für den 1. Gesellschafter durch: (1000 Hyperpyra) : 47 = $21\frac{13}{47}$ Hyperpyra, ($21\frac{13}{47}$ Hyperpyra) · 20 = 425 Hyperpyra Rest (Zähler) 25. Die Schreibweise $425\frac{25}{47}$ Hyperpyra vermeidet er. Danach multipliziert er den Zähler mit 20 (Umwandlung in Kukkia) usw.

Abschließend erklärt er, dass mit den Kukkia leichter und besser zu rechnen sei als mit den Hyperpyra.

Am oberen Rand von fol. 52^{r} hat Schreiber B ein Multiplikationsschema hinterlassen, wie es unser Autor (Schreiber A) erstmals in Kap. 78 verwendet hat, hier zu $16 \cdot 7 = 112$. Das Beispiel steht in keiner Beziehung zum Haupttext.

Diese erste Aufgabe zur Gesellschafts- oder Verteilungsrechnung hat der Autor zu Beginn recht nett und humorvoll ausgeschmückt. Aber nur ein ziemlich unbedarfter Leser wird sich seinen Verstand zunächst "wegstehlen" lassen, denn man sieht doch sofort, dass die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ in der Summe weni-

ger als 1 ergeben, also nicht die tatsächlichen Anteile der drei Gesellschafter darstellen können. Einen entsprechenden Hinweis vermisst man im Text. Die weitere Rechnung des Autors zeigt, dass diese Brüche nur die Verhältnisse der tatsächlichen Anteile zueinander bestimmen, die man mit dem Hauptnenner oder dem Nennerprodukt ermitteln kann: $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{20}{60} : \frac{15}{60} : \frac{12}{60} = 20 : 15 : 12$
Dem erstem Gesellschafter stehen also 20, dem zweiten 15 und dem dritten 12 Anteile von insgesamt 47 Anteilen zu, sodass der erste $\frac{20}{47}$, der zweite $\frac{15}{47}$ und der dritte $\frac{12}{47}$ des Geldbetrages (1000 Hyperpyra) erhält.
Im Übrigen hätte man auch aus der falschen Lösung, bei der nur $783\frac{1}{3}$ Hyperpyra verteilt wurden, mit dem Korrekturfaktor $\frac{1000}{783\frac{1}{3}} = \frac{60}{47}$ die tatsächlichen Anteile der Gesellschafter ermitteln können. Beispielsweise ergeben sich für den ersten $333\frac{1}{3} \cdot \frac{60}{47}$ Hyperpyra = $425\frac{25}{47}$ Hyperpyra, entsprechend für die anderen.
Solche Aufgaben mit "unechten Verteilungen" waren z. B. auch in den deutschsprachigen Rechenbüchern des 16. Jahrhunderts beliebt, doch als Einstiegsbeispiele in den Themenbereich Gesellschaftsrechnungen sind sie nicht geeignet. (Vgl. auch das folgende Kapitel.)

Unser "unermüdlicher" Autor stellt in diesem Kapitel noch eine zweite Aufgabe vor:
... Es sei aber nun, dass von den 1000 Hyperpyra der erste $\frac{1}{2}$, der zweite $\frac{1}{3}$, der dritte $\frac{1}{4}$, der vierte $\frac{1}{5}$ hat. Du suchst zu wissen, ein wie großer Teil jedem der vier von den 1000 Hyperpyra zukommt.
Wenn dies aber gewöhnlich und nicht fachmännisch gesucht wird, könnte jemand sagen, dass das $\frac{1}{2}$ von den 1000 Hyperpyra 500 Hyperpyra, das $\frac{1}{3}$ aber 333 Hyperpyra und $\frac{1}{3}$, das $\frac{1}{4}$ aber 250 Hyperpyra, das $\frac{1}{5}$ aber 200 Hyperpyra sind. Addiere dies alles, und es ergeben sich zusammen 1283 Hyperpyra und $\frac{1}{3}$. Es scheint aber von dieser laienhaften Lösungsfindung her so, dass die 1000 Hyperpyra nicht ausreichend sind, jedem von ihnen den passenden Teil zurückzugeben; den 1000 Hyperpyra fehlen nämlich 283 Hyperpyra und $\frac{1}{3}$ – es hat nur den Anschein, was nicht richtig ist. Mache dies aber fachmännisch, und du wirst das Gesuchte richtig finden.
Auch hier sieht man sofort, dass die vier Brüche nicht die tatsächlichen Anteile sein können, da sie in der Summe den Wert 1 übersteigen.
Der Autor schreibt die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ nebeneinander hin, bildet das Nennerprodukt 120, wählt aber stattdessen lieber 60, ohne darauf einzugehen, dass diese Zahl der Hauptnenner ist, das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner. Er begründet die Wahl damit, dass mit einem zweizifferigen Teiler leichter zu rechnen sei als mit einem dreizifferigen. Den Teiler bestimmt er als Summe der Produkte $\frac{1}{2} \cdot 60 = 30$, $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$, $\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$ und $\frac{1}{5} \cdot 60 = 12$, er beträgt 77. Mit dem Nennerprodukt 120 hätte man den Teiler 154 erhalten, was die Ergebnisse nicht beeinflusst hätte.
Nun werden die 1000 Hyperpyra jeweils mit 30, 20, 15 und 12 multipliziert und anschließend durch 77 dividiert. Die weitläufigen Rechnungen und zahlreichen Diagramme können hier übersprungen werden. Es ergeben sich
für den ersten Gesellschafter 389 Hyperpyra 12 Kukkia 0 Turnesi Rest (Zähler) 64,
für den zweiten 259 Hyperpyra 14 Kukkia 3 Turnesia Rest 17,

für den dritten 194 Hyperpyra 16 Kukkia 0 Turnesi Rest 32,
für den vierten 155 Hyperpyra 16 Kukkia 3 Turnesia Rest 41.
Danach werden wieder — im Text und im Diagramm — die 1000 Hyperpyra als Summe der errechneten Anteile verifiziert.
Wie bei der ersten Aufgabe dieses Kapitels wird auch wieder alternativ die "Kukki-Methode" durchgeführt, d. h. mit 20000 Kukkia anstatt mit 1000 Hyperpyra gerechnet. Es ergeben sich natürlich die gleichen Geldbeträge, nämlich
für den ersten Gesellschafter 7792 Kukkia 0 Turnesi Rest (Zähler) 64,
für den zweiten 5194 Kukkia 3 Turnesia Rest 17,
für den dritten 3896 Kukkia 0 Turnesi Rest 32,
für den vierten 3116 Kukkia 3 Turnesia Rest 41.
Wieder werden sowohl im Text als auch in einem Diagramm die 20000 Kukkia als Summe der errechneten Anteile verifiziert. Die anteiligen Beträge werden abschließend wieder so weit wie möglich in Hyperpyra umgewandelt, um die Übereinstimmung der Ergebnisse aufzuzeigen.
Wie bei der ersten Aufgabe hätte man auch hier aus der falschen Lösung, bei der $1283\frac{1}{3}$ Hyperpyra verteilt wurden, mit dem Korrekturfaktor $\frac{1000}{1283\frac{1}{3}} = \frac{60}{77}$ die die tatsächlichen Anteile der Gesellschafter ermitteln können.
Allgemein gilt für die Verteilung eines Kapitals K auf n Gesellschafter $A_1, \ldots, A_n$, denen die Brüche $\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ zugeordnet sind: A_i $(i = 1, \ldots, n)$ erhält

$$\frac{a_i \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{i-1} \cdot b_{i+1} \cdot \ldots \cdot b_n}{a_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n + a_2 \cdot b_1 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n + a_3 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_4 \cdot b_n + \ldots + a_n \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}} \cdot K.$$

In unserem letzten Beispiel sind $n = 4$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 4$, $b_4 = 5$ und $K = 1000$ Hyperpyra. Der Nenner nimmt dann den Wert 154 an, für A_1 erhält man den Zähler $(3 \cdot 4 \cdot 5 =)$ 60, für A_2 den Zähler $(2 \cdot 4 \cdot 5 =)$ 40, für A_3 den Zähler $(2 \cdot 3 \cdot 5 =)$ 30 und für A_4 den Zähler $(2 \cdot 3 \cdot 4 =)$ 24.

104 *Über die Anleger — der erste 23 Hyperpyra, der zweite 35 Hyperpyra, der dritte 56 Hyperpyra — wie kann man wissen, wie viele Hyperpyra jeder von ihnen entsprechend aus den 1000 Hyperpyra gewinnt?*

Setze die Hyperpyra, die jeder von ihnen gab, und der erste gab 23 Hyperpyra, der zweite 35 Hyperpyra, der dritte 56 Hyperpyra. Addiere dies alles, und es werden zusammen 114 Hyperpyra. Diese 114 Hyperpyra sind nun der Teiler der 1000 Hyperpyra; durch dieselben 114 Hyperpyra nämlich werden die 1000 Hyperpyra geteilt, und man findet, wie viele Hyperpyra jeder von ihnen entsprechend aus den 1000 Hyperpyra gewinnt.

Der Autor weist darauf hin, dass man zur Vereinfachung der weiteren Rechnung 114 und 1000 durch 2 teilen soll, d. h. er kürzt $\frac{1000}{114}$ zu $\frac{500}{57}$.
Für den 1. Gesellschafter lautet nun die Rechnung:
(500 Hyperpyra) · 23 = 11500 Hyperpyra, (11500 Hyperpyra) : 57 = 201 Hyperpyra Rest (Zähler) 43, 43 Hyperpyra = 860 Kukkia, (860 Kukkia) : 57 = 15 Kukkia Rest 5, 5 Kukkia = 20 Turnesia; diese bleiben als Rest übrig, da sie kleiner als 47

sind, so der Autor. Im Diagramm hat er hierzu den Bruch $\frac{20}{57}$ notiert, während er sonst die Bruchschreibweise vermeidet.
Ergebnis: 201 Hyperpyra 15 Kukkia 0 Turnesi Rest 20.
2. Gesellschafter:
(500 Hyperpyra) · 35 = 17500 Hyperpyra, (17500 Hyperpyra) : 57 = 307 Hyperpyra Rest 1, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia; diese können laut Autor nicht durch 57 geteilt werden, weshalb er sie in 80 Turnesia verwandelt: (80 Turnesia) : 57 = 1 Turnesi Rest 23. Im Diagramm hat er hierfür wieder die Bruchschreibweise $(\frac{23}{57})$ verwendet.
Ergebnis: 307 Hyperpyra 0 Kukki 1 Turnesi Rest 23
3. Gesellschafter:
(500 Hyperpyra) · 56 = 28000 Hyperpyra, (28000 Hyperpyra) : 57 = 491 Hyperpyra Rest 13, 13 Hyperpyra = 260 Kukkia, (260 Kukkia) : 57 = 4 Kukkia Rest 32, 32 Kukkia = 128 Turnesia, (128 Turnesia) : 57 = 2 Turnesia Rest 14 (Schreibweise $\frac{14}{57}$ im Diagramm)
Ergebnis: 491 Hyperpyra 4 Kukkia 2 Turnesia Rest 14
Es folgt wieder wie im vorigen Kapitel eine Probe durch Addition der errechneten Anteile (Summe: 1000 Hyperpyra) mit Diagramm. Darin werden Überträge nur für die Verwandlung von Turnesi-Bruchteilen in Turnesia sowie von Turnesia in Kukkia notiert. Wiederum liegt keine zuverlässige Probe für die Gewinnanteile vor.
Anschließend führt der Autor auch wieder die "Kukki-Methode" durch. Dazu berechnet er (20000 Kukkia) : 114 = $175\frac{50}{114}$ Kukkia = $175\frac{25}{57}$ Kukkia, kürzt also erst nachher und nicht schon vor der Division. Im zugehörigen Diagramm, in dem eine Zahl verschrieben ist, findet sich auch das Schema der Siebenerprobe, die sich auf die äquivalente multiplikative Darstellung $200000 = 114 \cdot 175 + 50$ bezieht. Mit den Bezeichnungen aus dem Kommentar zu Kap. 22 gilt: $S(114) = 2$, $S(175) = 0$, $S(50) = 1$, $2 \cdot 0 + 1 = 1$ einerseits und $S(20000) = 1$ andererseits. Die Probe selbst wird nicht vorgerechnet, nur die Probezahlen stehen da.
Von der "Kukki-Methode" sollen im Weiteren nur die Ergebnisse vermerkt werden.
1. Gesellschafter: 4035 Kukkia 0 Turnesi Rest (Zähler) 20
2. Gesellschafter: 6140 Kukkia 1 Turnesi Rest 23
3. Gesellschafter: 9824 Kukkia 2 Turnesia Rest 14
Wieder wird – begleitet von einem Diagramm – vorgerechnet, dass die Summe dieser Anteile tatsächlich 20000 Kukkia ergibt.
Abschließend wandelt der Autor die Beträge wieder so weit wie möglich in Hyperpyra um (vgl. Kap. 103). Auf diese Weise entsteht erneut das Diagramm (fol. 54^{v} unten) aus seiner vorherigen Rechnung mit Hyperpyra, wobei er die Addition der einzelnen Posten unnötigerweise noch einmal erläutert.

Der Autor äußert sich nirgendwo darüber, dass die errechneten Teilbeträge von 1000 Hyperpyra als Bruttogewinne der Gesellschafter zu sehen sind. Für die Bestimmung der Nettogewinne müssen die jeweiligen Einlagen in Abzug gebracht werden.
Bei dieser Aufgabe erzielen die Gesellschafter einen Gewinn von mehr als 777 %!

Zur Einführung in die Gesellschaftsrechnung sollten aber prinzipiell solche Aufgaben wie hier gestellt werden, bei denen konkrete Einlagen der Gesellschafter gegeben sind, und nicht solche mit Anteilverhältnissen, die unser Autor bereits im Kap. 103 besprochen hatte.

Es folgt noch ein weiteres Beispiel:
Vier Gesellschafter haben eingelegt wie hier: der erste 140 Hyperpyra, der zweite 230 Hyperpyra, der dritte 320 Hyperpyra, der vierte 410 Hyperpyra. Sie haben 1000 Hyperpyra verdient ...
Es handelt sich also um ein Verlustgeschäft — es sei denn, dass es um einen zusätzlichen Verdienst gehen soll. Der Autor gibt darüber keinen Aufschluss.
Er addiert wieder die Beträge. Die Summe 1100 Hyperpyra sei der Teiler von 1000 Hyperpyra, wobei es einfacher sei, mit 11 Hyperpyra als Teiler von 10 Hyperpyra zu rechnen. Die eingelegten Geldbeträge werden demnach jeweils erst mit 10 multipliziert und dann durch 11 dividiert, wieder unter Vermeidung der Bruchschreibweise. Hier sollen nur die Ergebnisse genannt werden:
Der 1. Gesellschafter erhält 127 Hyperpyra 5 Kukkia 1 Turnesi Rest (Zähler) 9.
Der 2. Gesellschafter erhält 209 Hyperpyra 1 Kukki 3 Turnesia Rest 3.
Der 3. Gesellschafter erhält 290 Hyperpyra 18 Kukkia 0 Turnesi Rest 8.
Der 4. Gesellschafter erhält 372 Hyperpyra 14 Kukkia 2 Turnesia Rest 2.
Der Autor rechnet vor, dass diese Beträge zusammen wieder 1000 Hyperpyra ergeben, und illustriert seine Rechnung auch wieder mit einem Diagramm. Damit ist natürlich noch nicht garantiert, dass die einzelnen Beträge richtig sind.
Es folgt wieder die "Kukki-Methode": Für die 20000 Kukkia wählt er nun den ursprünglichen Teiler 1100. Bei der Division $20000 : 1100 = 18\frac{200}{1100} = 18\frac{2}{11}$ wird wieder die Siebenerprobe (bezogen auf die äquivalente Gleichung $20000 = 18 \cdot 1100 + 200$) herangezogen, wobei nur die Reste notiert sind: $S(1100) = 1$, $S(18) = 4$, $S(200) = 4$, $1 \cdot 4 + 4 = 8$, $S(8) = 1$ einerseits und $S(20000) = 1$ andererseits.
Die weitere Rechnung kann übersprungen werden.
Der 1. Gesellschafter erhält 2545 Kukkia 1 Turnesi Rest (Zähler) 9.
Der 2. Gesellschafter erhält 4181 Kukkia 3 Turnesia Rest 3.
Der 3. Gesellschafter erhält 5818 Kukkia 0 Turnesi Rest 8.
Der 4. Gesellschafter erhält 7454 Kukkia 2 Turnesia Rest 2.
Die anschließende Addition der vier Beträge wird wieder in einem Diagramm dargestellt und im Text nicht mehr ganz so ausführlich erläutert. Es kommen wieder 20000 Kukkia heraus, womit aber wieder nur eine notwendige Bedingung für die korrekte Verteilung der Geldwerte auf die Gesellschafter erfüllt ist.
Danach wandelt der Autor die vier Beträge wieder so weit wie möglich in Hyperpyra um. Dadurch erhält er wieder das Diagramm zu seiner vorherigen Berechnung der Anteile mit Hyperpyra.
Abschließend wiederholt er seine Einschätzung, dass die "Kukki-Methode" leichter sei als die Rechnung mit Hyperpyra (vgl. Kap. 103). Tatsächlich gibt es aber keinen Unterschied in der "Schwierigkeit".

105 ***Über die sechs Gesellschafter, die an den 24 Kukkia der gesamten Schiffsladung einen Anteil haben — der eine mehr Kukkia, der andere weniger — zusammen aber haben die sechs 24 Kukkia. Wie kann man wissen, wie viele Hyperpyra jedem von ihnen von den 17125 Hyperpyra zukommen, die sie gewonnen haben?***

Angenommen, sechs Gesellschafter haben einen Schiffshandel, und der erste hat einen Anteil von 7 Kukkia, der zweite einen von 6 Kukkia, der dritte einen von 5 Kukkia, der vierte einen von 3 Kukkia, der fünfte einen von 2 Kukkia und der sechste einen von 1 Kukki. Addiere dies alles, und es ergeben sich insgesamt 24 Kukkia. Es ist aber die gesamte Ladung des Schiffs 24 Kukkia, und jeder von den sechs Handelsgenossen hat einen Anteil an der Ladung der 24 Kukkia, was wir im Einzelnen sagten. Denn so geschieht es natürlicherweise, wenn viele verschiedene Kaufleute gemeinsam einen Schiffshandel zu betreiben haben. Nachdem dies geschah, werde angenommen, dass sie 17125 Hyperpyra gewonnen haben. Du suchst aber, wie man wissen kann, wie viele Hyperpyra jedem von ihnen entsprechend aus den 17125 Hyperpyra zukommen, die die sechs Gesellschafter gemeinsam gewonnen haben.

Diese Aufgabe ist in zweierlei Hinsicht völlig unrealistisch: Einerseits gibt es keine Schiffsladung von derart geringfügigem Wert, andererseits ergibt sich hier mit der Parität 1 Hyperpyron = 20 Kukkia ein exorbitanter Gewinn von $1426983\frac{1}{3}$ %!
Methodisch bietet die Aufgabe auch nichts Neues gegenüber Kapitel 104, aber der Autor hat ihr wohl deshalb ein eigenes Kapitel gewidmet, weil die Gesellschaftsrechnung beim anteiligen Handel mit einer Schiffsladung eine wichtige Anwendung in der Praxis findet. Die Bedeutung des Schiffshandels wird auch schon in der Aufgabenformulierung herausgestellt.
Aufgaben dieses Typs waren unter anderem auch in den Rechenbüchern der deutschsprachigen Küstenregionen unter der Bezeichnung "Schiffspartenrechnung" (von lat. *pars*) verbreitet.

Zur Rechnung des Autors, der wieder die Bruchschreibweise vermeidet:
1. Gesellschafter: (17125 Hyperpyra) · 7 = 119875 Hyperpyra, (119875 Hyperpyra) : 24 = 4994 Hyperpyra Rest (Zähler) 19, 19 Hyperpyra = 380 Kukkia, (380 Kukkia) : 24 = 15 Kukkia Rest 20, 20 Kukkia = 80 Turnesia, (80 Turnesia) : 24 = 3 Turnesia Rest 8. *Dies kommt dem zu, der die 7 Kukkia hat.* Der Autor schreibt das Ergebnis nicht mehr hin: 4994 Hyperpyra 15 Kukkia 3 Turnesia Rest 8
Die weiteren Rechnungen können übersprungen werden. Die Ergebnisse sind
— für den 2. Gesellschafter: 4281 Hyperpyra 5 Kukkia 0 Turnesi
— für den 3. Gesellschafter: 3567 Hyperpyra 14 Kukkia 0 Turnesi Rest 16
— für den 4. Gesellschafter: 2140 Hyperpyra 12 Kukkia 2 Turnesia
— für den 5. Gesellschafter: 1427 Hyperpyra 1 Kukki 2 Turnesia Rest 16
— für den 6. Gesellschafter: 713 Hyperpyra 10 Kukkia 3 Turnesia Rest 8.
Anschließend werden die sechs Posten wieder auf ihre Summe (17125 Hyperpyra) überprüft, wobei das obligatorische Diagramm (mit Übertragsnotationen) nur

von einer kurzen Beschreibung der einzelnen Additionsschritte im Text begleitet wird.

Und anders.

Jetzt wird die Reihenfolge der Rechenoperationen umgekehrt, d. h. der Gewinn (17125 Hyperpyra) soll erst durch 24 dividiert und dann mit den jeweiligen Zahlen der Anteile multipliziert werden. Der Autor berechnet den Multiplikator ($713\frac{13}{24}$ Hyperpyra) und bezieht ihn auf den Anteil (7) des ersten Gesellschafters. Die Rechnung wird hier noch vollständig durchgeführt und das Ergebnis von oben noch einmal genannt (allerdings wieder in der Schreibweise mit Rest), während bei den weiteren Gesellschaftern der Rechenweg nur angedeutet und auf die obigen Ergebnisse verwiesen wird.

Der Autor nimmt nun eine Methodenbewertung vor:

Wenn ihr Gewinn ganze Hyperpyra ohne Kukkia sind, wird das Gesuchte sowohl mit der ersten als auch mit der zweiten Methode gut gefunden. Immer wenn aber der Gewinn auch gewisse Kukkia hat – es sei ihr Gewinn 17125 Hyperpyra 17 Kukkia – wird das Gesuchte gut mit der zweiten Methode gefunden.

Das genannte Beispiel führt er nur noch ansatzweise aus: 17125 Hyperpyra 17 Kukkia = 342517 Kukkia, (342517 Kukkia) : 24 = $14271\frac{13}{24}$ Kukkia. Um den Gewinn des ersten Gesellschafters zu bestimmen, müsse man nun mit 7 multiplizieren, entsprechend sei beim zweiten bis zum sechsten zu verfahren. Die Ergebnisse (in Kukkia/Turnesia/Rest) könnten leicht (so weit wie möglich) in Hyperpyra verwandelt werden.

Dem Autor ist hier beizupflichten. Zur Vermeidung großer Zahlen sollte eine gemischte Größe nach Umwandlung in die kleinste Einheit zunächst dividiert und erst dann multipliziert werden, wenn diese beiden Operationen erforderlich sind.

Zum Abschluss verweist unser Autor noch auf Möglichkeiten einer geringfügigen Aufgabenvariation: Z. B. kann der Gewinn ein gemischter Geldwert (Hyperpyra/Kukkia) sein, es kann sich um mehr als 6 Gesellschafter handeln, und der Wert der Schiffsladung kann auch 30 oder 15 Kukkia betragen.

Allgemein gilt:

Sind $K_1, \ldots, K_n$ die Kapitaleinlagen von n Gesellschaftern $A_1, \ldots, A_n$ und G der Gewinn, so gilt für den Gewinnanteil G_i des Gesellschafters A_i ($i = 1, \ldots, n$):

$$G_i = G \cdot \frac{K_i}{K_1 + \ldots + K_n}$$

106 ***Über die drei,***
von denen der eine 50 Hyperpyra, der andere 80 Hyperpyra
und der dritte 100 Hyperpyra gegeben hat —
gemäß verschiedenen Monaten und Tagen und nicht wie bisher
Wie kann man wissen, wie viele Hyperpyra jedem von ihnen entsprechend
von den 1000 Hyperpyra zukommen, die sie verdient haben?

Angenommen, drei wurden Gesellschafter, nicht wie bisher an ein und demselben Tag, sondern der erste handelte mit 50 Hyperpyra, nach einigen Tagen kam der zweite und gab 80 Hyperpyra, es kam auch der dritte, einige Tage später als die beiden vorherigen, und gab 100 Hyperpyra. Du suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra jedem von ihnen entsprechend von den 1000 Hyperpyra zukommen, die sie verdient haben, wie in Bezug auf die Hyperpyra, die er gab, und wie in Bezug auf die Monate und die Tage, die vergingen, nach denen jeder seine Hyperpyra gab.

Hyperpyra 5 0	Monate 5 Tage 2 0	Tage 1 7 0	2 2 0
Hyperpyra 8 0	Monate 4 Tage 1 5	Tage 1 3 5	2 1 5
Hyperpyra 1 0 0	Monate 3 Tage 1 0	1 0 0	2 0 0
			6 3 5
			1 2 7

Teiler

Setze nun der Reihe nach die Hyperpyra, die jeder gab, in eine Ordnung, und die Monate und die Tage, die die Hyperpyra eines jeden hatten. Und der erste, der die 50 Hyperpyra hat, handelte mit seinen Hyperpyra 5 Monate und 20 Tage, das sind 170 Tage. Addiere die 170 Tage mit den 50 Hyperpyra, und die Hyperpyra und die Tage des ersten werden zusammen 220. Der zweite aber, der nach einigen Tagen 80 Hyperpyra einlegte, handelte mit seinen Hyperpyra 4 Monate und 15 Tage, das sind 135 Tage. Addiere die 135 Tage mit den 80 Hyperpyra, und die Hyperpyra und die Tage des zweiten werden zusammen 215. Der dritte aber, der nach einigen Tagen 100 Hyperpyra einlegte, handelte mit seinen Hyperpyra 3 Monate und 10 Tage, das sind 100 Tage. Addiere die 100 Tage mit den 100 Hyperpyra, und die Hyperpyra und die Tage des dritten werden zusammen 200.

Aufgrund des Diagramms ist klar, wie nach Meinung des Autors im Wesentlichen weiterzurechnen ist. 635 ist Teiler von 1000 Hyperpyra bzw. 127 ist Teiler von 200 Hyperpyra. Der Anteil des ersten Gesellschafters wäre demnach (200 Hyperpyra) $\cdot \frac{220}{127}$ = 346 Hyperpyra 9 Kukkia $\frac{68}{127}$ Turnesia, der Anteil des zweiten (200 Hyperpyra) $\cdot \frac{215}{127}$ = 338 Hyperpyra 11 Kukkia $2\frac{78}{127}$ Turnesia und der Anteil des dritten (200 Hyperpyra) $\cdot \frac{200}{127}$ = 314 Hyperpyra 19 Kukkia $\frac{108}{127}$ Turnesia.

Hier ist unserem Autor aber ein eklatanter Fehler unterlaufen: Gewinne sind proportional nicht nur zur Höhe der Einlagen, sondern auch zu deren Laufzeiten (vom Zinseszins einmal abgesehen). Anstatt zu addieren, hätte er die Anzahl der Tage mit der Anzahl der Hyperpyra multiplizieren müssen.

Demgemäß müssen in der rechten Spalte des obigen Diagramms von oben nach

unten die Zahlen 8500, 10800, 10000, 29300 (Summe und Teiler von 1000 Hyperpyra) und 293 (Teiler von 10 Hyperpyra) stehen.
Nun gilt $8500 \cdot \frac{10}{293}$ Hyperpyra = $290\frac{30}{293}$ Hyperpyra = 290 Hyperpyra 2 Kukkia $\frac{56}{293}$ Turnesia (Anteil des 1. Gesellschafters). Mit den Faktoren 10800 und 10000 erhält man 368 Hyperpyra 12 Kukkia $\frac{16}{293}$ Turnesia für den zweiten Gesellschafter bzw. 341 Hyperpyra 5 Kukkia $3\frac{221}{293}$ Turnesia für den dritten.

Der Autor zeigt im Text und wieder in einem Diagramm auf, dass auch seine falsch berechneten Gewinnanteile zusammen wieder 1000 Hyperpyra ergeben.
Es folgt noch die aus den beiden letzten Kapiteln bekannte "Kukki-Methode" mit der Summenprobe und der anschließenden Umrechnung in Hyperpyra, womit er seine falschen Ergebnisse zu bestätigen glaubt.

Ein weiteres Beispiel wird ebenso fehlerhaft vorgerechnet:
4 Gesellschafter verdienen zusammen 2000 Hyperpyra. Der erste legt 103 Hyperpyra für 6 Monate 9 Tage ein, der zweite 150 Hyperpyra für 5 Monate 7 Tage, der dritte 208 Hyperpyra für 4 Monate 6 Tage, der vierte 315 Hyperpyra für 3 Monate 8 Tage.
Wieder addiert der Autor die Anzahlen der Hyperpyra und der Tage, anstatt sie zu multiplizieren. Es lohnt sich nicht, seine Rechnung weiter nachzuvollziehen, nur die falschen Ergebnisse seien hier noch angeführt.
1. Gesellschafter: 433 Hyperpyra 17 Kukkia 2 Turnesia Rest (Zähler) 170
2. Gesellschafter: 456 Hyperpyra 3 Kukkia 1 Turnesi Rest 211
3. Gesellschafter: 496 Hyperpyra 5 Kukkia 2 Turnesia Rest 554
4. Gesellschafter: 613 Hyperpyra 3 Kukkia 1 Turnesi Rest 411.
Multipliziert man die Anzahl der Hyperpyra mit der Anzahl der Tage, so ist 100095 (= $103 \cdot 189 + 150 \cdot 157 + 208 \cdot 126 + 315 \cdot 98$) der Teiler von 2000 Hyperpyra bzw. 20019 der Teiler von 400. Das jeweilige Produkt aus der Zahl der Hyperpyra und der Tageszahl wird jetzt mit $\frac{400}{20019}$ multipliziert. Die Gewinne teilen sich tatsächlich wie folgt auf.
1. Gesellschafter: 388 Hyperpyra 19 Kukkia $1\frac{12777}{20019}$ Turnesia
2. Gesellschafter: 470 Hyperpyra 11 Kukkia $\frac{4764}{20019}$ Turnesia
3. Gesellschafter: 523 Hyperpyra 13 Kukkia $1\frac{33}{20019}$ Turnesia
4. Gesellschafter: 616 Hyperpyra 16 Kukkia $1\frac{2445}{20019}$ Turnesia

Allgemein lässt sich (im Fall der einfachen Verzinsung) folgende Formel aufstellen:
Sind $K_1, \ldots, K_n$ die Kapitaleinlagen von n Gesellschaftern $A_1, \ldots, A_n$, $t_1, \ldots, t_n$ die jeweiligen Anlagezeiten und G der Gewinn, so gilt für den Gewinnanteil G_i des Gesellschafters A_i ($i = 1, \ldots, n$):

$$G_i = G \cdot \frac{K_i \cdot t_i}{K_1 t_1 + \ldots + K_n t_n}$$

Aufgaben dieser Art werden sonst auch im byzantinischen Bereich richtig gelöst, z. B. vom Schreiber B (vgl. HUNGER/VOGEL [1963, Nr. 9 f., S. 21; Nr. 40, S. 37]).

Die vier Kapitel 103 bis 106 zur Gesellschaftsrechnung stellen sicher keine Glanzleistung unseres Autors dar. Erinnert sei auch noch einmal an den für ein Einführungskapitel unpassenden Inhalt bzw. – anders ausgedrückt – an die falsche Reihenfolge der Kap. 103 und 104. Auch die Aufgaben selbst sind wenig abwechslungsreich – vgl. Kap. 104 und 105. Insbesondere fehlen die Umkehraufgaben, bei denen aufgrund anderer entsprechend gegebener Stücke zum Beispiel nach der Einlage eines einzelnen Gesellschafters oder nach seiner Anlagezeit oder auch nach der Anzahl der Gesellschafter gefragt wird. Auch fehlen Aufgaben, bei denen Waren in die Gesellschaft eingeschossen werden. Die deutschsprachige Rechenbuchliteratur des 16. Jahrhunderts zeigt hier eine Vielfalt von Möglichkeiten auf.

107 *Wenn 1 Exagion Perlen 7 Hyperpyra kostet, 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia – wie viele Hyperpyra sie entsprechend kosten*

Angenommen, jemand verkauft Perlen, jedes Exagion für 7 Hyperpyra. Du aber willst 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia kaufen. Du suchst aber zu wissen, wie viele Hyperpyra die 2 Pfund und 4 Unzen und 5 Exagia entsprechend kosten.

Du kannst dies so wissen. Die 2 Pfund sind 24 Unzen. Addiere auch die 4 Unzen, und es werden 28 Unzen. Da jede Unze 6 Exagia ist, werden 6 mal 28 168 Exagia. Addiere auch die 5 Exagia, und die 2 Pfund und 4 Unzen und 5 Exagia werden zusammen 173 Exagia. Multipliziere die 173 Exagia mit den 7 Hyperpyra, von denen wir sagten, dass sie den Wert von 1 Exagion haben: 7 mal 173 ergeben 1211. Und siehe, die 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia kosten 1211 Hyperpyra.

In diesem sehr kurzen Kapitel werden die Untereinheiten des Pfunds eingeführt. Es gelten die Relationen 1 Pfund = 12 Unzen, 1 Unze = 6 Exagia, wie sie auch in einem byzantinischen Rechenbuch des 14. Jahrhunderts (VOGEL [1968, S. 161]) und bei Rhabdas (TANNERY [1886]), ebenfalls im 14. Jahrhundert, belegt sind.

108 *Wenn 1 Pfund Perlen 100 Florin kostet, 4 Unzen 3 Exagia – wie viel sie entsprechend kosten*

Angenommen, du hast 1 Pfund Perlen, welches 100 Florin kostet, jeder Florin für 7 Hyperpyra, d. h. die 100 Florin für 700 Hyperpyra. Es will aber jemand von eben diesem einen Pfund 4 Unzen und 3 Exagia kaufen. Du aber suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra die 4 Unzen und 3 Exagia entsprechend kosten.

Der Autor rechnet folgendermaßen.

1 Pfund = 12 Unzen = 72 Exagia, 4 Unzen = 24 Exagia, 4 Unzen 3 Exagia = 27 Exagia; Dreisatz: 72 Exagia kosten 100 Florin – wie viel Florin kosten 27 Exagia?

$100 \cdot 27 = 2700$, $2700 : 72 = 37\frac{1}{2}$; Ergebnis: $37\frac{1}{2}$ Florin bzw. 37 Florin 3 Hyperpyra 10 Kukkia (1 Florin = 7 Hyperpyra, 1 Hyperpyron = 20 Kukkia)

Angenommen, du suchst zu wissen, wie viele Hyperpyra jedes Exagion von den

27 kostet, von denen du gefunden hast, dass sie $37\frac{1}{2}$ Florin kosten.
Rechnung: ($37\frac{1}{2}$ Florin) : 27 = 1 Florin Rest (Zähler) $10\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{2}$ Florin = $73\frac{1}{2}$ Hyperpyra, ($73\frac{1}{2}$ Hyperpyra) : 27 = 2 Hyperpyra Rest $19\frac{1}{2}$, $19\frac{1}{2}$ Hyperpyra = 390 Kukkia, (390 Kukkia) : 27 = 14 Kukkia Rest 12, 12 Kukkia = 48 Turnesia (also: 1 Kukki = 4 Turnesia), (48 Turnesia) : 27 = $1\frac{21}{27}$ Turnesia
Ergebnis: 1 Florin 2 Hyperpyra 14 Kukkia $1\frac{21}{27}$ Turnesia (bleibt ungekürzt)
Eine andere Möglichkeit wäre gewesen, davon auszugehen, dass 72 Exagia Perlen 100 Florin kosten, und daraus den Preis für 1 Exagion zu bestimmen.

109 *Wenn 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia 15 Kukkia Perlen 150 Florin 5 Hyperpyra 4 Kukkia 3 Turnesia kosten, wie man wissen kann, wie viel 1 Pfund, 1 Unze, 1 Exagion, 1 Kukki kosten*

Angenommen, du hast an Perlen 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia 15 Kukkia, die auch Karate genannt werden. Du hast diese, was wir sagten, für 150 Florin 5 Hyperpyra 4 Kukkia 3 Turnesia gekauft. Du suchst aber, wie man wissen kann, wie viel 1 Pfund und wie viel 1 Unze und wie viel 1 Exagion und wie viel 1 Karat entsprechend kosten. Jeder Florin hat den Wert von 7 Hyperpyra.
Der Autor stellt zunächst eine Tabelle auf: In der oberen Zeile steht das Perlengewicht, für das der Preis gegeben ist. In der unteren Zeile stehen — nach den obigen Gewichtseinheiten geordnet — 1 Pfund, 1 Unze und 1 Exagion, aber jeweils in die nächstkleinere Einheit umgewandelt.

Pfunde 2	Unzen 4	Exagia 5	Karate 15
Unzen 12	Exagia 6	Karate 24	

Dabei zeigt sich, dass 1 Exagion hier 24 Karat entspricht.
Jetzt werden 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia 15 Karat schrittweise in Karate umgewandelt, wobei die Tabelle als Hilfe geeignet ist: 2 Pfund 4 Unzen = $(2 \cdot 12 + 4)$ Unzen = 28 Unzen = 168 Exagia, 168 Exagia + 5 Exagia = 173 Exagia = 4152 Karat, 4152 Karat + 15 Karat = 4167 Karat. Diesen Wert soll man sich merken — so der Autor.
Anschließend stellt er eine analoge Tabelle für den gegebenen Preis der Perlen auf, die die anschließende Rechnung erleichtern soll:

Florin 150	Hyperpyra 5	Kukkia 4	Turnesia 3
Hyperpyra 7	Kukkia 20	Turnesia 4	

Jetzt werden 150 Florin 5 Hyperpyra 4 Kukkia 3 Turnesia schrittweise in Turnesia umgewandelt: 150 Florin 5 Hyperpyra = $(7 \cdot 150 + 5)$ Hyperpyra = 1055 Hyperpyra = 21100 Kukkia, 21100 Kukkia + 4 Kukkia = 21104 Kukkia = 84416 Turnesia, 84416 Turnesia + 3 Turnesia = 84419 Turnesia.
Es folgt die Division (84419 Turnesia) : 4167 = $20\frac{1079}{4167}$ Turnesia = 5 Kukkia $\frac{1079}{4167}$ Turnesia, womit der Preis für 1 Karat Perlen bestimmt ist.
Danach soll der Preis für 1 Exagion, d. h. für 24 Karat, bestimmt werden.

Der Autor wählt den Dreisatz: 4167 Karat kosten 84419 Turnesia. Wie viel kosten 24 Karat?
(84419 Turnesia) · 24 = 2026056 Turnesia, 2026056 Turnesia : 4167 = $486\frac{894}{4167}$ Turnesia = 6 Hyperpyra 1 Kukki $2\frac{894}{4167}$ Turnesia. Der Bruch hätte noch zu $\frac{298}{1389}$ gekürzt werden können. Geschickter wäre es gewesen, die Rechnung auf den Preis von 1 Karat zu beziehen, da man dann mit wesentlich kleineren Zahlen operieren kann.
Auch für Berechnung der Preise für 1 Unze und 1 Pfund verwendet der Autor die Dreisatzmethode, ohne aber den Ansatz neu zu formulieren. (4167 Karat kosten 84419 Turnesia. Wie viel kosten 144 Karat bzw. 1728 Karat?) Vielmehr gibt er im Text nur die Rechenschritte und die Ergebnisse an. Die Rechnungen selbst führt er nur in Diagrammen durch, die deshalb so überdimensional sind, weil er mit unnötig großen Zahlen operiert, die er wieder hätte vermeiden können, wenn er sich jeweils auf den Preis des gerade berechneten (nächstkleineren) Einheitsgewichts bezogen hätte. In den Diagrammen sind ihm, was nicht verwundern kann, etliche Zahlenschreibfehler unterlaufen, die aber keine schädlichen Auswirkungen haben.
Als Ergebnisse sind zu nennen:
1 Unze kostet 36 Hyperpyra 9 Kukkia $1\frac{1197}{4167}$ Turnesia, 1 Pfund kostet 437 Hyperpyra 11 Kukkia $3\frac{1863}{4167}$ Turnesia. Die Brüche hätten zu $\frac{133}{463}$ bzw. $\frac{207}{463}$ gekürzt werden können. Wie schon gelegentlich früher fällt auf, dass der Autor die Hyperpyra nicht (so weit wie möglich) in Florine verwandelt (36 Hyperpyra = 5 Florin 1 Hyperpyron, 437 Hyperpyra = 62 Florin 3 Hyperpyra).
Er weist außerdem noch darauf hin, dass man auch zuerst den Preis von 1 Pfund bestimmen und dann der Reihe nach *auf die gleiche Weise*, d. h. mit dem Dreisatz, die Preise von 1 Unze, 1 Exagion und 1 Karat berechnen kann.

Zusätzlich stellt er noch die Frage, wie viele Hyperpyra 1 Karat, 1 Exagion, 1 Unze und 1 Pfund zusammen kosten.
Dazu legt er eine Preistabelle an, wobei hierzu auf die Edition (fol 59^{v}) verwiesen werden kann, und addiert die einzelnen Posten, beginnend mit den Turnesia-Bruchteilen:
1079 + 894 + 1197 + 1863 = 5033, 5033 : 4167 = $1\frac{866}{4167}$ (Turnesia). Diesen Quotienten rundet er auf $1\frac{1}{5}$ (Turnesia). Zusammen mit den Turnesia-Anteilen 0, 2, 1, 3 der vier Einheitsgewichte erhält er (rund) $7\frac{1}{5}$ Turnesia bzw. 1 Kukki $3\frac{1}{5}$ Turnesia. Die Kukkia-Anteile 5, 1, 9, 11 der Einheitsgewichte erhöhen sich daher auf 27 Kukkia bzw. 1 Hyperpyron 7 Kukkia. Die Hyperpyra-Anteile (0,) 6, 36, 437 ergeben mit dem Übertrag zusammen 480 Hyperpyra.
Der Gesamtpreis beträgt also ungefähr 480 Hyperpyra 7 Kukkia $3\frac{1}{5}$ Turnesia, doch der Autor hat sich etwas verrechnet — er schreibt, auch im Diagramm, 6 Kukkia statt 7 Kukkia.

Wenn du aber zu wissen suchst, wie viel Hyperpyra für sich genommen die 2 Pfund und wie viel die 4 Unzen und wie viel die 5 Exagia und wie viel die 15 Karat kosten, kannst du dies mit der Dreisatzmethode erfahren, so wie du auch das 1 Pfund und 1 Unze und 1 Exagion gefunden hast.

Du kannst dies aber auch sehr leicht durch die Toleta erfahren.
Der Autor präsentiert eine Tabelle, in deren linken Teil die Preise von 1 Pfund, 1 Unze, 1 Exagion und 1 Karat von oben nach unten aufgelistet sind. Parallel dazu stehen im rechten Tabellenteil die Preise von 2 Pfund, 4 Unzen, 5 Exagia und 15 Karat, zu denen im Text eine ausführliche Rechnung durchgeführt wird. Der rechte Teil der Tabelle hat folgende Gestalt:

Pfunde	2	Hyp.	8 7 4	Kukkia	2 2	Turn.	6	Zähler	3 7 2 6
Unzen	4	Hyp.	1 4 4	Kukkia	3 6	Turn.	4	Zähler	4 7 8 8
Exagia	5	Hyp.	3 0	Kukkia	5	Turn.	1 0	Zähler	4 4 7 0
Karate	1 5			Kukkia	7 5	Turn.	0	Zähler	1 6 1 8 5
		Hyp.	7	Kukkia	6		7		2 9 1 6 9
		Hyp.	1 0 5 5	Kukkia	4	Turn.	3		~~1 4 4~~
	Florin 150	Hyp.	5	Kukkia	4	Turn.	3		~~2 9 1 6 9~~ 4 1 6 7
								Turnesia	7

Die Preise für die Gewichte werden einfach durch entsprechende Vervielfachung der Maßzahlen der Geldwerte, bezogen auf die Preise der Einheitsgewichte, dargestellt. Die natürliche Fortsetzung der Rechnung, das Höherbündeln, fehlt auch im Text. Dem Autor geht es offenbar weniger um die Preisberechnung der einzelnen Posten als um die Berechnung des Preises für alle Posten zusammen, wie man auch im unteren Teil der Tabelle sieht. Die Erläuterungen dazu sind recht kurz gehalten. (Rechts unten dividiert er die Zählersumme 29169 durch den Nenner 4167, für die Turnesia ergibt sich 7 als Übertrag, für die Kukkia und für die Hyperpyra erhält man die Überträge 6 bzw. 7. Das Gesamtergebnis wird zweimal notiert – beim ersten Mal noch ohne Florin-Anteil.)
Das Ergebnis kommentiert der Autor wie folgt:
Und siehe, wie wir sagten, dass die 2 Pfund 4 Unzen 5 Exagia 15 Karat 150 Florin 5 Hyperpyra 4 Kukkia 3 Turnesia kosten, so hast du nun auch durch die Toleta gefunden, wie viele Hyperpyra jede Sorte von ihnen für sich kostet und wie viele zusammen. Denn nachdem du die Hyperpyra von ihnen allen und die Kukkia und die Turnesia und die Zähler addiert hast, ergaben sich wieder 150 Florin 5 Hyperpyra 4 Kukkia 3 Turnesia.
Und dies ist der Beweis, dass das Gesuchte richtig geworden ist.
Der Autor hat damit eine Umkehrfrage zur Aufgabe in der Kapitelüberschrift behandelt.
Abschließend diskutiert er an einigen hier vorgerechneten Beispielen, wie der Dreisatz und die Tolletrechnung als Lösungsmethoden eingesetzt werden können. Dabei räumt er keiner der beiden Methoden eine Präferenz ein.

Der Preis für 1 Pfund Perlen ist in Kap. 108 deutlich höher als in den Kapiteln 107 und 109 (vgl. den metrologischen Teil).

110 ***Wie man wissen kann, wie viele Pfund Kupfer man den 30 Pfund Feinsilber zusetzen muss, damit jedes Pfund 9 Unzen hat, welches 12 Unzen hat. Das reinste Silber, das bei den Italienern "fein" genannt wird — es könnte auch jemand "vollkommen" sagen, denn dies bezeichnet "fein", — hat 12 Unzen, wie das feine und vollkommene Gold 24 Karat hat***

Also angenommen, du hast 30 Pfund Feinsilber, jedes Pfund von 12 Unzen. Du willst das vollkommen reinste Pfund mit den 12 Unzen zu einem mit 9 Unzen machen. Du suchst zu wissen, wie viele Pfund Kupfer du zuzusetzen hast, was in der Goldschmiedekunst "Legierung" genannt wird, damit aus den 30 Pfund — das feinste Silber, das du hast — wird, dass jedes Pfund jeweils 9 Unzen hat, welches, wie wir sagten, 12 Unzen hat, und wenn der Zusatz des Kupfers noch hinzugefügt worden ist, wie viele Pfund die 30 Pfund reinsten und vollkommenen Silbers, das du hast, mehr werden.

Diese erste, sehr einfache Aufgabe zur Mischungsrechnung löst der Autor wie folgt:

30 Pfund = 360 Unzen, 360 Unzen : 9 Unzen = 40, d. h. es entstehen 40 Pfund Silber, jedes Pfund mit dem Feingehalt 9 Unzen.

Der Kupferzusatz beträgt 10 Pfund.

Er führt noch eine Probe an, die auf der Identität $9 \cdot 40 = 12 \cdot 30$ (= 360) beruht.

In einer zweiten Aufgabe sollen 30 Pfund Silber mit dem Feingehalt 11 Unzen durch Kupferzusatz zu Silber mit dem Feingehalt 9 Unzen legiert werden.

Zur Rechnung des Autors:

(11 Unzen) · 30 = 330 Unzen Feinsilber, 330 Unzen : 9 Unzen = $36\frac{2}{3}$, d. h. es entstehen $36\frac{2}{3}$ Pfund bzw. 36 Pfund 8 Unzen mit dem Feingehalt 9 Unzen.

Der Kupferzusatz beträgt 6 Pfund 8 Unzen.

Probe: (36 Pfund 8 Unzen) · 9 = (30 Pfund) · 11

3. Aufgabe:

Jetzt sollen 40 Pfund und 6 Unzen Silber ($40\frac{1}{2}$ Pfund Silber) mit dem Feingehalt 10 Unzen durch Kupferzusatz zu Silber mit dem Feingehalt $7\frac{1}{2}$ Unzen legiert werden.

Zur Rechnung:

40 Pfund haben hier 400 Unzen Feinsilber, 6 Unzen haben 5 Unzen Feinsilber, insgesamt sind es 405 Unzen Feinsilber; $405 : 7\frac{1}{2} = \frac{810}{2} : \frac{15}{2} = 810 : 15 = 54$, d. h. es entstehen 54 Pfund mit dem Feingehalt $7\frac{1}{2}$ Unzen.

Der Kupferzusatz beträgt $13\frac{1}{2}$ Pfund.

Probe: $54 \cdot 7\frac{1}{2}$ Unzen = $40\frac{1}{2} \cdot 10$ Unzen (= 405 Unzen)

Und umgekehrt. *Angenommen, du willst die 54 Pfund, die jeweils $7\frac{1}{2}$ Unzen haben, diese als reine, was man in der Goldschmiedekunst "läutern" nennt, um fein zu werden, d. h. vollkommen, jedes Pfund zu je 12 Unzen, welches nun jeweils $7\frac{1}{2}$ Unzen hat.*

Zur Rechnung:

54 Pfund haben 405 Unzen Feinsilber; statt 405 : 12 rechnet nun der Autor im Haupttext 810 Halbe : 24 Halbe bzw. (unnötig erweitert) 810 : 24, was ihm eine

Notiz am linken Rand von fol. 60^{v} wert ist, wo er auf die Vereinfachung $405 : 12$ hinweist. Ergebnis: $33\frac{3}{4}$, d. h. 54 Pfund mit $7\frac{1}{2}$ Unzen Feingehalt enthalten $33\frac{3}{4}$ Pfund (bzw. 33 Pfund 9 Unzen) Feinsilber; 54 Pfund – 33 Pfund 9 Unzen = 20 Pfund 3 Unzen.
Es schwanden im Schmelzofen 20 Pfund und 3 Unzen Kupfer.
Probe: $12 \cdot 33 + 9 = 54 \cdot 7\frac{1}{2} = 405$

Die Lösung dieser Aufgaben beruht letztlich darauf, dass bei konstantem Feinsilbergewicht die Zuordnung Metallgewicht ⇒ Feingehalt indirekt proportional ist.

111 *Wie dies auch bei Gold nützlich ist*

Also angenommen, du hast 100 Exagia Gold. Jedes Exagion hat nun gewöhnlich 24 Kukkia, die auch Karate genannt werden. Das Gold von 24 Kukkia ist rein. Du willst dies zu Schmuckgold machen, sodass jedes Exagion 22 Kukkia hat. Die Legierung und der Zusatz zum Gold, damit es geringere Karate erhält, geschieht mit Silber und nicht mit Kupfer. Du suchst nun, wie viele Exagia Silber du als Legierung zuzusetzen hast, damit es geschieht, dass die 100 Exagia, die jeweils 24 Kukkia haben, jedes Exagion jeweils 22 Kukkia hat, und wie viele Exagia Schmuckgold mit dem Zusatz und der Legierung des Silbers entstehen werden.
Zur Rechnung:
100 Exagia Feingold haben 2400 Karat, 2400 Karat : 22 Karat = $109\frac{1}{11}$, d. h. es entstehen $109\frac{1}{11}$ Exagia Schmuckgold mit dem Feingehalt 22 Karat, und $9\frac{1}{11}$ Exagia Silber sind zuzusetzen.
Probe: $22 \cdot 109\frac{1}{11}$ Karat = $(22 \cdot 109 + 2)$ Karat = $24 \cdot 100$ Karat

Und umgekehrt.
Aus $109\frac{1}{11}$ Exagia 22-karätigen Goldes soll nun Feingold geschmolzen werden, und es ist nach dem Silberschwund gefragt.
Dazu berechnet der Autor die Karatzahl $(109\frac{1}{11} \cdot 22 = 2400)$ und dividiert durch 24.
Es ergeben sich wieder 100 Exagia Feingold, und $9\frac{1}{11}$ Exagia Silber sind geschwunden.
Die Probe des Autors hierzu ist zwar unvollständig ($100 \cdot 24$ Kukkia = 2400 Kukkia), aber nach der Aufgabe vorher auch unnötig.

112 *Wie man wissen kann, wie viele Unzen jedes Pfund von den 40 Pfund haben wird – das Silber, bei dem jedes Pfund von den 40 jeweils $11\frac{1}{2}$ Unzen hat, wenn 6 Pfund Kupferlegierung zugesetzt werden*

Angenommen, du hast 40 Pfund Silber, jedes Pfund von $11\frac{1}{2}$ Unzen. Du willst aber 6 Pfund Kupferlegierung zusetzen, sodass es insgesamt 46 Pfund werden. Du suchst zu wissen, wie viel Unzen jedes Pfund von den 46 haben wird.

Lösung des Autors:
40 Pfund enthalten 460 Unzen Feinsilber, (460 Unzen) : 46 = 10 Unzen
Probe:
(10 Unzen) · 46 = ($11\frac{1}{2}$ Unzen) · 40 = 460 Unzen

Und umgekehrt. *Angenommen, du hast 48 Pfund Silber. Als du dies in einen Schmelzofen warfst, schwand Kupfer, 18 Pfund, und es wurden die 48 Pfund zu 30 Pfund reinsten Silbers. Du suchst zu wissen, wie viele Unzen es vorher hatte, als es 48 Pfund waren.*
Lösung des Autors:
30 Pfund Feinsilber sind 360 Feinunzen, (360 Unzen) : 48 = $7\frac{1}{2}$ Unzen
Probe: 48 · $7\frac{1}{2}$ Unzen = 30 · 12 Unzen = 360 Unzen
Der Autor schließt mit der Bemerkung, dass dies (gemeint ist die Rechenmethode) auch bei Gold Verwendung finden kann.

113 *Über die Goldarbeit, von der nicht bekannt war, wie viel Karat sie hatte Wenn man aber von ihr 5 Exagia nahm, entstanden nach einer Legierung mit 10 Exagia Feingold zusammen 15 Exagia von je 18 Karat. Du suchst aber zu wissen, wie viel Karat die Goldarbeit hatte, von der dies nicht bekannt war.*

Angenommen, jemand hat dir als Pfand 100 Exagia gegeben oder eine Menge von — so viel auch immer du sagst — mehr oder weniger Exagia. Du hast irgendeine Goldarbeit von 15 Exagia machen müssen. Du hast aber (nur) 10 Exagia Feingold von 24 Karat, und es fehlen dir 5 Exagia. Du hast aber diese 5 Exagia, welche dir fehlen, von den 100 Exagia genommen, die du als Pfand empfängst, und es sind 95 Exagia übrig geblieben. Du hast aber die 5 Exagia, welche du von den 100 Exagia genommen hast, mit den 10 Exagia vereinigt, die du hast, und es sind 15 Exagia geworden, jedes Exagion der 15 zu je 18 Karat. Nachdem die Arbeit entstanden war, die du hast machen müssen, hast du die 95 Exagia verloren, die du als Pfand empfangen hast. Du suchst zu wissen, wie viel Karat jedes Exagion der 95 hatte, die du verloren hast, um dem Besitzer den gerechten Wert zurückzugeben.
Der Autor überlegt folgendermaßen.
Die Legierung von 10 Exagia Feingold mit 5 Exagia aus dem Pfand ergeben 15 Exagia mit 18 Karat Feingehalt, sodass die 15 Exagia einen Feingoldanteil von $\frac{18}{24} \cdot 15$ Exagia haben, das sind $\frac{3}{4} \cdot 15$ Exagia bzw. $11\frac{1}{4}$ Exagia. Die 5 Exagia aus dem Pfand enthalten also $1\frac{1}{4}$ Exagia Feingold. Mit dem Dreisatz, *wie wir es gewöhnlich bei den Hyperpyra getan haben*, bestimmt er nun den Feingehalt von 100 Exagia aus dem Pfand.
Ergebnis: 25 Exagia Feingold und 75 Exagia "Zusatz" (Silber) müssen dem, der das Pfand gegeben hat, zurückerstattet werden. (5 Exagia waren ja für die Goldarbeit verwendet worden und die restlichen 95 Exagia abhandengekommen. Dieser angebliche Verlust wirkt allerdings etwas konstruiert.)
Dieses Ergebnis begründet der Autor außerdem mit dem gleichen Anteil ($\frac{1}{4}$) von $1\frac{1}{4}$ Exagia bezüglich 5 Exagia und von 25 Exagia bezüglich 100 Exagia.

Es folgen noch zwei Proben, bei denen jeweils in Karate umgerechnet wird. (1 Exagion = 24 Karat)
1. Probe:
Die 5 Exagia (aus dem Pfand) enthalten 30 Karat Feingold, 1 Exagion enthält 6 Karat, 100 Exagia enthalten 600 Karat; ebenso haben 25 Exagia Feingold 600 Karat.
2. Probe:
Die 5 Exagia (aus dem Pfand) enthalten 30 Karat Feingold, 10 Exagia Feingold haben 240 Karat. 15 Exagia enthalten zusammen 270 Karat Feingold, 1 Exagion hat also 18 Karat.
Der Autor schließt mit der Bemerkung, dass man in entsprechender Weise auch die Unzen von Silber berechnen kann.

114 *Über die 50 Pfund Silber, das in jedem Pfund 7 Unzen hat, — wie es (zu Silber) von je 9 Unzen werden kann, wenn ein Zusatz an Silber hinzugefügt wurde, das in jedem Pfund je 11 Unzen hat*

Angenommen, du hast 50 Pfund Silber, jedes Pfund hat 7 Unzen Feinsilber. Du willst aber dieses Silber dazu machen, dass jedes Pfund 9 Unzen Feinsilber hat — mit einer Legierung mit einem anderen Silber, das in jedem Pfund 11 Unzen hat. Du suchst nun zu wissen, wie viel Pfund Silber von jeweils 11 Unzen du zusetzen musst, damit die 50 Pfund, die jeweils 7 Unzen haben, (zu Silber) von jeweils 9 Unzen werden.
Du kannst dies so wissen. Suche zuerst, wie viele Unzen Silber den 50 Pfund zu jeweils 7 Unzen fehlen, um (zu Silber) von jeweils 9 Unzen zu werden: Es fehlen den 50 Pfund 100 Unzen, um (zu Silber) von jeweils 9 Unzen zu werden. Behalte diese 100 Unzen gesondert. Danach suche den Unterschied in Bezug auf das Größere auf, der von den 11 Unzen, die du als Legierung hinzuzufügen hast, gegenüber den 9 Unzen besteht, zu denen du die 50 Pfund machen willst. Es ist aber ein größerer (Unterschied) der 11 Unzen gegenüber den 9, nämlich 2 Unzen. Teile die 100 Unzen, die du gesondert behältst, durch diese 2 Unzen, und der Quotient davon ergibt 50 ... 50 Pfund Silber von jeweils 11 Unzen hast du nun hinzuzufügen, damit die 50 Pfund, die jeweils 7 Unzen haben, (Silber) zu jeweils 9 Unzen werden. Es entstehen zusammen 100 Pfund zu jeweils 9 Unzen.
Es handelt sich hier um eine typische, wenn auch sehr einfache Mischungsaufgabe, deren Lösung man durch eine naheliegende inhaltliche Überlegung sofort erhält: Da 9 das arithmetische Mittel von 7 und 11 ist, erzielt man den mittleren Feingehalt von 9 Unzen dadurch, dass man für die Legierung ebenso viele Pfund Silber vom Feingehalt 11 nimmt, wie vom Feingehalt 7 vorhanden sind.

Ist m_1 das Gewicht der 1. Sorte Silber (Einheit: Pfund) und k_1 ihr Feingehalt (Einheit: Unze pro Pfund), so hat nach Zugabe von m_2 (Einheit: Pfund) der 2. Sorte Silber mit dem Feingehalt k_2 die Legierung — nunmehr mit dem Gewicht $m_1 + m_2$ (Einheit: Pfund) — den Feingehalt
$k = \frac{m_1 k_1 + m_2 k_2}{m_1 + m_2}$ (Unzen pro Pfund), was zu $\frac{m_1}{m_2} = \frac{k_2 - k}{k - k_1}$ äquivalent ist.

(Üblicherweise wählt man k_1, k_2 so, dass $k_1 < k < k_2$ gilt.)
Die letzte Gleichung ist auch unter dem Namen "Mischungsformel" bekannt.
An ihr erkennt man das sog. Mischungskreuz: Die Gewichte (in anderen Sachzusammenhängen: die Mengen, Volumina u. a.) verhalten sich umgekehrt wie die Abweichungen ihrer Feingehalte (Anteile, Konzentrationen etc.) vom "mittleren" Feingehalt (vom "mittleren" Anteil, von der "mittleren" Konzentration etc.).
In der vorliegenden Aufgabe ist (ohne Einheiten) $m_1 = 50$, $k_1 = 7$, $k = 9$, $k_2 = 11$, sodass in der 2. Gleichung Zähler und Nenner jeweils übereinstimmen.
Unser Autor hat also m_2 bestimmt, indem er zunächst m_1 mit $k - k_1$ multipliziert und danach durch $k_2 - k$ dividiert hat. Dieses Vorgehen ist nach der 2. Gleichung oben gerechtfertigt.

Es folgt wieder eine Probe:
50 Pfund Silber mit dem Feingehalt 7 Unzen ergeben 350 Unzen Feinsilber,
50 Pfund Silber mit dem Feingehalt 11 Unzen ergeben 550 Unzen Feinsilber.
Zusammen enthalten die 100 Pfund Silber also 900 Unzen Feinsilber, sodass 1 Pfund Silber einen Feingehalt von 9 Unzen hat.

Und umgekehrt. Jetzt geht es um eine Aufgabe, bei der der Feingehalt von Silber durch eine Legierung verringert werden soll.
45 Pfund Silber mit einem Feingehalt von 10 Unzen sollen mit Silber legiert werden, das einen Feingehalt von $6\frac{1}{2}$ Unzen hat, sodass insgesamt Silber mit einem Feingehalt von 9 Unzen entsteht. Die Frage ist, wie viel Silber vom Feingehalt $6\frac{1}{2}$ Unzen dafür genommen werden muss.
Man kann nun folgende Bezeichnungen (siehe oben) wählen: $m_2 = 45$, $k_1 = 6\frac{1}{2}$, $k = 9$, $k_2 = 10$, und jetzt ist m_1 gesucht. Dann ergibt sich nach der obigen Gleichung rechts: $m_1 = 18$.
Der Autor berechnet, in unsere Formelsprache übertragen, zunächst $m_2(k_2 - k)$ und dividiert anschließend durch $k - k_1$, um m_1 zu bestimmen. Sein Vorgehen ist wieder korrekt. Er erwähnt noch, dass insgesamt 63 Pfund Silber mit dem Feingehalt von 9 Unzen entstanden sind.

Zu dieser Aufgabe gibt er eine ganz ähnliche Probe wie vorher an:
Insgesamt gibt es $(45 \cdot 10 + 18 \cdot 6\frac{1}{2})$ Unzen Feinsilber, das sind 567 Unzen. Diese verteilen sich auf 63 Pfund, sodass jedes Pfund einen Feingehalt von 9 Unzen hat.

In der Schlussbemerkung zu diesem Kapitel betont der Autor, dass diese Rechnungen auch bei Gold nützlich seien. Ohne dabei die Angaben zu präzisieren oder nähere Ausführungen zu machen, führt er als Beispiele an:
Legierung von Feingold (Frage nach der Menge) mit 16-karätigem Gold, sodass 22-karätiges Gold entsteht; Legierung von 16-karätigem oder anderem Gold (Frage nach der Menge) mit Feingold oder mit 23-karätigem Gold, sodass sich 22-karätiges Gold ergibt

115 ***Über die verschiedenen Pfunde des Silbers, die beinhalten:***
Jedes Pfund hat 7 Unzen, jedes Pfund hat 8 Unzen,
jedes Pfund hat 9 Unzen, jedes Pfund hat 10 Unzen.
Wie kann man, wenn dies alles vereinigt worden ist, wissen,
mit wie vielen Unzen jedes Pfund entsteht?

In dieser Aufgabe werden erstmals mehr als zwei Edelmetallsorten miteinander legiert.
Dem folgenden Aufgabentext und einer zusätzlichen Tabelle des Autors entnimmt man, dass es sich um 40 Pfund zu je 7 Unzen, um 30 Pfund zu je 8 Unzen, um 60 Pfund zu je 9 Unzen und um 50 Pfund zu je 10 Unzen Feingehalt handelt.
Es ergeben sich (40 + 30 + 60 + 50) Pfund mit (280 + 240 + 540 + 500) Feinunzen, also 180 Pfund mit 1560 Feinunzen — das Resümee der oben erwähnten Tabelle —, sodass 1 Pfund Silber $8\frac{2}{3}$ Feinunzen bzw. 8 Unzen 4 Exagia Feinsilber enthält. (1 Unze = 6 Exagia)
Als "Probe" dient die Multiplikation $180 \cdot (8\frac{2}{3}$ Unzen) = 1560 Unzen.

Allgemein gilt:
Seien $m_1, \ldots, m_n$ n verschiedene Silbergewichte (in Pfund) mit den Feingehalten $k_1, \ldots, k_n$ (in Unzen pro Pfund), so hat nach der Legierung 1 Pfund einen Feingehalt von

$$k = \frac{m_1 k_1 + \ldots + m_n k_n}{m_1 + \ldots + m_n} \text{ (in Unzen).}$$

Es folgt der Hinweis — ähnlich wie zum Abschluss der vorangegangenen Kapitel — dass man so auch mit verschiedenen Exagia von Goldarbeiten verfahren kann, die beispielsweise 23, 22, 20, 18 oder 16 Karat haben.

116 ***Wie man wissen kann, wie viel Pfund Silber du von jeder Ordnung***
der jeweils 8 und 9 und 10 und 11 Unzen pro Pfund zu vereinigen hast,
um 60 Pfund von jeweils $10\frac{1}{2}$ Unzen zu fertigen

Angenommen, du hast Silber, das pro Pfund 8 Unzen hat. Du hast auch ein

1. Gesellschafter	*2. Gesellsch.*	*3. Gesellsch.*		*4. Gesellsch.*
zu 8 Unzen	*zu 9 Unzen*	*zu 10 Unzen*	*zu $10\frac{1}{2}$ Unzen*	*zu 11 Unzen*
$\frac{1}{2}$ Unze	*$\frac{1}{2}$ Unze*	*$\frac{1}{2}$ Unze*	*60 Pfund*	*$4\frac{1}{2}$ Unzen*

anderes von 9 Unzen pro Pfund und ein anderes von 10 Unzen pro Pfund und ein anderes von 11 Unzen pro Pfund. Du sollst aber 60 Pfund zu je $10\frac{1}{2}$ Unzen fertigen. Du suchst zu wissen, wie viel Pfund Silber du von jeder Ordnung der jeweils 8 und 9 und 10 und 11 Unzen zu vereinigen hast, um insgesamt 60 Pfund zu fertigen, jedes Pfund zu jeweils $10\frac{1}{2}$ Unzen.
Du kannst dies so wissen. Setze die verschiedenen Unzen der vier Sorten in eine Reihe ... Und die 11 Unzen sind größer als die $10\frac{1}{2}$ Unzen, zu denen du die

60 Pfund zu machen suchst, die übrigen aber ... sind kleiner als $10\frac{1}{2}$. Suche nun nach dem größeren Teil der 11 Unzen gegenüber den $10\frac{1}{2}$ Unzen: es ist $\frac{1}{2}$ Unze. Direkt unter die drei Reihen der kleineren Unzen, der 8, 9 und 10, setze dieselbe $\frac{1}{2}$ Unze ...
Suche auch den fehlenden Teil der 8 Unzen, damit sie $10\frac{1}{2}$ werden, der $2\frac{1}{2}$ Unzen ist. Suche auch den fehlenden Teil der 9 Unzen, damit sie $10\frac{1}{2}$ werden, der $1\frac{1}{2}$ Unzen ist. Suche auch den fehlenden Teil der 10 Unzen, damit sie $10\frac{1}{2}$ werden, der $\frac{1}{2}$ Unze ist. Addiere die drei fehlenden Teile von diesen, ... und es werden zusammen $4\frac{1}{2}$ Unzen. So wie du nun den überschüssigen Teil der 11 Unzen gegenüber den $10\frac{1}{2}$, der $\frac{1}{2}$ Unze ist, unter die Unzen gesetzt hast, die kleiner als $10\frac{1}{2}$ sind, so mache wechselweise das Gegenteil und setze direkt unter die 11 Unzen die $4\frac{1}{2}$ Unzen ...
Nachdem du dies getan hast, nimm an, die 4 verschiedenen Ordnungen davon seien 4 Gesellschafter, die 60 Pfund Silber zu verteilen haben.

Damit erklärt der Autor, wie die obige Tabelle zustande kommt.
Bei der folgenden Gesellschaftsrechnung setzt er voraus, dass die ersten drei Gesellschafter denselben Anteil erhalten, denn er rechnet mit dem Anteilverhältnis $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:4\frac{1}{2}$ (Summe: 6). Im Text und in einer weiteren Tabelle sind die Rechnungen näher ausgeführt. In dieser Tabelle findet man für den ersten, zweiten und dritten Gesellschafter jeweils die gleiche Rechnung $30:6=5$ (Pfund), wobei sich 30 aus $\frac{1}{2}\cdot 60$ ergibt, für den vierten Gesellschafter die Division $270:6=45$ (Pfund), wobei $270=4\frac{1}{2}\cdot 60$ ist.
Ergebnis: Dem ersten, zweiten und dritten Gesellschafter bzw. den Silbersorten mit 8, 9 und 10 Unzen Feingehalt kommen jeweils 5 Pfund zu, dem vierten Gesellschafter bzw. der Silbersorte mit 11 Unzen Feingehalt kommen 45 Pfund zu.
Zur Kontrolle dient dem Autor folgende Rechnung:
$5\cdot 8$ Unzen + $5\cdot 9$ Unzen + $5\cdot 10$ Unzen + $45\cdot 11$ Unzen = 60 Pfund. Die Zwischenrechnung fehlt: 630 Unzen = $60\cdot 10\frac{1}{2}$ Unzen
Es folgt noch eine (weitere) Probe, die auch tabellarisch dargestellt wird:
5 Pfund mit 8 Unzen Feingehalt enthalten 40 Unzen Feinsilber, 5 Pfund mit 9 Unzen Feingehalt enthalten 45 Unzen Feinsilber, 5 Pfund mit 10 Unzen Feingehalt enthalten 50 Unzen Feinsilber, 45 Pfund mit 11 Unzen Feingehalt enthalten 495 Unzen Feinsilber. Insgesamt enthalten 60 Pfund Silber 630 Unzen Feinsilber, 1 Pfund also $10\frac{1}{2}$ Unzen Feinsilber.

Allgemein betrachtet seien m_1, m_2, m_3, m_4 die gesuchten Silbergewichte, k_1, k_2, k_3, k_4 die gegebenen Feingehalte und m das gegebene Gesamtgewicht mit dem gegebenen Feingehalt k. Dann gilt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= m \\ m_1k_1 + m_2k_2 + m_3k_3 + m_4k_4 &= mk. \end{aligned}$$

Es handelt sich um ein Problem der "unbestimmten Analytik", da das Gleichungssystem unterbestimmt ist (2 Gleichungen mit 4 Unbekannten).
In der vorliegenden Aufgabe teilen sich die gesuchten Silbergewichte in zwei Klassen auf: m_i mit $k_i < k$ $(i=1,2,3)$ und m_4 mit $k_4 > k$. Mit $m' = m_1 + m_2 + m_3$

gilt jetzt nach der "Mischungsformel" (vgl. den Kommentar zu Kap. 114) $\frac{m'}{m_4} = \frac{k_4 - k}{k - k'}$. Dabei ist k' der Feingehalt von m', und es gilt

$m_1k_1 + m_2k_2 + m_3k_3 = m'k'$.

Unser Autor ordnet nun — allgemein formuliert — jedem m_i $(i = 1, 2, 3)$ den Wert $k_4 - k$ zu. Daher liegt es nahe, die rechte Seite der aktuellen Mischungsformel mit 3 zu erweitern: $\frac{m'}{m_4} = \frac{3(k_4 - k)}{3(k - k')}$

Der Nenner muss nun mit dem Wert $(k - k_1) + (k - k_2) + (k - k_3) = 3k - (k_1 + k_2 + k_3)$ übereinstimmen, den der Autor m_4 zuordnet. Dadurch erhält man $k' = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)$.

Wir kehren zur konkreten Aufgabe zurück, d. h. zu den Werten $m = 60$, $k = 10\frac{1}{2}$, $k_1 = 8$, $k_2 = 9$, $k_3 = 10$, $k' = 9$, $k_4 = 11$. Weiterhin gilt $m' + m_4 = 60$ und nach der Mischungsformel $m' = \frac{1}{3}m_4$, woraus $m_4 = 45$ und $m' = m_1 + m_2 + m_3 = 15$ folgt. Darüber hinaus gilt $9(m_1 + m_2 + m_3) = 8m_1 + 9m_2 + 10m_3$ mit der Folge $m_1 = m_3$. Es ergibt sich also für die gesuchten Silbergewichte ein Lösungstripel $(m_1, 15 - 2m_1, m_1)$ mit unendlich vielen Lösungen. Daran zeigt sich insbesondere, dass das spezielle Lösungsrezept unseres Autors noch nicht die Gleichheit der Silbergewichte $(m_1 = m_2 = m_3 = 5)$ erzwingt. Erst bei seiner Modellierung der Aufgabe als Gesellschaftsrechnung setzt er diese Gleichheit stillschweigend voraus.

In einer weiteren Aufgabe sollen Silbersorten mit jeweils 5, 6, 7, 8, 10 und 11 Unzen Feingehalt zu 100 Pfund Silber mit je 9 Unzen Feingehalt verschmolzen werden. Mit unseren Bezeichnungen gilt also $k_1 = 5$, $k_2 = 6$, $k_3 = 7$, $k_4 = 8$, $k_5 = 10$, $k_6 = 11$, $k = 9$ und $m = 100$. Gesucht werden m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, wobei m_1, m_2, m_3, m_4 einen geringeren, m_5, m_6 einen höheren Feingehalt als den "Zielfeingehalt" k haben.

Analog zu seinem Vorgehen bei der vorherigen Aufgabe weist der Autor den Silbersorten m_1, m_2, m_3, m_4 einheitlich den Wert $(k_5 - k) + (k_6 - k) = k_5 + k_6 - 2k$ $(= 3)$ und den Silbersorten m_5, m_6 ebenso einheitlich den Wert $(k - k_1) + (k - k_2) + (k - k_3) + (k - k_4) = 4k - k_1 - k_2 - k_3 - k_4$ $(= 10)$ zu. Danach verbleiben für die m_i $(i = 1, \ldots, 6)$ immer noch unendlich viele Möglichkeiten, wie man wieder leicht zeigen kann — man vergleiche hierzu die Besprechung des ersten Beispiels.

Der Autor interpretiert die vorliegende Aufgabe wieder als Gesellschaftsrechnung — unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ und $m_5 = m_6$ gilt: Das Anteilverhältnis ist jetzt 3 : 3 : 3 : 3 : 10 : 10 (Summe: 32).

Ergebnis:

Dem ersten, zweiten, dritten und vierten Gesellschafter bzw. den Silbersorten mit den Feingehalten 5, 6, 7 und 8 Unzen kommen jeweils $9\frac{3}{8}$ Pfund, dem fünften und sechsten Gesellschafter bzw. den Silbersorten mit den Feingehalten 10 und 11 Unzen kommen jeweils $31\frac{1}{4}$ Pfund zu.

Seine Rechnungen illustriert der Autor wieder mit zwei Diagrammen: Im ersten geht es um die Zuordnung der Werte 3 und 10 zu den entsprechenden Silbersorten, im zweiten um die Gesellschaftsrechnung.

Es schließen sich "zwei Beweise" (Proben) an, die er ausführlich im Text beschreibt und außerdem noch in einer gemeinsamen Tabelle darstellt.
"1. Beweis": Die einzelnen Pfundzahlen werden addiert. Es kommen 100 Pfund heraus.
"2. Beweis": Die Feinunzen der Silbersorten werden berechnet und addiert. Es ergeben sich 900 Feinunzen und — nach Teilung durch 100 — der "Zielfeingehalt" 9 (Unzen pro Pfund).
Allerdings liefert erst die Zusammenschau beider Rechnungen eine angemessene Probe für die vorliegende Aufgabe.
Danach erläutert der Autor in einem längeren Abschnitt, dass die Anteilberechnung mithilfe der Multiplikation durchzuführen sei, was von Unwissenden für falsch gehalten würde. Eines der Beispiele ist $\frac{3}{8}$ von 5 Unzen = $\frac{3}{8} \cdot 5$ Unzen. Offenbar hat er vergessen, dass er sich diesem Thema schon in Kapitel 49 gewidmet hatte. Eine Wiederholung erscheint unnötig und ist hier ohnehin fehl am Platz.
Wir kommen noch einmal auf das Lösungsrezept des Autors zurück, das er am Anfang verwendet hatte: die zwei verschiedenen Zuordnungen zu $m_1, \ldots, m_4$ bzw. zu m_5, m_6. Der Einfachheit halber sollen $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ sowie $m_5 = m_6$ vorausgesetzt werden, was die Anwendung der bereits mehrfach erwähnten Mischungsformel ermöglicht. Mit $m' = 4m_1$ und $m'' = 2m_5$ gilt $\frac{4m_1}{2m_5} = \frac{k'' - k}{k - k'}$.
Außerdem gelten die Gleichungen $4m_1 + 2m_5 = m$, $4m_1k' + 2m_5k'' = mk$ und $m_1(k_1 + \ldots + k_4) + m_5(k_5 + k_6) = mk$. Daraus folgt $k' = \frac{1}{4}(k_1 + \ldots + k_4)$, $k'' = \frac{1}{2}(k_5 + k_6)$, $k'' - k = \frac{1}{2}(k_5 + k_6 - 2k)$, $k - k' = \frac{1}{4}(4k - k_1 - k_2 - k_3 - k_4)$ und $\frac{m_1}{m_5} = \frac{k_5 + k_6 - 2k}{4k - k_1 - \ldots - k_4}$.
Im letzten Term sind die Zuordnungsvorschriften des Autors wiederzufinden.
Mit den konkreten Werten der Aufgabe ergibt sich wieder $\frac{m_1}{m_5} = \frac{3}{10}$.

Diese Methode wurde schon durch Leonardo v. Pisa (1202) bekannt, und gut 50 Jahre nach dem Entstehen dieser Handschrift greift sie im deutschen Sprachbereich Widmann (1489, x vj^{v}—viij) wieder auf. Näheres ist TROPFKE (1980, 570 ff.) zu entnehmen.

Und anders.

Offenbar ist sich der Autor bewusst, dass die Aufgabe noch "erheblichen Spielraum" für weitere Lösungen lässt. Sie führt ja — modern gesprochen — auf ein System von 2 Gleichungen mit 6 Unbekannten, sodass sich unendlich viele Lösungen ergeben.
Nimm von den sechs verschiedenen Sorten, von denen wir sagten, dass sie zusammen 100 Pfund ergeben, 10 Pfund, das ist der zehnte Teil der 100 Pfund. Suche nun, wie viel Feinsilber die 10 Pfund haben müssen, damit jedes Pfund jeweils 9 Unzen erhält, wie du suchst, dass auch die 100 Pfund jeweils 9 Unzen erhalten ... Die 10 Pfund müssen nun 90 Feinsilber haben ... Nimm nun von den größeren und kleineren Pfunden, denen, die über den 9 und unter den 9 Unzen sind, d. h. kleiner als die 9 das Pfund der 5 Unzen, größer als die 9 das

Pfund der 11 Unzen, und es werden zusammen 2 Pfund, die 16 Unzen haben. Ebenso nimm auch die 2 Pfunde der 6 und 10 Unzen und addiere auch diese 2 Pfunde mit den vorherigen 2 Pfunden, und es werden zusammen 4 Pfund, die 32 Unzen haben. Ebenso nimm auch die 2 Pfunde der 7 und 8 Unzen, die 15 Unzen haben, und addiere auch diese mit den 4 Pfund, und es werden zusammen 6 Pfund, die 47 Unzen haben.
Es fehlen bis zu den 10 Pfund 4 Pfund und bis zu den 90 Unzen 43 Unzen. Nimm von den Pfunden mit den 11 Unzen 3: diese haben 33 Unzen. Nimm auch von den Pfunden mit den 10 Unzen 1 Pfund und addiere dieses mit den 3 Pfund, und es werden zusammen 4 Pfund, die 43 Unzen haben ...
Damit hat der Autor sein Ziel erreicht, 10 Pfund mit 90 Unzen Feinsilber zu erhalten. Im Text und auch in der folgenden Tabelle bilanziert er nun, wie viel Pfund er von jeder Sorte genommen hat, und rechnet das Ergebnis auf 100 Pfund hoch (Faktor 10).

4 Pfund zu je 11 Unzen	40 Pfund zu je 11 Unzen
2 Pfund zu je 10 Unzen	20 Pfund zu je 10 Unzen
1 Pfund zu je 8 Unzen	10 Pfund zu je 8 Unzen
1 Pfund zu je 7 Unzen	10 Pfund zu je 7 Unzen
1 Pfund zu je 6 Unzen	10 Pfund zu je 6 Unzen
1 Pfund zu je 5 Unzen	10 Pfund zu je 5 Unzen
zusammen 10 Pfund mit 90 Unzen;	zusammen 100 Pfund mit 900 Unzen

Am rechten Rand von fol. 62^{r} findet sich eine Bemerkung des Autors, derzufolge man auch dann 10 Pfund nehmen soll – und nicht den zehnten Teil –, wenn man 50 oder 40 Pfund erreichen will. Er weist darauf hin, dass man von 10 auf 50 bzw. 40 leicht hochrechnen könne (Faktoren 5 bzw. 4).
Da man aber genauso gut von 5 auf 50 oder von 4 auf 40 schließen kann, bleibt die Bemerkung unverständlich, und der Autor relativiert sie dann auch an späterer Stelle (fol. 62^{v}).
Damit du aber einsiehst, dass nun, wenn auch die genommenen Pfunde der ersten und der zweiten Methode wechseln, dennoch auch die beiden Methoden wahr sind ...
Hiermit leitet der Autor eine Probe seiner "zweiten Methode" ein, die auch wieder tabellarisch dargestellt ist. Dazu werden die Feinunzen der einzelnen Sorten gemäß den gewählten Pfundzahlen berechnet und addiert: $(40 \cdot 11 + 20 \cdot 10 + 10 \cdot 8 + 10 \cdot 7 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 5)$ Unzen = 900 Unzen, bezogen auf 100 Pfund. Daher hat, wie verlangt, 1 Pfund einen Feingehalt von 9 Unzen.

Die "zweite Methode" ist ein Verfahren des sinnvollen Probierens, wobei auch die heuristische Strategie des Rückwärtsarbeitens (des Argumentierens von der "Zielposition" aus) eine Rolle spielt.

Im anschließenden Abschnitt behauptet der Autor, dass bei der vorliegenden (zweiten) Methode – im Unterschied zur ersten – nicht alle Pfundsorten berücksichtigt werden. Das trifft aber so strikt nicht zu, wie ja das aktuelle Beispiel gerade zeigt. Vielmehr k a n n es bei der zweiten Methode vorkommen, dass bestimmte Pfundsorten ausgelassen werden – so erhält man z. B. auch mit $m_1 = 0$, $m_2 = 10$, $m_3 = m_4 = 20$, $m_5 = 10$, $m_6 = 40$ eine ganzzahlige Lösung, die ebenfalls mithilfe der vorherigen Zehnteilung der Pfundsumme gewonnen werden kann. Bei dieser Zehnteilung werden nur Zehnerzahlen als Lösungen berücksichtigt, sofern man von vornherein nur mit ganzen Zahlen operiert. Dabei wäre z. B. die Lösung $m_1 = 8$, $m_2 = 9$, $m_3 = 10$, $m_4 = 11$, $m_5 = 34$, $m_6 = 28$ nicht aufzudecken.
In den folgenden Passagen wird das zweite Verfahren noch einmal allgemeiner beschrieben. Dabei geht es um die Wahl des 10. Teils der Summe der Pfunde, vor allem aber um die jeweilige Kombination einer Pfundsorte von unterdurchschnittlichem Feingehalt mit einer Sorte von überdurchschnittlichem Feingehalt. Dadurch entstehe *eine mittlere Größe ... ähnlich wie das Pfund, das du zu vereinigen suchst.*

Danach wird noch einmal auf die angeblich vorteilhafte Wahl von 10 Pfund bei einer Gesamtsumme von 60 Pfund verwiesen. Man könne aber auch den 10. Teil von 60 wählen. – Man wundert sich, dass der Autor in einem mathematisch doch recht anspruchsvollen Kapitel auf solche Belanglosigkeiten eingeht.

Wenn du es nun auf dieselbe Weise dieser beiden Methoden auch bei (Schmuck-)Gold machst, wirst du das Gesuchte richtig finden, sei es, dass du verschiedene Pfunde, sei es, dass du verschiedene Unzen, sei es, dass du verschiedene Exagia von (Schmuck-)Gold vereinigen willst: es ist nämlich dasselbe.

Es fällt auf, dass Mischungsrechnungen in Kontexten außerhalb der Metallurgie (z. B. Bierstärke, Bonität von Feldern, Getreide u. a.) fehlen. Erstaunlicherweise behandelt Schreiber B desselben Kodex (HUNGER/VOGEL [1963]) überhaupt keine Mischungsaufgaben; dagegen findet man im byzantinischen Rechenbuch des frühen 14. Jahrhunderts (VOGEL [1968]) mehrere Aufgaben dieser Art aus verschiedenen Bereichen.

Ende des ersten Buches

IV RESÜMEE

Der Text aus dem Jahr 1436 gehört zu den byzantinischen Algorismusschriften, d. h. solchen, in denen die Schreibweise der natürlichen Zahlen im dezimalen Positionssystem eingeführt und das Rechnen mit ihnen erläutert wird. Es handelt sich, soweit bekannt ist, um ein Unikat. Im Unterschied zur anonymen Schrift von 1252 [ALLARD 1977] und zum Rechenbuch des Maximos Planudes aus dem späten 13. Jahrhundert [ALLARD 1981], in denen die westarabischen bzw. die ostarabischen Ziffern verwendet werden, benutzt unser Autor die dem damaligen Leser vertrauten milesischen Buchstabenziffern α΄, β΄, γ΄ (eigentlich Γ'), δ΄, ε΄, ϛ΄, ζ΄, η΄, ϑ΄. Nur an das neue Zeichen υ΄ für die positionelle Leerstelle musste sich dieser gewöhnen. Entsprechend verfährt der Schreiber B im selben Kodex [HUNGER/VOGEL 1963], der allerdings für die Null einen Punkt setzt.

Mit großer Wahrscheinlichkeit lag dem Anonymus eine unbekannte italienische Quelle vor – darauf weisen das Vorwort (Kap. 1) und die aus dem Italienischen stammenden Begriffe μιλιούνι(ο)ν, λεγεών (jeweils erstmals in Kap. 5), ταυλέτα/τολέτα (erstmals in Kap. 84), βηλάρι (erstmals in Kap. 91) und φίνος (erstmals in Kap. 101) ziemlich deutlich hin. Darüber hinaus hat er in seinem "zweiten Buch", das hier noch nicht besprochen wurde, als einziger Byzantiner eine typisch italienische Wortalgebra (Algebra ohne Symbole) gräzisiert, sodass kaum noch Zweifel an einer italienischen Vorlage bestehen können. Seine Tätigkeit ist also keineswegs die eines einfachen Schreibers: Er hat die Quelle bearbeitet, indem er bereits geschriebene Passagen gestrichen, ergänzt oder zusätzlich kommentiert hat. Man kann ihn als Herausgeber oder gar Autor bezeichnen, der zumindest eine kritische Edition seiner Vorlage für den byzantinischen Kulturkreis besorgt hat.

Von größter Bedeutung im "ersten Buch" ist aber eine Errungenschaft, die aus dem islamischen Bereich stammt: das durch die Türken vermittelte Rechnen mit Dezimalbrüchen – vgl. den Kommentar zu Kap. 2. Die Texte von Schreiber A und Schreiber B sind diesbezüglich die frühesten Nachweise in Europa (freilich ohne dass daran angeknüpft worden wäre – vgl. den Kommentar zu Kap. 72). Allein schon dieser Befund schränkt die von HEIBERG (1899, S. 161) überlieferte Vorhersage ein, dass beim Studium des Cod. Vind. phil. gr. 65 kein Genuss zu erwarten sei.

Weitere Besonderheiten sind

- Überlegungen (oder Spekulationen) des Autors zur Erfindung des dezimalen Stellenwertsystems und seiner Verbreitung bis zum Bekanntwerden in Byzanz (Kap. 1)
- das Kapitel 71, in dem er von den eher unterhaltungsmathematischen zu

den praxisorientierten Aufgaben überleitet und dabei seine "Philosophie" zur schriftlichen mathematischen Unterweisung vorstellt
- eine überzeugende Darstellung des euklidischen Algorithmus zum Kürzen von Brüchen mitsamt einer Variante einschließlich Ansätzen zur Kettenbruchentwicklung, Betrachtung von Näherungsbrüchen und Einführung prägnanter Fachbegriffe (in dem auf Kap. 40 bezogenen Zusatztext fol. $142/1^{v}$–145^{v} des Autors außerhalb des eigentlichen Rechenbuchs)
- eine versierte Behandlung unterbestimmter Probleme der Mischungsrechnung mit Lösungsvarianten (vgl. den Kommentar zu Kap. 116)
- der wohl früheste Nachweis von Tolletrechnungen (Kap. 84, 109) im außeritalienischen Bereich
- das Auftreten einer Terminrechnung (Kap. 100), die sonst in byzantinischen Schriften fehlt
- die extrem späte Einführung der schriftlichen Addition und Subtraktion (Kap. 101, 102), weit nach der Multiplikation (Kap. 6) und Division (Kap. 21).

Von einem Text aus dem 15. Jahrhundert kann man wohl kaum mehr an Präzision der fachsprachlichen Darstellung erwarten als vom vorliegenden Kodex. Davon unberührt bleibt die Feststellung, dass der Autor in seinem Text zwischen volkssprachlichen Konstruktionen und dem Bemühen um hochsprachliche Formulierungen schwankt (vgl. Abschnitt I. 2).

Die Präzision zeigt sich auch darin, dass Zahlenfehler in nur sehr geringem Maße vorkommen (z. B. in Kap. 4) und sich nur in ganz seltenen Fällen auf das Ergebnis auswirken (z. B. in Kap. 69).

Dennoch treten auch einige wenige mathematische Fehler oder Unzulänglichkeiten auf:
- Die Übereinstimmung der Probezahlen bei der Siebenerprobe wird stets als hinreichendes Kriterium für die richtige Durchführung einer Addition oder Multiplikation missdeutet (z. B. in Kap. 7).
- Bei den Aufgaben der Gesellschaftsrechnung verkennt der Autor, dass eine Verteilung noch nicht richtig sein muss, wenn sich aus ihr die korrekte Summe der Anteile ergibt. (Vgl. u. a. Kap. 103.)
- Eine Lösung der Aufgabe zur Terminrechnung (Kap. 100) gelingt zunächst nicht. Der Autor erkennt seinen Fehler nicht, führt aber dann doch noch die richtige Lösung an.
- Die Lösung einer Aufgabe zur ungleichmäßigen Bewegung zweier Wanderer ist zwar nicht falsch, aber unbefriedigend. (Vgl. Kap. 70 und den Kommentar.) Dem Autor gelingt es nicht, den Zeitpunkt des ersten Zusammentreffens zu bestimmen.
- Bei den Rechenoperationen mit Brüchen fehlt (vor Kap. 51) die Division (durch einen Bruch). Dadurch bedingt sind auch die Bemühungen des Autors um die Division einer kleineren gemischten Zahl durch eine größere in Kap. 52 unzulänglich: Hier hat man das Gefühl, er scheue vor dem letzten Schritt zurück. Diese (vermeintliche) Schwierigkeit überwindet er aber bereits in Kap. 54 im Rahmen seiner Lösung von Aufgaben zum Dreisatz, bei dem auch gebrochene oder gemischte Zahlen als Glieder auftreten.

– Den gravierendsten Fehler findet man bei den Aufgaben der Gesellschaftsrechnung mit Kapitaleinlagen auf Zeit: Der Autor addiert die Zahlenbeträge der Zeitspannen und der Einlagen, anstatt das Produkt zu bilden. (Vgl. Kap. 106 und den Kommentar.)

Ein inhaltlicher Fehler in einer sonst richtig gelösten Aufgabe besteht in der mehrfachen Verwechslung der Rolle von Käufer und Verkäufer beim Pferdekauf (Kap. 64).

Auch wenn in der Folge von Kap. 71 die praxisnahen Aufgaben bei Weitem dominieren, ist das "erste Buch" des Schreibers eher ein systematisch-methodisches Werk als ein kaufmännisches Rechenbuch. Somit spiegeln die Aufgaben Handel und Handwerk der spätbyzantinischen Zeit nur unvollständig wider. Insbesondere fehlen Aufgaben

– zum Handel mit Lebensmitteln aller Art (Obst, Gemüse, Gewürze)
– zur Fusti-Rechnung (Einkauf und Verkauf von Waren in verschiedenen Qualitäten)
– zum Warentausch mit der typischen Fragestellung (vgl. Kap. 86–88)
– zur Mischungsrechnung außerhalb des metallurgischen Bereichs (vgl. Kap. 110–116)
– zu Umkehrfragen der Gesellschaftsrechnung (vgl. Kap. 103–106)
– zur "Regula Inventionis" (Aufgaben zur Bestimmung von metrologischen Beziehungen)
– zur Welschen Praktik.
(Ob diese aus Italien stammende scheinbare Vereinfachung der Dreisatzrechnung bereits um 1436 eine so erhebliche Rolle spielte wie später, muss hier offenbleiben; vgl. auch VOGEL 1978.)

Bei den Rechenoperationen fehlt das Kopfrechnen zur Addition und Subtraktion, das vorher in Bezug auf die Multiplikation und Division sehr ausführlich thematisiert worden war (Kap. 17–20, 39). Darüber hinaus werden nur arithmetische, aber keine geometrischen Reihen behandelt.

Insgesamt betrachtet verfügt der Autor zweifellos über ein beachtliches didaktisches Talent. Er gibt Voraussetzungen und Bedingungen vollständig an, liefert dem Leser viele sinnvolle, teilweise auch etymologische Erklärungen, etwa bei der gemeinen Bruchrechnung (insbesondere Kap. 40–42 und fol. 142/1^{v}–145^{v}), der Tolletrechnung (Kap. 84) und der Metallurgie (Kap. 110–116), und gibt sich sehr viel Mühe bei der Gestaltung von Diagrammen, die zum besseren Verständnis beitragen sollen, z. B. bei der gemeinen und der Dezimalbruchrechnung (z. B. Kap. 72, 78), bei der Tolletrechnung (z. B. Kap. 84), der Gesellschaftsrechnung (z. B. Kap. 103) und der Mischungsrechnung (z. B. Kap. 116).

Andererseits pflegt er einen stark redundanten Stil, der das Verständnis der Inhalte nicht unbedingt erleichtert und auch in einem Übermaß an Diagrammen für einfache und einfachste Rechenvorgänge seinen Ausdruck findet. Auch bei der Anordnung des Stoffes hat er nicht immer eine glückliche Hand gehabt: Die sehr ungewöhnliche Reihenfolge der schriftlichen

Rechenoperationen und die fehlende Division von Brüchen wurden schon erwähnt. Bei der schriftlichen Subtraktion behandelt er erst den schwierigeren Fall mit, danach den einfacheren Fall ohne Zehnerunterschreitung.

Dennoch hinterlässt er den Eindruck eines kenntnisreichen, mathematisch versierten Autors, dessen Präzision in der Darstellung trotz aller genannten Mängel überzeugen kann. Im "zweiten Buch" hat er sich sogar als profunder Algebraiker ausgewiesen.
Demgegenüber ist das "erste Buch", die Arithmetik, nicht ganz so spektakulär, wohl aber eine Fundgrube für die Vertreter der beteiligten Disziplinen (Mathematiker, Mathematik- und Wirtschaftshistoriker, Byzantinisten und Metrologen, insbesondere Numismatiker).

V KURZÜBERSICHT ÜBER INHALT UND METHODEN

1	Vorrede
2–5	Zahlen im dezimalen Positionssystem (Schreibweise und Aussprache)
6, 8, 10	Schriftliche Multiplikation ("Trennung der Plätze")
7, 9, 11	Siebenerprobe (Bestimmung der Siebenerreste)
12	Die Jahre nach Christi Geburt (schriftliche Multiplikation)
13	Siebenerprobe
14	Allgemeine Beschreibung der schriftlichen Multiplikation ("Trennung der Plätze")
15	Allgemeine Beschreibung der Siebenerprobe
16	Eine weitere Multiplikationsmethode ("Haus")
17–20	Verschiedene Methoden der Multiplikation im Kopf
21, 23, 25, 27	Schriftliche Division (Überwärtsdivision)
22, 24, 26, 28	Siebenerprobe
29	Verteilung von Geld auf Gesellschafter (schriftliche Division)
30	Siebenerprobe
31	Umwandlung von Tagen in Jahre (schriftliche Division)
32	Siebenerprobe
33	Weitere Erläuterungen zur Division von Kap. 31
34	Weitere Verteilung von Geld auf Gesellschafter
35	Siebenerprobe
36	Fortsetzung der Verteilungsaufgabe von Kap. 34
37	Allgemeine Beschreibung der schriftlichen Division (Überwärtsdivision)
38	Allgemeine Beschreibung der Siebenerprobe zur schriftlichen Division
39	Divisionen im Kopf
40–52	Gemeine Brüche, Bruchrechnung
41	Verteilung von Geld auf Personen
48, 51, 52	Rechnen mit gemischten Zahlen
53–56	Dreisatzrechnung (Proportionalität)
57–60	Arithmetische Reihen
59–60	Textaufgaben

61 Lineares Problem: Frage nach der Anzahl von Männern (einfacher falscher Ansatz)

62 Lineares Problem: Frage nach der Anzahl der Schüler und der Höhe der Miete (doppelter falscher Ansatz)

63–64 Lineares Gleichungssystem: Frage nach dem Preis eines Pferdes (doppelter falscher Ansatz)

65–70 Bewegungsaufgaben

65 Begegnungsaufgabe: Wanderer (Rechenrezept)

66 Einholaufgabe: Archont und Soldat (einfacher falscher Ansatz, Rechenrezept)

67 Begegnungsaufgabe: Schiffe (Rechenrezept)

68 Einfache Bewegungsaufgabe: Schiffe (Berechnung der Zeiten aus Strecke und Geschwindigkeiten)

69 Einholaufgabe: Schiffe (einfacher falscher Ansatz, Rechenrezept)

70 Begegnungsaufgabe mit ungleichmäßiger Bewegung: Männer (Rechenrezept)

71 Überleitung zu praxisorientierten Aufgaben

72 Umwandlung von Geldwerten (Rechnen mit Dezimalbrüchen)

73 Umwandlung von Geldwerten (Dreisatz, Rechnen mit Dezimalbrüchen)

74 Umkehraufgabe von Kap. 73

75 Umwandlung von Geldwerten (Dreisatz)

76 Preisberechnung: Pferde, Kleinvieh (Rechnen mit Dezimalbrüchen)

77 Preisberechnung: Seide (Rechnen mit Dezimalbrüchen, Dreisatz)

78 Preisberechnung: Gewichte (Rechnen mit Dezimalbrüchen)

79 Preisberechnung: Gewichte (Rechnen mit Dezimalbrüchen, Dreisatz)

80 Preisberechnung: Gewichte (Rechnen mit Dezimalbrüchen)

81 Preisberechnung: Gewichte (Rechnen mit Dezimalbrüchen)

82 Preisberechnung: Gewichte (Dezimalbrüche mit unbesetzten Stellen)

83 Preisberechnung: Gewichte (fortlaufende Teilung durch 10, Dezimalbrüche)

84 Preisberechnung: Gewichte (Tolletrechnung)

85 Handelsgeschäfte mit verschieden schweren Pfunden (Dreisatz)

86 Warentausch: Wolle – Tuch

87 Warentausch: Wolle – Tuch

88 Warentausch: Seide – Silber, Tuch

89 Gewichtsberechnung bei vorgegebenem Preis: Seide (Dreisatz)

90 Gewichtsberechnung bei vorgegebenem Preis: Seide (Dreisatz)

91	Preisberechnung: Webzeug, Tuch (Dreisatz)
92	Preisberechnung: Webzeug (Umkehraufgabe zu Kap. 91)
93	Gewinn mit Geld (Dreisatz)
94	Verlust mit Geld (Dreisatz)
95–99	Zinsrechnungen (einfache Verzinsung)
100	Terminrechnung (Mischungsrechnung)
101	Schriftliche Addition (mit Geldwerten)
102	Schriftliche Subtraktion (mit Geldwerten)
103–105	Einfache Gesellschaftsrechnungen
106	Gesellschaftsrechnungen mit Anlagezeiten
107–108	Preisberechnung: Perlen (Dreisatz)
109	Preisberechnung: Perlen (Dreisatz, Tolletrechnung)
110	Silberlegierungen (Mischungsrechnung)
111	Goldlegierungen (Mischungsrechnung)
112	Silberlegierungen (Mischungsrechnung)
113	Goldlegierungen (Mischungsrechnung)
114–115	Silberlegierungen (Mischungsrechnung)
116	Silberlegierungen (Mischungsrechnung, Lösung unterbestimmter linearer Gleichungssysteme)

VI FACHSPRACHE

Die Wörter sind nach Sachgruppen geordnet. Häufigere Begriffe werden jeweils mit nur einer Belegstelle zitiert, andere mit höchstens zwei.

1 Allgemeines

Vorrede	προοίμιον 3/1
Kapitel	κεφάλαιον 59/TA 1, 117/36
Unternehmen, Vorhaben	ἐγχείρημα 3/22, ἐπιχείρημα 74/2
Thema, Grundlage	ὑπόθεσις 7/19
Anfang	ἀρχή 91/23
Mitte	μέση 18/12, τὸ μέσον 37/35
Ende	τέλος 13/8
Endziel, Ergebnis	ἀποτέλεσμα 3/3, 74/2
Erfüllung, Vollendung	ἀναπλήρωσις 78/2, ἀποσωσμός 78/8, 112/ 23
Wiederherstellung	ἀποκατάστασις 30/18.24.26
Einführung	εἴσοδος 26/34
Darlegung, Auseinandersetzung	ἔκθεσις 37/27
Erklärung	δήλωσις 26/41
Betrachtung	θεωρία 38/5
Behandlung, Methode	μέθοδος 3/2, μεταχείρισις 3/2
Regel	κανών 3/2
Frage, Problem, Aufgabe	ζήτημα 22/12, ζήτησις 91/28
Aufgabe desselben Typs	ζήτημα τῆς αὐτῆς τάξεως 80/24
Rätsel	αἴνιγμα 80/27
Lösung, Weg zur Lösungsfindung	ζήτησις 141/1, εὕρεσις 26/33
Probe, Beweis	ἀπόδειξις 7/36, μαρτυρία 7/36
Erfahrung, Erprobung, Versuch	πεῖρα 3/8
Nutzen	χρῆσις 92/30
Beispiel	παράδειγμα 41/24, sonst ὑπόδειγμα 4/26 f.
Angabe	δόσις 79/TA 6
Ansatz, Versuchszahl	θέσις 77/11
Rechnung, Berechnung	λογαριασμός 129/31, 130/43
Berechnung, Überlegung	λογισμός 16/14
Arithmetik	ἀριθμητική 3/2
Kunst, Kunstfertigkeit	τέχνη 37/27
Begreifen, Verständnis	κατάληψις 27/8, 37/30
Verstand	νοῦς 16/7, λόγος 92/30, διάνοια 135/24

Gedanke	ἐπίνοια 135/25
Unklarheit	ἀσάφεια 37/36
Lehrer	διδάσκαλος 26/33, ὁδηγός 92/36
Schüler	μαθητής 78/1
Papier	χάρτη 26/41
Tinte	μέλαν 26/41
Vielschreiberei, viel Schreibarbeit	πολυγραφία 27/3
Größe	μεγέθος 3/5, ποσότης 3/5
Betrag, Geldbetrag	ὁμάς 77/19, 130/41, ὁμάδα 130/43
Figur, Schema, Diagramm	σχῆμα 7/20
Strich	γραμμή 7/39
gerader Strich	εὐθεῖα γραμμή 7/39
Querstrich	ἐγκάρσιος γραμμή 32/4, κεραία γραμμή 131/8
(be)denken, einsehen	νοέω 21/4
sich ausdenken	ἐπινοέω 3/7
in Rätseln reden	αἰνίττομαι 80/27
ausklügeln	σοφίζω 80/26
aufspüren	διερευνάω 3/7
herausfinden	ἐξεῦρον 3/7
verraten	ἐξεῖπον 80/26
sichtbar machen	ἐμφανίζω 3/10
klarmachen	δηλοποιέω 6/36
bekannt machen	γνωρίζω 3/19
überliefern, weitergeben	παραδίδω 26/36
auseinandersetzen, darlegen	ἐκτίθημι 4/6
lehren	διδάσκω 37/27
versuchen	πειράω 27/1
anfangen	ἄρχομαι 6/27
voranschreiten, vorrücken	προβαίνω 4/1, προχωρέω 7/18
sich an etwas machen, sich auf etwas werfen, sich beschäftigen mit	ἅπτομαι c. gen. 7/19, ἐπιβάλλομαι c. dat. 6/16.19
zugrunde legen	ὑποτίθημι 38/8.9
annehmen, unterstellen	νομίζω 179/5
gestatten	ἐπιδέχεται 45/26
möglich sein	ἐνδέχεται 46/11
(gemeinsam) festsetzen	διορίζομαι 129/37
suchen, aufsuchen	ζητέω 4/28, ἐπιζητέω 3/7 f., 6/37
untersuchen	ζητέω 41/29
bestrebt sein	περιεργάζομαι 42/6
ausführen, vollziehen	ἐκτελέω 12/23
behandeln	μεταχειρίζομαι 59/11
vorhanden sein, existieren	ὑπάρχει 6/32
zufällig da sein	παρατυγχάνω 43/23
liegen	κεῖμαι 5/20 f., κείτομαι 59/TA 3
(an)zeigen, bezeichnen,	δηλόω 4/8, σημαίνω 76/29.30, διασημαί-

andeuten	νω 37/42–38/1, 56/36, σημειόω 18/33
(dabei) anzeigen	παραδηλόω 4/22, 6/37
aufzeigen	ἐκδηλόω 14/13
um zu zeigen	εἰς δήλωσιν 42/11 f., sonst πρὸς δήλωσιν 27/25
aufschreiben, aufzeichnen	διαγράφω 3/26, διαχαράττω 4/5, σημειόομαι 4/4
auf die Tafel schreiben (wie die Kinder)	σχεδογράφω 109/30
nennen	νοέω 6/21, καλέω 6/21, ἀποκαλέω 55/9 f.
(er)rechnen, ausrechnen, berechnen	ἀριθμέω 4/29, ἐξαριθμέω 3/31, ποιέω 26/21, 77/20
umrechnen, umwandeln	ποιέω mit (doppeltem) Akk. 98/34
verändern	μεταποιέω 46/9
vernachlässigen	ἀφίημι 14/25
wiederherstellen, neu bilden	ἀναπλάσσω 27/6
erfüllen, vollenden	ἀποπληρόω 88/28, ἀποτελέω 9/37, τελειόω 20/27, 37/34
aufhören, beenden	ἀποδίδωμι 9/7, ἀποδίδω 42/9, καταλήγω 14/29, τελέω 13/15
bewirken	ἐνεργέω 70/10
herauskommen, (sich) ergeben	γίνεται 3/3, ἐξέρχεται 8/3, ποιεῖ 52/7
sich umgekehrt ergeben, wechseln	ἐναλλάσσω 183/35
prüfen	σκοπέω 14/26
übereinstimmen, ähnlich sein	ἀναλογέω 53/8
wahr sein	ἀληθεύει 183/37
lernen	μανθάνω 3/27
erfahren, erkennen	γινώσκω 3/29
einsehen	εἶδον 41/14
verstehen	ἐπίσταμαι 3/22, κατανοέω 37/28, ἐγροικάω 37/37
wissen	οἶδα 3/15
(be)festigen	παγεόω 3/24 f.
weise	σοφός 3/11
ausgeklügelt	σοφιστικός 77/3
rätselhaft	δι᾽ αἰνιγμάτων 80/27
undeutlich	ἄσημος 54/42
klar	σαφής 4/14, ἀσύγχυτος 129/32
offenbar	δῆλος 3/23
zuverlässig	ἀσφαλής 3/6
hinreichend, geeignet	ἱκανός 26/36
fachmännisch	τεχνικός 12/31
unfachmännisch, unsachgemäß	ἄτεχνος 141/1
leicht (~ Schwierigkeitsgrad)	πρόχειρος 3/6, ῥᾴδιος 26/31
schwierig	ποικίλος 37/29
mühelos	ἄπονος 92/37, 93/4

mühsam	δυσχερής 15/35
übereinstimmend	σύμφωνος 41/38
unterschiedlich, verschieden	διαφέρων 15/21, διάφορος 56/9
ohne Anteil an	ἄμοιρος c. gen. 92/30
gleich	ὅμοιος 8/8, ἴσος 10/15
ungleich	ἀνόμοιος 8/11, ἄνισος 8/10
wahr	ἀληθής 8/10
gut (im Sinne von "richtig")	καλός 8/9
richtig	ὀρθός 70/20
richtigerweise, zu Recht	δικαίως 46/5
nahe bei, nahe an ... heran	πλησίον 12/6, σύνεγγυς 10/7
oben, oberhalb	ἄνω 134/35, ἄνωθεν 7/21
unten, unterhalb	κάτωθεν 8/16
seitlich	πλάγιος 12/42; adv. ἐκ πλαγίου 7/21 f.
in der Mitte	ἐν μέσῳ 20/5, μέσος c. gen. 184/23
am Ende	περὶ τὸ τέλος 27/41
vorwärts (auch als Vorverweis im Buch in der Bedeutung "hinten")	ἔμπροσθεν 50/TA 1, 91/13.16
rückwärts	ὄπισθεν 91/14
geradewegs, direkt	κατ᾽ εὐθεῖαν 29/40
der Reihe nach	ἑξῆς 5/1, ἐφεξῆς 4/16
entgegengesetzt	ἐναλλάξ 48/14
umgekehrt, anders	Umschreibung durch τὸ ἀνάπαλιν 22/25
über Kreuz, kreuzweise	σταυροειδῶς 16/42–17/1
ausführbar	ἐφικτός 27/2, 41/23
übungshalber	γυμνασίας χάριν 92/35
wie gewohnt	ὡς σύνηθες 45/36
anzeigend	σημαντικός 76/26
bezeichnend	δηλωτικός 4/25
bekannt	γνώριμος 3/16, εἰδώς (!) 175/18
unbekannt	ἄγνωστος 3/25, 83/13.14
schriftlich	ἔγγραφος 12/22
nichtschriftlich, ohne Aufzeichnung	ἄγραφος 12/22
im Kopf	ἐν φαντασίᾳ 20/39, ἐν τῷ νῷ 16/7
ganz, gänzlich, völlig, lauter	ὅλος 32/11; adv. ἐξόλου 65/7, 93/9 f.; ἐξακεραίου 31/28
im Detail, im Einzelnen	καταμέρος 37/31, 128/17
umfassend	περιεκτικός 3/2
zusammengefasst	ἐν συντόμῳ 15/19, 50/13

2 Buchstabenziffern und Zahlen

Für die Abkürzungen vgl. I. 2. 5. 2.

2.1 Buchstabenziffern

Vgl. I. 2. 2. 4. 1.

2. 2 Kardinalzahlen

Im fortlaufenden Text verwendet der Autor überwiegend das milesische Zahlensystem, in den zugehörigen Rechnungen hingegen das Positionssystem mit den griechischen Buchstabenziffern α, β, γ, δ, ε, ϛ, ζ, η, ϑ und dem Zeichen ϻ für die Null — vgl. I. 2. 5. 1.

Beispiele:

365	τξε΄ 10/18, γ ϛ ε 10/Rechnung
2080	,βπ΄ 40/25, β ϻ η ϻ 40/mittlere Rechnung
17125	,ι,ζ΄ καὶ ρκε΄ 154/20, α ζ α β ε 154/unteres Diagramm

Aber auch im Text kommt die positionelle Schreibweise vor, z. B. in den Kapiteln 19 und 20, oder es werden beide Systeme nebeneinander verwendet, z. B. νϛ΄ δὲ καὶ ιε΄ καὶ γ΄ ... γίνονται ὁμοῦ ζ δ΄ 17/37 f., ξγ΄κις οὖν κε΄ γίνονται α ε ζ ε΄ 72/4. Andererseits finden sich gelegentlich auch in den Rechnungen Zahlen in der traditionellen griechischen Schreibweise, z. B. 135/unteres Diagramm. Schließlich sei noch einmal auf Mischschreibweisen

375	τ ζ ε΄ 119/20
6771	,ϛψζα΄ 161/25

hingewiesen — vgl. I. 2. 5. 1.

Einige Kardinalzahlen:

0	(τὸ) οὐδέν 4/12, (τὸ) ϻ΄ 4/4 f.
1	ἕνα 4/8, ἕν 44/23 (nur in Verbindung mit einem Substantiv), (τὸ) α΄ 17/4
2	δύο 4/9, (τὰ) β΄ 9/14
3	τρία 4/18, τρεῖς 135/20, τρεῖς selten ohne Verbindung mit einem Substantiv 60/40, (τὰ) γ΄ 9/21
4	τέσσερα 5/39, τέσσαρες (nur in Verbindung mit einem mask. oder fem. Substantiv) 129/40, gen. τεσσάρων 5/39 f., acc. τέσσαρας 5/4, (τὰ) δ΄ 17/28

2. 3 Zahlsubstantive

Einer	μονάς 4/17
Fünfer	πεντάδα 28/41
Zehner	δεκάς 4/15, 43/8, δεκάδα 7/25, 43/9
Hunderter	ἑκατοντάς 4/15, ἑκατοντάδα 8/21
Tausender	χιλιάς 4/15, χιλιάδα 5/35.41
Zehntausender	μυριάς 4/21, 5/18, μυριάδα 6/4.21, δέκα χιλιάδες oder ~ χιλιάδαι 5/23, χιλιάδων δεκάς oder ~ δεκάδα 4/25

Hunderttausender	μυριάδων δεκάς oder ~ δεκάδα 4/25, δεκάδα μυριάδος 11/37, ἑκατοντάδα χιλιάδος 11/37 f.
Million	χιλιὰς χιλιάδων oder χιλιάδα χιλιάδων 6/20, χίλιαι χιλιάδαι 6/23, ρ´ μυριάδαι 6/23, μιλιούνιον 6/22 f., μιλιούνιν 24/11
10 Millionen	δέκα μιλιούνια 7/8
1 Milliarde	χίλιαι χιλιάδαι χιλιάδων 7/12 f., ,α´ μιλιούνια 7/13, λεγεών 7/12

2. 4 Zahladverbien

ein Drittel mal	$\frac{\alpha}{\gamma}$κις 60/22
einhalbmal	ς″κις 118/8, 119/8, $\frac{\alpha}{\beta}$κις 60/21
einmal	ἅπαξ 9/27
zweimal	δίς 7/40, 48/18, sonst meist in der Form $\overset{\eta\varsigma}{\beta}$ 16/32 abgekürzt — vgl. I. 2. 5. 2
dreimal	τρίς 29/41, 48/19, sonst meist in der Form $\overset{\eta\varsigma}{\gamma}$ 11/11 abgekürzt

Die weiteren Zahladverbien werden ebenfalls nur selten ausgeschrieben, z. B.:

fünfmal	πεντάκις 9/4
sechsmal	ἑξάκις 27/25
zehntausendmal	μυριάκις 38/27 f.

Bei den Abkürzungen steht jeweils -κις neben der Zahl, z. B.:

einhalbmal	ς″κις 118/8, 119/8
viermal	δ´κις 15/3
fünfmal	ε´κις 15/3
zehnmal	ι´κις 49/32
hundertmal	ρ´κις 97/40
tausendmal	,α´κις 49/28

Vgl. hierzu auch wieder I. 2. 5. 2.

Für die Null fehlt ein Zahladverb — der Schreiber behilft sich einfach mit der Kardinalzahl: ι´ τὸ α´ πάλιν ἐστὶ ι´ 20/26, ι´ τὰ β´ πάλιν ἐστὶ ι´ 20/22.

2. 5 Distributivzahlen

Distributivzahlen werden mit ἀνά umschrieben, z. B.:

je zwei	ἀνὰ δύο 15/12.14

2. 6 Ordinalzahlen

Die Ordinalzahlen treten sowohl ausgeschrieben als auch abgekürzt auf — zu den Abkürzungen vgl. I. 2. 5. 2.

Beispiele:

erster	πρῶτος 4/8
zweiter	δεύτερος 4/32
dritter	τρίτος 4/19, 146/5 — vgl. I. 2. 1. 6
vierter	τέταρτος 4/20, 154/23 — vgl. I. 2. 1. 6
fünfundzwanzigster (Teil)	εἰκοστὸν πέμπτον μέρος 41/12

2. 7 Brüche und gemischte Zahlen

Beispiele:

Halbe	μισά 65/8
Drittel	τρίτα 27/34, 53/33 – vgl. I. 2. 1. 6
Viertel	τέταρτα 50/27 – vgl. I. 2. 1. 6
Fünftel	πέμπτα 54/1
Neuntel	ἔνναται 63/14 – vgl. I. 2. 1. 6
Fünfzehntel	πεντεκαιδέκατα 63/31, πενταικαιδέκατα 55/8, 63/32
Sechzehntel	ἑξακαιδέκατα 63/22 – vgl. auch I. 2. 5. 2
Siebzehntel	ἑπταικαιδέκατα 54/32
Achtzehntel	ὀκταικαιδέκατα 48/10, 59/25

Bruchteile unter $\frac{1}{20}$ haben wieder die klassische Form:

Einundzwanzigstel	εἰκοστὰ πρῶτα 72/25
Fünfunddreißigstel	τριακοστὰ πέμπτα 54/33
Dreiundsechzigstel	ἑξηκοστὰ τρίτα 72/24

Brüche werden entweder

– ganz ausgeschrieben:

$\frac{12}{15}$	δώδεκα πενταικαιδέκατα 55/8
$\frac{3}{73}$	τρία ἑβδομηκοστὰ τρίτα 95/40

– oder nur im Nenner ausgeschrieben:

$\frac{4}{16}$	δ΄ ἑξακαιδέκατα 66/14
$\frac{20}{75}$	κ΄ ἑβδομηκοστὰ πέμπτα 97/35
$\frac{13}{18}$	ιγ΄ ὀκταικαιδέκατα ἑνὸς ἀκεραίου 60/1 f.

– oder bis auf den Auslaut des Nenners abgekürzt (vgl. I. 2. 5. 2):

$\frac{4}{16}$	δ΄ ι$\overset{\alpha}{\xi}$κατα 66/14 f.

– oder mit Kardinalzahlen des milesischen Zahlensystems geschrieben:

$\frac{6}{12}$	$\frac{\varsigma}{\iota\beta}$ 47/28

– oder mit positionellen Kardinalzahlen geschrieben:

$\frac{150}{200}$	$\frac{\alpha\,\varepsilon\,\eta}{\beta\,\eta\,\eta}$ 51/11

Besonderheiten bei kleinen Nennern:

$\frac{1}{2}$	μισόν 53/43, μισὸν μέρος 47/38, μισὸν μέρος ἑνὸς ἀκεραίου 53/31; Umschreibung durch "die Hälfte": τὸ ἥμισυ 60/21; abgekürzt: ϛ″ 32/16; als Bruch geschrieben: $\frac{\alpha}{\beta}$ 53/31
$\frac{1}{3}$	ἕνα τρίτον ἑνὸς ἀκεραίου 53/33; Umschreibung durch τρίτον μέρος (τοῦ ὅλου σώματος) 54/2; abgekürzt: γ″ 53/25, 141/oberes Diagramm; als Bruch geschrieben: $\frac{\alpha}{\gamma}$ 53/33
$\frac{1}{4}$	ἕνα τέταρτον ἑνὸς ἀκεραίου 53/37; abge-

	kürzt: δ″ 53/25, 141/oberes Diagramm; als Bruch geschrieben: $\frac{\alpha}{\delta}$ 53/37
$\frac{1}{5}$	ἕνα πέμπτον 58/20; abgekürzt: ε″ 53/25, 141/oberes Diagramm; als Bruch geschrieben: $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ 58/5
$\frac{2}{3}$	δύο τρίτα 53/41, δύο τρίτα ἑνὸς ἀκεραίου 27/32–34, λόγος δίμοιρος 27/32; als Bruch geschrieben: $\frac{\beta}{\gamma}$ 53/41

Gemischte Zahlen treten in folgenden Varianten auf:

$1\frac{5}{12}$	ἀκέραιον α΄ καὶ $\frac{\varepsilon}{\alpha\,\beta}$ (ἑνὸς ἀκεραίου) 55/31 f., 55/22
$16\frac{2}{3}$	ις΄ καὶ δύο τρίτα ἑνὸς ἀκεραίου 48/34
$12\frac{6}{12}$	ιβ΄ καὶ $\frac{\varsigma}{\iota\beta}$ 47/28
$21\frac{7}{8}$	κα΄ καὶ ζ΄ ὄγδοα ἑνὸς ἀκεραίου 48/43
$20\frac{4}{5}$	β υ τζάκισμα $\frac{\delta}{\varepsilon}$ 52/obere Division (Stenogrammstil!)
$12\frac{1}{2}$	ιβ΄ καὶ τὸ παρὸν τζάκισμα $\frac{\alpha}{\beta}$ 47/36, ιβ΄ς″ 32/32, 47/29
$56\frac{20}{55}$	νς΄ καὶ $\frac{\beta\,\upsilon}{\varepsilon\,\varepsilon}$ (Mischschreibweise!) 64/19

Gemischte Zahlen mit $\frac{1}{2}$ werden, falls sie nicht wie oben umschrieben werden, meistens ohne καί geschrieben:

$5\frac{1}{2}$	ε΄ς″ 65/14, ε΄$\frac{\alpha}{\beta}$ 65/1.4

Seltene Ausnahmen sind:

$30\frac{1}{2}$	γ υ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ 71/letzte Rechnung
$187\frac{1}{2}$	ρπζ΄ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ 122/31

3 Fachbegriffe im Zusammenhang von Zahlen und Ziffern

Zahl	ἀριθμός 6/22, ψῆφος 3/28
ganze Zahl	ἀκέραιον 27/33
ganzzahlig	ἀκέραιος 50/2
die geraden Zahlen	οἱ ἀνὰ δύο ψῆφοι 74/18
ungerade	μονός 73/35, μεμονωμένος 73/33
Primzahlen	Umschreibung durch μήπω στρέφοντες (sc. ἀριθμοί) 46/26, ἀμέριστοι καὶ ἀνυπόστροφοι ἀριθμόι 46/27
zusammengesetzte Zahl	ἀριθμὸς ἐπιστρεπτικός 46/16
Zahl der Form $a \cdot 10^n$, die in der alten Schreibweise mit nur einer	τέλειος ἀριθμός 26/3.4, ἄρτιος καὶ τέλειος ἀριθμός 25/9, τέλειος ἀριθμός τε καὶ

Ziffer geschrieben werden kann	ἄρτιος 26/2, εἰς ἓν πρῶτον γράμμα ἀναφερόμενος ἀριθμός 26/2 und ähnliche Wendungen
Zahl, die in der alten Schreibweise zwei Ziffern erfordert	μεικτὸς καὶ ἀτελὴς ἀριθμός 25/10, (ἀριθμὸς) ἔχων διπλᾶς τὰς σημασίας 25/12 f.
Endzahl, Ergebniszahl	τέλειος ἀριθμός 9/7, ἐξελθὼν τέλειος ἀριθμός 8/3
erhalten (~ Zahl)	ἀποδίδω 42/9
fertig machen, vervollständigen (zu einer Zahl)	ἀπαρτίζω 26/1
Ganzes, Ganzheit	σῶμα 29/2, ὅλον σῶμα 32/11, ἀκέραιον σῶμα 53/34
Betrag	ὁμάς 77/19, ὁμάδα 130/43
Zahlzeichen, (Buchstaben-)Ziffer	σημεῖον 3/28, ψῆφος 4/27, ψῆφοι ἀριθμῶν 5/35, am häufigsten γράμμα 5/41
Endziffer	τελευταία ψῆφος 4/17, τελευταῖον σημεῖον 9/7, τελευταῖον γράμμα 12/1
Anfangsziffer	Umschreibung durch τελευταῖον μὲν γράμμα ἀπὸ τοῦ τέλους, πρῶτον δὲ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς 13/7 f.
auftreten (~ Ziffern)	ἐπέρχεται 13/19
Stelle, Position	τόπος 4/17
passende, richtige Stelle	οἰκεῖος τόπος 110/16
stellengerecht setzen	τίθημι εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον 110/16, τίθημι ἐν τάξει 131/3 f.
eine Stelle einnehmen, innehaben	τόπον ἐπέχει 4/21
Pünktchen (zur Kennzeichnung der Tausender-, Millionen- und Milliardenstellen)	κοκκίς 6/5.8, ψηφίς 6/26, ψηφίδα 6/36
Pünktchen (zur Kennzeichnung verbrauchter Ziffern bei der Über-Kreuz-Methode der Multiplikation)	κοκκίς 18/TA 3
vor (einer Ziffer) stehen	προΐσταται c. gen. 4/32
an einer Stelle stehen	εἰς τόπον ἵσταται 4/34
liegend, gelegen	κείμενος 5/20 f., ἐγκείμενος 13/15
Ränder (von Zahlenschemata)	ἄκρα, τά 18/11
die eigene Gestalt bewahren, die eigene Form behalten	σῴζει τὴν οἰκείαν εἰκόνα 4/35, σῴζει τὴν ἰδίαν εἰκόναν 5/24
Bezifferung	σημασία 25/13
einzifferig	ἁπλός 12/39
zweifach, doppelt	διπλοῦς 25/12, διττός 46/20, 123/27
(rechnerische) Verbindung, Zusammenschluss (von Ziffern)	συζυγία 12/23, περισυναγμός 45/20.22

verbinden, vereinigen (von Ziffern)	συνάπτω 15/26, ἑνόω 44/26
anfügen, hinzufügen (von Ziffern)	προστίθημι 19/35, προσθέτω 38/1
mit dazunehmen, mit hinzuziehen	συμπαραλαμβάνω 42/7
zusammentreten, -treffen (von Ziffern)	συμβαίνει 42/2
streichen	
– von Nullen bei der Erklärung des Positionssystems	κόπτω 5/41
– von Ziffern bei der Abziehmethode (Borgetechnik) der schriftlichen Subtraktion	κόπτω 133/20
– verbrauchter Ziffern bei der schriftlichen Division	ὀβελίζω 27/26
abstreichen (von Stellen bei Dezimalbrüchen)	κόπτω 93/26
vernachlässigen	ἀφίημι 14/25
unnütz, unbrauchbar (bei Ziffern)	ἀργός 18/TA 3, 18/34, ἄχρηστος 14/25
unwirksam, wirkungslos	ἀνενέργητος 28/28
... als unnütz (und unwirksam) kennzeichnen	σημειόω ... ὡς ἀργὰ ὄντα (καὶ ἀνενέργητα) 18/33 f., 28/27 f.
unbezeichnet (bei Ziffern)	ἀσημείωτος 19/21
übrig bleiben, zurückbleiben	ἀπομένει 8/2, ἐναπομένει 15/9, λείπεται 58/28, ἐναπολείπεται 39/5, περιττεύει 7/25, περισσεύει 9/2
Wachstum	αὔξησις 45/26
wachsen, größer werden	αὔξεται 60/20
größer, mehr	μείζων 3/3, πλείων 3/3, πλέων 78/25, κρείττων 178/28 f.
Überschuss, Überfülle	τὸ περισσεῦον 60/11, τὸ περιττεῦον 178/38, τὸ περισσότερον 60/4, τὸ ὑπερέχον 59/9, πλεονασμός 80/6
überschüssig, übertreffend, übrig	περισσός 14/18, περιττός 101/5, ὑπερέχων 59/9
ausdehnen, erweitern (von Zahlbereichen)	ἐκτείνω 4/25
schwinden, kleiner werden	φθείρεται 73/14.15
kleiner werden, kleiner sein	ἐλαττοῦται 46/8, 70/33
kleiner, weniger, geringer	ἐλάττων 3/3, ἐλλείπων 59/9 f., χείρων 178/30, κάτωθεν 12/38
fehlend	ἐλλείπων 178/34
näher bei	ἐγγυτέρω πρός 26/1
näherungsweise, rund, fast, ungefähr	ὡσεί 87/18, 89/26, sonst ἔγγιστα 69/6
etwas größer, um etwas Geringes mehr	πλέον τι 69/8, βραχύ τι πλεῖο 121/rechtes Diagramm

4 Rechenoperationen

4.1 Addition

addieren	ἑνόω ~ μετά c. gen. 8/23; ~ ἐπί c. gen. 43/8; προστίθημι ~ εἰς 26/9, 74/25, sonst ~ ἐπί c. gen. 26/5
plus	καί 73/40
Summand	Umschreibung durch μέρος 55/12, ἀριθμός 73/33 f., ὁμάς 130/41
Summe	Umschreibung durch ὁμάς 145/15, ἑνωθεῖσα ὁμάς 139/17, μία ὁμὰς γενομένη 130/42, ἡ καθόλου ὁμάδα 147/22, ἡ τούτων ποσότης 73/34, ἡ καθόλου ποσότης 131/19
Summe bilden	ἑνόω τὴν καθόλου ὁμάδαν 147/22
als Summe ergeben	Umschreibung durch γίνεται ὁμοῦ 17/29
Addition	ἕνωσις 84/1, πρόσθεσις 66/4
sich den Übertrag merken (bei der schriftlichen Addition)	Umschreibung durch κρατέω παρὰ σεαυτῷ 131/8
Strich unter den Summanden (bei der schriftlichen Addition)	κεραία γραμμή 131/8
Die Quersumme von 15 ist 6	Umschreibung: ὁμοῦ ... τὰ α ε´ γίνονται ς´ 133/TA 5

4.2 Multiplikation

multiplizieren	πολλαπλασιάζω mit doppeltem Akk. 23/29.30.32.33, ~ διά c. gen. 71/18, ~ μετά c. gen. 7/17 (weitaus am häufigsten)
verdoppeln	διπλάζω 127/24, διπλασιάζω 65/11, 69/16
verdreifachen	τριπλασιάζω 115/3, 116/6
vervierfachen	τετραπλασιάζω 182/TA 4
verfünffachen	πενταπλασιάζω 182/TA 5
versechsfachen	ἑξαπλασιάζω 184/41 f.
verzehnfachen	δεκαπλασιάζω 21/37, abgekürzt: $^{\alpha}\iota$πλασιάζω 126/4
(eine Zahl) quadrieren	Umschreibung durch: πολλαπλασιάζω (τὰ) ... εἰς ἑαυτά 74/10
mal	ausgedrückt durch Zahladverbien – vgl. Abschnitt 2.4; Umschreibung durch ... μετὰ ... πολλαπλασιαζόμενα 7/34 f.
Faktor	ἐπιστροφή 48/30, 49/15 f., πολλαπλασιαζόμενον μέρος 12/34, meistens πολλαπλασιαστής 30/23
echte (kommutierbare) Teiler	στρέφοσι 46/26, ἐπιστρέφοσι 46/18 f.

haben (bei zusammengesetzten Zahlen), umkehrbar sein
mit echten Teilern (kommutierbar), umkehrbar
ohne echte Teiler (nicht kommutierbar), nicht umkehrbar
Zerlegung in (kommutative) Faktoren
Produkt

als Produkt ergeben
Multiplikation
Multiplikations- und Divisionsaufgabe
zweiseitig / dreiseitig
zweiseitiges Schema
"dreiseitige" Methode (Bezeichnung für die Methode der "Trennung der Plätze" bei der schriftlichen Multiplikation)
"Haus"-Methode (Bezeichnung für die Über-Kreuz-Methode bei der schriftlichen Multiplikation)
viereckförmig (Beschreibung des zugehörigen Schemas)
über Kreuz, kreuzweise
Pünktchen (zur Kennzeichnung verbrauchter Ziffern bei der Über-Kreuz-Methode der Multiplikation)
verbrauchte Ziffern bei der Über-Kreuz-Methode kennzeichnen

unbezeichnet (für die noch unverbrauchten Ziffern)
sich den Übertrag merken (bei der schriftlichen Multiplikation)

ἐπιστρεπτικός 46/16

ἀνυπόστροφος 46/27

Umschreibung durch ἐπιστροφή 48/13

πολλαπλασιασμός 8/41 (am häufigsten), τέλειος πολλαπλασιασμός 8/28 f., ἐξελθὼν τέλειος πολλαπλασιασμός 8/9; Umschreibungen: ἐξελθὼν τέλειος ἀριθμὸς ὁ ... πολλαπλασιασθείς 15/22 f., τὰ πολλαπλασιαζόμενα 164/17.22, τὰ πολλαπλασιασθέντα 30/25

πολλαπλασιάζει 16/35
πολλαπλασιασμός 7/21
ἡ τῶν πολλαπλασιαζομένων καὶ διαμεριζομένων τούτων ζήτησις 146/11 f., 149/42 f.
δίπλευρος 7/20 / τρίπλευρος 20/34
σχῆμα δίπλευρον 7/20
μεταχείρισις τρίπλευρος 20/33 f.

οἶκος 16/22.24

τετραγωνικός 16/25

σταυροειδῶς 16/42 – 17/1
κοκκίς 18/TA 3

Umschreibung durch: σημειόω τὰ ... (διὰ κοκκίδων) ὡς ἀργὰ ὄντα 18/33 f., 18/TA 2 f.

ἀσημείωτος 19/21

Umschreibung durch κρατέω παρὰ σεαυτῷ 7/26 f.

4. 3 Subtraktion, Teilen, Division

subtrahieren

ἀφαιρέω ~ ἐκ 57/15.24.25;
ἀφεῖλον mit Gen. 134/9, ~ ἀπό 15/29 f.,

	~ ἐκ 57/22 f. (am häufigsten); ἔλαβον ~ ἐκ 133/14; ἐκβάλλω ~ ἐκ 28/15 f.
subtrahiert werden können	χωρεῖ ἀφαιρεθῆναι ~ ἀπό 27/21 f., ~ εἰς 27/16, ~ ἐκ 27/18, ~ ἐπί c. acc. 53/34 f.;
minus	Umschreibung durch ἀφαιρούμενος ~ ἐκ 58/1; ἀφελόμενος ~ ἐκ 133/28.32
Minuend, Subtrahend	*ohne eigene Fachbezeichnungen*
(einer Zahl / einer Größe) fehlt etwas bis	λείπεται / λείπονται, z. B.: τὰ ... λθ΄ λείπεται α΄ πρὸς τὸ γενέσθαι μ΄ 26/3 f., (λείπονται τὰς ρ΄ λίτρας γράμμα ἓν πρὸς τὸ γενέσθαι λίτραι ,α΄ 108/26 f. – nicht im subtraktiven Sinn) ἀπολείπονται, z. B.: τὰ ... κγ΄ ἀπολείπονται ζ΄ πρὸς τὸ γενέσθαι λ΄ 26/2 f.
fehlen bis	λείπονται ~ μέχρι 32/14 f.
fehlen von ... bis	λείπονται ~ ἀπό ... μέχρι 72/43 f., ~ ἐκ ... μέχρι 73/24 f.
Differenz	Umschreibung durch: τὸ ἐναπομένον 57/8, ἐναπομεῖναν μέρος 132/41, ὑπερέχον μέρος 59/9, ἐλλεῖπον μέρος 178/34
Subtraktion	ἀφεξαίρεσις 133/36, ὀφειλμός 57/TA 4
gleichmäßig (Bezeichnung für Minuend und Subtrahend, wenn bei der schriftlichen Subtraktion keine Überträge auftreten)	ὁμαλής 134/36
ungleichmäßig (... wenn ... Überträge auftreten)	ἀνώμαλος 133/11, 134/35
streichen (von Ziffern bei der Abziehmethode der schriftlichen Subtraktion)	κόπτω 133/20
jemandem zuteilen	διαμερίζω c. dat. 135/33, διανέμω c. dat. 135/33
sich verteilen auf (Personen)	περιέρχεται c. dat. 40/36 f., 135/30, c. acc. 39/37
verteilen auf (Personen)	διαμερίζω ~ εἰς 32/33
(etwas) unter sich aufteilen	διαμερίζονται c. acc. 3/35, 51/6
aufteilen auf (Teile)	διατέμνω ~ εἰς (μέρη) 41/16 f.
einen Anteil haben (aus dem Dividenden)	οἰκειοῦται ~ ἐκ 32/9.11
aufspalten in (Teile)	διαρτάω ~ εἰς (μέρη) 65/7
aufteilen in (verschiedene Teile)	μερίζω ~ εἰς (μέρη) 74/9
teilen (in Teile)	μερίζω (~ εἰς μέρη) 41/20, 52/28
geteilt werden in, teilbar sein durch	διαιρεῖται ~ εἰς 15/9 f.

unteilbar	ἀμέριστος 46/27
dividieren	διατέμνω 3/4, sonst διαμερίζω und μερίζω: διαμερίζω ~ διά c. gen. 141/21 f., ~ ἐπί c. gen. 9/6 (selten), ~ μετά c. gen. 28/14 (am häufigsten), ~ ὑπό c. gen. 7/42 (selten), ~ εἰς μέρη 27/9; μερίζω ~ διά c. gen. 27/10 f., ~ ἐπί c. gen. 7/41, ~ μετά c. gen. 30/22 (am häufigsten), ~ ὑπό c. gen. 27/39 (selten), ~ εἰς μέρη 46/30 f.; ohne Präposition: πολλ(α)πλασίασον δὲ τὰ νε΄ μετὰ τοῦ πρώτου γράμματος, οὗ ἐμέρισας τὰ κ΄ ... 74/27
Dividend	Umschreibung durch: ὁ διαμεριζόμενος ἀριθμός, ὃν ἂν διαμερίζῃς 53/35, τὸ διαμεριζόμενον μέρος 41/22, ἡ διαμεριζομένη ποσότης 53/22, τὸ διαμεριζόμενον (μεῖζον) σῶμα 46/15, τὸ ὅλον σῶμα 32/11, τὸ καθόλου σῶμα τῆς ζητουμένης ποσότητος, ἧς βούλει διαμερίσαι 41/29, τὰ διαμεριζόμενα 51/32
Divisor, Teiler	μεριστής 27/10, διαμερίζον σῶμα 29/2
Teil, Anteil	μερίς 49/33 (selten), sonst μέρος 12/26
Quotient	Umschreibung durch: ὁ (τέλειος) τούτων διαμερισμός 29/7 f., 30/22, ὁ ἐξελθὼν τέλειος διαμερισμός 30/23, μερίς 65/2, μέρος 65/4, σῶμα 65/30, ὁ τούτων μερισμός 67/TA 3 f., 86/TA 8 (nur in den Randnotizen)
dividiert durch	μετὰ ... διαμεριζόμενα 28/14, μεριζόμενα ... μετὰ ... 30/22
aufgehen (bei der Division mit Rest)	χωρεῖ 7/40, häufig verbunden mit ὁσάκις 7/40, ποσάκις 27/22, πολλάκις 27/21 und Zahladverbien, z. B. ἅπαξ 33/21, ἑξάκις 27/25
aufgehen in	χωρεῖ ~ εἰς 9/4, ~ ἐπί c. gen. 28/23, ~ πρός 31/12 f., 47/22 (selten)
(mit Rest) dividieren	διαμερίζω ~ ἐπί c. gen. 9/6; μερίζω ~ ἐπί c. gen. 8/6; ἀφεῖλον ~ ἐπί c. gen. 7/40, ~ ἐπί c. acc. 53/34 f. — jeweils in Verbindung mit ὁσάκις χωρεῖ; ~ ἐπί c. gen. 15/39 (ohne ὁσάκις χωρεῖ)
Rest (bei der Division)	τὸ περισσόν 14/18, 15/10, τὸ περιττεῦον 16/14 f., τὸ περισσεῦον 16/16, τὰ περισσεύοντα 8/40, τὸ ἐναπομεῖναν 15/9
als Rest übrig bleiben	μένει 8/1; ἀπομένει 9/2, ~ ἐκ 39/38;

(von ... bis)	ἐναπομένει 15/42; περισσεύει 8/32, ~ ἐκ 28/26, ~ μέχρι 28/36; περιττεύει ~ ἐκ 7/25, ~ μέχρι 8/7
Division	ἐπιμερισμός 41/23.26, μερισμός 67/TA 4, 90/TA 5 (nur in den Randnotizen), sonst διαμερισμός 26/34
eine Division durchführen	διαμερίζω ἐπιμερισμόν 41/26
Multiplikations- und Divisionsaufgabe	ἡ τῶν πολλαπλασιαζομένων καὶ διαμεριζομένων τούτων ζήτησις 146/11 f., 149/42 f.
... als unnütz und unwirksam kennzeichnen (~ verbrauchte Ziffern bei der schriftlichen Division)	σημειόω ... ὡς ἀργὰ ὄντα καὶ ἀνενέργητα 28/27 f.
streichen (verbrauchter Ziffern ...)	ὀβελίζω 27/26

4. 4 Rechenproben

Siebenerprobe	μαρτυρία διὰ τοῦ ζ΄ 131/TA 1
(Siebener-)Probe für die Summe	ἀπόδειξις τῆς ὁμάδος 132/2
gesondert setzen, schreiben (~ Reste bei der Siebenerprobe)	τίθημι ... ἰδίως 8/35
"Setze dies in einen Kreis" (zur besonderen Kennzeichnung der Probenreste)	θὲς ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός 8/2 f.
Neunerprobe, Quersummenprobe	μαρτυρία διὰ τοῦ θ΄ 131/TA 1, μαρτυρία ἑνώσεως 134/TA 3
Die Quersumme von 1655 ist 17	Umschreibung: α ς ε ε΄ ὁμοῦ γίνονται α ζ΄ 133/TA 4

4. 5 Bruchrechnung

Einheit, Ganzes, ganze Zahl	ἀκέραιον 27/33, hier und oft in Verbindung mit ἕν, σῶμα 65/29
Zahlenverhältnis, Proportion	λόγος 27/32, 53/24
im Verhältnis, proportional (Zähler in Bezug zum Nenner)	ἀναλόγως 67/8
im Verhältnis stehende Größe	σῶμα ἀνάλογον 65/13, ἀναλογοῦσα ποσότης 53/8
Verbindung, Vergleich (von Zähler und Nenner)	σύγκρισις 52/9
verbinden, vergleichen (von Zähler und Nenner)	συγκρίνω 29/10
Anteil	μερίς 65/2
Bruchteil	μέρος 27/31
geringer Bruchteil	πολλοστὸν μέρος 40/39
Hälfte	τὸ ἥμισυ 60/21, τὸ μισόν 60/22
halb	μισός 32/8
Bruch	τζάκισμα 51/3, 55/11
Bruchstrich	κεραία γραμμή 27/28 f.

Zähler	τζάκισμα 27/28, 46/3–7 (Erklärung), τζακίσματα 170/33 (gelegentliche Pluralform bei mehrstelligem Zähler)
oberhalb eines Bruchstrichs	ἄνωθέν τινος κεραίας γραμμῆς 29/5 (Beschreibung der Position des Zählers)
Nenner	μεριστής 27/28 ff. (Erklärung), 50/1, διαμερίζον σῶμα 29/2
unterhalb des Bruchstrichs	κάτωθεν τῆς κεραίας γραμμῆς 29/6 (Beschreibung der Position des Nenners)
"zwei Nenner" (Umschreibung für eine Zahl, die doppelt so groß ist wie der Nenner bzw. Teiler)	δύο μερισταί 137/13 f.
gleichnamig	*kein eigener Fachbegriff*
ungleichnamig	ἀνόμοιος 56/11, 57/6, διάφορος 62/4
gemeinsamer Nenner	ἓν σῶμα 56/18, 24
Hauptnenner	*kein eigener Fachbegriff*
über Kreuz, kreuzweise (~ Multiplikation von Zähler und Nenner bei der Addition von Brüchen)	σταυροειδῶς 55/27
auf (Halbe) erweitern	ποιέω (μισά) 65/10
eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, z. B. $3\frac{2}{3}$	Umschreibung durch: ποιέω τρίτα τὰ γ´ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ 65/16 f.
kürzen	Umschreibung durch διατέμνω 50/2, σχίζω 50/2
kürzen mit	σχίζω ~ εἰς 152/1
$\frac{200}{1100}$ mit 100 gekürzt	σχιζόμενα ... τὰ $\frac{\beta\,\text{ϟ}\,\text{ϟ}}{\alpha\,\alpha\,\text{ϟ}\,\text{ϟ}}$ εἰς ρ´ 152/1
vollständig kürzen	Umschreibung durch: σχίζω τὸ τζάκισμα εἰς ἐλάχιστα μέρη 50/9, σχίζω καὶ διαμερίζομαι τὸ τζάκισμα καὶ τὸν μεριστὴν εἰς τὸ ἐλάχιστον μέρος 50/15 f.
Das Kürzen wird häufig auch durch zweifaches σχίζω (hier: Teilen) von Zähler und Nenner umschrieben, z. B.:	
mit 10 kürzen	σχίζω τὸ τζάκισμα εἰς μέρη δέκα – σχίζω τὸν μεριστὴν εἰς μέρη δέκα 50/11 f.
$\frac{2}{3}$ von 12 nehmen ($\frac{2}{3}$ mit 12 multiplizieren)	λαμβάνω τὰ $\frac{\beta}{\gamma}$ (διὰ) τῶν ιβ´ 55/17
$\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von 36 nehmen ($\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 36$ berechnen)	λαμβάνω $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τῶν λς´ 63/8 f.
abstreichen (von Stellen bei Dezimalbrüchen)	κόπτω 93/26

5 Arithmetische und algebraische Verfahren

5.1 Dreisatz

Dreisatzmethode	κανὼν διὰ τῶν τριῶν 96/TA 2 f., 110/33; häufiger μεταχείρισις διὰ τῶν τριῶν 70/7–11 (Erklärung); διὰ τῶν τριῶν 70/11
die drei Glieder	τὰ τρία μέρη 120/32, 123/1, οἱ τρεῖς (ἀριθμοί) 70/10
im selben Verhältnis	ἀναλόγως 122/24, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον 70/6 f., κατὰ τὸν ὅμοιον λόγον 70/22, κατὰ τὸν αὐτὸν ὅμοιον λόγον 70/14 f.
Formulierung der Fragestellung	ἐὰν τὰ ... (αὐξανόμενα / ἐλαττούμενα / φθειρόμενα) γίνονται ..., τὰ ... (κατὰ τὸν ... λόγον) πόσα γίνονται (αὐξανόμενα / ἐλαττούμενα / φθειρόμενα) (ἀναλόγως); 70/4–7.14.15.21.22.33.34, 71/36.37, 72/12.13.29.30, 73/14–16, 122/22–24
mit dem Dreisatz berechnen	ποιέω διὰ τῶν τριῶν 95/29 f., 110/37
Probe durch den Dreisatz	ἡ διὰ τῶν τριῶν ἀπόδειξις 70/43 f.

5.2 Falscher Ansatz

Ansatz, Versuchszahl annehmen, ansetzen	ὑπέρθεσις 88/16, θέσις 77/11 τίθημι 80/38, ὑποτίθημι 77/11, ὑπερτίθημι 86/28, 87/5
einen Ansatz machen, eine Versuchszahl annehmen	τίθημι θέσιν τινά 80/38, ὑποτίθημι θέσιν τινά 77/11, ποιέω θέσιν 81/11 f., 82/2 f.
Fehler; Überschuss	Umschreibung durch διαφορά 78/29, 79/21 f.; πλεονασμός 80/6.9
gleichsinnig (~ Fehler beim doppelten falschen Ansatz – modern gesprochen: Fehler haben gleiches Vorzeichen)	μονομερής 79/27, 81/13
gegensinnig (~ Fehler beim doppelten falschen Ansatz – modern gesprochen: Fehler haben verschiedene Vorzeichen)	ἀνώμαλος 80/6, 84/19

5.3 Sonstige Methoden

Methode der Arithmetik	(ἡ) τῆς ἀριθμητικῆς μέθοδός τε καὶ μεταχείρισις 3/2
Bürgerliches Rechnen, "politische Arithmetik"	κοινὴ καὶ πολιτευομένη μέθοδος 4/2.3.8.9
Methode des alltäglichen Rechnens mit Geld	κοινὴ καὶ πολιτευομένη μεταχείρισις 55/34, 56/37, κοινὴ μεταχείρισις τῶν φλουριῶν 68/1 f., κοινὴ μεταχείρισις

	66/32, μεταχείρισις τῶν φλουριῶν 67/10
Rechnen mit Dezimalbrüchen (bei Florinen)	μεταχείρισις τῶν φλουριῶν 98/13 u. ö.
Tolletrechnung	ταυλέτα 109/30 (Worterklärung), sonst
Methode der Tolletrechnung	τολέτα 109/29, 169/35
	μεταχείρισις τῆς τολέτας 110/22 f.

6 Bewegungsaufgaben

Wanderer	ὁδοιπόρος 84/38
Schiff	ναῦς 88/32, gen. νηώς 88/19
Bewegung	κίνησις 90/10, 91/6, meistens κίνημα 87/1
Weg	ὁδός 87/18
Wanderung, Reise	πορεία 85/4, häufiger ὁδοιπορία 84/42, 90/9
Abreise	ἐκδημία 87/27, häufiger ἀποδημία 86/19
Anfang – Ende, Start – Ziel	ἀρχή - τέλος 91/23
Abstand	διάστασις 85/8, häufiger διάστημα 84/41
Wander-, Reise-	ὁδοιπόρος (2) 87/25, 90/25
Wandertag, Reisetag	ὁδοιπόρος ἡμέρα 87/25, 90/25
Zusammenkunft, Zusammentreffen	συνέλευσις 88/12, häufiger σύνοδος 90/24
Wind	πνεῦμα 88/25
das Wehen der Winde	ἡ τῶν πνευμάτων φορά 88/25
günstiger Wind	καιρός 88/23
bewegen	κινέω 85/3
wandern, reisen	ὁδεύω 84/39 (am häufigsten), ὁδὸν ποιέω 87/17 f., ὁδοιπορίαν ποιέω 84/42, πορείαν ποιέω 85/4
fahren	ὁδεύω 88/22
abreisen	ἀποδημέω 85/4
zuvor abreisen	προαποδημέω 86/20
zuvor weggehen, zuvor wegfahren	προεξέρχομαι 90/26
aufbrechen, marschieren	πορεύομαι 85/2
sich entfernen; (langsam) vorankommen	ὑπάγω 88/23, 91/24
... Meilen zurücklegen	ποιέω μίλια ... 85/2
eine Entfernung zurücklegen	ποιέω διάστασιν 85/8
vorrücken	προβαίνω 87/2
einholen, erreichen	καταλαμβάνω 86/16, 90/26
zusammentreffen, begegnen	συναντάω 88/19, συνέρχομαι 85/10
sich vereinigen	ἑνόομαι pass. 90/7
überqueren, überbrücken	περαιόω 91/15
hinkommen, gelangen	παραγίνομαι 85/5

wohlbehalten ankommen	ἀποσῴζομαι pass. 85/17
ans Ziel gelangen	Umschreibung durch ἀποπληρόω (τῷ διαστήματι) 85/8, 90/8
kehrtmachen, umkehren	ἐπιστρέφω 91/14
(her)kommen	ἔρχομαι 88/23, 91/24
sich beeilen	ἐπείγομαι 87/9
langsam machen, verzögern	βραδύνω 88/26
hindern, hemmen	κωλῶ 89/23
schnell	σπουδαῖος 86/16, ταχύς 88/24.32
langsam	βραδύς 88/42
mit gleicher Geschwindigkeit	Umschreibung: ὁμαλῶς καὶ ὁμοίως 88/23
ungleichmäßig (bei einer Vorwärts- und Rückwärtsbewegung)	ἀνώμαλος 91/12
geradeaus	κατ᾽ εὐθεῖαν 91/16
vorwärts	(ἐπὶ τὰ) ἔμπροσθεν 91/13.16
rückwärts	ἐπὶ τὰ ὄπισθεν 91/14, ὀπισθορμήτως 91/18

7 Kaufmannswesen und Gesellschaftsrechnung

Verkehr	συναναστροφή 3/18 f.
Geschäftsverkehr	συνάλλαξις 3/18
Geschäft, Handel	πραγματεία 3/18, συνάλλαγμα 93/1
Praxis, Handhabung	πρᾶξις 92/42
bürgerlich	πολιτευόμενος 4/2 f., 92/42
bürgerliche Praktiken, bürgerliche Handhabung	πολιτευόμεναι πράξεις 92/42
auf den Handel, auf das praktische Leben bezogen	πρακτικός 92/26
Gesellschafter	σύντροφος 32/33
Kaufmann	πραγματευτής 101/23
Kaufmannsgenossen	σύντροφοι πραγματευταί 154/21
Besitzer	κύριος 80/29
Geldverleiher	δανειστής 128/16
Vereinbarung	συμφωνία 122/20
Ladung	σῶμα 154/25
Schiffsladung	ὅλον σῶμα τῆς νηώς 154/17 f., τὸ καθόλου σῶμα τῆς νηώς 154/25
Ware	πραγματεία 101/23, 110/26
Tier	ζῷον 98/14, ἄλογον 98/33, meistens pl. ἄλογα 98/18
Pferd	ἵππος 80/26, ἄλογον 98/33, meistens pl. ἄλογα 98/18
Schaf oder Ziege, pl. Kleinvieh	πρόβατον 99/33, meistens pl. πρόβατα 99/15
Wolle	μάλιν 111/38

Tuch, Stoff	τζόχα 111/38
Tuch, feines Webzeug	βηλάριν 120/15
Seide	μετάξιν 114/32, 116/27, häufiger μέταξα 100/10
Perle(n)	μαργαριτάριν 165/21
Waage	καμπανός 110/26, στατέριν 110/27, 111/13, ιβ΄γγίν = δωδεκαουγγίν 110/30, 111/12 (offenbar sonst nicht belegt)
12-Unzen-Waage	ιβ΄γγίν = δωδεκαουγγίν (s. o.)
15-Unzen-Waage	καμπανός, στατέριν (s. o.)
Waagebalken, Waage	ζυγός 110/28
wägen	καμπανίζω 101/23
Münzprägung, Währung, Geldsorte	χάραγμαν 103/23
in Geld (beim Warentausch)	χάραγμαν acc. 111/43
Gestalt (im Sinne von Größe oder Maßeinheit)	εἶδος 53/14.15
Formulierung zur Angabe von Münzverhältnissen	τὰ ... φλουριά - ἕκαστον ἀνὰ ὑπέρπυρα ζ΄ 93/12, ἕκαστον φλουρὶ εἰς ὑπέρπυρα ζ΄ κουκκιὰ ς΄ 93/19, ἕκαστον φλουρὶ χρῄζει ὑπέρπυρα η΄ 52/27 f.
Florine in Hyperpyra verwandeln	ποιέω τὰ ... φλουριὰ ... ὑπέρπυρα 52/39 f.
in Kukkia verwandeln	ποιέω κουκκιά 137/32 f.
gemischt (bei Maßeinheiten)	μεμειγμένος 93/15 f.
Preis	τιμή 80/27, seltener τίμημα 80/26, 118/35
Wert	τίμημα 175/28
Lohn	μισθός 135/38
Miete	νοίκιν 78/6
Pfand	ἐνέχυρον 175/26
Geschenk	ψυχικόν 76/4
Anteil	μέρος 32/36 f., μερίς 140/27
eigener, persönlicher Anteil	οἰκεῖον μέρος 32/36 f., 141/20, οἰκεία μερίς 140/27
Beitrag, Beisteuer (im Sinne von Anlage, Beteiligung, Investition)	μετάδοσις 92/42
Kapital	κεφάλαιον 123/29
Gewinn, Zins	κέρδος 122/23, 123/21
Zins	τόκος 128/16
Jahreszins	χρονικὸν κέρδος 123/21
Steuerjahr, Zinsjahr	ἰνδικτιών, ἡ 128/20 (abgekürzt)
Monatszins	μηνιαῖον κέρδος 123/26, μηνικὸν κέρδος 125/35 f., 127/7, ἑνὸς μήνου κέρδος 125/12.33, τοῦ ἑνὸς μηνὸς τὸ κέρδος 126/12
Bemerkung zur Festsetzung	πάντας γὰρ τοὺς ιβ΄ μῆνας τοῦ ἐνιαυτοῦ

des Zinsmonats auf 30 Tage	ἐπὶ τῶν λογαριασμῶν τε καὶ καταστίχων ἀνὰ λ΄ ἡμέρας ἀριθμῶσι αὐτούς 129/30 f.
Tageszins	ἡμερήσιον κέρδος 127/6
Darlehen	χρέος, τό; pl. χρέα 128/16.18, δόσις 128/26
auf Darlehen	δανειακῶς 128/20
Geldschuld	ὀφειλή 123/25
Schuldbuch, Verzeichnis	κατάστιχον 128/16, 129/31
Ausfall, Verlust	ἐξεπεσμός 117/25, παραφθορά 115/39
ein Geschäft machen, ein Handelsgeschäft betreiben, handeln	πραγματεύομαι 122/20, 154/21, πραγματείαν ποιέω 154/28
im Handel sein	πράττει 159/2.5
geschäftsmäßig ausführen	διαπράττω 102/11
vereinbaren	συμφωνέω 78/4, 111/41
kaufen	ἀγοράζω 80/33, ὠνέομαι 101/20
(ab)kaufen	ἐξωνέομαι 80/28, 98/33
in Empfang nehmen, erhalten	παραλαμβάνω 110/26
an sich nehmen, an sich ziehen	προσλαμβάνω 135/39
abfordern, erfordern	ἀπαιτέω 129/9.12
tauschen	καταλλάσσω 111/38.40
mir zu eigen machen, mir zukommen, (dazu)gewinnen, verdienen	οἰκειόομαι 32/34, προσοικειόομαι 118/35, 119/14
Gewinn einbringen	οἰκειοῦται 115/6.7
Gewinn abwerfen, gewinnen	κερδᾷ 124/30, κέρδος δίδωσι 124/29
verkaufen	πωλέω 80/26
übergeben	ὑπερδίδω 82/20, 83/14
zurückgeben	ἀποδίδωμι 122/20
verleihen, borgen	δανείζω 123/21
Darlehen gewähren	χρέα δίδωμι 128/18
(Kapital) einbringen, einlegen	εἰσφέρω 159/4.7, προσφέρω 146/1, 149/37
Anteil haben	μετέχω 154/22
jemandem zuteilen	διαμερίζω c. dat. 135/33, διανέμω c. dat. 135/33
verteilen auf (Personen)	διαμερίζω ~ εἰς 32/33
sich verteilen auf (Personen)	περιέρχεται c. dat. 40/36 f., 135/30, c. acc. 39/37
(etwas) unter sich aufteilen	διαμερίζονται c. acc. 32/35, 51/6
auszahlen an	ἀποδίδωμι ~ πρός 40/37 f.
schulden	ὀφείλω 78/9, 122/33
Schaden haben, einbüßen	ζημιόομαι pass. 111/14.22
ausfallen, verloren gehen	ἐκπίπτει 111/14, 113/29
um wie viel weniger kommt ... ?	τί ἔρχεται ἔλαττο ... ; 112/2

(~ Preis)	
veranschlagen	τιμάω 106/31
ausmachen (~ Preis)	ποιεῖ 113/36, 159/11
wert sein (zur Angabe von Münzverhältnissen)	χρῄζει 52/28.41
kosten	χρῄζει 98/21
der Preis sein von	χρῄζει c. acc. 118/15.16
aufreihen, auflisten (bei der Gesellschaftsrechnung)	τίθημι ἐν τάξει 143/6 f.
im Verhältnis (~ Gesellschaftsrechnung)	ἀναλόγως 146/3
Fachbegriffe der Terminrechnung:	
verknüpfen	συνάπτω 128/14
Verknüpfung	σύναψις 129/34, 130/34 f.
hinten festmachen	ὀπισθαποδέω 130/31
rückwärtsgewandt	ὀπισθορμήτως 130/31.33.34

8. Metallurgie, Mischungsrechnung

Gold (ungemünzt)	μάλαγμα(ν) 172/6, 173/33
verarbeitetes Gold, Schmuckgold	χρυσίον 173/34, 175/15
golden, aus Gold	χρυσός 175/20
Goldarbeit	ἔργον χρυσόν 175/20
nach Art des Goldschmieds	χρυσοχοϊκῶς 172/9 f., 173/14
fein, rein	φίνος 172/4.6, καθαρός 172/2, καθαρότατος 172/4, τέλειος 172/5, καθαρός τε καὶ τέλειος 172/7, καθαρότατος καὶ τέλειος 174/30
Feingold	φίνον καὶ τέλειον μάλαγμα 172/6, καθαρὸν μάλαγμαν 174/1, τέλειον μάλαγμαν 174/20, καθαρότατον καὶ τέλειον μάλαγμαν 174/30
Silber	ἀσήμιν 113/28
Feinsilber	φίνον ἀσήμιν 172/4, καθαρὸν ἀσήμιν 172/2, καθαρότατον ἀσήμιν 172/4, ἀσήμιν τέλειον 175/8 f., ἀσήμιν καθαρόν τε καὶ τέλειον 172/7
fein verarbeitetes Silber	ἀσήμιν καματεμένον 113/28
Kupfer	χάλκωμαν 172/1
Schmelzofen, Schmelztiegel	χωνευτήριον 173/26
in einen Schmelzofen werfen	βάλλω εἰς χωνευτήριον 175/1 f.
scheiden, läutern	λαγαρίζω 173/14
schwinden (bei der Metallscheidung im Schmelzofen)	φθείρεται pass. 174/18, διαφθείρεται pass. 173/26, 174/28

Auflage, Legierung	ἐπιβολή 172/9 f. (Worterklärung), 172/12; πρόσθεσις 173/39, προσθήκη 173/35 — jeweils pleonastisch mit ἐπιβολή verbunden
hinzufügen, zusetzen (bei der Legierung)	προστίθημι 172/1.9
noch hinzufügen, noch zusetzen (bei der Legierung)	ἐπιπροστίθημι 172/12.31
vereinigen (im Sinne von zusammenschmelzen bei Metallen verschiedenen Feingehalts)	ἑνόω 117/39, 178/19
Sorte	ἰδέα 177/40
Feingehalt, Feinheitsgrad	Umschreibung durch τάξις 177/41, 178/18
Verschiedenheit (der Feingehalte)	διαφορά 180/24
Mischungssorte, vereinigte Sorte (aus ...)	Umschreibungen: ἓν σῶμα (μέσον τοῦ ...) 184/23, ἑνωθὲν σῶμα τῶν διαφόρων ἰδεῶν 178/16 f.
Formulierungen zur Angabe von Feingehalten:	
— Gold	ἕκαστον ἐξάγιον κουκκιῶν ... 173/34, ἕκαστον ἐξάγιον ἀνὰ κουκκιῶν ... 173/38, ἕκαστον ἐξάγιόν ἐστι (ἀνὰ) κουκκιῶν 174/18.19.21.22, τὸ ἐξάγιον ἔχει κουκκιὰ ... 174/23, ἕκαστον ἐξάγιον εἴωθεν ἔχειν κουκκιὰ ... 173/32 f., τὸ ... μάλαγμά ἐστι κουκκιῶν ... 172/6, τὸ ... κουκκιῶν τὸ μάλαγμαν 173/33, μάλαγμαν ... κουκκιῶν ... 174/17, τῶν ... κουκκιῶν τὸ ἐξάγιον 177/24, ἐξάγια ... ἀνὰ κουκκιῶν ... 174/28, τὰ ... ἐξάγια (τὰ) ἀνὰ ... κουκκιῶν 174/14.27.28, τὰ ... ἐξάγια τὰ ἀνὰ κουκκιῶν ὄντα ... 173/37 f., ἐξάγια μάλαγμαν ... τῶν ἀνὰ κουκκιῶν ... 177/23 f., τὰ ... ἐξάγια ἐγένοντο ἀνὰ κουκκιῶν ... 175/30 f., τὰ ... ἐξάγια ..., ἅτινά εἰσι ἀνὰ κουκκιῶν ... 174/16 f.
— Silber	ἑκάστη λίτρα (ἀνὰ) οὐγγιῶν ... 172/2.11, ἑκάστη λίτρα ... ἐστὶ ἀνὰ οὐγγιῶν ... 172/22 f., ἑκάστη λίτρα ... ἦν οὐγγιῶν ... 175/7, ἑκάστη λίτρα ἔχει ... οὐγγίας ... 176/23, ἑκάστη λίτρα ... γίνεται οὐγγιῶν ... 174/41 f., (ἔχει) ἐφ᾽ ἑκάστης λίτρας οὐγγίας ... 176/19, τὸ ... ἀσήμιν ... ἐστὶ οὐγγιῶν ... 172/4 f., ποιέω τὴν λίτραν τῶν ... οὐγγιῶν οὐγγιῶν ...

172/8 f., ἡ τῶν ... οὐγγιῶν λίτρα 172/20, αἱ ... λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν ... οὖσαι 172/17 f., αἱ ... λίτραι αἱ ἀνὰ οὐγγιῶν ... γενόμεναι 172/30, αἱ ... λίτραι (τῶν) ἀνὰ οὐγγιῶν ... 173/22.30, αἵτινές (sc. λίτραι) εἰσι ἀνὰ οὐγγιῶν ... 173/13, λίτραι ἀσήμιν ἐφ᾽ ἑκάστης τάξεως τῶν ἀνὰ ... οὐγγιῶν 178/18 f.

9 Begriffe der Zeit

Zeit	χρόνος 3/9.24
Jahr	ἐνιαυτός 123/25, 126/43, weitaus häufiger χρόνος 3/20
jährlich, Jahres-	χρονικός 123/21
Steuerjahr, Zinsjahr	ἰνδικτιών, ἡ 128/20 (abgekürzt)
Monat	μήν, ὁ 123/44, gen. μηνός 126/12 und μήνου 125/12, acc. μῆνα 124/33 und μῆναν 124/1, nom. pl. μῆνες 125/21 und μῆναι 125/12 — vgl. Kap. I, Abschnitte 2. 2. 2. 1 bis 2. 2. 2. 3
monatlich, Monats-	μηνιαῖος 123/22.26, μηνικός 125/35, 127/7
September	σεπτέμβριος 128/23 (stets abgekürzt)
Oktober	ὀκτώβριος 128/24 (stets abgekürzt)
November	νοέμβριος 128/24 (stets abgekürzt)
Dezember	δεκέμβριος 128/25 (stets abgekürzt)
Tag und Nacht, Zeitraum von 24 Stunden	νυχθήμερον 76/27
Tag	ἡμέρα 10/18, pl. ἡμέραι 10/18 und αἱ μέραι (= αἱ ἡμέραι) 159/4.7, acc. ἡμέρας 85/26 — abgekürzt ℊℊ 158/unteres Diagramm — und ἡμέρες 84/40. Vgl. auch Kap. I, Abschnitt 2. 2. 2. 2 und DU CANGE (Band I, 1958, S. 9)
täglich, Tages-	ἡμερήσιος 127/6
Stunde	ὥρα 76/26, häufig abgekürzt (ohne Flexionsendung) 90/10
schlagen (~ Stunden)	κρούει 76/26.27
Widerhall	ἀπήχημα 76/30
seit Christi Geburt	ἀπὸ Χριστοῦ γεννήσεως 10/17
vorübergehen	παρέρχεται 130/16, 158/39
erfüllen, vollenden	πληρόω 130/32

VII VOKABULAR

Aufgenommen wurden Wörter mit spezieller fachsprachlicher Bedeutung (eine Auswahl aus Kap. VI), Maßeinheiten (vgl. Kap. VIII), bisher nicht oder selten belegte Begriffe sowie Wörter der Umgangs- oder Volkssprache. Dabei wird jeweils – sofern nicht anders angegeben – auf die Nummern der Abschnitte von Kap. VI hingewiesen, in denen die Begriffe zu finden sind.

ἀκέραιον, τό	Ganzes, ganze Zahl, Einheit 2.7, 3, 4.5
ἀκέραιος	ganzzahlig 3
ἄκρα, τά	Ränder (von Zahlenschemata) 3
ἄλογον, τό	Tier, Pferd 7
ἀμέριστος	unteilbar 3, 4.3 – siehe ἀριθμός
ἀναλογέω	übereinstimmen, ähnlich sein 1
ἀναλογοῦσα ποσότης	4.5
ἀναλόγως	im (selben) Verhältnis, proportional 4.5, 5.1, 7
ἀνενέργητος	unwirksam, wirkungslos 3, 4.3
ἀνόμοιος	ungleich 1; ungleichnamig 4.5
ἀνυπόστροφος	ohne echte Teiler (nicht kommutierbar) 4.2 – siehe ἀριθμός
ἀνώμαλος	ungleichmäßig 4.3, 6; gegensinnig 5.2
ἀπαρτίζω	fertig machen, vervollständigen 3
ἀπήχημα, τό	Widerhall 9
ἁπλός	einzifferig 3, statt ἁπλοῦς (KRIARAS)
ἀπόδειξις, ἡ	Beweis; auch: Probe 1
~ τῆς ὁμάδος	Beweis (Probe) für die Summe 4.4
ἡ διὰ τῶν τριῶν ~	~ mit dem Dreisatz 5.1
ἀποδίδω	beenden 1; erhalten 3 – vgl. auch I.2.2.5
ἀποδίδωμι	beenden 1; zurückgeben 7; auszahlen 7
ἀπολείπονται	fehlen 4.3
ἀπομένει	(als Rest) übrig bleiben 3, 4.3
ἀποσωσμός, ὁ	Erfüllung, Vollendung 1 (kein Beleg bei KRIARAS)
ἀργός	unnütz, unbrauchbar 3, 4.2, 4.3
ἀριθμέω	(er)rechnen, ausrechnen, berechnen 1
ἀριθμός, ὁ	Zahl 3, 4.2, 4.3, 5.1; Summand 4.1
μονός, μεμονωμένος ~	3
τέλειος ~	(2 Bedeutungen) 3

ἄρτιος καὶ τέλειος ~	3
ἐξελθὼν τέλειος ~	3
εἰς ἓν πρῶτον γράμμα ἀναφερόμενος ~	3
~ ἔχων διπλᾶς τὰς σημασίας	3
μεικτὸς καὶ ἀτελής ~	3
~ ἐπιστρεπτικός	3, 4. 2
ἀμέριστος καὶ ἀνυπόστροφος ~	3, 4. 3
ἐξελθὼν τέλειος ~ ὁ ... πολλαπλασιασθείς	4. 2
διαμεριζόμενος ~, ὃν ἂν διαμερίζῃς	4. 3
οἱ τρεῖς (ἀριθμοί)	5. 1
ἄρτιος	siehe ἀριθμός
ἀσημείωτος	unbezeichnet 3, 4. 2
ἀσήμιν, τό	Silber 8
~ καθαρόν (τε καὶ τέλειον)	8
καθαρότατον ~	8
~ καματεμένον	8, vgl. auch I. 2. 2. 5
~ τέλειον	8
φίνον ~	8
ἀσύγχυτος	unvermischt, klar 1
ἀτελής	siehe ἀριθμός
ἀφαιρέω	subtrahieren 4. 3
ἀφαιρούμενος ἐκ	4. 3
ἀφεῖλον	subtrahieren, (mit Rest) dividieren 4. 3
ἀφεξαίρεσις, ἡ	Subtraktion 4. 3 (kein Beleg bei KRIARAS)
ἄχρηστος	unnütz, unbrauchbar 3
βηλάριν, τό	Tuch, feines Webzeug 7 eig. das Tuch, das zum Zeichen des Spielbeginns gehisst wird, ~ lat. *velarium* (KAHANE 1972, A I, Heft 5, Spalten 520, 529; Heft 6, Spalte 610)
γράμμα, τό	Zahlzeichen, (Buchstaben-)Ziffer 3
τελευταῖον ~	3
τελευταῖον μὲν ~ ἀπὸ τοῦ τέλους, πρῶτον δὲ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς	3
γραμμή, ἡ	Strich 1
ἐγκάρσιος ~	1
εὐθεῖα ~	1
κεραία ~	1, 4. 5

δαιτυμών, ὁ — Gast, "Schmauser" 77/3
δανειακῶς — auf Darlehen 7
δανείζω — verleihen, borgen 7
δεκάδα, ἡ — Zehner 2. 3 (KRIARAS)
δεκαπλασίαζω — verzehnfachen 4. 2
δεκάρι, τό — 10 Pfund 108/33 — vgl. VIII. 2. 1
διαιρεῖται — geteilt werden, teilbar sein 4. 3
διαμερίζω — zuteilen, verteilen, dividieren 4. 3, 7
~ ἐπιμερισμόν — 4. 3
τὰ διαμεριζόμενα — 4. 3
μετὰ ... διαμεριζόμενα — 4. 3
σχίζω καὶ διαμερίζομαι ... — 4. 5
~ εἰς τὸ ἐλάχιστον μέρος — 4. 5
siehe auch ἀριθμός, ζήτησις, μέρος, ποσότης, σῶμα

διαμερισμός, ὁ — Division, Quotient 4. 3
ἐξελθὼν τέλειος ~ — 4. 3
(τέλειος) τούτων ~ — 4. 3
διανέμω — zuteilen 4. 3, 7
διαπράττω — geschäftsmäßig ausführen 7
διαρτάω — aufspalten 4. 3
διασημαίνω — bezeichnen 1
διάστασις, ἡ — Abstand, Entfernung 6
διάστημα, τό — Abstand, Entfernung 6
διατέμνω — aufteilen, dividieren 4. 3; kürzen 4. 5
διαφθείρεται — schwinden 8
διαφορά, ἡ — Fehler 5. 2; Verschiedenheit (der Feingehalte) 8

διάφορος — unterschiedlich, verschieden 1; ungleichnamig 4. 5

διαχαράττω — aufschreiben 1
δίδω — geben — vgl. I. 2. 2. 5
δίμοιρος (λόγος) — $\frac{2}{3}$ 2. 7 — vgl. TROPFKE (1980, S. 102)
διπλάζω — verdoppeln 4. 2
διπλασιάζω — verdoppeln 4. 2
διπλάσιος — doppelt 4. 2
δίπλευρος — zweiseitig 4. 2 — siehe σχῆμα
διπλοῦς — doppelt, zweifach 4. 2 — siehe auch ἀριθμός

διττός — doppelt, zweifach 4. 2
δόσις, ἡ — Angabe 1, Darlehen 7
δωδεκαουγγίν, τό — 12-Unzen-Waage 7

ἐγκάρσιος — quer, schräg 1 — siehe γραμμή
ἐγροικάω — Nbf. von ἀγροικάω (KRIARAS): verstehen 1

εἶδος, τό — Gestalt (im Sinne von Größe oder Maßeinheit) 7

εἰκών, ἡ — Gestalt 3
  σῴζει τὴν οἰκείαν εἰκόνα — 3
εἰσφέρω — (Kapital) einbringen, einlegen 7
ἑκατοντάδα, ἡ — Hunderter 2. 3 (KRIARAS)
ἐκβάλλω — subtrahieren 4. 3
ἐκπίπτει — ausfallen, verloren gehen 7
ἐκτείνω — ausdehnen, erweitern (von Zahlbereichen) 3 — vgl. I. 2. 1. 4

ἔλαβον — subtrahieren 4. 3
ἐλλείπων — kleiner 3; fehlend 3
  ~ ἐλλεῖπον μέρος — 4. 3
ἕνα — 1 (= ἕν) 2. 2
ἐναπολείπεται — übrig bleiben 3
ἐναπομένει — (als Rest) übrig bleiben 3, 4. 3
  τὸ ἐναπομένον — 4. 3
  τὸ ἐναπομεῖναν — 4. 3
  ἐναπομεῖναν μέρος — 4. 3
ἐνεργέω — bewirken 1
ἐνέχυρον, τό — Pfand 7
ἑνόομαι **pass.** — sich vereinigen 6
ἑνόω — vereinigen 3; vereinigen im Sinne von "zusammenschmelzen" 8; addieren 4. 1

  ~ τὴν καθόλου ὁμάδαν — 4. 1
  ἑνωθεῖσα ὁμάς — 4. 1
  ἑνωθὲν σῶμα τῶν διαφόρων ἰδεῶν — 8
ἐνταὐτῷ — siehe ὡς ἐνταὐτῷ
ἕνωσις, ἡ — Addition 4. 1
  μαρτυρία ἑνώσεως — 4. 4
ἐξάγιον, τό — Exagion, Sechstelunze (Gewichtsmaß) — vgl. VIII. 2. 1

ἐξαπλασιάζω — versechsfachen 4. 2
ἐξαρτυμένος εἰς ... — versehen mit ... 101/4
ἔξεπεσμός, ὁ — Ausfall, Verlust 7 (kein Beleg bei KRIARAS)

ἐπείγομαι — sich beeilen 6
ἐπέχει — innehaben, einnehmen 3
  τόπον ~ — 3
ἐπιβολή, ἡ — Auflage, Legierung 8 (in dieser Bedeutung kein Beleg bei KRIARAS)

  πρόσθεσις καὶ ~ — 8
  ~ καὶ προσθήκη — 8
ἐπιμερισμός, ὁ — Division 4. 3
ἐπιπροστίθημι — noch hinzufügen, noch zusetzen 8

ἐπιστρεπτικός — mit echten Teilern (kommutierbar) 3, 4. 2 — siehe ἀριθμός

ἐπιστρέφει — umwenden, zurückbringen 30/24
  ~ εἰς τὴν προτέραν ἀποκατάστασιν — ~ in den früheren Zustand 30/24

ἐπιστρέφοσι — echte (kommutierbare) Teiler haben 4. 2

ἐπιστρέφω — kehrtmachen, umkehren 6

ἐπιστροφή, ἡ — Faktor 4. 2; Zerlegung in (kommutative) Faktoren 4. 2

εὐθεῖα γραμμή — siehe γραμμή
  κατ᾽ εὐθεῖαν — geradewegs, direkt 1; geradeaus 6

ζημιόομαι — Schaden haben, einbüßen 7

ζητέω — suchen, untersuchen 1;
  ~ τινός τι — "ersuchen", bitten ~ jemanden um etwas 122/19; 80/34
  ~ τινί τι

ζήτημα, τό — Frage, Problem, Aufgabe 1

ζήτησις, ἡ — Frage, Problem, Aufgabe 1; Lösung 1
  ἡ τῶν πολλαπλασιαζομένων καὶ διαμεριζομένων τούτων ~ — 4. 2, 4. 3

ζυγός, ὁ — Waage(balken) *(pars pro toto)* 110/28
  τοῦ στατερίου ~ — 7

ἡμερήσιος — täglich, Tages- 9
— siehe auch κέρδος

θέσις — Ansatz, Versuchszahl 1, 5. 2
  ποιέω θέσιν — 5. 2
  τίθημι θέσιν — 5. 2
  ὑποτίθημι θέσιν — 5. 2

θέτω — setzen — vgl. I. 2. 2. 5

ἰδέα, ἡ — Sorte 8
siehe auch σῶμα, τάξις

ἰνδικτιών, ἡ — Steuerjahr, Zinsjahr 7, 9; nur in der Abkürzung $\overset{\alpha}{\curlyvee}$ (acc. = ἰνδικτιῶνα)
~ lat. *indictio* — nach BERTELÈ (1978, S. 127) der Zeitraum vom 1. September bis zum 31. August — vgl. VIII. 4

Ἰταλικός — italienisch 3/17.21

καθαρός — fein, rein 8 — siehe ἀσήμιν, μάλαγμα(ν)

καθαρότατος — fein, rein 8 — siehe ἀσήμιν, μάλαγμα(ν)

καιρός, ὁ — rechter Augenblick 7/18; günstiger Wind 6

καματεμένος — sc. κεκαματεμένος, Nbf. von κεκαματευ-

μένος (KRIARAS): fein verarbeitet 8 — siehe ἀσήμιν

καμπανίζω — wägen (das Gewicht bestimmen) 7

καμπανός, ὁ — Waage, insbes. 15-Unzen-Waage 7; nach KAHANE (1972, A I, Heft 5, Spalten 507, 528, 533) die Schnellwaage oder römische Waage — vgl. auch SCHILBACH (1982, S. 161 f.)

κάνα, ἡ — Nbf. von κάννα ("Rohr"), ~ ital. *canna*; kein Beleg bei KRIARAS; Längenmaß für Stoffe (βηλάριν und τζόχα) 112/1 — vgl. auch SCHILBACH (1970, S. 276, 284), SCHILBACH (1982, S. 179), I. 2. 2. 2. 2 und VIII. 3

καντάρι(ον), τό — Zentner 101/24, 102/TA 6 ~ ital. *cantario, cantaro,* türk. *quanṭār* — vgl. auch SCHILBACH (1970, S. 276, S. 284 f.), SCHILBACH (1982, S. 179, S. 189) und VIII. 2. 1

κἄντε - κἄντε — sei es, dass — sei es, dass; ob — oder 3/8 — vgl. auch I. 2. 3. 8

κανών, ὁ — Regel 1

ὁ ~ ὁ διὰ τῶν τριῶν — 5. 1

καράτον, τό — Karat, ein Gewichtsmaß 166/28 ~ lat. *caratio* — vgl. auch SCHILBACH (1970, S. 276 f.), SCHILBACH (1982, S. 179) und VIII. 2. 1

καταλλάσσω — tauschen 7

καταμέρος — im Detail 1

κατάστιχον, τό — Schuldbuch, Verzeichnis 7

κάτωθεν — kleiner 3 (Nebenbedeutung)

κείτομαι — Nbf. von κεῖμαι: liegen 59/TA 3 — vgl. auch I. 2. 2. 5

κεραῖος — siehe γραμμή

κερδᾷ — Gewinn abwerfen, gewinnen 7

κέρδος, τό — Gewinn, Zins 7

~ δίδωσι — 7

ἡμερήσιον ~ — 7

μηνιαῖον ~ — 7

μηνικὸν ~ — 7

ἑνὸς μήνου ~ — 7

τοῦ ἑνὸς μηνὸς τὸ ~ — 7

χρονικὸν ~ — 7

κεφάλαιον, τό — Kapitel 1; Kapital 7

κηντηνάρι, τό — Zentner 108/15.17; als Nbf. von κεντηνάρι bei KRIARAS belegt, ~ lat. *cente-*

narium – vgl. auch VIII. 2. 1

κοκκίς, ἡ — Pünktchen 3, 4. 2; eig. Kern von Beeren und Feigen (DEMETRAKOS)

κόπτω — streichen 3, 4. 3; abstreichen 3, 4. 5

κουκκί, τό — eine Münzeinheit ("Karat") 40/1 – vgl. κουκί im byzantinischen Rechenbuch aus dem 14. Jh. (ed. VOGEL 1968) und VIII. 1. 1;
eine Gewichtseinheit ("Karat") 166/27 – vgl. u. a. κοκκίον bei Rhabdas und VIII. 2. 1

κρούει — schlagen (der Stunden) 9

κωλῶ — Nbf. von κωλύω (KRIARAS): hindern, hemmen 6

Κωνσταντινούπολις, ἡ — Byzanz, Konstantinopel 102/11

λαγαρίζω — scheiden, läutern 8

λαμβάνω — nehmen (insbes. Bruchteile von einer Zahl, d. h. Bruchteile mit einer Zahl multiplizieren) 4. 5

Λατινικός — lateinisch, italienisch 109/29

Λατῖνος, ὁ — Lateiner, Italiener, westl. Abendländer 3/17, 6/22, 172/4

λεγεών, ὁ oder ἡ — 10^9, Milliarde 2. 3
~ lat. *legio* – vgl. TROPFKE (1980, S. 14); auch bei DEMETRAKOS als "große Zahl" belegt

λείπεται / λείπονται — übrig bleiben, zurückbleiben 3; fehlen 4. 3

λίτρα, ἡ — Pfund (Gewichtsmaß) 53/16
~ lat. *libra,* ital. *libbra* – vgl. SCHILBACH (1970, S. 277 f., S. 285), SCHILBACH (1982, S. 180 f.) und VIII. 2. 1

λογαριασμός, ὁ — Rechnung, Berechnung 1

λογισμός, ὁ — Berechnung, Überlegung 1

λόγος, ὁ — Verstand 1; Zahlenverhältnis, Proportion 4. 5, 5. 1

~ δίμοιρος — 2. 7

μάλαγμα(ν), τό — Gold (ungemünzt) 8

καθαρὸν ~ — 8

καθαρότατον καὶ τέλειον ~ — 8

τέλειον ~ — 8

φίνον καὶ τέλειον ~ — 8

μάλιν, τό — Nbf. von μαλλίν (KRIARAS): Wolle 7

μαργαριτάριν, τό — Perle(n) 7

μαρτυρία, ἡ — Probe, auch: Beweis 1
~ διὰ τοῦ ζ΄ — 4. 4
~ διὰ τοῦ θ΄ — 4. 4
~ ἑνώσεως — 4. 4
μέθοδος, ἡ — Methode, Verfahren 1
ἡ τῆς ἀριθμητικῆς μέθοδός τε καὶ μεταχείρισις — 5. 3
κοινὴ καὶ πολιτευομένη ~ — 5. 3
μεικτός — siehe ἀριθμός
μέλαν, τό — Tinte 1
μεμονωμένος — ungerade 3 (pseudogelehrte Form) — siehe μονός und ἀριθμός
μερίζω — aufteilen, teilen, (mit Rest) dividieren 4. 3
μεριζόμενα ... μετὰ ... — 4. 3
μερίς, ἡ — Teil 4. 3; Anteil 4. 5, 7; ~ Quotient 4. 3
οἰκεία ~ — 7
μερισμός, ὁ — Quotient, Division 4. 3
ὁ τούτων ~ — 4. 3
μεριστής, ὁ — Divisor, Teiler 4. 3; Nenner 4. 5
siehe auch μέρος, σχίζω
μέρος, τό — (Summand 4. 1;) Teil 4. 3; Bruchteil 4. 5; Anteil 7; ~ Quotient 4. 3
μισὸν ~ (ἑνὸς ἀκεραίου) — 2. 7
τρίτον ~ (τοῦ ὅλου σώματος) — 2. 7
ἐλλεῖπον ~ — 4. 3
ἐναπομεῖναν ~ — 4. 3
διαμεριζόμενον ~ — 4. 3
πολλοστὸν ~ — 4. 5
σχίζω τὸ τζάκισμα εἰς (ἐλάχιστα) μέρη — 4. 5
σχίζω καὶ διαμερίζομαι τὸ τζάκισμα καὶ τὸν μεριστὴν εἰς τὸ ἐλάχιστον ~ — 4. 5
τὰ τρία μέρη — 5. 1
οἰκεῖον ~ — 7
μετάδοσις, ἡ — Beitrag, Beisteuer (im Sinne von Anlage, Beteiligung, Investition) 7
μέταξα, ἡ — Seide 7
μετάξιν, τό — Seide 7
μεταχειρίζομαι — behandeln 1
μεταχείρισις, ἡ — Behandlung, Methode 1
~ τρίπλευρος — 4. 2
ἡ ~ ἡ διὰ τῶν τριῶν — 5. 1
ἡ τῆς ἀριθμητικῆς μέθοδός τε καὶ ~ — 5. 3

κοινὴ καὶ πολιτευομένη ~ 5. 3
κοινὴ ~ τῶν φλουριῶν 5. 3
κοινὴ ~ 5. 3
~ τῶν φλουριῶν 5. 3
~ τῆς τολέτας 5. 3
μετέχω Anteil haben 7
μηνιαῖος monatlich, Monats- 9
— siehe auch κέρδος
μηνικός monatlich, Monats- 9 (kein Beleg bei KRIARAS)
— siehe auch κέρδος
μίλιον, τό römische Meile (Längenmaß) 84/39; 6 — vgl. SCHILBACH (1970, S. 279), SCHILBACH (1982, S. 181) und VIII. 3
ποιέω μίλια 6
μιλιούνι(ο)ν, τό 10^6, Million 2. 3
~ ital. *milione* ("Großtausend") — vgl. TROPFKE (1980, S. 14 ff.); auch bei DEMETRAKOS als "große Zahl" belegt
μισόν, τό Hälfte 4. 5 — vgl. auch HUNGER/VOGEL (1963, S. 85)
μισός halb 2. 7, 4. 5
μονάς, ἡ Einer 2. 3; 1 Pfund (Gewichtseinheit) 108/15 — vgl. auch VIII. 2. 1
μονομερής gleichsinnig 5. 2
μονός ungerade 3
— siehe auch μεμονωμένος und ἀριθμός
μυριάδα, ἡ Zehntausender 2. 3 (KRIARAS)

νοίκιν, τό Nbf. von ἐνοίκιον (KRIARAS): Miete 7
νυχθήμερον, τό Tag und Nacht, Zeitraum von 24 Stunden 9 — vgl. VIII. 4

ὀβελίζω streichen 3, 4. 3
eig. mit einem Spieß versehen und damit für unecht erklären (PAPE)
ὁδοιπόρος, ὁ Wanderer 6
ὁδοιπόρος 2 Wander-, Reise- 6
~ ἡμέρα 6
οἰκειόομαι mir zu eigen machen, mir zukommen, gewinnen, verdienen 7
οἰκειοῦται einen Anteil haben 4. 3; Gewinn einbringen 7
οἶκος, ὁ "Haus"-Methode (bei der schriftlichen Multiplikation) 4. 2
ὁμάδα, ἡ Betrag, Geldbetrag 1, 3; Summe 4. 1 —

vgl. auch HUNGER/VOGEL (1963, S. 85); siehe auch ὁμάς

ἡ καθόλου ~ — 4. 1

ἐνόω τὴν καθόλου ὁμάδαν — 4. 1

ὁμαλής — gleichmäßig 4. 3

ὁμαλῶς καὶ ὁμοίως — mit gleicher Geschwindigkeit 6

ὁμάς, ἡ — Betrag, Geldbetrag 1, 3; Summe 4. 1; siehe auch ὁμάδα

ἑνωθεῖσα ~ — 4. 1

μία ~ γενομένη — 4. 1

ὀπισθαποδέω — hinten festmachen 7

ὀπισθορμήτως — rückwärts 6; rückwärtsgewandt 7

οὐγγία, ἡ — Unze (Gewichtseinheit) 53/16 ~ ital. *onca* – vgl. SCHILBACH (1970, S. 281), SCHILBACH (1982, S, 185) und VIII. 2. 1

οὐδέν (τό) — Null 2. 2

ὀφειλή, ἡ — Geldschuld 7

ὀφειλμός, ὁ — Subtraktion 4. 3 – vgl. HUNGER/VOGEL (1963, S. 80, Nr. 99 a/b); sicher nicht ὑφειλμός, wie KRIARAS (1988, S. 169 f.) bei HUNGER/VOGEL glaubt korrigieren zu müssen

παγεόω — Nbf. von παγιόω: (be)festigen 1

παραφθορά, ἡ — Verlust 7

παρογενέστερος — versehentlich für προγενέστερος 95/14 – vgl. auch I. 2. 1. 4

πεντάδα, ἡ — Fünfer 2. 3

πενταπλασιάζω — verfünffachen 4. 2

περιεργάζομαι — bestrebt sein 1

περιέρχεται — sich verteilen (auf Personen) 4. 3, 7

περισσεύει / περιττεύει — (als Rest) übrig bleiben 3, 4. 3

τὸ περισσεῦον / τὸ περιττεῦον — 3, 4. 3

τὰ περισσεύοντα — 4. 3

περισσός / περιττός — überschüssig, übertreffend, übrig 3

τὸ περισσόν — 4. 3

τὸ περισσότερον — 3

περισυναγμός, ὁ — Verbindung, Zusammenschluss 3 (kein Beleg bei KRIARAS)

πλεονασμός, ὁ — Überschuss, Überfülle 3, 5. 2

ποιεῖ — (neben üblicher Bedeutung:) herauskommen, ergeben ("es macht") 1; ausmachen (Preis) 7

ποιέω — neben der üblichen Bedeutung auch:

berechnen, umrechnen, umwandeln 1, 4. 5, 7

~ μισά 4. 5
~ τρίτα 4. 5
~ διὰ τῶν τριῶν 5. 1
~ θέσιν 5. 2
~ διάστασιν 6
~ μίλια 6
~ ὁδοιπορίαν 6
~ ὁδόν 6
~ πορείαν 6
~ πραγματείαν 7
~ τὰ ... φλουριὰ ... ὑπέρπυρα 7
~ κουκκιά 7

πολιτευόμενος bürgerlich 7

siehe auch μέθοδος, μεταχείρισις

πολλαπλασιάζει als Produkt ergeben 4. 2

πολλαπλασιάζω multiplizieren 4. 2
~ τὰ ... εἰς ἑαυτά 4. 2
πολλαπλασιαζόμενον μέρος 4. 2
τὰ πολλαπλασιαζόμενα 4. 2
... μετὰ ... πολλαπλασιαζόμενα 4. 2
τὰ πολλαπλασιασθέντα 4. 2

siehe auch ἀριθμός, ζήτησις

πολλαπλασιασμός, ὁ Produkt, Multiplikation 4. 2
ἐξελθὼν τέλειος ~ 4. 2
τέλειος ~ 4. 2

πολλαπλασιαστής, ὁ Faktor 4. 2

πολυγραφία, ἡ Vielschreiberei, viel Schreibarbeit 1

ποσότης, ἡ Größe 1, 4. 5; Summe 4. 1; (Dividend 4. 3)

ἡ τούτων ~ 4. 1
ἡ καθόλου ~ 4. 1
ἡ διαμεριζομένη ~ 4. 3
τὸ καθόλου σῶμα τῆς ζητουμένης ποσότητος, ἧς βούλει διαμερίσαι 4. 3
ἀναλογοῦσα ~ 4. 5

πραγματεία, ἡ Geschäft, Handel, Ware 7
ποιέω πραγματείαν 7

πραγματεύομαι ein Geschäft machen, ein Handelsgeschäft betreiben 7

πραγματευτής, ὁ Kaufmann 7
σύντροφοι πραγματευταί 7

πρακτικός auf den Handel, auf das praktische Leben bezogen 7

πρᾶξις, ἡ — Praxis, Handhabung 7
  πολιτευόμεναι πράξεις — 7
πράττει — im Handel sein 7
πρόβατον, τό, pl. πρόβατα — Schaf oder Ziege, pl. Kleinvieh 7
πρόσθεσις, ἡ — Addition 4.1; Auflage, Legierung 8 — siehe auch ἐπιβολή
προσθέτω — anfügen, hinzufügen 3 — vgl. I.2.2.5
προσθήκη, ἡ — Auflage, Legierung 8 — siehe auch ἐπιβολή
προσοικειόομαι — mir zu eigen machen, mir zukommen, gewinnen, verdienen 7
προστίθημι — anfügen, hinzufügen 3; addieren 4.1; hinzufügen, zusetzen 8
προσφέρω — (Kapital) einbringen, einlegen 7

ῥέτουλον, τό — Gewichtsmaß 93/TA 4, 101/21 — vgl. SCHREINER (1991, S. 449 ff.) und VIII.2.1, Nbf. von ῥότουλον — vgl. SCHILBACH (1982, S. 186); ~ ital. *rotolo*

σημασία, ἡ — Bezifferung 3
σημεῖον, τό — (Zahl-)Zeichen, Ziffer 3
  τελευταῖον ~ — 3
στατέριν, τό — Waage, insbes. 15-Unzen-Waage 7: ἑκάστη ... λίτρα τοῦ στατερίου ζυγὸς ἔστω οὐγγιῶν ιε΄ 110/27 f. — siehe auch ζυγός
σταυροειδῶς — über Kreuz, kreuzweise 1, 4.2, 4.5
στρέφοσι — echte (kommutierbare) Teiler haben 4.2
συγκρίνω — verbinden, vergleichen 4.5
σύγκρισις, ἡ — Verbindung, Vergleich 4.5
συζυγία, ἡ — Verbindung, Zusammenschluss 3
συμφωνία, ἡ — Vereinbarung 7
συναναστροφή, ἡ — Verkehr 7
συνάπτω — verbinden, vereinen 3; verknüpfen 7
σύναψις, ἡ — Verknüpfung 7
συνέλευσις, ἡ — Zusammenkunft, Zusammentreffen 6
σύντροφος, ὁ — Gesellschafter 7
  σύντροφοι πραγματευταί — 7
σχεδογράφω — auf die Tafel schreiben 1
σχῆμα, τό — Figur, Schema, Diagramm 1, 4.2
  ~ δίπλευρον — 4.2
σχίζω — (teilen ~ Zähler und Nenner), kürzen 4.5; ~ altital. *schisare* (Paolo dell' Abbaco)
  ~ τὸ τζάκισμα εἰς μέρη — 4.5

δέκα – ~ τὸν μεριστὴν
εἰς μέρη δέκα
σχιζόμενα ... τὰ $\frac{\beta\,\mu\,\mu}{\alpha\,\alpha\,\mu\,\mu}$ εἰς ρ΄ 4. 5
siehe auch μέρος

σῶμα, τό Ganzes, Ganzheit 3, 8; ~ Quotient 4. 3; Einheit 4. 5, 8; Ladung 7
ἀκέραιον ~ 3
~ ἀνάλογον 4. 5
ὅλον ~ 3, 4. 3
ὅλον ~ τῆς νηώς 7
τὸ διαμεριζόμενον (μεῖζον) ~ 4. 3
τὸ καθόλου ~ τῆς ζητουμένης ποσότητος, ἧς βούλει διαμερίσαι 4. 3
τὸ καθόλου ~ τῆς νηώς 7
διαμερίζον ~ 4. 3, 4. 5
ἓν ~ 4. 5
ἓν ~ (μέσον τοῦ ...) 8
ἑνωθὲν ~ τῶν διαφόρων ἰδεῶν 8

τάξις, ἡ (insbes. stellengerechte) Anordnung 3; Feingehalt, Feinheitsgrad 8
τίθημι ἐν τάξει 3, 7
αἱ διάφοροι ἰδέαι τῶν τεσσάρων τάξεων 177/40 f. – vgl. 8

ταυλέτα, ἡ Tolletrechnung 5. 3 (sonst nicht belegt); ~ ital. *tavoletta* – siehe auch τολέτα

τέλειος vollkommen, vollendet, endgültig 3, 4. 2, 4. 3; fein, rein 8
siehe auch ἀριθμός, πολλαπλασιασμός, διαμερισμός, ἀσήμιν, μάλαγμα(ν)

τετραγωνικός viereckförmig 4. 2
τετραπλασιάζω vervierfachen 4. 2
τζάκισμα, τό Bruch 2. 7, 4. 5; Zähler 4. 5
siehe auch μέρος, σχίζω

τζόχα, ἡ Tuch, Stoff 7; ~ türk. *çuha* bei HUNGER/VOGEL (1963, S. 86) belegt

τίθημι setzen (schreiben) 3, 4. 4, 7; ansetzen 5. 2
~ εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον 3
~ ἐν τάξει 3, 7
~ ... ἰδίως 4. 4
θὲς ταῦτα ἐντὸς κύκλου τινός 4. 4
~ θέσιν τινά 5. 2
siehe auch θέτω

τόκος, ὁ Zins 7

τολέτα, ἡ — Tolletrechnung 5. 3 (sonst nicht belegt); ~ ital. *tavoletta* — siehe auch ταυλέτα

μεταχείρισις τῆς τολέτας — 5. 3

τόπος, ὁ — Stelle, Position 3

οἰκεῖος ~ — 3

τόπον ἐπέχει — 3

εἰς τόπον ἵσταται — 3

siehe auch τίθημι

τουρνέσι, τό — Münzeinheit 40/21 f. — nach SCHREINER (1991, S. 354) der *tornesello* venezianischer Prägung; vgl. auch SCHILBACH (1982, S. 188), BERTELÈ (1978, S. 87), HENDY (1985, S. 541) und VIII. 1. 1

τριπλασιάζω — verdreifachen 4. 2

τρίπλευρος — dreiseitig 4. 2

μεταχείρισις ~ — 4. 2

siehe auch δίπλευρος

ὑπερδίδω — übergeben 7 — vgl. auch I. 2. 2. 5

ὑπερέχον, τό — Überschuss 3

ὑπερέχων — überschüssig, übertreffend 3

ὑπερέχον μέρος — 4. 3

ὑπέρθεσις, ἡ — Ansatz, Versuchszahl 5. 2 — versehentlich (?) statt ὑπόθεσις

ὑπέρπυρον, τό — Münzeinheit: Silberhyperpyron 32/34.35 — vgl. SCHILBACH (1970, S. 283), SCHILBACH (1982, S. 189) und VIII. 1. 1. Im Rechenbuch tritt stets nur das u. a. von Rhabdas bekannte Sigel ‖ mit jeweiliger Flexionsendung auf, z. B. ‖ 39/42.

~ μέγα oder ~ χρυσόν — Goldhyperpyron 101/25, 102/32

~ μικρόν — Silberhyperpyron 105/14 — zur Unterscheidung vom Goldhyperpyron, sonst ohne den Zusatz μικρόν

ὑπερτίθημι — annehmen, ansetzen 5. 2 — versehentlich (?) statt ὑποτίθημι

ὑπόθεσις, ἡ — Thema, Grundlage 1

ὑποτίθημι — zugrunde legen 1; annehmen, ansetzen 5. 2

~ θέσιν τινά — 5. 2

Imp. Aor. Med.: ὑπέθου — vgl. I. 2. 2. 5

φθείρεται — schwinden, kleiner werden 3, 5. 1, 8

φίνος — fein, rein 8 ~ ital. *fino* (KAHANE 1972, A I, Heft 5,

Spalte 567, Heft 6, Spalte 584)
siehe auch ἀσήμιν, μάλαγμα(ν)

φλουρί, τό — Florin, Gulden (Münzeinheit) 51/32; es handelt sich um den venezianischen Golddukaten — vgl. z. B. BERTELÈ (1978, S. 112), GRIERSON (1982, S. 279), WHITTING (1973, S. 233) und VIII. 1. 1. Im Rechenbuch tritt stets nur das Sigel ℔ mit Flexionsendung auf.

φορὰ τῶν πνευμάτων, ἡ — das Wehen der Winde 6 (eig. das Dahingetragenwerden durch die Winde)

χάλκωμαν, τό — Kupfer 8

χάραγμαν, τό — Münzprägung, Währung, Geldsorte 7

χάραγμαν acc. — 7

χιλιάδα, ἡ — Tausender 2. 3 (DEMETRAKOS); 1000 Pfund 109/24 — vgl. VIII. 2. 1
siehe auch χιλιάς

χιλιάς, ἡ — Tausender 2. 3; 1000 Pfund 108/21 Diagramm — vgl. VIII. 2. 1
siehe auch χιλιάδα

χρέος, τό; pl. χρέα — Darlehen 7

~ δίδωμι — 7

χρῄζει — wert sein, kosten 7; c. acc.: der Preis sein von 7

χρονικός — jährlich, Jahres- 9
— siehe auch κέρδος

χρόνος, ὁ — Zeit; Jahr 9 — vgl. VIII. 4

χρυσίον, τό — verarbeitetes Gold, Schmuckgold 8

χρυσός — golden, aus Gold 8

ἔργον χρυσόν — 8

χρυσοχοϊκῶς — nach Art des Goldschmieds 8

χωνευτήριον, τό — Schmelzofen, Schmelztiegel 8

βάλλω εἰς ~ — 8

χωρεῖ — aufgehen (bei der Division mit Rest) 4. 3

~ ἀφαιρεθῆναι — 4. 3

ψηφίδα, ἡ — Pünktchen (eig. Steinchen — zur Kennzeichnung der Tausender-, Millionen- und Milliardenstellen) 3 (kein Beleg bei KRIARAS)

ψηφίς, ἡ — Pünktchen 3 — siehe ψηφίδα

ψῆφος, ἡ (ὁ) — Zahl, Zahlzeichen, Ziffer 3 — vgl. auch I. 2. 2. 1

οἱ ἀνὰ δύο ψῆφοι — 3

ψῆφοι ἀριθμῶν	3
τελευταία ~	3
ψυχικόν, τό	Geschenk 7
ὡς ἐνταὐτῷ	hierbei, dabei 78/39, 85/9; im Folgenden 149/37; bei KRIARAS ist temporales ἐνταυτῷ (unmittelbar, jetzt) belegt.
οὐχ ~	nicht wie bisher 158/34

VIII METROLOGIE

Im analysierten 1. Teil des Rechenbuchs fehlen Flächeninhalte und Volumina bzw. Hohlmaße.

1 Geldwerte

1.1 Münzsorten

φλουρί

Florin, Gulden; es handelt sich um den venezianischen Golddukaten – vgl. z. B. BERTELÈ (1978, S. 86 f.), GRIERSON (1982, S. 279) und WHITTING (1973, S. 233). Im Rechenbuch tritt stets nur das Sigel φ mit Flexionsendung auf.
Der Florin kommt in den Kapiteln 41 (erstmals 51/32), 43–45, 51, 52, 59, 60, 63, 64, 72–75, 77, 80, 81, 83, 84, 86, 87, 89, 90, 95–100, 108, 109 vor.

ὑπέρπυρον μέγα
oder
ὑπέρπυρον χρυσόν

"großes" Hyperpyron, Goldhyperpyron; mit Einführung der Silberwährung – vgl. ὑπέρπυρον (μικρόν) – zu Ende des 14. Jahrhunderts spielte das Goldhyperpyron nur noch die Rolle einer nominalen Rechnungseinheit. Im Text tritt nur das Sigel ‖ mit Flexionsendung und dem Zusatz der entsprechenden Formen von μέγα bzw. χρυσόν auf, im weiteren Verlauf der betreffenden Kapitel und in den zugehörigen Rechendiagrammen werden diese Zusätze dann vernachlässigt.
Das Goldhyperpyron kommt nur in den Kapiteln 78–80 vor, beide Bezeichnungen sind erstmals an der Stelle 101/25 zu finden.

ὑπέρπυρον
oder
ὑπέρπυρον μικρόν

Silberhyperpyron ("kleines" Hyperpyron) – vgl. SCHILBACH (1970, S. 283), SCHILBACH (1982, S. 189); seit dem Ende des 14. Jahrhunderts war das Hyperpyron nur noch als Silbermünze im Umlauf.
Im Rechenbuch tritt stets nur das Sigel ‖ mit Flexionsendung (bzw. in Kombination mit den entsprechenden Formen von μικρόν) auf. Dieses Sigel steht eigentlich für νόμισμα, aber mit der Flexionsendung -ον (‖ᵛ) kann nur ὑπέρπυρον gemeint sein. ‖ᵛ als Ab-

kürzung für ὑπέρπυρον kommt u. a. auch im 2. Brief von Rhabdas (Mitte des 14. Jahrhunderts) wiederholt vor, worauf bereits TANNERY (1886, Band 4, S. 146, S. 191) in seiner Edition hinweist. Auch SCHREINER (1991, S. 349) diskutiert die Frage nach der Auflösung von ῡ, und zwar in spätbyzantinischen Kontobüchern.
Das Hyperpyron kommt in den Kapiteln 29 (erstmals 32/33), 30, 34–36, 41, 43–46, 51, 52, 62, 72–77, 80–85, 88, 91–109, 116 vor, die Bezeichnung "kleines Hyperpyron" findet sich hingegen nur in Kapitel 80 (erstmals 105/10) – zur Unterscheidung vom "großen" Hyperpyron, mit dem in den beiden Kapiteln zuvor gerechnet wurde.
Die Bezeichnung ὑπέρπυρον μικρόν für das Silberhyperpyron tritt auch im Cod. Vat. gr. 924 auf, einem nordpeloponnesischen Kontobuch aus der Mitte des 14. Jahrhunderts (SCHREINER 1991, S. 175 f., S. 350).

κουκκί

Kukki oder Karat; es handelt sich um eine Silbermünze – vgl. κουκί im byzantinischen Rechenbuch aus dem frühen 14. Jahrhundert (VOGEL 1968, Nr. 53, 54). Von der Münze κουκκί ist das gleichnamige Gewicht zu unterscheiden (siehe Abschnitt 2.1): Beide Einheiten treten in der Überschrift von Kapitel 109 zusammen auf.
Nur an den Stellen 40/1 und 98/34 (beim 2. Auftreten in dieser Zeile) wird κουκκί ausgeschrieben, ansonsten findet sich stets das Sigel : mit Flexionsendung. Als Geldwert kommt Kukki in den Kapiteln 36 (erstmals 39/42), 41, 43–45, 51, 52, 62, 72–84, 91, 93, 95–98, 100, 103–106, 108, 109 vor.

τουρνέσι

Turnesion; es handelt sich sehr wahrscheinlich um eine Kupfermünze, und zwar nach SCHREINER (1991, S. 354) um den *tornesello* venezianischer Prägung, der seit der Mitte des 14. Jh. im östlichen Mittelmeerraum Verbreitung fand. Im Übrigen gab es zur Zeit der Abfassung des Rechenbuchs mehrere Sorten des *tornesi*. Vgl. HENDY (1985, S. 541), BERTELÈ (1978, S. 87) und SCHILBACH (1982, S. 188). In der byzantinischen Aufgabensammlung aus dem 15. Jahrhundert tritt eine entsprechende Münzeinheit "Turesion" (τουρέσι) auf (HUNGER/VOGEL 1963, Nr. 36, Nr. 52 u. ö., S. 111).
Nur an den Stellen 40/21 f., 24 wird das Wort aus-

geschrieben, ansonsten finden sich Kürzungen in verschiedenen Varianten, z. B. τοῦρ oder τ̄ρ̄ – vgl. I. 2. 5. 2.
Das Turnesion kommt in den Kapiteln 36 (erstmals 40/21 f.), 52, 78–82, 91, 95–97, 103–106, 108, 109 vor.

1. 2 Münzverhältnisse

In manchen Kapiteln treten verschiedene Relationen zwischen denselben Münzsorten nebeneinander auf.

Der Wert eines Florins schwankt zwischen 6 und 8 Silberhyperpyra.
Im Einzelnen finden wir
1 Florin = 6 Silberhyperpyra (Kap. 43–45, 51, 52),
1 Florin = 7 Silberhyperpyra (Kap. 72, 108, 109),
1 Florin = 7 Silberhyperpyra 6 Kukkia = 7,3 Silberhyperpyra (Kap. 72–74),
1 Florin = 7 Silberhyperpyra 10 Kukkia = 7,5 Silberhyperpyra (Kap. 75),
1 Florin = 7 Silberhyperpyra 11 Kukkia = 7,55 Silberhyperpyra (Kap. 72),
1 Florin = 8 Silberhyperpyra (Kap. 41, 80, 81, 83, 84, 95–100).

Ein Goldhyperpyron hat stets den Wert von 24 Kukkia (Kap. 78, 79).

Ein Silberhyperpyron hat stets den Wert von 20 Kukkia (Kap. 36, 41, 43–45, 51, 52, 62, 72–77, 80–84, 91, 93, 95–98, 100, 103–106, 108, 109).

Der Wert eines Kukki entspricht $3\frac{1}{2}$, 4 oder 8 Turnesia.
Im Einzelnen finden wir
1 Kukki = $3\frac{1}{2}$ Turnesia (Kap. 95),
1 Kukki = 4 Turnesia (Kap. 36, 52, 80–82, 91, 95–97, 103–106, 108, 109),
1 Kukki = 8 Turnesia (Kap. 78, 79).

Diese Angaben lassen offenbar zwei verschiedene Währungssysteme erkennen:

1 Goldhyperpyron = 24 Kukkia = 192 Turnesia
1 Kukki = 8 Turnesia

sowie, wenn man die am häufigsten anzutreffenden Relationen 1 Florin = 8 Silberhyperpyra, 1 Kukki = 4 Turnesia zugrunde legt,

1 Florin = 8 Silberhyperpyra = 160 Kukkia = 640 Turnesia
1 Silberhyperpyron = 20 Kukkia = 80 Turnesia
1 Kukki = 4 Turnesia

Das erste Währungssystem ist u. a. bei HENDY (1985, S. 541) für die Zeit nach 1350 belegt, wobei das Goldhyperpyron spätestens seit dem Ende des 14. Jahrhunderts nur noch als Verrechnungseinheit eine Rolle spielte. GRIERSON (1982, S. 294) bemerkt dazu: *Byzantine gold coinage had effectively ended by 1350.* An die Stelle des Goldhyperpyrons trat danach eine Silber-

münze, die nach HENDY (1985, ebd.) und GRIERSON (1982, S. 341) nur noch den halben Wert hatte. Dieses Verhältnis verschlechterte sich bis 1427 auf ein Drittel – vgl. HUNGER/VOGEL (1963, S. 111). Unter der Voraussetzung, dass die Turnesia in beiden Währungssystemen unseres Rechenbuchs denselben Wert haben, ergibt sich in guter Übereinstimmung zu obigen Befunden für das Goldhyperpyron ein Wert von 2,4 Silberhyperpyra.
Die Einführung der Silberwährung und die weitere Geldentwertung – nach BENDALL/DONALD (1979, S. 13) u. a. bedingt durch einen allmählich verringerten Feingehalt des Silberhyperpyrons – ließ die Wertschätzung des venezianischen Golddukatens (Florin) steigen, der im byzantinischen Wirtschaftsleben des 15. Jahrhunderts eine herausragende Rolle spielte, wie auch unser Rechenbuch belegt. Der venezianische Kaufmann Giacomo Badoer hielt sich von 1436 bis 1440 in Konstantinopel auf und hat uns sein "Il libro dei conti" (ed. DORINI/BERTELÈ 1956) hinterlassen. Nach seinen Angaben – vgl. auch GRIERSON (1982, S. 279) – hatte der venezianische Golddukaten im Jahre 1436 (exakt im Abfassungsjahr des Rechenbuchs!) einen Verrechnungskurs von 3 Goldhyperpyra 6 Karat; dies entspricht nach dem ersten Währungssystem des Rechenbuchs einem Wert von $\frac{4}{13}$ Florin für 1 (nominales) Goldhyperpyron. BERTELÈ (1978, S. 112) kommt nach anderen Befunden für das 2. Viertel des 15. Jahrhunderts zu der Relation 1 Goldhyperpyron = $\frac{1}{3}$ Florin. Wieder unter der Voraussetzung, dass die Turnesia in beiden Währungssystemen unseres Rechenbuchs denselben Wert haben, ergibt sich hier in augenfälliger Nähe zu den beiden letzten Befunden für das Goldhyperpyron ein Kurs von $\frac{3}{10}$ Florin.

2 Gewichte

2.1 Gewichtsmaße

κανταρι(ον)
oder
κηντηνάρι

Zentner
Das κηντηνάρι wird an der Stelle 108/17 als Synonym zu κανταρι eingeführt, während nach SCHILBACH (1970, S. 276 f.) und SCHILBACH (1982, S. 179) die beiden Zentnergewichte κανταρι und κεντηνάρι nicht völlig übereinstimmten. (κηντηνάρι ist als Nebenform von κεντηνάρι bei KRIARAS belegt.)
Es gab jeweils verschieden schwere venezianische, byzantinische und türkische καντάρια – vgl. SCHREINER (1991, S. 345), doch lässt sich im Rechenbuch nur in einigen Fällen vermuten, welches κανταρι jeweils gemeint ist (siehe 2. 2).
Nur an der Stelle 102/TA 6 wird καντάριον ausgeschrieben, ansonsten finden sich Kürzungen für die volkssprachliche Form κανταρι in verschiedenen Varianten, z. B. κανᵗᵖ oder ähnlich.
Das κανταρι kommt in den Kapiteln 72 (erstmals

93/TA 4), 78–84, 86, 87 vor. Die einzige Ware, mit der es in Verbindung steht, ist μάλιν (Wolle) – vgl. die Kapitel 86 und 87.
Das Synonym κηντηνάρι wird stets abgekürzt, z. B. κην$^{\tau\nu}$$\ddot{\rho}$.
Das κηντηνάρι tritt in den Kapiteln 83 (erstmals 108/15), 86 auf. Außer μάλιν in Kapitel 86 finden sich keine Warenangaben.

δεκάρι

10 Pfund; es handelt sich offenbar um eine sonst selten belegte Gewichtseinheit: Im Pariser Coisl. gr. 382 aus den Jahren 1445–1460 (Herkunft unbestimmt) tritt δεκάρι als Gewichtseinheit für Kaviar auf, und im Schwarzmeer-Kontobuch Cod. Vat. gr. 1325, wahrscheinlich um 1360 im pontischen Herakleia verfasst, wird das Gewicht von Kastanien in δεκάρια angegeben – vgl. SCHREINER (1991, S. 450, S. 452, S. 41, S. 46, S. 346).
δεκάρι wird stets abgekürzt, und zwar entweder durch δε$^{\kappa\ddot{\rho}}$ oder durch $\overset{\kappa\ddot{\rho}}{\iota}$ (ι für δέκα) – vgl. I. 2. 5. 2.
Das δεκάρι kommt in den Kapiteln 83 (erstmals 108/15), 84, 88 vor. Außer μέταξα / μετάξιν (Seide) in Kapitel 88 finden sich keine Warenangaben.

ῥέτουλον

vermutlich das schwere türkische Pfund; das ῥέτουλον ist im schon erwähnten Coisl. gr. 382 belegt, der bereits unter türkischer Herrschaft entstanden sein dürfte; es wiegt dort 1 Pfund 9 Unzen – vgl. SCHREINER (1991, S. 449 ff.). Im ebenfalls oben genannten Schwarzmeer-Kontobuch tritt häufig die ῥέτλα auf, die als hundertster Teil eines *cantaro* einer *libra grossa* (452 g) entspricht – vgl. SCHREINER (1991, S. 345). ῥέτουλον und ῥέτλα sind zweifellos nur selten belegte sprachliche Varianten des wohlbekannten ῥότουλον, eines schweren Pfundgewichts türkischer oder italienischer Herkunft – vgl. SCHILBACH (1982, S. 186). Auch im *Sefer ha-mispar* (Buch der Zahl) des Elia Misrachi, der Oberrabbiner von 1495 bis 1526 in Konstantinopel war, kommt das türkische Gewicht "Rottel" vor – vgl. WERTHEIM (1896, S. 96 u. ö.).
In unserem Rechenbuch wird ῥέτουλον entweder ausgeschrieben (z. B. 93/TA 4, 101/21) oder in der Form ῥ$^{\tau\lambda}$ (z. B. 102/1 und in den Diagrammen) abgekürzt – vgl. I. 2. 5. 2.
Das ῥέτουλον kommt in den Kapiteln 72 (erstmals 93/TA 4), 78–82 vor; Warenangaben fehlen.

λίτρα

Pfund; vgl. SCHILBACH (1970, S. 277 f., S. 285) und SCHILBACH (1982, S. 180 f.).
Die λίτρα wird nur an der Stelle 53/16 ausgeschrieben, ansonsten mit dem bekannten Sigel ℔ wiedergegeben – vgl. I. 2. 5. 2.
Sie kommt in den Kapiteln 41 (erstmals 53/16), 77, 83–85, 88–90, 107–110, 112, 114–116 vor und dient als Gewichtsmaß für μέταξα / μετάξιν in den Kapiteln 77, 88–90, μαργαριτάριν (Perlen) in den Kapiteln 107–109, χάλκωμαν (Kupfer) in den Kapiteln 110, 112, ἀσήμιν (Silber) in den Kapiteln 110, 112, 114–116 und χρυσίον (Schmuckgold) im Kapitel 116.

μονάς

"Einheit"; gemeint ist die Einheit 1 Pfund: ἡ μονάς, τουτέστι λίτρα α´ (108/18). In dieser speziellen Bedeutung kommt μονάς nur in den Kapiteln 83 (erstmals 108/15), 84 vor – jeweils im Kontext zu λίτρα; Warenangaben fehlen.
Neben den überwiegend ausgeschriebenen Formen finden sich auch Abkürzungen, z. B. $\overset{\delta\alpha}{\alpha}$ (= μονάδα) 109/22 – vgl. I. 2. 5. 2.
μονάς ist nicht als eigenständige metrologische Bezeichnung anzusehen.

χιλιάς
oder
χιλιάδα

"Tausender"; gemeint ist das Gewicht 1000 Pfund. In dieser speziellen Bedeutung kommt χιλιάς in den Kapiteln 83 (erstmals 108/21 Diagramm), 84, χιλιάδα nur im Kapitel 84 (erstmals 109/24) vor – jeweils im Kontext zu λίτρα; Warenangaben fehlen.
Neben den ausgeschriebenen Formen finden sich Abkürzungen wie z. B. $,\overset{\alpha\varsigma}{\alpha}$ (= χιλιάς) 108/21, $,\overset{\delta o\varsigma}{\alpha}$ (= χιλιάδος) 109/40 – vgl. I. 2. 5. 2.
χιλιάς und χιλιάδα sind nicht als eigenständige metrologische Bezeichnungen anzusehen.

οὐγγία

Unze; vgl. SCHILBACH (1970, S. 281) und SCHILBACH (1982, S. 185).
Das Wort erscheint stets in der Abkürzung $o^{\Gamma\overset{\alpha}{\Gamma}}$ (oder mit anderen Flexionsendungen) – vgl. I. 2. 5. 2.
Die οὐγγία kommt in den Kapiteln 41 (erstmals 53/16), 85, 88, 107–110, 112, 113, 116 vor und dient als Gewichtsmaß für ἀσήμιν καματεμένον (fein verarbeitetes Silber) im Kapitel 88, μαργαριτάριν in den Kapiteln 107–109, χάλκωμαν im Kapitel 110, ἀσήμιν in den Kapiteln 110, 112, 113 und χρυσίον im Kapitel 116.
Die οὐγγία ist daneben auch ein Maß für den Feinge-

halt von ἀσήμιν – vgl. IV. 8. Es kommen Silber-Kupfer-Legierungen mit folgenden Feingehalten vor:
5 Unzen (Kap. 116), 6 Unzen (Kap. 116), $6\frac{1}{2}$ Unzen (Kap. 114), 7 Unzen (Kap. 114–116), $7\frac{1}{2}$ Unzen (Kap. 110, 112), 8 Unzen (Kap. 115, 116), $8\frac{2}{3}$ Unzen (Kap. 115), 9 Unzen (Kap. 110, 114–116), 10 Unzen (Kap. 110, 112, 114–116), $10\frac{1}{2}$ Unzen (Kap. 116), 11 Unzen (Kap. 110, 114, 116) und $11\frac{1}{2}$ Unzen (Kap. 112)
Feinsilber hat 12 Unzen (Kap. 110, 112).

ἑξάγιον

Exagion, Sechstelunze; vgl. SCHILBACH (1970, S. 276) und SCHILBACH (1982, S. 178).
Das ἑξάγιον wird stets mit $\overset{\Gamma}{\varsigma}$ oder $\overset{\Gamma}{\varsigma}$ ohne Flexionsendung abgekürzt – vgl. I. 2. 5. 2.
Dabei steht ϛ für die Zahl ἕξ. Die Lesart "στ" für ϛ führte CHALKU (2006) zu einer dubiosen Gewichtseinheit "Stagion". Es gibt aber keinen Grund dafür, in der Edition diesem gegenüber dem wohlbekannten byzantinischen Exagion den Vorzug zu geben.
Es kommt in den Kapiteln 107 (erstmals 165/21), 108, 109, 111, 113–116 vor und dient als Gewichtsmaß für μαργαριτάριν in den Kapiteln 107–109, ἀσήμιν in den Kapiteln 111, 115, μάλαγμα(ν) (Gold) in den Kapiteln 111, 113, 114, für ein ἔργον χρυσόν (Goldarbeit) im Kapitel 113 und für χρυσίον in den Kapiteln 115, 116.
Zur Angabe von Feingehalten tritt das ἑξάγιον nicht auf.

κουκκί
oder
καράτον

Karat
Das καράτον wird an der Stelle 166/27 f. als Synonym von κουκκί eingeführt; ähnliche Bezeichnungen für das Karatgewicht sind gut belegt, nämlich κουκί und κεράτιον im byzantinischen Rechenbuch aus dem frühen 14. Jahrhundert (VOGEL 1968, z. B. Nr. 1 bzw. Nr. 74 und S. 161) sowie κοκκίον und κεράτιον im 2. Brief von Rhabdas aus der Mitte des 14. Jahrhunderts (TANNERY 1886, Band 4, S. 154, S. 190).
Vom Karatgewicht κουκκί ist die gleichnamige Silbermünze zu unterscheiden (siehe Abschnitt 1. 1): Beide Einheiten treten in der Überschrift von Kapitel 109 zusammen auf.
Auch die Bezeichnung καράτον ist in anderen Texten belegt – vgl. SCHILBACH (1970, S. 276 f.) und SCHILBACH (1982, S. 179).
Für κουκκί steht immer das Sigel : mit entsprechender Flexionsendung.

κουκκί kommt in den Kapiteln 109 (erstmals 166/24), 110, 111, 113–115 vor und dient als Gewichtsmaß für μαργαριτάριν im Kapitel 109, μάλαγμα(ν) in den Kapiteln 110, 111, 113, 114 und χρυσίον im Kapitel 115.
Das überwiegend ausgeschriebene καράτον kommt in den Kapiteln 109 (erstmals 166/28), 111 vor; als Waren werden dabei μαργαριτάριν im Kapitel 109 und μάλαγμα(ν) im Kapitel 111 genannt.
Das Karat ist daneben auch ein Maß für den Feingehalt von μάλαγμα(ν) und χρυσίον – vgl. IV. 8. Es kommen Gold-Silber-Legierungen mit folgenden Feingehalten vor:
6 Karat (Kap. 113), 16 Karat (Kap. 114, 115), 18 Karat (Kap. 113, 115), 20 Karat (Kap. 115), 22 Karat (Kap. 111, 114, 115) und 23 Karat (Kap. 114, 115)
Feingold hat 24 Karat (Kap. 110, 111, 113, 114).

2. 2 Gewichtsverhältnisse

In manchen Kapiteln treten unterschiedliche Relationen zwischen gleichlautenden Gewichtsmaßen nebeneinander auf.

Im Rechenbuch finden sich folgende Relationen zwischen den Gewichtsmaßen:

1 χιλιάς = 10 καντάρια (Kap. 83, 84),
1 χιλιάδα = 10 καντάρια (Kap. 84),
1 καντάρι(ον) = 100 ῥέτουλα (Kap. 78–82),
1 καντάρι(ον) = 100 λίτραι (Kap. 83, 84),
1 κηντηνάρι = 100 λίτραι (Kap. 83),
1 καντάρι(ον) = 10 δεκάρια (Kap. 83, 84),
1 δεκάρι = 10 λίτραι (μονάδες) (Kap. 83, 84),
1 λίτρα = 12 οὐγγίαι (Kap. 85, 107–110),
1 λίτρα = 15 οὐγγίαι (Kap. 85),
1 οὐγγία = 6 ἑξάγια (Kap. 107–109, 115),
1 ἑξάγιον = 24 κουκκιά (καράτα) (Kap. 109, 111)

Die auffälligen Unterschiede bei der Unterteilung einer λίτρα in οὐγγίαι lassen sich mit den Untersuchungen von SCHILBACH (1970, S. 179 - 182, S. 281) wohl überzeugend erklären:
Es gab eine schwerere οὐγγία λογαρική von $26\frac{2}{3}$ g und eine leichtere οὐγγία σουάλια (~ lat. *usualis*) von $21\frac{1}{3}$ g. Das Gewichtsverhältnis dieser beiden Unzen war also genau 15 : 12.
Ein weiteres Problem ergibt sich daraus, dass nach den obigen Relationen einerseits 100 türkische ῥέτουλα, andererseits 100 λίτραι auf ein καντάρι(ον) gehen, denn nach SCHILBACH (1982, S. 179, S. 186) wog 1 καντάριον 160 byzantinische λίτραι, und 1 ῥότουλον entsprach 1 λίτρα 9 οὐγγίαι.
Nur wenn man voraussetzt, dass sich die λίτρα hierbei in 15 οὐγγίαι (σουάλιαι)

unterteilt, kommt man zur obigen Relation von 1 ῥέτουλον als dem hundertsten Teil von 1 καντάρι(ον), die auch SCHREINER für die ῥέτλα belegt hat – siehe den vorigen Abschnitt.
In den Kapiteln 83, 84 muss es sich dann aber um leichtere καντάρια bzw. κηντηνάρια (*centenaria*) handeln, wie sie in Italien in Gebrauch waren.
(In den Kapiteln 72, 86, 87 bleibt es aufgrund der fehlenden Unterteilung völlig offen, welches Zentnergewicht gemeint ist.)

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass in unserem Rechenbuch noch – wie bei Rhabdas, aber im Unterschied zur Aufgabensammlung (ed. HUNGER/VOGEL 1963) – das ältere byzantinische Gewichtssystem verwendet wird:

1 Pfund = 12 Unzen = 72 Exagia = 1728 Karat
1 Unze = 6 Exagia = 144 Karat
1 Exagion = 24 Karat

Hinzu kommen der (italienische?) Zentner, das schwerere türkische Zentner- und Pfundgewicht (καντάρι bzw. ῥέτουλον) und eine leichtere Unze.

3 Längen

μίλιον — Meile; vermutlich handelt es sich um die römische Meile, die ca. 1478,5 m betrug – vgl. TROPFKE (1980, S. 74).
Zu anderen Meilen vgl. SCHILBACH (1970, S. 279) und SCHILBACH (1982, S. 181).
μίλιον (in der abgekürzten Schreibweise werden das zweite ι und die jeweilige Flexionsendung häufig vernachlässigt) kommt in den Kapiteln 65 (erstmals 84/39), 66–70 vor.

κάνα — sonst nicht belegte Nebenform von κάννα, einem Längenmaß für Stoffe;
κάννα bedeutet altgriech. "Schilfrohr" und verweist somit auf ein ursprünglich natürliches Messinstrument. In spätbyzantinischer Zeit ist die Messung von Wollstoffen mit der florentinischen *canna* belegt, auf die 4 *braccia* (sic!) bzw. πήχεις gingen (*braccio* / πῆχυς = Elle). 1 florentinische *canna* maß 233,6 cm – vgl. SCHILBACH (1970, S. 43, S. 48, S. 276, S. 284) und SCHILBACH (1982, S. 179).
Die κάνα tritt nie ohne Warenangaben, aber nur als Maß für τζόχα (Tuch) in Kap. 86–88, 91 und für βηλάριν (feines Webzeug) in Kap. 91 auf, erstmals an der Stelle 112/1.
Dagegen wurden unverarbeitete Wolle und Seide nach

ihrem Gewicht gehandelt – vgl. die Gewichtsmaße für μάλιν und μέταξα / μετάξιν in Abschnitt 2.1.

4 Zeitspannen

χρόνος oder ἐνιαυτός

Jahr
In dieser Bedeutung kommt χρόνος in den Kapiteln 1 (erstmals 3/20), 12, 31, 59, 62, 93, 95–100 vor.
Der klassische Begriff ἐνιαυτός tritt nur in den Kapiteln 95 (erstmals 123/25), 98–100 auf.

ἰνδικτιών

Steuerjahr, Zinsjahr; der Zeitraum vom 1. September bis zum 31. August – vgl. BERTELÈ (1978, S. 127)
Die ἰνδικτιών kommt – in der Abkürzung ᾱ (acc. = ἰνδικτιῶνα) – nur an der Stelle 128/20 in Kapitel 100 vor.

μήν

Monat
μήν tritt in den Kapiteln 95 (erstmals 123/44), 96–100, 106 auf.

νυχθήμερον

Tag und Nacht, Zeitraum von 24 Stunden
νυχθήμερον findet sich in den Kapiteln 60 (erstmals 76/27), 67–69.

ἡμέρα

Tag (Zeitraum von 24 Stunden)
ἡμέρα kommt in den Kapiteln 12 (erstmals 10/18), 31, 65–70, 98–100, 106 vor.
Wie u. a. aus den Kapiteln 67–69 ersichtlich ist, werden ἡμέρα und νυχθήμερον als Synonyme verwendet.

ὥρα

Stunde
ὥρα (in der abgekürzten Schreibweise wird die jeweilige Flexionsendung häufig vernachlässigt) tritt in den Kapiteln 60 (erstmals 76/26), 65–69 auf.

Die (an sich selbstverständlichen) metrologischen Verhältnisse zwischen den Zeitspannen werden mehrfach, zum Teil häufig angegeben:

1 Jahr (χρόνος) = 12 Monate (Kap. 95–97, 99, 100)
1 Jahr (ἐνιαυτός) = 12 Monate (Kap. 98, 100)
1 Jahr (χρόνος) = 365 Tage (Kap. 12, 31)
1 Monat = 30 Tage bei Geldgeschäften (Kap. 98–100, 106) – hierzu schreibt der Autor: πάντας γὰρ τοὺς ιβ΄ μῆνας τοῦ ἐνιαυτοῦ ἐπὶ τῶν λογαριασμῶν τε

καὶ καταστίχων ἀνὰ λ΄ ἡμέρας ἀριθμῶσι αὐτούς (Kap. 100, 129/30 f.)

1 Tag-und-Nacht-Einheit (νυχθήμερον) = 24 Stunden (Kap. 60, 67–69)

1 Tag (ἡμέρα) = 24 Stunden (Kap. 67–69)

IX PREISE, ZINSEN, GEWINNE UND VERLUSTE, LEISTUNGEN

Da das Rechenbuch in erster Linie als systematisches Lehrbuch und nicht als Aufgabensammlung konzipiert ist, finden sich relativ wenige wirtschaftsgeschichtliche Daten.
Diese Angaben werden i. Allg. mit den tatsächlichen Verhältnissen übereinstimmen. Bei Aufgaben der Unterhaltungsmathematik und bei manchen Aufgaben der Zins- und der Gesellschaftsrechnung ist allerdings Vorsicht geboten; die fraglichen Angaben sind mit Sternchen gekennzeichnet.

1 Preise

1 Pferd (ἵππος) kostet 12 Florin (Kap. 63, 64), 14 Florin (Kap. 64).

1 Pferd (?) oder "Tier" (ἄλογον) kostet 45 Silberhyperpyra 10 Kukkia (Kap. 76). Legt man nach der am häufigsten anzutreffenden Relation 1 Florin = 8 Silberhyperpyra zugrunde, so kostet dieses Tier nur $5\frac{11}{16}$ Florin; mit 6 Silberhyperpyra für 1 Florin würde es $7\frac{7}{12}$ Florin kosten.

1 Stück Kleinvieh (Schaf oder Ziege, πρόβατον) kostet 1 Silberhyperpyron 15 Kukkia = $1\frac{3}{4}$ Silberhyperpyra (Kap. 76).

1 Zentner Wolle (μάλιν) kostet 16 Florin (Kap. 86), 18 Florin (Kap. 87). Es bleibt offen, welcher Zentner gemeint ist — vgl. VI. 2. 2.

1 Pfund Seide (μέταξα / μετάξιν) kostet 6 Silberhyperpyra 11 Kukkia (Kap. 77), 7 Silberhyperpyra (Kap. 88), $\frac{14}{15}$ Florin (Kap. 89), $\frac{9}{10}$ Florin (Kap. 90). Die ersten beiden Preise ergeben — mit 1 Florin = 8 Silberhyperpyra — $\frac{131}{160}$ Florin bzw. $\frac{7}{8}$ Florin.

4 Ellen (1 κάνα) Tuch (τζόχα) kosten 4 Florin oder — mit 1 Florin = 8 Silberhyperpyra — 32 Silberhyperpyra (Kap. 86, 87), 12 Silberhyperpyra (Kap. 88).

4 Ellen (1 κάνα) feines Webzeug oder Tuch (βηλάριν oder τζόχα) kosten 32 Silberhyperpyra (Kap. 91).

4 Ellen (1 κάνα) feines Webzeug (βηλάριν) kosten $35\frac{61}{66}$ Silberhyperpyra (Kap. 91), 32 Silberhyperpyra (Kap. 92).

1 Exagion Perlen (μαργαριτάριν) kostet 7 Silberhyperpyra (Kap. 107); daraus ergibt sich — mit 1 Florin = 8 Silberhyperpyra — ein Pfundpreis von 63 Florin.

1 Pfund Perlen kostet 100 Florin (Kap. 108), 437 Silberhyperpyra 11 Kukkia $3\frac{207}{463}$ Turnesia (Kap. 109); letzteres sind — mit der Relation 1 Florin = 7 Silberhyperpyra in diesem Kapitel — $62\frac{8318}{16205}$ Florin.

1 Unze fein verarbeitetes Silber (ἀσήμιν καματεμένον) kostet 6 Silberhyperpyra (Kap. 88).

70 Schüler zahlen zusammen eine Schulmiete (νοίκιν) von 19 Silberhyperpyra (Kap. 62).

2 Zinsen

8 Silberhyperpyra Kapital, 7 Silberhyperpyra Jahreszins:
87,5 % Zinsen (Kap. 93) *

12 Silberhyperpyra Kapital, 6 Silberhyperpyra Jahreszins:
50 % Zinsen (Kap. 93) *

100 Florin Kapital, 20 Florin Jahreszins:
20 % Zinsen (Kap. 95)

100 Florin Kapital, 15 Florin Jahreszins:
15 % Zinsen (Kap. 95, 98–100)

100 Florin Kapital, 16 Florin Jahreszins:
16 % Zinsen (Kap. 95)

100 Florin Kapital, $13\frac{1}{3}$ Florin Jahreszins:
$13\frac{1}{3}$ % Zinsen (Kap. 96 — Schreiber rechnet falsch)

1 Florin (= 8 Silberhyperpyra) Kapital, 2 Kukkia Monatszins:
15 % Zinsen (Kap. 97)

3 Gewinne und Verluste aus Handelsgeschäften

Aus 15 Silberhyperpyra werden 8 Silberhyperpyra:
$46\frac{2}{3}$ % Verlust (Kap. 94)

3 Kapitalanleger haben zusammen 114 Silberhyperpyra und gewinnen 886 Silberhyperpyra dazu:
$777\frac{11}{57}$ % Gewinn (Kap. 104) *

4 Gesellschafter legen 1100 Silberhyperpyra zusammen und gewinnen 1000 Silberhyperpyra dazu:
$90\frac{10}{11}$ % Gewinn (Kap. 104) *

6 Gesellschafter treiben Handel mit einer Schiffsladung im Wert von 24 Kuk-

kia (!). Der Gesamterlös – oder der Reingewinn – beträgt 17125 Silberhyperpyra (!):
$1426\,983\frac{1}{3}$ % Gewinn bzw. $1427\,083\frac{1}{3}$ % Gewinn (Kap. 105) **

3 Gesellschafter legen Geld an, die jeweiligen Anlagezeiten sind verschieden. Der Gesamterlös beträgt 1000 Silberhyperpyra:
$1228\frac{196}{293}$ % Gewinn (Kap. 106 – Schreiber rechnet falsch) *

4 Gesellschafter legen Geld an, die jeweiligen Anlagezeiten sind verschieden. Der Gesamterlös beträgt 2000 Silberhyperpyra:
$719\frac{2113}{6673}$ % Gewinn (Kap. 106 – Schreiber rechnet falsch) *

4. Leistungen

Leistungen von Wanderern:

täglich $\frac{1}{4}$ Meile vorwärts, $\frac{1}{5}$ Meile rückwärts (Kap. 70) *
täglich $\frac{1}{3}$ Meile vorwärts, $\frac{1}{4}$ Meile rückwärts (Kap. 70) *
pro Tag in 10 Stunden 20 Meilen: 2 Meilen pro Stunde (Kap. 65)
pro Tag in 8 Stunden 24 Meilen: 3 Meilen pro Stunde (Kap. 66)
pro Tag in 8 Stunden 40 Meilen: 5 Meilen pro Stunde (Kap. 65)
pro Tag in 11 Stunden 44 Meilen: 4 Meilen pro Stunde (Kap. 66)

Leistungen von Schiffen:

Es treten Geschwindigkeiten auf von
2 Meilen pro Stunde (Kap. 67),
4 Meilen pro Stunde (Kap. 67),
5 Meilen pro Stunde (Kap. 68, 69),
6 Meilen pro Stunde (Kap. 68),
7 Meilen pro Stunde (Kap. 69).

LITERATUR

Abraham bar Ḥiyya (Savasorda)
siehe Curtze 1902

Abraham ben Ezra
siehe Silberberg 1895

Allard, André: Les procédés de multiplication des nombres entiers dans le calcul indien à Byzance. In: Bulletin de l'Institut Historique Belge de Rome, Fasc. XLIII (1973), S. 111–143

Allard, André: Le premier traité byzantin de calcul indien. In: Revue d'histoire des textes 7 (1977), S. 57–107

Allard, André: Le petit traité d'Isaac Argyre sur la racine carrée. In: Centaurus 22 (1978), S. 1–43

Allard, André: Maxime Planude – Le grand calcul selon les Indiens. Travaux de la Faculté de Philosophie et Lettres de l'Université Catholique de Louvain – XXVII, Centre d'Histoire des Sciences et des Techniques, Sources et Travaux – 1. Louvain-la-Neuve 1981

Allard, André: Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī: Le Calcul Indien (Algorismus). Histoires des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XIIe siècle. Paris / Namur 1992

Anonimo Maestro Lombardo
siehe Rivolo

Apian, Peter: Eyn Newe vnnd wolgegründte vnderweysung aller Kauffmanß Rechnung ... Ingolstadt 1527 (Erstauflage). Nachdruck Buxheim/Eichstätt 1995

Archimedes
siehe Czwalina 1963

Argyros
siehe Allard 1978

Arrighi, Gino (Ed.): Paolo dell' Abbaco, Trattato d' aritmetica. Secondo la lezione del Cod. Magliabechiano XI, 86 della Bibl. Naz. di Firenze. (Testimonianze di storia della scienza 2). Pisa 1964

Arrighi, Gino (Ed.): Piero della Francesca, Trattato d' abaco. Dal Cod. Ashburnhamiano 280 (359–391) della Bibl. Med. Laur. di Firenze. (Testimonianze di storia della scienza 6). Pisa 1970

Badoer, Giacomo
siehe Dorini/Bertelè 1956

Das Bamberger Rechenbuch von 1483 (Verfasser: Ulrich Wagner). Ed. Eberhard Schröder. Berlin 1988

Barlaam, Bernardo
siehe Chamber 1600

Bendall, Simon / Donald, Peter J.: The later Palaeologian Coinage 1282–1453. Bristol 1979

Bertelè, Tommaso: Moneta Veneziana e moneta Bizantina. Atti del I. Convegno internazionale di storia della civiltà Veneziana (Venedig 1968). Florenz 1973, S. 1–146

Bertelè, Tommaso: Numismatique Byzantine. Wetteren 1978

Boncompagni, Baldassare (Ed.): Scritti di Leonardo Pisano, Band 1. Rom 1857: enthält Il liber abbaci (1202), 2. Aufl. 1228

Cantor, Moritz: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band II (2. Auflage). Leipzig 1900

Carelos, Pantelis: Mathematik in Byzanz und Barlaam von Seminara. In: Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät 18 (1997) 3, S. 41–48

Chalku, Maria D.: Το μαθηματικό περιεχόμενο του Codex Vindobonensis Phil. Graecus 65 (ΦΦ. 11–126). Βυζαντινά Κείμενα καί Μελέται 41, Thessaloniki 2006

Chalku, Maria D.: The Mathematical Encyclopaedia of the 15th century. In: Review of the National (Serbian) Center for Digitization, Pub. Faculty of Mathematics, Belgrade, Vol. 12 (2008), p. 119–130

Chalku, Maria D.: Arithmetical operations, fractions, progressions, linear equations, and roots of real numbers, according to the codex Vindobonensis phil. Gr. 65 of the 15 century. In: Review of the National (Serbian) Center for Digitization, Pub. Faculty of Mathematics, Belgrade, Vol. 14 (2009), p. 67–77

Chamber, John (Ed.): Barlaam, Logistica. Paris 1600

Chuquet, Nicolas
siehe Marre 1880

Codex Laurentianus Ashburnhamiani
siehe Allard 1973

Codex Parisinus suppl. gr. 387
siehe Vogel 1968

Codex Parisinus suppl. gr. 652
siehe Allard 1981

Codex Vindobonensis phil. gr. 65
siehe Heiberg 1899; Hunger/Vogel 1963; Deschauer 1990, 2004, 2005, 2008, 2011; Chalku 2006, 2008, 2009

Curtze, Maximilian (Ed.): Der Liber Embadorum des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli. In: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 12 (1902), S. 1–183

Czwalina, Arthur (Übers.): Archimedes Werke. Darmstadt 1963

Demetrakos, Demetrios B.: Μέγα λεξικὸν τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης. Athen 1933–1950

Deschauer, Stefan: "Lern̄ wol mit vleiß daß eyn mol eyn / Szo wirt dir alle Rechnung gemeyn" – Ein Beitrag zur Geschichte des Kopfrechnens. In: Mathematische Semesterberichte XXXVII (1990), Heft 1, S. 1–39

Deschauer, Stefan (Ed.): Das 2. Rechenbuch von Adam Ries. Nachdruck der Erstausgabe Erfurt 1522 mit einer Kurzbiographie, bibliographischen Angaben und einer Übersicht über die Fachsprache. Algorismus (Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, hrsg. v. Menso Folkerts) Heft 5. München 1991

Deschauer, Stefan: Zahlsysteme, -zeichen. III: Byzantinischer Bereich. In: Lexikon des Mittelalters, Band 8. München 1998, S. 462 f.

Deschauer, Stefan: Zahlensysteme bis zum Mittelalter. In: Summa Summarum ... das macht nach Adam Ries (hrsg. im Auftrag der Stadtverwaltung Erfurt v. M. Weidauer und H. Eidam). Erfurt 2002, S. 54–61

Deschauer, Stefan: Mathematik vor der Zeitenwende – einige Glanzlichter in einer byzantinischen Handschrift von 1436. In: Mathematik im Fluss der Zeit – Tagung zur Geschichte der Mathematik in Attendorn / Neu-Listernohl (28.5. bis 1.6.2003). Algorismus (Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, hrsg. v. Menso Folkerts) Heft 44. Augsburg 2004, S. 57–70 ebenfalls erschienen in: European mathematics in the last centuries. Stefan Banach International Mathematical Center / Institute of Mathematics Wrocław University, ed. W. Więsław. Wrocław 2005, S. 7–18

Deschauer, Stefan: Further impressive problems from the Byzantine manuscript of 1436. In: European mathematics in the last centuries. Stefan Banach International Mathematical Center / Institute of Mathematics Wrocław University, ed. W. Więsław. Wrocław 2005, S. 19–36

Deschauer, Stefan: Anspruchsvolle mathematische Probleme in einem byzantinischen Manuskript von 1436. In: Der Mathematikunterricht (MU) 54/3 (2008), S. 4–18

Deschauer, Stefan: Die Rigischen Rechenbücher. Spiegel einer lokalen mathematischen Tradition im Ostseeraum. Algorismus (Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, hrsg. v. Menso Folkerts) Heft 73. Augsburg 2010

Deschauer, Stefan: About Numismatics and some problems of Algebra from a Byzantine Manuscript of 1436 (Cod. Vind. phil. gr. 65). In: Revue Numismatique. Paris 2011, S. 185–200

Deschauer, Stefan: Das macht nach Adam Riese. Die praktische Rechenkunst des berühmten Rechenmeisters Adam Ries. Köln 2012

Dorini, Umberto / Bertelē, Tommaso (Ed.): Il libro dei conti di Giacomo Badoer (Constantinopoli 1436–1440). Il nuovo Ramusio 3. Rom 1956

Du Cange, Charles du Fresne: Glossarium ad scriptores mediae et infimae Graecitatis, Bände I/II. Nachdruck Graz 1958

Elia Misrachi
siehe Wertheim 1896

Euklid
siehe Thaer

Folkerts, Menso: Zur Frühgeschichte der magischen Quadrate in Westeuropa. Veröffentlichungen des Forschungsinstituts des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik. Reihe A, Nr. 235, S. 313–338. München 1981

Folkerts, Menso: Eine neue Handschrift der Arithmetik von al-Ḫwārizmī. In: Cosmographica et Geographia (Festschrift für Heribert M. Nobis zum 70. Geburtstag, 1. Halbband, hrsg. v. Bernhard Fritscher und Gerhard Brey) Algorismus Heft 13. Institut für Geschichte der Naturwissenschaften. München 1994, S. 181–193

Folkerts, Menso: Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Ḫwārizmī – Edition, Übersetzung und Kommentar (unter Mitarbeit von Paul Kunitzsch). Abhandlungen N. F., Heft 113 der philos.-hist. Kl. der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. München 1997

Friedlein, Gottfried (Ed.): Die Geometrie des Pediasimus. Programm Gymnasium Ansbach 1866

Gardthausen, Victor: Griechische Paläographie. 2. Band, 2. Aufl. Leipzig 1913

Gavin, Jérôme / Schärlig, Alain: La fausse position ou comment on a posé le faux pour connaître le vrai, des Pharaons aux temps modernes. Lausanne 2012

Gehrl, Georg: Ein Nützlich und Kunstlich Rechenbuch auff der Federn. Prag 1577

Georgios Pachymeres
siehe Tannery 1940

Gerhardt, Carl Immanuel: Das Rechenbuch des Maximus Planudes. Halle/S. 1865

Gericke, Helmuth: Mathematik in Antike und Orient. Berlin/Heidelberg 1984

Gericke, Helmuth: Mathematik im Abendland. Von den römischen Feldmessern bis zu Descartes. Berlin/Heidelberg 1990

Grierson, Philip: Münzen des Mittelalters. München 1976

Grierson, Philip: Byzantine Coins. London 1982

Heiberg, Johan Ludvig: Byzantinische Analekten. In: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 9 (1899), S. 161–174

Hendy, Michael F.: Studies in the Byzantine monetary economy, c. 300–1450. Cambridge 1985

Hoche, Richard: Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis arithmeticae libri II ... Leipzig 1866

Hochheim, Adolf (Übers.): "Genügendes über Arithmetik" des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhī. Band 1–3. Halle 1878–1880

Hunger, Herbert: Katalog der griechischen Handschriften der Österreichischen Nationalbibliothek, Teil 1: Codices historici, Codices philosophici et philologici. Wien 1961

Hunger, Herbert / Vogel, Kurt: Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts – 100 Aufgaben aus dem Codex Vindobonensis phil. gr. 65. Österreichische Akademie der Wissenschaften, phil.-hist. Kl., Denkschriften, 78. Band, 2. Abhandlung. Wien 1963

Hunger, Herbert: Die hochsprachliche profane Literatur der Byzantiner, Band II (Handbuch der Altertumswissenschaften: Abt. 12, Byzantinisches Handbuch, Teil 5). München 1978

Hunger, Herbert: Anonyme Metaphrase zu Anna Komnene, Alexias XI-XIII. Ein Beitrag zur Erschließung der byzantinischen Umgangssprache. Wiener Byzantinistische Studien Band XV. Wien 1981

Hunger, Herbert / Ševcenko, Ihor: Des Nikephoros Blemmydes Βασιλικὸς Ἀνδρίας und dessen Metaphrase von Georgios Galesiotes und Georgios Oinaiotes. Ein weiterer Beitrag zum Verständnis der byzantinischen Schrift-Koine. Wiener Byzantinistische Studien Band XVIII. Wien 1986

al-Ḫwārizmī
siehe Vogel 1963, Allard 1992, Folkerts 1994, 1997

Isaak Argyros
siehe Allard 1978

Juschkewitsch, Adolf Pawlowitsch: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig 1964

Kahane, Henry Romanos u. Renée: Abendland und Byzanz. Literatur und Sprache. Teil B. Sprache. Westliche Einflüsse in Byzanz. In: Reallexikon Byzantinistik (hrsg. v. P. Wirth), Reihe A, Band I, Hefte 5, 6. Amsterdam 1972

al-Karaǧī
siehe Hochheim 1878–1880

al-Kaši
siehe Luckey 1951

Khazdan, Alexander P. et alii (Ed.): The Oxford Dictionary of Byzantion (3 Bände). New York/Oxford 1991

Kriaras, Emmanuel: Λεξικό τής μεσαιωνικής ἑλληνικής δημώδους γραμματείας. 1100-1669. Saloniki. Bisher 14 Bände (1968–1997)

Kriaras, Emmanuel: Kritische und sprachliche Bemerkungen zum Texte eines byzantinischen Rechenbuchs des XV. Jahrhunderts. In: Kriaras: Μεσαιωνικά Μελετήματα, Γραμματεία καί Γλώσσα Β΄. Saloniki 1988, S. 157–172

Krumbacher, Karl: Geschichte der byzantinischen Litteratur von Justinian bis zum Ende des oströmischen Reiches (527–1453). Handbuch der klassischen Altertumswissenschaften IX. 1 (2. Aufl.). München 1897

Kukules, Phaidon I.: Βυζαντινῶν βίος καὶ πολιτισμός (Bände I–VI). Athen 1948–1955

Leonardo von Pisa
siehe Boncompagni 1857

Luckey, Paul: Die Rechenkunst bei Ǧamšid b. Mas^{c}ūd al-Kāši mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens (Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes 31, 1). Wiesbaden 1951

Marre, Aristide (Ed.): Le Triparty en la science des nombres. Bulletino bibliogr. storia scienze mat. fis. 13 (1880), S. 555–659, 693–814

Maximos Planudes
siehe Gerhardt 1865, Allard 1981

Misrachi
siehe Wertheim 1896

Moschopulos, Manuel
siehe Tannery IV, 3 (1886); vgl. auch Folkerts 1981

Neophytos
siehe Tannery 1885

Nikomachos von Gerasa
siehe Hoche 1866

Ostrogorsky, Georg: Löhne und Preise in Byzanz. In: Byzantinische Zeitschrift 32 (1932), S. 293–333

Pachymeres
siehe Tannery 1940

Paduano, Guido: Tragedie e Frammenti di Sofocle, Band 1, 2. Turin 1982 (Aias in Band 1, Fragmente in Band 2)

Paolo dell' Abbaco
siehe Arrighi 1964

Papaioannu, Georgios D.: Θησαυρός λέξεων λεξικό τής Δημοτικής (2 Bände). Athen 1979

Pape, Wilhelm: Griechisch-Deutsches Wörterbuch. Nachdruck Graz 1954

Pediasimus
siehe Friedlein 1866

Piero della Francesca
siehe Arrighi 1970

Planudes
siehe Gerhardt 1865, Allard 1981

Rhabdas, Nikolaos Artabasdos
siehe Tannery IV, 4 (1886)

Ries, Adam: Rechenung nach der lenge / auff den Linihen vnd Feder. Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones / Practica genant. / Mit grüntlichem vnterricht des visierens ... Leipzig 1550

Ries
siehe auch Deschauer 1991, 2012

Rivolo, Maria Teresa (Ed.): Anonimo Maestro Lombardo: Arte giamata Aresmetica. Un' antologia dal codice N. III. 53 della Biblioteca Nazionale di Torino. Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale (ed. Laura Toti Rigatelli / Raffaella Franci) 8. Siena 1983

Rudolff, Christoff: Künstliche rechnung mit der ziffer vnnd mit den zal pfennigē sampt der Wellischen Practica ... Wien 1526

Saidan, Aḥmad Salim: The development of Hindu-Arabic arithmetic. Diss. Khartoum 1966

Saidan, Aḥmad Salim: The arithmetic of al-Uqlīdisī (Engl. Übersetzung und Anmerkungen). Dordrecht/Boston 1978

Sarton, George: Introduction to the history of science, Band III. Washington 1947/48

Savasorda (Abraham bar Ḥiyya)
siehe Curtze 1902

Schärlig, Alain: Compter avec des cailloux — Le calcul élémentaire sur l'abaque chez les anciens Grecs. Lausanne 2001

Schilbach, Erich: Byzantinische Metrologie. Handbuch der Altertumswissenschaften, Abt. 12, Teil 4. München 1970

Schilbach, Erich: Byzantinische metrologische Quellen. Βυζαντινά Κείμενα καί Μελέται 19. Thessaloniki 1982

Schreiner, Peter: Byzanz. München 1986

Schreiner, Peter: Texte zur spätbyzantinischen Finanz- und Wirtschaftsgeschichte in Handschriften der Biblioteca Vaticana. Studi e Testi 344. Vatikanstadt 1991

Silberberg, Moritz (Ed.): Sefer ha-mispar. Das Buch der Zahl. Ein hebräisch-arithmetisches Werk des R. Abraham ibn Ezra ... Frankfurt a. M. 1895

Sophocles, Evangelinus Apostolides: Greek Lexicon of the Roman and Byzantine Periods. New York o. J. (1887)

Sophokles
siehe Paduano 1982

Stephanus, Henricus (Stephan, Heinrich): Thesaurus Graecae linguae. Nachdruck Graz 1954

Stevin, Simon: De Thiende. Leiden 1585
ins Dt. übers. u. erl. v. H. Gericke u. K. Vogel. Frankfurt a. M. 1965

Stifel, Michael: Rechenbuch von der Welschen und deutschen Practick ... Nürnberg 1546

Stuloff, Nikolai: Mathematik in Byzanz. In: Algorismus (Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften Heft 1, hrsg. v. Menso Folkerts). München 1988, S. 39–62

Suter, Heinrich: Die Abhandlung Quosṭā ben Lūquās und zwei andere anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern und mit der angenommenen Zahl. Bibl. math. (3) 9 (1908/09), S. 111–122

Tannery, Paul: Le scholie du moine Néophytos sur les chiffres hindous. Mémoires scientifiques Band IV, 2 (1885), S. 20–26. Ed. Johan Ludvig Heiberg, Hieronymus Georg Zeuthen. Toulouse/Paris 1912–1950

Tannery, Paul: Le traité de Manuel Moschopoulos sur les carrés magiques. Mémoires scientifiques Band IV, 3 (1886), S. 27–60. Ed. Johan Ludvig Heiberg, Hieronymus Georg Zeuthen. Toulouse/Paris 1912–1950

Tannery, Paul: Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas. Mémoires scientifiques Band IV, 4 (1886), S. 61–198. Ed. Johan Ludvig Heiberg, Hieronymus Georg Zeuthen. Toulouse/Paris 1912–1950

Tannery, Paul (Ed.): Quadrivium de Georges Pachymère (bearb. v. Etienne Stéphanou). Studi e Testi 94. Vatikanstadt 1940

Thaer, Clemens (Ed.): Euklid. Die Elemente. Bücher I–XIII. Reprint (2. Auflage). Thun/Frankfurt a. M. 1996

Trapp, Erich: Lexikon zur byzantinischen Gräzität, besonders des 9.–12. Jahrhunderts (10 Bände). Wien 1994–2011

Treutlein, Peter: Das Rechnen im 16. Jahrhundert. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 1 (1877), S. 1–198

Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Erster Band: Rechnen. Berlin/Leipzig 1930^{3}

Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementarmathematik, Band I: Arithmetik und Algebra (neu bearbeitet v. Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke). 4. Aufl. Berlin/New York 1980

Unger, Friedrich: Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung. Vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. Leipzig 1888

al-Uqlīdisī
siehe Saidan 1966, 1978

Vogel, Kurt: Beiträge zur griechischen Logistik. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München, Math.-naturwiss. Abt., Jahrgang 1936, S. 357–472

Vogel, Kurt (Hrsg.): Das älteste deutsche gedruckte Rechenbuch Bamberg 1482. Gymnasium und Wissenschaft (Sonderdruck). Festschrift des Maximiliansgymnasiums in München. München o. J. (1949/50)

Vogel, Kurt (Hrsg.): Die Practica des Algorismus Ratisbonensis. Schriftenreihe zur bayerischen Landesgeschichte, Band 50. München 1954

Vogel, Kurt: Buchstabenrechnung und indische Ziffern in Byzanz. In: Akten des 11. Internationalen Byzantinistenkongresses 1958. München 1960, S. 660–664

Vogel, Kurt: Der Anteil von Byzanz an Erhaltung und Weiterbildung der griechischen Mathematik. In: Miscellanea Mediaevalia 1 (Berlin 1962), S. 112–128

Vogel, Kurt (Ed.): Mohammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus. Nach der einzigen (lateinischen) Handschrift in Faksimile mit Transkription und Kommentar. Aalen 1963

Vogel, Kurt: Ein byzantinisches Rechenbuch des frühen 14. Jahrhunderts. Wiener Byzantinistische Studien, Band VI. Wien 1968

Vogel, Kurt: Byzanz, ein Mittler – auch in der Mathematik – zwischen Ost und West. In: Beiträge zur Geschichte der Arithmetik von Kurt Vogel (hrsg. v. Forschungsinstitut des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik). München 1978, S. 35–53

Vogel, Kurt: Überholte arithmetische kaufmännische Praktiken aus dem Mittelalter. In: Beiträge zur Geschichte der Arithmetik von Kurt Vogel (hrsg. v. Forschungsinstitut des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik). München 1978, S. 67–82

Wertheim, Gustav: Die Arithmetik des Elia Misrachi. 2. Aufl. Braunschweig 1896

Whitting, Philip David: Byzantine Coins. Fribourg 1973

Widmann, Johannes: Behēde vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft. Leipzig 1489.

STEFAN DESCHAUER

wurde 1951 in Korbach (Hessen) geboren, besuchte das altsprachliche Gymnasium in Fulda und absolvierte ein Lehramtsstudium in den Fächern Mathematik und kath. Theologie in Marburg. Nach der Promotion in Ulm (Dr. rer. nat.) legte er die Zweite Staatsprüfung in Koblenz ab und war dort mehrere Jahre im Schuldienst tätig. Von 1982 bis 1994 war er Dozent für Didaktik der Mathematik an der Kath. Univ. Eichstätt und hatte zeitweise eine Vertretungsprofessur in Erlangen inne. Seit 1994 ist er Professor für Didaktik der Mathematik an der TU Dresden.

Der anonyme Cod. Vind. phil. gr. 65 gehört zu den zahlreichen griechischen Manuskripten, die Mitte des 16. Jahrhunderts vom habsburgischen Gesandten Augerius von Busbeck in Konstantinopel erworben wurden. Seither wird der Kodex in der Wiener Hofbibliothek (heute Österreichische Nationalbibliothek) aufbewahrt. Obwohl es sich um eine der wichtigsten spätbyzantinischen mathematischen Handschriften handelt, wurden erst 1899 die ersten beiden Kapitel von J. L. Heiberg transkribiert. Im Jahre 1963 erfolgte durch H. Hunger und K. Vogel eine fachkundige Edition der sogenannten Aufgabensammlung, eines kleineren Teils der Handschrift. Für den größeren Teil, der von einem anderen Schreiber im Jahr 1436 verfasst wurde und Arithmetik, Algebra und Geometrie enthält, steht eine verlässliche Edition bisher aus.

Der Autor legt hiermit für den umfangreichen arithmetischen Text – vom Schreiber als „erstes Buch" bezeichnet – eine Edition vor, die eine vollständige Wiedergabe der zahlreichen Diagramme, philologische Analysen und Register, eine sinnvoll ausgewählte Teilübersetzung und einen ausführlichen mathematischen und mathematikhistorischen Kommentar enthält, der auch für Leser ohne einschlägiges Studium verständlich sein sollte.

Als Vorlage des Manuskripts dürfte ein nicht mehr bekannter *trattato d'abbaco* gedient haben, da die italienischen Einflüsse dominieren. Zur Einführung des dezimalen Positionssystems dienen allerdings die griechischen Buchstabenziffern unter Zusatz eines Sonderzeichens (Ч) für die Null. Darüber hinaus sind hier erstmals in Europa Dezimalbrüche und Dezimalbruchrechnen nachweisbar, eine Errungenschaft aus dem islamischen Bereich.

ISBN 978-3-7001-7533-9